CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

ESCUELA NACIONAL de ESTUDIOS SUPERIORES UNIDAD MORELIA

Una introducción a la Geometría Euclidiana del plano

Salvador García Ferreira

Edición digital

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS SUPERIORES, CAMPUS MORELIA
CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

UNA INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA EUCLIDIANA DEL PLANO

Salvador García Ferreira

UNA INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA EUCLIDIANA DEL PLANO
SALVADOR GARCÍA FERREIRA

fue publicado por la Escuela Nacional de Estudios Superiores, Unidad Morelia.

La edición electrónica de un ejemplar (24.2 Mb) fue preparada por el Área Editorial de la ENES, Unidad Morelia.

Coordinación editorial:	Cecilia López Ridaura, Jorge Andrés Trinidad González, Itzel Álvarez García y Raúl Casamadrid.
Formación facsimilar:	Carlos Villaseñor Zamorano.
Diseño de portada:	Coppelia Cerda.

Primera edición electrónica en formato PDF: 19 de octubre de 2018.

Escuela Nacional de Estudios Superiores Unidad Morelia
Centro de Ciencias Matemáticas
Antigua Carretera a Pátzcuaro 8701, Col. Ex Hacienda de San José de la Huerta,
C. P. 58190, Morelia, Michoacán.

ISBN: 978-607-30-1013-9.

Hecho en México

La presente publicación contó con dictámenes de expertos externos
de acuerdo con las normas editoriales de la ENES Morelia, UNAM.

Esta edición fue realizada gracias al apoyo del programa
UNAM-DGAPA-PAPIME PE112116

A mis hijos ***Andani*** e ***Itzel***

a mi esposa ***Martha***

a la memoria de mi madre

Prólogo

La geometría es una de las ramas de las matemáticas que más se ha distinguido por la claridad de sus enunciados y la sencillez de sus métodos. Es por ello que la geometría ofrece al alumno una visualización clara del método científico, a diferencia de otras ramas de las matemáticas. Una de las tareas fundamentales de la geometría euclidiana, a nivel básico, es la de enseñar al alumno a razonar de manera lógica; es decir, enseña al alumno a demostrar sus afirmaciones partiendo de conceptos no definidos y de un conjunto de enunciados ya establecidos con anterioridad (algunos de los cuales se aceptan sin prueba alguna). La geometría, por su sencillez y belleza, hace menos arduo el proceso de aprendizaje de los razonamientos inductivo y deductivo. Desde los tiempos de Euclides, los resultados geométricos se obtenían mediante un proceso lógico (demostración), partiendo de enunciados (axiomas) que se denominan evidentes y que no requerían de demostración alguna. En este libro, el lector encontrará tanto una exposición rigurosa del pensamiento lógico, como resultados y ejemplos donde se puede omitir el rigor y usar solamente la intuición.

En el tratado de *Los Elementos* escrito por Euclides alrededor del año 300 a. C., el autor recopiló los resultados geométricos descubiertos hasta su época que consideró importantes y los ordenó dentro de un sistema axiomático, partiendo de cinco postulados cuya veracidad es evidente. Pero una persona con conocimientos modernos de lógica formal que lea *Los Elementos* se dará cuenta de que no es clara la intención deductiva de Euclides (el artículo [a147] ofrece una buena discusión en este sentido); como ejemplo de esto se puede mencionar que la construcción que yace en la primera proposición de su tratado no se puede justificar usando los cinco postulados que propuso como axiomas. Esto quizá se debió a que en su época aún no se formalizaba profundamente el método axiomático. La axiomatización de la geometría culminó con la obra de D. Hilbert titulada *Grundlagen der Geometrie* publicada en 1899.

Existe una gran cantidad de libros de texto de geometría escritos en varios idiomas y en distintas épocas. Pero en castellano, los libros que se han escrito o traducido son muy pocos. En mi opinión, ninguno de los libros que se usan en los cursos de geometría contiene resultados recientes y demostraciones modernas de algunos de los teoremas clásicos. Tampoco ninguno de los libros contiene una información completa acerca de los temas tradicionales. Hay que ser conscientes de que es imposible ser exhaustivo en geometría ya que hay una cantidad enorme de resultados acumulados durante más de 2000 años, y diariamente se descubren otros tantos más. Se podrían escribir más de cien volúmenes y aun así no cubrir todos los resultados geométricos existentes.

El proyecto de este libro empezó como un mero pasatiempo, pues en mis ratos libres me dedico a leer artículos de geometría y a resolver problemas de revistas periódicas o libros de texto del área. Al final de cierto tiempo me di cuenta de que tenía un montón de hojas escritas y material impreso, y fue esto lo que me hizo pensar que sería bueno dar a conocer todo lo que tenía entre manos. Estoy realmente convencido de que con el contenido del libro el lector desbordará su imaginación y ampliará sus conocimientos formativos. Considero que un buen libro de geometría es aquel que puede motivar al alumno a descubrir resultados por sí mismo y llenarlo de muchas ideas. Con este libro se pretende dar gusto a mucha gente a quien atrae la geometría; en particular, aquellos a quienes les agrada el formalismo, y también aquellos que disfrutan los retos de resolver problemas no triviales. Espero que el contenido axiomático de este libro ayude al lector no experto en matemáticas a darse una idea del método axiomático. Una de las metas principales en este libro es dar a conocer todos los axiomas fundamentales de la planimetría (geometría del plano); cabe mencionar que en muchos libros de geometría no se contempla la mayoría de dichos axiomas o solo se mencionan de manera implícita. Mediante estos axiomas daremos un desarrollo lógico a los teoremas fundamentales de la planimetría.

Ciertamente, el material que contiene esta obra es muy extenso y es imposible de impartir en un curso, pero el profesor conocedor del tema sabrá elegir el material que crea conveniente, según su gusto, para un buen curso sin la necesidad de consultar otra fuente. Con el símbolo ♣, marcaremos el fin de una prueba. Algunas referencias se han marcado explícitamente debido a su importancia dentro del contexto, y al final se enlistan todas aquellas que se consultaron de alguna forma.

Deseo manifestar mi agradecimiento a mi esposa Martha, por soportar mi estrés, y a los alumnos Jesús Astorga Moreno, Karla Sofía Zavala Álvarez y César Alfonso Díaz Mijangos por revisar las primeras versiones de este libro.

Salvador García Ferreira
Centro de Ciencias de Matemáticas
UNAM, campus Morelia, 2016

Índice

CAPÍTULO 1

RECTAS, SEMIRRECTAS Y SEGMENTOS

De manera general, un sistema axiomático consiste en un conjunto no vacío de términos (que pueden quedar indefinidos), leyes de lógica y una lista de enunciados llamados axiomas (los cuales se admiten como verdaderos) que establecen las primeras propiedades y relaciones de los términos. Un teorema dentro de un sistema axiomático es un enunciado que se obtiene mediante un procedimiento lógico de otros enunciados previamente establecidos y de los axiomas. La aceptación de elementos no indefinidos está basada en el hecho de que en un discurso lógico no todos los términos en cuestión se definen formalmente, pues de lo contrario uno podría caer en un círculo vicioso sin fin. Por ejemplo, en la geometría euclidiana los términos esenciales de su discurso lógico no se definen sino que se entiende su significado de manera intuitiva.

Los principales términos del sistema axiomático de la geometría euclidiana del plano son los siguientes:

Punto.
Recta (línea recta).
Plano.

El plano será nuestro universo de discurso. Nuestro plano consiste de un conjunto de puntos, y las rectas son ciertos subconjuntos del mismo. Se entiende que todos los puntos y rectas estarán contenidos en un mismo plano. Las propiedades y las relaciones entre los puntos y las rectas del plano quedarán establecidas por los axiomas y los teoremas que se enuncien a lo largo de los tres primeros capítulos del libro. Los axiomas de la geometría euclidiana del plano se clasifican en los siguientes grupos:

1. **Axiomas de incidencia.**
2. **Axiomas de orden.**
3. **Axiomas de congruencia**
4. **Axiomas de continuidad.**
5. **Axioma de paralelismo.**

Los cuatro primeros grupos de axiomas se presentarán en el primer capítulo. Los axiomas referentes a la congruencia de triángulos y el Axioma de las Rectas Paralelas se enunciarán en el tercer capítulo.

1.1. Axiomas de incidencia

La relación de incidencia vincula los puntos y las rectas del plano entre sí mediante los términos *un punto pertenece a una recta* y *una recta contiene a un punto*, o dicho de otro modo *una recta pasa por un punto*. Nuestra primera lista de axiomas establece formalmente las condiciones que deben satisfacer la relación de incidencia:

Axiomas de incidencia:

$\mathbf{I_0}$: Existe al menos una recta.

$\mathbf{I_1}$: Dados cualesquiera dos puntos distintos, existe una y solo una recta que los contiene.

$\mathbf{I_2}$: Cada recta es un conjunto de puntos que contiene al menos dos puntos diferentes.

$\mathbf{I_3}$: Existe al menos un punto fuera de cualquier recta dada.

En otras palabras, el Axioma I_1 quiere decir que por dos puntos arbitrarios del plano pasa una y solo una recta. En la práctica, nos basamos en el Axioma I_1 para trazar un segmento de recta que pase por dos puntos marcados. Efectivamente, algunas veces trazamos un segmento deseado colocando una regla sobre dos puntos marcados. Los axiomas $\mathbf{I_0}$ e $\mathbf{I_3}$ nos aseguran que en el plano hay al menos una recta y un punto fuera de ella. Así que el plano no consiste solamente de una recta y sus puntos. El Axioma I_2 nos garantiza que cada recta tiene al menos dos puntos.

Convenimos en que los puntos del plano serán denotados por las letras mayúsculas A, B, C, E, F,..., P, Q, R, S, T, X, Y y Z, y las rectas por las letras minúsculas m, n y l. En algunas excepciones se usarán dichas letras con subíndices, y en otras se agregará el símbolo " ' " al final de la letra. Observemos que toda recta queda bien determinada en la notación al nombrar solo dos de sus puntos. Por ejemplo, si P y Q son dos puntos del plano, entonces a la recta que pasa por ellos, la cual existe y es única por el Axioma I_1**,** será denotada por $\overleftrightarrow{PQ}$. Cabe mencionar que una recta puede tener muchas notaciones. Por ejemplo, si P, Q, R, S, y T son puntos sobre una recta, entonces los símbolos $\overleftrightarrow{PQ}$, $\overleftrightarrow{QP}$, $\overleftrightarrow{RS}$, $\overleftrightarrow{ST}$, $\overleftrightarrow{PR}$ y $\overleftrightarrow{TP}$ representan a la misma recta.

Es evidente que nuestros primeros axiomas nos garantizan que existe al menos un punto en el plano. Por otra parte, la intersección entre cualesquiera dos rectas del plano queda descrita en nuestro primer teorema.

1.1.1. Teorema. Dos rectas diferentes no pueden tener más de un punto en común.

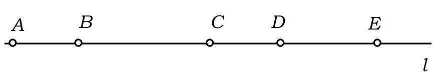
Prueba: Sean l y m dos rectas diferentes y supongamos que hay un punto $P \in l \cap m$. Si $Q \in l \cap m$ y $P \neq Q$, entonces, por el Axioma I_1, se obtiene que $\overleftrightarrow{PQ} = l = m$, lo cual contradice nuestra hipótesis. Por consiguiente, las rectas l y m tienen a lo más un punto en común. ♣

Veamos a continuación que en el plano siempre hay una recta que no contiene a un punto dado.

1.1.2. Teorema. Dado un punto P existe una recta l tal que $P \notin l$.

Prueba: Sea P cualquier punto sobre el plano. Según el Axioma I_0, sabemos que existe una recta m. Si $P \notin m$, entonces no hay nada que probar. Supongamos pues que $P \in m$. De acuerdo con el Axioma I_3, podemos encontrar un punto $A \notin m$ y, por el Axioma I_2, encontramos un punto $B \in m - \{P\}$. Sea l la recta determinada por los puntos A y B, la cual existe por el Axioma I_1. Si $P \in l$, por el Teorema 1.1.1, tendríamos la igualdad $m = l$ ya que P y $B \in m \cap l$, pero esto sería una contradicción. Por lo tanto, $P \notin l$. ♣

1.1.3. Definición. Si tres o más puntos están sobre una misma recta, entonces decimos que dichos puntos son *colineales*. A un conjunto de puntos colineales se le llama *hilera de puntos*.



hilera de puntos
Figura 1.1

Es falso que el plano consista solamente de puntos colineales como lo testifica el siguiente teorema.

1.1.4. Teorema. Existen al menos tres puntos no colineales.

Prueba: De acuerdo con los Axiomas I_0 e I_2, existe una recta *l* y sobre ella dos puntos diferentes *P* y *Q*. El Axioma I_3 nos garantiza la existencia de un punto $R \notin l$. Por otra parte, sabemos que los puntos *P* y *Q* determinan de manera única a la recta *l*. Por ello, los puntos *P*, *Q* y *R* no pueden ser colineales, de otra forma tendríamos que $R \in \overleftrightarrow{PQ} = l$. ♣

En el plano podemos encontrar al menos tres rectas distintas.

1.1.5. Corolario. Existen al menos tres rectas diferentes entre sí.

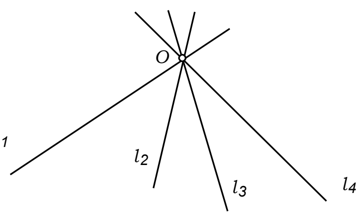
Prueba: Del Teorema 1.1.4 podemos encontrar tres puntos no colineales que denotaremos por *P*, *Q* y *R*. Según el Axioma I_1, existen tres rectas *l*, *m* y *n* que contienen a *P* y *Q*, a *P* y *R*, y a *Q* y *R*, respectivamente. De nuestra suposición, hallamos que $R \notin l$, $Q \notin m$ y $P \notin n$. Por ello, las rectas *l*, *m* y *n* no pueden ser iguales. ♣

El siguiente teorema nos dice cuántas rectas al menos pueden pasar por un punto dado.

1.1.6. Teorema. Por un punto dado pasan al menos dos rectas diferentes.

Prueba. Fijemos un punto *P*. De acuerdo con el Teorema 1.1.2, podemos encontrar una recta *l* que no contenga al punto *P*. En vista del Axioma I_2, es posible tomar dos puntos distintos *A* y *B* sobre *l*. Entonces, el Axioma I_1 nos asegura la existencia de dos rectas *m* y *n* que contienen a *P* y *A*, y a *P* y *B*, respectivamente. Si $m = n$, tendríamos que *P*, *A* y $B \in m$ y, por el Axioma I_1, hallaríamos que $\overleftrightarrow{PA} = m = l$, lo cual sería contrario a nuestra hipótesis $P \notin l$. Por lo tanto, $m \neq n$ y $P \in m \cap n$. ♣

1.1.7. Definición. Si tres o más rectas tienen un punto en común se dice que son *concurrentes*. A un conjunto de rectas concurrentes se le llama *haz de rectas,* y a su punto común se le conoce como *punto de concurrencia*.



haz de rectas con punto de concurrencia *O*

Figura 1.2

La existencia de un haz de rectas se establecerá posteriormente (1.2.10), pues se requieren más axiomas.

El siguiente teorema nos asegura que el plano no consiste de un solo haz de rectas:

1.1.8. Teorema. No todas las rectas pasan por un mismo punto.

Prueba: Supongamos que todas las rectas pasan por un mismo punto denotado por *P*. Según el Teorema 1.1.6, existen por lo menos dos rectas distintas *l* y *m*. Según lo acordado, estas rectas deben pasar por el punto *P*. Por el Axioma I_2, podemos encontrar dos puntos $R \in l - \{P\}$ y $S \in m - \{P\}$. De nuestra suposición sabemos que $P \in \overleftrightarrow{RS}$. Entonces, con base en el Axioma I_1, obtenemos que $\overleftrightarrow{RS} = \overleftrightarrow{PR} = l = \overleftrightarrow{PS} = m$, lo cual es una contradicción, puesto que $l \neq m$. Por consiguiente, $P \notin \overleftrightarrow{RS}$. ♣

La prueba del siguiente resultado se deja al lector.

1.1.9. Teorema. Existen al menos tres rectas que no son concurrentes.

El *principio de dualidad* nos dice que si un cierto enunciado geométrico habla sobre puntos y rectas, entonces su enunciado dual es el enunciado que se obtiene al intercambiar entre sí las palabras *punto* y *recta*, las palabras *colineal* y *concurrente*, y las palabras *se cortan en* y *están sobre* en el enunciado original.

Por ejemplo, el dual del Axioma I_3 es el Teorema 1.1.2. La noción de dualidad se ilustra también con las definiciones duales de *hilera de puntos* y *haz de rectas*. La dualización de enunciados geométricos es una de las técnicas más importantes en la resolución de problemas en la Geometría Euclidiana. Algunos enunciados geométricos duales se pueden demostrar más fácilmente que sus enunciados originales.

A un conjunto de puntos y a una familia de subconjuntos del mismo que cumplan con todos los axiomas de incidencia, se le denomina *plano de incidencia*. El libro de B. Castrucci [l-87] presenta una magnífica descripción de todos los diferentes planos geométricos.

1.2. Axiomas de Orden

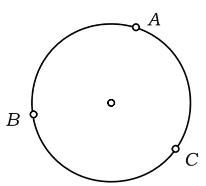
El segundo grupo de axiomas básicos se refiere a la relación de *orden* entre los puntos de una recta. En otras palabras, los axiomas de orden nos aseguran que sobre una recta fija podemos decir que uno de sus puntos precede a otro de la misma. Los términos *precede* y *sigue* quedan indefinidos.

Axiomas de Orden:

$\mathbf{O_1}$: Cualesquiera dos puntos distintos de una recta se pueden ordenar. Esto es, se puede tomar a uno y solo a uno de ellos como primero, y al otro como segundo, y decimos que el primero "precede" al segundo, o bien, que el segundo "sigue" después del primero.

$\mathbf{O_2}$: Si A, B y C son tres puntos sobre una recta, y si A precede a B y B precede a C, entonces A precede a C.

Es claro del primer axioma de orden que si A precede a B, entonces B no puede preceder a A. Estos dos primeros axiomas de orden describen la propiedad lineal de una recta, cosa que no es común entre todas las líneas de un plano. Por ejemplo, en la figura 1.3 tenemos que



A precede a B, B precede a A, A precede a C y C precede a A.

Figura 1.3

De estos dos primeros axiomas de orden podemos ver que sobre una recta hay solamente dos direcciones con respecto a cada uno de sus puntos (los puntos que le preceden y los que le siguen a un punto dado de la recta).

1.2.1. Definición. Sean A, B y C tres puntos sobre una recta. Decimos que *C está entre A y B*, si A precede a C y C precede a B, o bien, si B precede a C y C precede a A.

Figura 1.4

Vale la pena mencionar que cada uno de los puntos de un círculo yace entre cualesquiera dos de sus puntos (ver figura 1.3). El primer axioma de orden nos asegura que esta situación no es posible en las rectas.

1.2.2. Teorema. Dados tres puntos colineales, uno y solo uno de ellos está entre los otros dos.

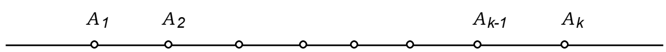
Prueba: Sean A, B y C tres puntos colineales. Por el Axioma O_1, podemos suponer, sin perder generalidad, que A precede a B. El mismo Axioma O_1 nos conduce a considerar los siguientes tres casos posibles:

Caso I. C precede a A. Por lo cual, tenemos que A está entre C y B.

Caso II. A precede a C y C precede a B. De donde se sigue que C está entre a A y B.

Caso III. A precede a C y B precede a C. Como A precede a B, hallamos que B está entre a A y C. ♣

1.2.3. Definición. Sean $A_1, \ldots\ldots, A_k$ puntos colineales, en donde $k > 2$ es un número entero. Decimos que los puntos $A_1, \ldots, A_k$ son *consecutivos* si A_i precede a A_{i+1} para toda $i < k$.



puntos consecutivos

Figura 1.5

Entenderemos que al decir consecutivos, los puntos en cuestión serán colineales. También convenimos que cuando digamos, por ejemplo, que A, B, C y D son puntos consecutivos se entenderá que A precede a B, B precede a C y C precede a D.

1.2.4. Teorema. Si A, B, C y D son cuatro puntos consecutivos, entonces:

1. B está entre A y C,
2. B está entre A y D,
3. C está entre B y D, y
4. C está entre A y D.

Prueba: Por definición de puntos consecutivos, sabemos que A precede a B, B precede a C y C precede a D. De donde hallamos que B está entre A y C, y que C está entre B y D. Del Axioma O_2 vemos que A precede a B y B precede a D, y A precede a C y C precede a D. Por consiguiente, B está entre A y D, y C está entre A y D. ♣

1.2.5. Teorema. Sean A, B, C y D cuatro puntos colineales. Si B está entre A y C, y C está entre B y D, entonces A, B, C y D son consecutivos, o bien, D, C, B y A son consecutivos.

Prueba: Primero supongamos que A precede a B. De la hipótesis observamos que B tiene que preceder a C y que C tiene que preceder a D. Lo cual significa que los puntos A, B, C y D son consecutivos. Supongamos ahora que B precede a A. Entonces, C precede a B y por lo cual, D precede a C. Por lo tanto, D, C, B y A son consecutivos. ♣

Los axiomas que hasta aquí hemos considerado no garantizan que nuestras rectas sean infinitas. Para esto necesitamos un tercer axioma de orden que a continuación enunciamos.

O_3 : *Entre dos puntos cualesquiera de una recta existe otro punto sobre la misma recta.*

1.2.6. Definición. El *segmento* determinado por dos puntos A y B, denotado por AB, consiste del conjunto de puntos que están en la recta $\overleftrightarrow{AB}$ que yacen entre A y B junto con los dos puntos A y B. A los puntos A y B se les llaman *los puntos extremos* del segmento AB.

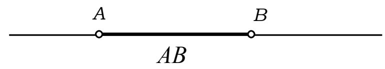


Figura 1.6

Al segmento de la figura 1.6 lo podemos denotar ya sea como AB o como BA. Por ello convenimos, en la mayoría de los casos, que en la notación de un segmento el punto que representa la primera letra de izquierda a derecha precede al punto que representa la segunda letra en la misma dirección, hablando del orden de la recta que los contiene. En el contexto quedará claro cuando no sea necesario hacer esta convención. En símbolos, si AB denota un segmento, entonces el punto A precede al punto B en el orden de la recta $\overleftrightarrow{AB}$. Convenimos además que si C es un punto que está entre A y B, entonces A precede a C y C precede a B.

Del Axioma O_3 vemos inmediatamente que todo segmento tiene al menos tres puntos. En el Teorema 1.2.8 demostraremos que todo segmento es infinito, pero para esto probaremos primero un lema.

1.2.7. Lema. Si P y Q son dos puntos del segmento AB, entonces $PQ \subseteq AB$.

Prueba: Sin perder generalidad, supongamos que P precede a Q. Tomemos $C \in PQ - \{P, Q\}$. Entonces, C está entre los puntos P y Q. Es decir, P precede a C y C precede a Q. Si A es igual a P o A precede a P, por el Axioma O_2, tenemos entonces que A precede a C. De la misma manera, probamos que C precede a B. Por ello, C está entre A y B. Es decir, $C \in AB$. ♣

1.2.8. Teorema. Todo segmento contiene una infinidad de puntos.

Prueba: Sea AB un segmento arbitrario. Según el Axioma O_3, podemos encontrar un punto C_1 entre A y B. Procediendo por inducción matemática, para cada número entero positivo $k>1$, podemos encontrar un punto C_k entre C_{k-1} y B. Por construcción y por el Lema 1.2.7, hallamos que $C_k \in C_{k-1}B \subseteq \ldots\ldots \subseteq C_1B \subseteq AB$, $C_{k-1} \neq B$ y $C_{k-1} \neq C_k$, para cada número entero positivo $k > 1$. Esto prueba que el segmento AB contiene una infinidad de puntos. ♣

Una aplicación directa del Teorema 1.2.8 es la siguiente:

1.2.9. Corolario. Toda recta tiene una infinidad de puntos.

1.2.10. Teorema. Por cada punto del plano pasan una infinidad de rectas.

Prueba: Sean P un punto arbitrario y l una recta tal que $P \notin l$ (recordemos que la existencia de esta recta la garantiza el Teorema 1.1.2). De acuerdo con el corolario anterior, podemos encontrar un conjunto infinito de puntos $\{C_k : k \in N\}$ en l. Por el Axioma I_1, para cada número entero $k \in N$, existe una única recta l_k que pasa por los puntos P y C_k. Supongamos que $l_i = l_j$ para dos números naturales distintos i y j. Tenemos entonces que P, C_i, $C_j \in l_i = l_j$ y como $C_i, C_j \in l$, se siguen las igualdades $l_i = l_j = l$, pero esto no es posible porque $P \notin l$. Por lo tanto, $\{l_k : k \in N\}$ es una familia infinita de rectas diferentes entre sí que pasan por el punto P. ♣

Entre otras muchas cosas, el Teorema 1.2.10 nos asegura la existencia de un haz de rectas que contienen una cantidad infinita de elementos.

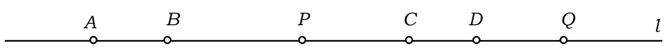
El último axioma de orden nos dice que toda recta se puede prolongar infinitamente en sus dos direcciones con respecto a cualquiera de sus puntos:

$\mathbf{O_4}$: Todo punto sobre una recta tiene tanto un punto precedente como un punto siguiente sobre la misma recta.

1.2.11. Teorema. Toda recta se pude prolongar infinitamente en sus dos direcciones.

Prueba: Sea l una recta y sobre ella fijemos un punto P. El Axioma O_4 garantiza la existencia de dos puntos A_1 y B_1 en l tales que A_1 precede a P y P precede a B_1. Procediendo por inducción matemática y aplicando el Axioma O_4 en cada paso, para cada número natural k podemos encontrar dos puntos A_k y B_k en l tales que A_k precede a A_{k-1} y B_{k-1} precede a B_k. De acuerdo con el Axioma O_2, hallamos que los puntos A_k, $A_{k-1},\ldots,\ A_1, P,\ B_1,\ldots, B_{k-1},\ B_k$ son consecutivos para cada número natural k. Lo cual significa que la recta l se puede prolongar en ambos sentidos: primero hasta los puntos A_k y B_k, y posteriormente hasta los puntos A_{k+1} y B_{k+1} para cualquier número natural k. ♣

1.2.12. Definición. Decimos que dos o más segmentos son *colineales* si pertenecen a una misma recta. Una familia de segmentos y puntos se dice *colineal* si todos yacen sobre una misma recta.



los puntos P y Q y los segmentos AB y CD forman una familia colineal
Figura 1.7

Todos los axiomas expuestos en esta sección nos permiten considerar a una recta como un conjunto ordenado de puntos, en similitud con la recta formada por los números reales.

1.3. Semirrectas

Intuitivamente podemos ver que todo punto de una recta divide a la misma en dos partes: una parte consiste de los puntos que preceden, y la otra de los puntos que siguen a un punto dado de la recta. Veamos esto con más formalidad en el siguiente teorema.

1.3.1. Teorema de la Separación de una Recta. Sean l una recta y $O \in l$. El punto O divide a los puntos del conjunto $l - \{O\}$ en dos conjuntos ajenos, no vacíos tales que dos puntos de un mismo conjunto determinan un segmento que no contiene a O, mientras que el punto O está entre dos puntos provenientes de conjuntos distintos.

Prueba: Consideremos los conjuntos $I = \{P \in l\colon P$ precede a $O\}$ y $J = \{P \in l\colon O$ precede a $P\}$. El Axioma O_4 nos garantiza que ambos conjuntos I y J son no vacíos. Si $Q \in l-\{O\}$, por el Axioma O_1, sabemos que Q precede a O, o bien, O precede a Q. Es decir, $Q \in I \cup J$. Esto demuestra que $I \cup J = l - \{O\}$. Si $Q \in I \cap J$, entonces Q precede a O y O precede a Q, pero esto no es posible, por consiguiente, $I \cap J = \varnothing$. Tomemos dos puntos $A, B \in I \cup J$. Analizaremos cada uno de cuatro casos posibles:

Caso I. $A, B \in I$. Tenemos entonces que A precede a O y B precede a O. De aquí se sigue que O no puede estar entre A y B.

Caso II. $A \in I$ y $B \in J$. Entonces, se cumple que A precede a O y O precede a B. En otras palabras, O está entre A y B. Por ello, $O \in AB$.

Caso III. $A \in J$ y $B \in I$. Como O precede a A y B precede a O, se sigue que O está entre B y A. Es decir, $O \in AB$.

Caso IV. $A, B \in J$. Este caso es completamente similar al primero. ♣

El Teorema 1.3.1 motiva la siguiente definición.

1.3.2. Definición. Sean l una recta y $O \in l$. A los subconjuntos $\{ P \in l : P$ precede a $O \}$ y $\{ P \in l : O$ precede a $P \}$ de la recta l se les llama *semirrectas de l determinadas por el punto O*, y al punto O se le nombra el *vértice* de cada una de ellas. Decimos también que estas dos semirrectas son *opuestas*.

A las semirrectas también se les conoce como rayos. En la mayoría de los libros de geometría, el vértice de una semirrecta está incluido en la semirrecta, pero aquí excluiremos el vértice de todas las semirrectas.

El Teorema 1.2.11 establece que las dos semirrectas de una recta son conjuntos no vacíos que por definición no contienen a su vértice. Veamos cómo todo punto de una recta determina exactamente dos semirrectas: sean l una recta y $A, O \in l$. Si A precede a O sobre la recta l, entonces $\overrightarrow{OA}$ denotará a la semirrecta

$$\{P \in l: P \text{ precede a } O\}$$

de l determinada por el punto O, en cuyo caso tenemos que

$$\overrightarrow{OA} = (AO - \{O\}) \cup \{P \in l: P \text{ precede a } A\}.$$

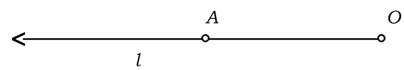


Figura 1.8

Si O precede a A en la recta l, entonces $\overrightarrow{OA}$ denotará a la semirrecta $\{ P \in l : O$ precede a $P \}$ de l determinada por el punto O, en cuyo caso tenemos que

$$\overrightarrow{OA} = (OA - \{O\}) \cup \{P \in l: A \text{ precede a } P\}.$$

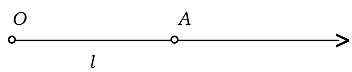


Figura 1.9

En ambos casos se cumple que

$$A \in \overrightarrow{OA} = \{P \in l - \{O\}: O \text{ no está entre } P \text{ y } A\}.$$

En la notación de la semirrecta $\overrightarrow{OA}$ de una recta l, se entenderá que $A, O \in l$ y que el primer punto que se menciona en la notación de izquierda a derecha es el vértice de la semirrecta, y la segunda letra representa a cualquier punto de la misma. Para hacer referencia a las dos semirrectas opuestas de una recta l y sus direcciones al mismo tiempo, escogemos dos puntos $A, B \in l$ de tal manera que A preceda a B y que su vértice O esté entre A y B, y entonces $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ denotarán a las dos semirrectas opuestas de l determinadas por el punto O. En algunos casos es conveniente, de no haber una posible confusión, usar los símbolos $\overleftarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OA}$ para denotar a las dos semirrectas opuestas de una recta l con vértice O, entendiendo que $\overleftarrow{OA}$ es la semirrecta opuesta de $\overrightarrow{OA}$, y viceversa. Así tenemos, por definición, que $A \in \overrightarrow{OA}$ y $A \notin \overleftarrow{OA}$. En la siguiente figura ilustraremos cómo quedan representadas las dos semirrectas usando la notación convenida:

$$\overleftarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \qquad\qquad \overrightarrow{OB} = \overleftarrow{OA}$$

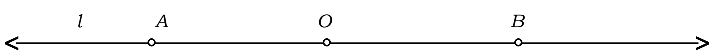


Figura 1.10

En la figura 1.10, se tiene que $\overleftarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OB}$ son semirrectas opuestas y $l = \overleftarrow{OB} \cup \{O\} \cup \overrightarrow{OB}$. Vale la pena recalcar que en la notación de una semirrecta $\overrightarrow{OA}$, el primer punto que se menciona es crucial en su notación, pues representa el vértice de la misma. En efecto, tenemos que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$, para todo $B \in \overrightarrow{OA}$. Cabe mencionar que para cualquier par de puntos distintos A y B se cumple que $AB = BA$ y $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{BA}$, pero $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$, ya que $AB - \{A, B\} = \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$.

Directamente del Teorema 1.2.8 obtenemos el siguiente resultado.

1.3.3. Teorema. Toda semirrecta tiene una cantidad infinita de puntos.

1.3.4. Definición. Sean A, B y O tres puntos distintos sobre una misma recta l. Si O está entre A y B, entonces decimos que A y B están en *lados opuestos* de la recta l con respecto al punto O. Si O no está entre A y B, entonces decimos que A y B están en un *mismo lado* de la recta l con respecto al punto O.

lados opuestos mismo lado

Figura 1.11

La formulación de esta última definición en términos de semirrectas queda como sigue:

Sean A, B y $O \in l$. Entonces, los puntos A y B están en lados opuestos de la recta l con respecto al punto O si A y B pertenecen a diferentes semirrectas de l con vértice O (equivalentemente, $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ son semirrectas opuestas), y A y B están del mismo lado de la recta l con respecto al punto O si A y B están en una misma semirrecta de l con vértice O (equivalentemente, $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$). De aquí podemos ver que una semirrecta es el conjunto de puntos que están en un mismo lado de la recta que la contiene con respecto a su vértice.

El siguiente resultado se sigue claramente de la definición de semirrecta.

1.3.5. Teorema. Sean A y B cualesquiera dos puntos del plano. Entonces,

1. $AB - \{A\} \subseteq \overrightarrow{AB} \subseteq \overleftrightarrow{AB}$,
2. $AB - \{A, B\} = \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$ y
3. $\overleftrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$.

1.3.6. Definición. Decimos que dos o más semirrectas son *colineales* si pertenecen a una misma recta. Una familia de semirrectas, de segmentos y de puntos se dice que es *colineal* si todos yacen sobre una misma recta.

A continuación estudiaremos las semirrectas de una recta dada e introduciremos la noción de orientación entre dos semirrectas arbitrarias.

1.3.7. Lema. Sean A, B, C y D cuatro puntos colineales tales que $A \neq C$. Entonces, $\overrightarrow{AB} \subseteq \overrightarrow{CD}$ si y solo si $A \in \overrightarrow{CD}$ y $C \notin \overrightarrow{AB}$.

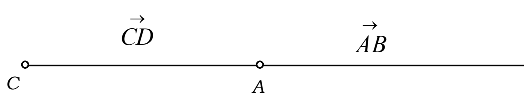


Figura 1.12

Prueba: Sin perder generalidad supongamos que C precede a D sobre la recta que los contiene. Primero observemos de nuestra suposición que el punto C debe preceder al punto B.

Necesidad. Claramente, $C \in \overrightarrow{AB}$ es imposible pues $\overrightarrow{AB} \subseteq \overrightarrow{CD}$ y $C \notin \overrightarrow{CD}$. Así que por el Teorema 1.3.1, se debe cumplir la pertenencia $C \in \overleftarrow{AB}$, es decir, *A* está entre *C* y *B*. Supongamos que $A \notin \overrightarrow{CD}$. De acuerdo con el Teorema 1.3.1, tenemos que $A \in \overleftarrow{CD}$. Lo cual implica que *C* está entre *A* y *D*. Por suposición, sabemos que *C* precede a *D*. Por ello, *A* precede a *C* y de aquí se sigue que *B* precede a *A*. Según el Axioma O_2, *A* precede a *B* también se cumple, pero esto es una contradicción. Por lo tanto, $A \in \overrightarrow{CD}$.

Suficiencia. Supongamos que $A \in \overrightarrow{CD}$ y $C \notin \overrightarrow{AB}$. Como *C* precede a *D*, $\overrightarrow{CD} = \{P \in \overleftrightarrow{AB} : C \text{ precede a } P\}$. Como consecuencia de esto, tenemos que *C* precede al punto *A*. De acuerdo con el Teorema 1.3.1, $C \in \overleftarrow{AB}$ y como *C* precede a *A*, debemos tener que *A* precede al punto *B*. Por consiguiente, la semirrecta $\overrightarrow{AB}$ está formada por todos los puntos de $\overleftrightarrow{AB}$ que siguen después de *A*. Nuestra contención se sigue del Axioma O_2. ♣

1.3.8. Teorema. Sean *A*, *B*, *C* y *D* cuatro puntos colineales tales que $A \neq C$. Entonces, $\overrightarrow{AB} \subseteq \overrightarrow{CD}$ si y solo si $\overleftarrow{CD} \subseteq \overleftarrow{AB}$.

Prueba: Por el Teorema 1.3.1 y el Lema 1.3.7, tenemos que

$$\overrightarrow{AB} \subseteq \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow A \in \overrightarrow{CD} \text{ y } C \notin \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow A \notin \overleftarrow{CD} \text{ y } C \in \overleftarrow{AB} \Leftrightarrow \overleftarrow{CD} \subseteq \overleftarrow{AB}. ♣$$

1.3.9. Teorema. Sean *l* una recta y $A, B \in l$. Si *A* precede a *B*, entonces $\overleftarrow{BA} \cap \overleftarrow{AB} = \emptyset$, $\overleftarrow{AB} \subseteq \overrightarrow{BA}$ y $\overleftarrow{BA} \subseteq \overrightarrow{AB}$.

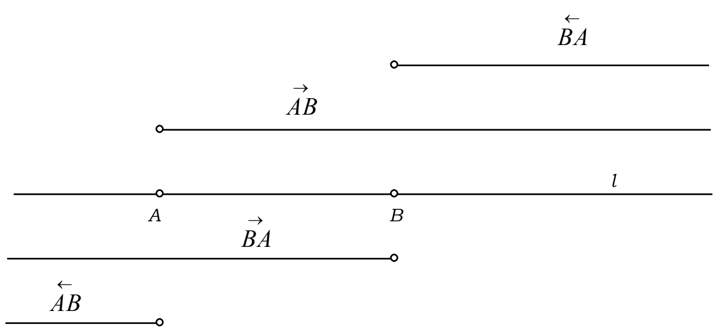


Figura 1.13

Prueba: Como $A \in \overrightarrow{BA}$ y $B \notin \overleftarrow{AB}$, por el Lema 1.3.7, hallamos que $\overleftarrow{AB} \subseteq \overrightarrow{BA}$. De la misma manera, como $B \in \overrightarrow{AB}$ y $A \notin \overleftarrow{BA}$, por el Lema 1.3.7, obtenemos que $\overleftarrow{BA} \subseteq \overrightarrow{AB}$. Finalmente, $\overleftarrow{BA} \cap \overleftarrow{AB} \subseteq \overrightarrow{AB} \cap \overleftarrow{AB} = \emptyset$. ♣

1.3.10. Definición. Decimos que dos semirrectas tienen la misma *orientación* si una de ellas contiene a la otra. Brevemente diremos que dos semirrectas serán *equivalentes* si tienen la misma orientación.

Claramente las semirrectas $\overrightarrow{AB}$ y $\overleftarrow{AB}$ no pueden tener la misma orientación. En símbolos, las semirrectas $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ tienen la misma orientación, escribimos $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$, si $\overrightarrow{AB} \subseteq \overrightarrow{CD}$, o bien, $\overrightarrow{CD} \subseteq \overrightarrow{AB}$. Remarcamos que dos semirrectas con la misma orientación tienen que ser colineales. El primer resultado acerca de la orientación de semirrectas es una consecuencia inmediata del Teorema 1.3.8.

1.3.11. Teorema. Sean $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ dos semirrectas. Entonces, $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ si y solo si $\overleftarrow{AB} \sim \overleftarrow{CD}$.

1.3.12. Teorema. Sean A y B dos puntos. Si $\overrightarrow{CD} \subseteq \overleftrightarrow{AB}$, entonces $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ ó $\overleftarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$.

Prueba: Supongamos primero que $A = C$. Según el Teorema 1.3.1, encontramos que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}$ o $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} = \overleftarrow{AB}$. En otras palabras, $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ o $\overleftarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$. Supongamos ahora que $A \neq C$ y, sin pérdida de generalidad, que A precede a B. Tenemos cuatro casos posibles:

Caso I. Si $C \notin \overrightarrow{AB}$ y $A \in \overrightarrow{CD}$, por el Lema 1.3.7, hallamos que $\overrightarrow{AB} \subseteq \overrightarrow{CD}$.

Caso II. Si $C \notin \overrightarrow{AB}$ y $A \in \overleftarrow{CD}$, según el Lema 1.3.7, vemos que $\overrightarrow{AB} \subseteq \overleftarrow{CD}$.

Caso III. Si $C \in \overrightarrow{AB}$ y $A \in \overrightarrow{CD}$, entonces $C \notin \overleftarrow{AB}$. De acuerdo con el Lema 1.3.7, obtenemos que $\overleftarrow{AB} \subseteq \overrightarrow{CD}$.

Caso IV. Si $C \in \overrightarrow{AB}$ y $A \in \overleftarrow{CD}$, entonces $A \notin \overrightarrow{CD}$. Del Lema 1.3.7 se sigue la contención $\overrightarrow{CD} \subseteq \overrightarrow{AB}$. ♣

1.3.13. Lema. Sean A y B dos puntos en el plano. Si $\overrightarrow{CD} \subseteq \overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{EF} \subseteq \overrightarrow{AB}$, entonces $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF}$.

Prueba: Como $\overrightarrow{CD} \subseteq \overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{EF}$ y $\overrightarrow{EF} \subseteq \overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{CD}$, por el Teorema 1.3.12, tenemos que $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{CD} \sim \overleftarrow{EF}$, o bien, $\overleftarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF}$. Supongamos que $\overrightarrow{CD} \sim \overleftarrow{EF}$ y $\overleftarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF}$. Analicemos cada uno de los posibles casos:

Caso I. $\overrightarrow{CD} \subseteq \overleftarrow{EF}$ y $\overleftarrow{CD} \subseteq \overrightarrow{EF}$. Entonces, por el Teorema 1.3.8, $\overrightarrow{EF} \subseteq \overleftarrow{CD}$ y, por lo tanto, $\overrightarrow{EF} = \overleftarrow{CD}$. Pero esto implica que $\overrightarrow{CD} \cup \overleftarrow{CD} \subseteq \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$, lo cual es imposible.

Caso II. $\overleftarrow{EF} \subseteq \overrightarrow{CD}$ y $\overleftarrow{CD} \subseteq \overrightarrow{EF}$. Este caso es muy similar al primero.

Caso III. $\overleftarrow{EF} \subseteq \overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{EF} \subseteq \overleftarrow{CD}$. También este caso es bastante similar al primero.

Caso IV. $\overrightarrow{CD} \subseteq \overleftarrow{EF}$ y $\overrightarrow{EF} \subseteq \overleftarrow{CD}$, lo cual es equivalente a considerar solo la contención $\overrightarrow{EF} \subseteq \overleftarrow{CD}$. Sin perder generalidad, supongamos que A precede a B. Utilizando el Problema 1.128, hallamos que C precede a D y E precede a F. De esto y la contención $\overrightarrow{EF} \subseteq \overleftarrow{CD}$, encontramos que F precede a C y, por lo cual, $C \in \overrightarrow{EF}$, pero esto es una contradicción. Así que $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF}$. ♣

En otras palabras, el Lema 1.3.13 nos dice que dos semirrectas que están contenidas en una misma semirrecta son equivalentes. El siguiente lema afirma que si dos semirrectas contienen a una semirrecta, entonces dichas semirrectas son equivalentes.

1.3.14. Lema. Sean A y B dos puntos. Si $\overrightarrow{AB} \subseteq \overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{AB} \subseteq \overrightarrow{EF}$, entonces $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF}$.

Prueba: Según el Teorema 1.3.8, sabemos que $\overleftarrow{CD} \subseteq \overleftarrow{AB}$ y $\overleftarrow{EF} \subseteq \overleftarrow{AB}$. Del Teorema 1.3.13 hallamos que $\overleftarrow{CD} \sim \overleftarrow{EF}$ y por el Teorema 1.3.11, concluimos que $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF}$. ♣

1.3.15. Teorema. La relación de orientación entre semirrectas es de equivalencia.

Prueba: Claramente, tenemos que $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AB}$ para toda semirrecta, y si $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$, entonces $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$. Supongamos que $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF}$. De la definición podemos deducir que las tres semirrectas $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{EF}$ son colineales. Procedamos a considerar cada uno de los casos posibles:

Caso I. Si $\overrightarrow{AB} \subseteq \overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{CD} \subseteq \overrightarrow{EF}$, entonces $\overrightarrow{AB} \subseteq \overrightarrow{EF}$ y, por lo tanto, $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$.

Caso II. Si $\overrightarrow{AB} \subseteq \overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{EF} \subseteq \overrightarrow{CD}$, por el Lema 1.3.13, se cumple que $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$.

Caso III. Si $\overrightarrow{CD} \subseteq \overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD} \subseteq \overrightarrow{EF}$, según el Lema 1.3.14, obtenemos que $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$.

Caso IV. Si $\overrightarrow{CD} \subseteq \overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{EF} \subseteq \overrightarrow{CD}$, entonces $\overrightarrow{EF} \subseteq \overrightarrow{AB}$. Lo cual testifica la equivalencia $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$.

Así hemos demostrado que la relación de orientación es una relación de equivalencia. ♣

En virtud del Teorema 1.3.15, a la clase de equivalencia de una semirrecta la llamaremos la *orientación* de la misma. El Teorema 1.3.12 establece que las semirrectas de una recta forman dos orientaciones.

1.4. Axioma de Pasch

1.4.1. Teorema de Pasch. Si tres puntos son colineales, entonces una recta que interseca a uno de los tres segmentos determinados por dichos puntos y no pasa por ninguno de estos puntos, interseca a uno y solo uno de los otros dos segmentos.

Prueba: Sean l una recta y A, B y C tres puntos consecutivos fuera de l que satisfagan las condiciones del teorema. Existen solo tres posibilidades:

Caso I. $l \cap AB \neq \varnothing$. Supongamos que $l \cap BC \neq \varnothing$. Como $AB \cap BC = \{B\}$ y $B \notin l$, entonces $\overleftrightarrow{AC}$ y l contienen dos puntos distintos en común y, por el Axioma I_1, hallamos que $\overleftrightarrow{AC} = l$, pero esto es una contradicción pues $A \notin l$. Por ello, debemos tener que $l \cap BC = \varnothing$. Sea $P \in l \cap AB$. Entonces, P precede a B y como B precede a C, por el Axioma O_2, P precede a C y, por tanto, P está entre A y C. Así que $P \in l \cap AC$.

Caso II. $l \cap BC \neq \varnothing$. Supongamos que $l \cap AB \neq \varnothing$. Ya que $AB \cap BC = \{B\}$ y $B \notin l$, obtenemos que $\overleftrightarrow{AB}$ y l contienen dos puntos distintos en común y así, según el Axioma I_1, obtenemos que $\overleftrightarrow{AB} = l$, lo cual es imposible porque $A \notin l$. Esto prueba que $l \cap AB = \varnothing$. Consideremos el punto de intersección $P \in l \cap BC$. Por definición, B precede a P y como A precede a B y P precede a C, por el Axioma O_2, P está entre A y C. Lo cual implica que $P \in l \cap AC$.

Caso III. $l \cap AC \neq \varnothing$. Como $AC = AB \cup BC$, $AB \cap BC = \{B\}$ y $B \notin l$, se obtiene que $l \cap AB \neq \varnothing$ o $l \cap BC \neq \varnothing$. Aquí aplicamos los argumentos de las demostraciones de los dos casos anteriores. ♣

Para probar el Teorema 1.4.1 no requerimos de un nuevo axioma. Sin embargo, su generalización a cualquier terna de puntos en el plano, sean o no colineales, requiere de la introducción de un nuevo axioma conocido, como el Axioma de Pasch. Este axioma fue introducido por Moritz Pasch en 1882. En esta sección enunciamos dicho axioma y damos algunas de sus aplicaciones más importantes.

Uno de los conceptos geométricos más importantes de la planimetría es el siguiente.

1.4.2. Definición. Dados tres puntos no colineales A, B y C, al conjunto formado por los tres segmentos AB, AC y BC se le llama *triángulo*.

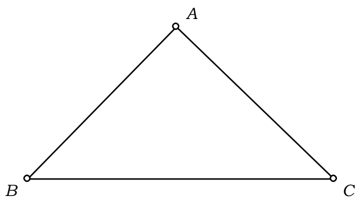


Figura 1.14

Los puntos A, B y C se llaman *vértices* del triángulo y los segmentos BC, AC y AB se llaman *lados* del triángulo. Un triángulo con vértices A, B y C será denotado por ΔABC.

En matemáticas se usan dos direcciones circulares que son *en sentido contrario a la dirección de las manecillas del reloj*, considerada como positiva, y *en sentido favorable a la dirección de las manecillas del reloj*, considerada como negativa. Estas dos direcciones son muy importantes en la geometría. Por ejemplo, se usan en la ubicación en el plano de dos o más semirrectas con un vértice común, y en la formación de ángulos mediante la rotación, en abstracto, de una semirrecta alrededor de su vértice. Dicha rotación se hace, ya sea en sentido contrario, o en sentido favorable a las manecillas del reloj. Otra aplicación es el nombramiento de ciertos puntos en el plano, como pueden ser los vértices de un triángulo. En efecto, por lo general, los vértices de un triángulo ΔABC se leen en sentido contrario a las manecillas del reloj. Por ejemplo, los símbolos ΔBCA y ΔCAB representan al mismo triángulo ΔABC. Un triángulo queda bien determinado por sus vértices tal y como lo establece el Problema 1.181.

1.4.3. Teorema. Existe un triángulo.

Prueba: De acuerdo con el Teorema 1.1.4, sabemos que existen tres puntos no colineales A, B y C. Entonces, por definición, el conjunto $AB \cup BC \cup AC$ es un triángulo cuyos vértices son A, B y C, y cuyos lados son BC, AC y AB. ♣

Axioma de Pasch: Una recta que no pase por ninguno de los vértices de un triángulo, pero que interseque a uno de sus tres lados, corta a uno y solo uno de los otros dos lados del mismo triángulo.

Para ilustrar el Axioma de Pasch consideremos la siguiente figura:

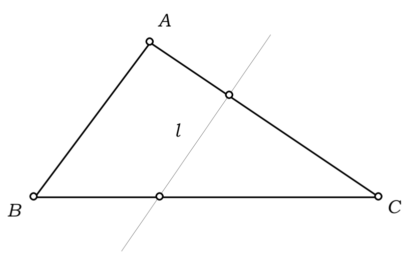


Figura 1.15

Supongamos que A, B y C son los vértices del triángulo ΔABC y l es una recta que interseca al lado AC. Por el Axioma de Pasch la recta l debe cortar a uno y solo uno de los segmentos AB y BC. En este ejemplo, la recta l corta al lado BC.

1.4.4. Teorema (Peano-1894). Sea ΔABC un triángulo. Si D y E son puntos sobre las rectas $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{AB}$, respectivamente, tales que E está entre A y B y $D \notin BC$, entonces la recta $\overleftrightarrow{DE}$ interseca al lado AC.

Prueba: Primero consideremos el caso cuando D precede a B.

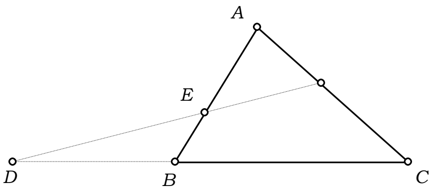


Figura 1.16

Sabemos que la recta $\overleftrightarrow{DE}$ interseca al lado AB del triángulo ΔABC. Puesto que $E \notin \overleftrightarrow{BC}$, $E \notin \overleftrightarrow{AC}$ y $D \notin \overleftrightarrow{AB}$, la recta $\overleftrightarrow{DE}$ no pasa por ninguno de los vértices del triángulo ΔABC. Según el Axioma de Pasch, la recta $\overleftrightarrow{DE}$ debe cortar a uno y solo uno de los otros dos lados que son BC y AC. Si $\overleftrightarrow{DE}$ interseca al lado BC, entonces $\overleftrightarrow{DE} = \overleftrightarrow{BC}$, pero esto no es posible pues $E \notin \overleftrightarrow{BC}$. Por lo tanto, $\overleftrightarrow{DE}$ interseca al lado AC.

Ahora consideremos el caso cuando C precede a D.

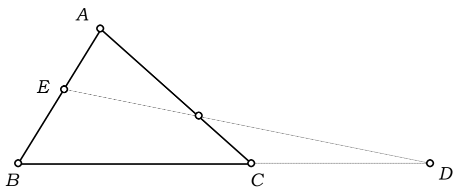


Figura 1.17

Por hipótesis, la recta $\overleftrightarrow{DE}$ interseca al lado AB en el punto E. Como en el caso anterior, tenemos que la recta $\overleftrightarrow{DE}$ no pasa por ninguno de los vértices del triángulo ΔABC. De acuerdo con el Axioma de Pasch, la recta $\overleftrightarrow{DE}$ corta a uno y solo uno de los otros dos lados. Sabemos que $\overleftrightarrow{DE}$ no puede cortar a BC, puesto que $E \notin \overleftrightarrow{BC}$. Por ello, la recta $\overleftrightarrow{DE}$ debe intersecar al lado AC. ♣

A continuación enunciamos una de las consecuencias más importantes del Axioma de Pasch.

1.4.5. Teorema de la Separación del Plano. Toda recta divide a los puntos del plano que no pertenecen a ella en dos conjuntos no vacíos tales que dos puntos de un mismo conjunto determinan un segmento que no interseca a la recta, mientras que dos puntos de conjuntos diferentes determinan un segmento que interseca a la recta.

Prueba: Sean l una recta en el plano y $A \notin l$ (la existencia de este punto lo garantiza el Axioma I_3). El conjunto de puntos del plano que no están en l será dividido en dos subconjuntos I y J como sigue:

a. Un punto está en I si es igual a A, o sino pertenece a l y junto con A determinan un segmento que no corta a l.
b. Un punto está en J sino pertenece a l y junto con A determinan un segmento que corta a l.

Primero probaremos que I y J son no vacíos. Para esto, tomemos un punto $P \in l$ y consideremos las dos semi-

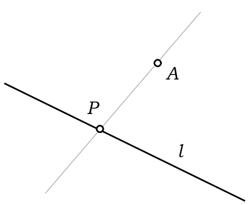


Figura 1.18

rrectas opuestas $\overrightarrow{PA}$ y $\overleftarrow{PA}$ con vértice P. Sabemos que $A \in \overrightarrow{PA}$. Probaremos que $\overrightarrow{PA} \subseteq I$ y $\overleftarrow{PA} \subseteq J$. Como las rectas $\overleftrightarrow{PA}$ y l se cortan en un solo punto que es P, esto es por el Teorema 1.1.1, las semirrectas $\overrightarrow{PA}$ y $\overleftarrow{PA}$ no cortan a l. Si $B \in \overrightarrow{PA}$, entonces $AB \cap l \subseteq \overrightarrow{PA} \cap l = \varnothing$ y esto implica que $AB \cap l = \varnothing$. Es decir, por definición, $B \in I$. Esto prueba que $\overrightarrow{PA} \subseteq I$. Si $B \in \overleftarrow{PA}$, entonces P está entre B y A. Lo cual significa que el segmento AB corta a l en el punto P y, por definición, $B \in J$. Por lo tanto, $\overleftarrow{PA} \subseteq J$. El Teorema 1.3.3 nos asegura que las semirrectas $\overrightarrow{PA}$ y $\overleftarrow{PA}$ contienen una infinidad de puntos. Por ello, concluimos que I y J son conjuntos no vacíos. Sabemos que todo punto del plano que no pertenece a la recta l diferente de A satisface que el segmento que lo une con el punto A interseca a l, o bien, no interseca a l. Es decir, si $P \notin l$, entonces $P \in I \cup J$. Tomemos ahora dos puntos B y C en $I \cup J$. Cabe mencionar que los puntos A, B y C pueden o no ser colineales, en cualquiera de los casos haremos uso, ya sea del Teorema, o del Axioma de Pasch. Consideremos los siguientes casos:

Caso I. $B, C \in I$. En este caso, sabemos que $AB \cap l = \varnothing = AC \cap l$.

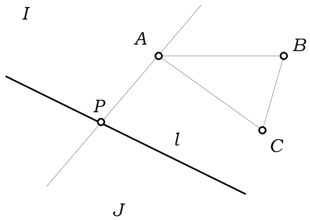


Figura 1.19

Consideremos el segmento BC. Si l intersecase al segmento BC, entonces, ya sea por el Teorema 1.4 .4 o por el Axioma de Pasch, la recta l intersecaría a AB o a AC, pero esto es imposible. Por consiguiente, la recta l no corta al segmento BC.

Caso II. $B \in I$ y $C \in J$.

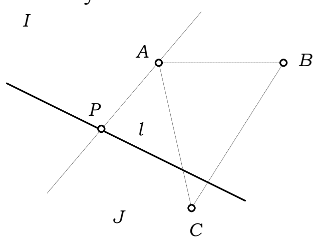


Figura 1.20

Tenemos entonces que AC interseca a l y que AB no interseca a l. Por el Teorema y el Axioma de Pasch, la recta l debe cortar al segmento BC, tal y como se deseaba.

Caso III. $B \in J$ y $C \in I$. Este caso es completamente análogo al anterior.

Caso IV. $B, C \in J$.

Sabemos que $AB \cap l \neq \varnothing \neq AC \cap l$. De nueva cuenta, el Teorema y el Axioma de Pasch nos aseguran que $BC \cap l = \varnothing$. ♣

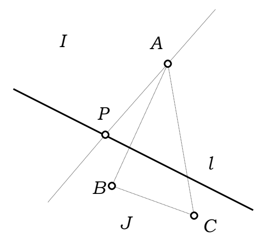


Figura 1.21

El teorema que a continuación presentamos fue propuesto por J. J. Sylvester como una pregunta en la revista Mathematical Questions and Solutions from the Educational Times 59 (1893), p. 98 (Pregunta #11851). La demostración que aquí damos es de R. Steinberg, la cual también se puede encontrar en los libros [l-19] y [l-208, Ejercicio 14, p. 23], en este último aparece como una secuencia de ejercicios. Dicha demostración es una bonita aplicación del Teorema de Peano (1.4.4). El libro de H. S. M. Coxeter [l-112] (4.7, p. 93 − 94) ofrece una demostración diferente y contiene algunas notas históricas acerca de dicha pregunta conocida como el problema de los puntos colineales de Sylvester. Otras demostraciones y resultados relacionados se pueden consultar en el libro de B. M. Ábrego Lerma [l-19].

1.4.6. Teorema de Sylvester. Para cada conjunto finito de puntos no colineales con más de dos elementos, existe una recta que contiene exactamente a dos de los puntos del conjunto.

Prueba [l-208]: Sea $\mathcal{F}$ un conjunto finito de puntos no colineales con más de dos elementos. Sea $\mathcal{L}$ el conjunto de rectas que contiene al menos dos puntos de $\mathcal{F}$. Claramente, $\mathcal{L}$ es un conjunto finito. Fijemos un punto $A \in \mathcal{F}$. De nuestras hipótesis podemos deducir directamente que existe una recta $l \in \mathcal{L}$ tal que $A \notin l$. En la prueba del Teorema 1.2.10 vimos que hay una infinidad de rectas que pasan por A y cortan a l. Entre dichas rectas podemos escoger una, digamos m, tal que $m \cap \mathcal{F} = \{A\}$. Así, es posible encontrar un punto $Q \in AP$, de tal forma que ninguna recta de $\mathcal{L}$ corte al conjunto $AQ - \{AQ\}$ y exista una recta $n \in \mathcal{L}$ de tal manera que $Q \in n$.

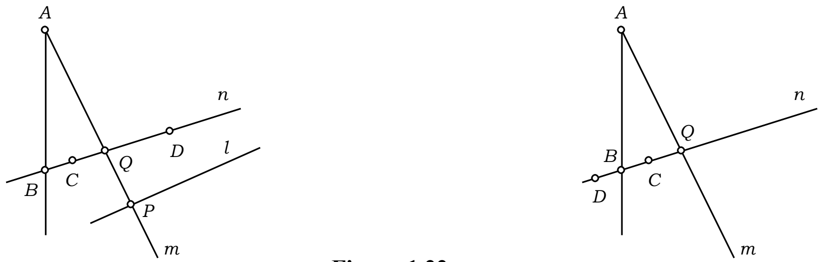


Figura 1.22

Supongamos que sobre la recta n hay al menos tres puntos de $\mathcal{F}$. Denotemos dichos puntos por las letras B, C y D. Estos puntos los podemos nombrar de tal forma que $C \in BQ$ y $D \notin BQ$. Procedemos a demostrar que la recta $\overleftrightarrow{AB}$ contiene exactamente dos puntos de $\mathcal{F}$. Supongamos lo contrario. Fijemos un punto $E \in \overleftrightarrow{AB} \cap \mathcal{F}$ distinto de A y B. Si $E \in AB$, por el Teorema de Peano (1.4.4), hallamos que la recta $\overleftrightarrow{ED}$ corta a AQ en un punto distinto de A y, por definición, $\overleftrightarrow{ED} \in \mathcal{L}$, pero esto es imposible. Mediante el Teorema de Peano (1.4.4) obtenemos contradicciones similares en los casos cuando $E \in \overrightarrow{AB}$ y cuando $E \in \overleftarrow{AB}$ (ver figura 1.23). Por lo tanto, $\overleftrightarrow{AB}$ contiene exactamente dos puntos de $\mathcal{F}$. ♣

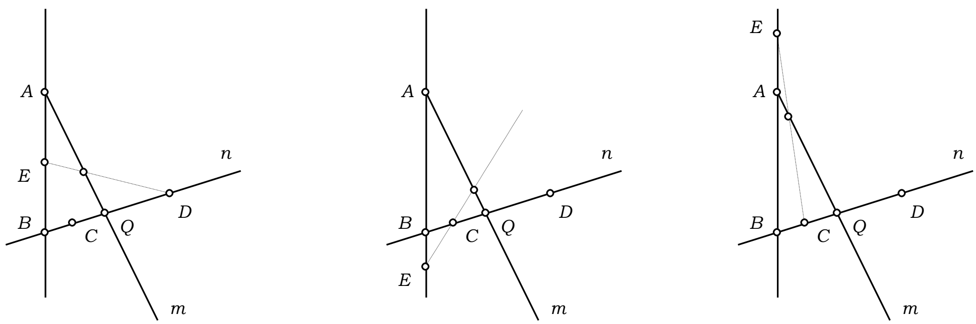


Figura 1.23

1.5. Semiplanos

En el Teorema 1.4.5, hemos visto que toda recta divide al plano en dos regiones. A cada una de estas regiones se le llama *semiplano* determinado por dicha recta (en la notación del Teorema 1.4.5, dichos semiplanos son los conjuntos I y J). En símbolos, si l es una recta y $A \notin l$, entonces los dos semiplanos determinados por la recta l son las regiones conformadas por los conjuntos

$$P_1 = \{ P : AP \cap l = \varnothing\} \cup \{A\} \text{ y } P_2 = \{ P : AP \cap l \neq \varnothing\}.$$

Vale la pena señalar que los semiplanos no dependen del punto A de referencia. El Teorema 1.4.5 también nos dice que dos puntos de un mismo semiplano determinan un segmento que no corta a la recta que lo determina, mientras que dos puntos de diferentes semiplanos forman un segmento que corta a la recta que los determina. Con base en esto, podemos formular la siguiente definición.

1.5.1. Definición. Sean l una recta y A y B dos puntos fuera de l. Decimos que A y B están en el *mismo semiplano* determinado por la recta l si $AB \cap l = \emptyset$, y si $AB \cap l \neq \emptyset$, entonces decimos que A y B están en *semiplanos diferentes*.

1.5.2. Lema. Si P y Q pertenecen a un mismo semiplano determinado por la recta l, entonces el segmento PQ también está contenido en el semiplano determinado por l que contiene a los puntos P y Q.

Prueba: Este lema se sigue inmediatamente del Lema 1.2.7 y la Definición 1.5.1. ♣

1.5.3. Lema. Sean l una recta, $A \in l$ y $B \notin l$. Entonces $AB - \{A\}$ y $\overrightarrow{AB}$ están contenidos en el semiplano determinado por l que contiene al punto B, y $\overleftarrow{AB}$ está contenida en el otro semiplano.

Prueba: Sea $P \in AB - \{A\}$. Como $A \notin BP$, el segmento BP no interseca a la recta l. Por ello, B y P están en un mismo semiplano determinado por l. Ahora, tomemos $Q \in \overrightarrow{AB}$. Como A no está entre B y Q, entonces el segmento BQ no puede cortar a la recta l y, por tanto, B y Q están en un mismo semiplano determinado por l. Fijemos ahora un punto $S \in \overleftarrow{AB}$. Sabemos que A está entre S y B. De aquí se sigue que el segmento SB corta a la recta l en el punto A. Por consiguiente, S y B están en diferentes semiplanos determinados por la recta l. Esto prueba que $\overleftarrow{AB}$ está contenida en el semiplano determinado por l que no contiene a B. ♣

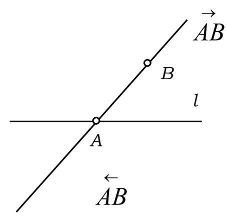


Figura 1.24

Una relación básica entre los puntos del plano y los dos semiplanos determinados por una recta es la siguiente:

1.5.4. Teorema. Sean l una recta, $A \in l$, $B \notin l$ y $C \in \overleftrightarrow{AB} - \{A, B\}$. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:

1. A no está entre B y C.
2. B y C están en un mismo semiplano determinado por la recta l.
3. $C \in \overrightarrow{AB}$.

Prueba:

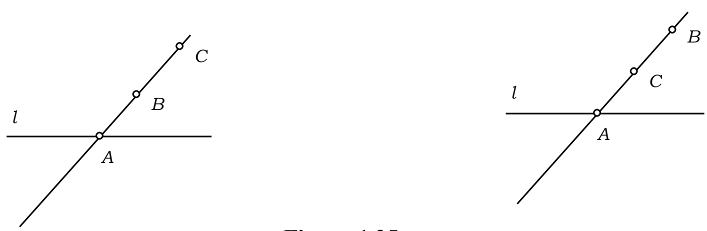


Figura 1.25

1 $\Rightarrow$ 2. Supongamos que B y C están en diferentes semiplanos determinados por l. De acuerdo con el Teorema 1.4.5, el segmento BC tiene que cortar a la recta l. El único punto posible de corte es A. De donde nos encontramos con que $A \in BC$, pero esto contradice nuestra suposición.

2 $\Rightarrow$ 3. De nuestra hipótesis y el Teorema 1.4.5, sabemos que el segmento BC no puede cortar a la recta l, y como A es el punto de intersección de l y $\overleftrightarrow{AB}$, encontramos que $A \notin BC$. Por ello, $C \in \overrightarrow{AB}$.

3 $\Rightarrow$ 1. De nuestra condición se sigue que $A \notin BC$. Lo cual quiere decir que A no puede estar entre B y C. ♣

1.5.5. Teorema. Sean l una recta, $O \in l$ y B, D y C tres puntos que están en un mismo semiplano determinado por l, tales que $D, C \notin \overrightarrow{OB}$. Si D y C están en diferentes semiplanos determinados por la recta $\overleftrightarrow{OB}$, entonces $DC \cap \overrightarrow{OB} \neq \emptyset$.

Prueba: Supongamos contrariamente que $DC \cap \overrightarrow{OB} = \emptyset$. Como $DC \cap \overleftrightarrow{OB} \neq \emptyset$, entonces existe un punto $P \in DC \cap \overleftarrow{OB}$. Es claro que O está entre B y P. Del Lema 1.5.3, vemos que los puntos B y P yacen en semiplanos diferentes determinados por l. Por lo cual, D y P están en semiplanos diferentes determinados por l. Del Teorema 1.4.5, tenemos que el segmento DP interseca a la recta l. Por lo tanto, el segmento DC corta también a la recta l, lo cual es imposible. Concluimos entonces que $DC \cap \overrightarrow{OB} \neq \emptyset$. ♣

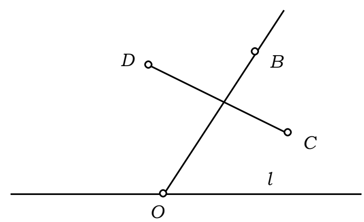


Figura 1.26

1.5.6. Lema. Sean A, O, P y Q cuatro puntos en el plano. Si Q y A están en el mismo semiplano determinado por $\overleftrightarrow{OP}$, y P y Q están en diferentes semiplanos determinados por la recta $\overleftrightarrow{OA}$, entonces A y P están en el mismo semiplano determinado por $\overleftrightarrow{OQ}$.

Prueba: Supongamos que A y P están en diferentes semiplanos determinados por la recta $\overleftrightarrow{OQ}$. Según el Teorema 1.4.5, el segmento AP interseca a la recta $\overleftrightarrow{OQ}$ en un punto que llamaremos M. Ya que P y Q están en diferentes semiplanos determinados $\overleftrightarrow{OA}$, por el Lema 1.5.3, hallamos que $AP \cap (\overrightarrow{OQ} \cup \{O\}) = \emptyset$. Por ello, debemos tener que $M \in \overleftarrow{OQ}$. Pero $\overleftarrow{OQ}$ está contenido en el semiplano determinado por $\overleftrightarrow{OP}$ que no contiene al punto A. Dicho semiplano tampoco contiene a $AP - \{P\}$ (según el Teorema 1.5.3), lo cual contradice la pertenencia $M \in AP$. ♣

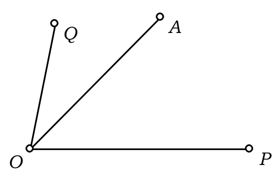


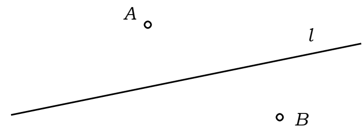
Figura 1.27

De la definición 1.5.1, podemos establecer una relación de equivalencia entre los puntos del plano que no pertenecen a una recta dada:

Fijemos una recta l. Si A y B son dos puntos del plano fuera de l, entonces decimos que $A \sim B$ si A y B pertenecen al mismo semiplano determinado por l. Trivialmente, la relación $\sim$ es reflexiva y simétrica, y la transitividad se sigue directamente del Axioma de Pasch. Por ello, los dos semiplanos determinados por la recta l resultan ser las clases de equivalencia de dicha relación (ver Problema 1.169).

Veamos a continuación que los semiplanos nos pueden ayudar a ubicar una recta con respecto a dos puntos en el plano.

1.5.7. Definición. Decimos que una recta está entre dos puntos si dichos puntos están situados en diferentes semiplanos determinados por la recta. Si una recta l está entre dos puntos A y B, entonces escribimos (A,l,B).



l está entre los puntos A y B
Figura 1.28

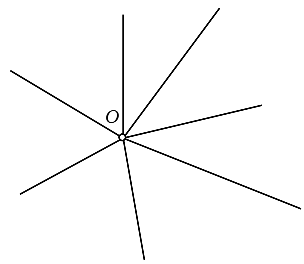
De la definición es fácil ver que $(A, l, B) = (B, l, A)$.

El siguiente teorema es una consecuencia directa de la definición y del Teorema 1.4.5.

1.5.8. Teorema. Sean l una recta y A y B dos puntos fuera de ella. Entonces, (A,l,B) si y solo si $l \cap AB \neq \emptyset$.

1.5.9. Definición. Un *haz de semirrectas* es un conjunto formado por todas las semirrectas con un mismo vértice. Al vértice en común se le llama *vértice* del haz de semirrectas. Un haz de semirrectas será denotado por el símbolo $Hs(O)$, en donde O es el vértice del haz.

Es claro que, $\overrightarrow{OP} \in Hs(O)$ si y solo si $\overleftarrow{OP} \in Hs(O)$, para todo punto P del plano diferente de O.



haz de semirrectas con vértice O
Figura 1.29

Del Lema 1.5.3, podemos deducir fácilmente la siguiente propiedad de los haces de semirrectas

1.5.10. Teorema. Sean $Hs(O)$ un haz de semirrectas y $\overrightarrow{OP} \in Hs(O)$. Entonces, la recta $\overleftrightarrow{OP}$ divide al conjunto

$$Hs(O) - \{\overrightarrow{OP}, \overleftarrow{OP}\}$$

en dos subconjuntos tales que cada uno de ellos consiste de las semirrectas del haz que yacen en uno de los semiplanos determinados por la recta $\overleftrightarrow{OP}$.

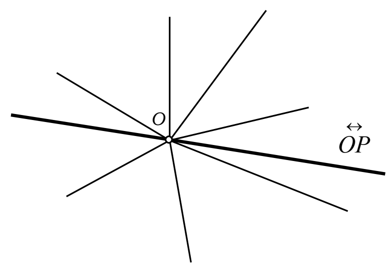


Figura 1.30

1.5.11. Teorema. Sean $Hs(O)$ un haz de semirrectas y $\overrightarrow{OP} \in Hs(O)$. Si $\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{OP_2}$,..., $\overrightarrow{OP_k} \in Hs(O)$ yacen en un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{OP}$, en donde k es un número entero positivo, entonces para cada punto $A \in \overrightarrow{OP}$, podemos encontrar una semirrecta $\overrightarrow{AB}$ que corte a cada una de las semirrectas $\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{OP_2}$,..., $\overrightarrow{OP_{k-1}}$ y $\overrightarrow{OP_k}$ en un solo punto.

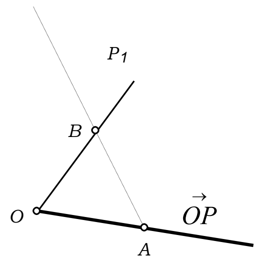


Figura 1.31

Prueba: Fijamos un punto $A \in \overrightarrow{OP}$. Procedamos por inducción sobre k. Si $k = 1$, entonces tomamos un punto $B \in \overrightarrow{OP_1}$. Evidentemente, las semirrectas $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{OP_1}$ se cortan en el punto B. Supongamos que el teorema se cumple para una cantidad menor o igual a k de semirrectas del haz $Hs(O)$. Tomemos rectas $\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{OP_2}$,..., $\overrightarrow{OP_k}$, $\overrightarrow{OP_{k+1}} \in Hs(O)$ sobre un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{OP}$. Por hipótesis de inducción, podemos encontrar una semirrecta $\overrightarrow{AC}$ tal que $\overrightarrow{AC} \cap \overrightarrow{OP_i} = \{A_i\}$, para cada $i = 1,..., k$. Si $\overrightarrow{AC}$ corta a la semirrecta $\overrightarrow{OP_{k+1}}$, entonces $\overrightarrow{AC}$ es la semirrecta buscada. Supongamos que $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{OP_{k+1}}$ no se cortan. Supondremos también que las semirrectas $\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{OP_2}$,..., $\overrightarrow{OP_k}$ y $\overrightarrow{OP_{k+1}}$ están colocadas en el plano tal y como lo muestra la siguiente figura:

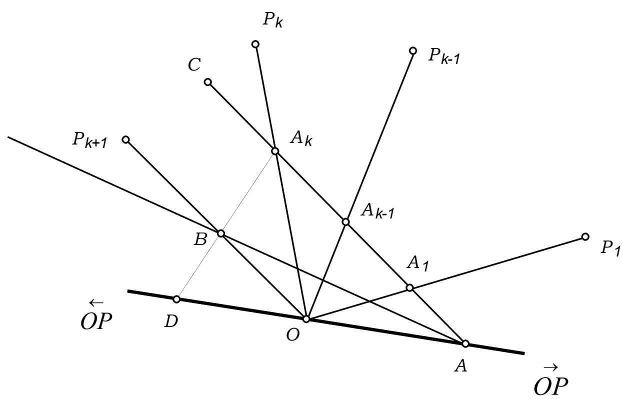


Figura 1.32

Consideremos la semirrecta $\overleftarrow{OP}$ opuesta a $\overrightarrow{OP}$ y sobre ella fijamos un punto $D \in \overleftarrow{OP}$. Observemos que el vértice O del haz está entre los puntos A y D. Por hipótesis, sabemos que las semirrectas $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$,..., $\overrightarrow{OA_k}$ yacen en un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{OP}$. Consideremos el triángulo $\Delta DA\,A_k$. De acuerdo con el Axioma de Pasch, la semirrecta $\overrightarrow{OP_{k+1}}$ corta al segmento DA_k en un punto que le llamaremos B. Ahora, el Axioma de Pasch aplicado al triángulo ΔABD, nos garantiza que las semirrectas $\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{OP_2}$,..., $\overrightarrow{OP_{k-1}}$ y $\overrightarrow{OP_k}$ cortan a la semirrecta $\overrightarrow{AB}$. Esto prueba que $\overrightarrow{AB}$ es la semirrecta deseada. ♣

Nuestra próxima tarea es la caracterización del conjunto formado por las semirrectas de un haz de semirrectas que yacen sobre un mismo semiplano determinado por una recta que pasa por el vértice del haz.

1.5.12. Teorema. Sea $Hs(O)$ un haz de semirrectas. Entonces, las semirrectas $\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{OP_2}$, ..., $\overrightarrow{OP_k} \in Hs(O)$ yacen en un mismo semiplano determinado por una recta que pasa por su vértice O si y solo si existe una recta que corta a cada una de las semirrectas $\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{OP_2}$,..., $\overrightarrow{OP_{k-1}}$ y $\overrightarrow{OP_k}$ en un solo punto.

Prueba: La necesidad es consecuencia del Teorema 1.5.11. Procedamos a probar la suficiencia.

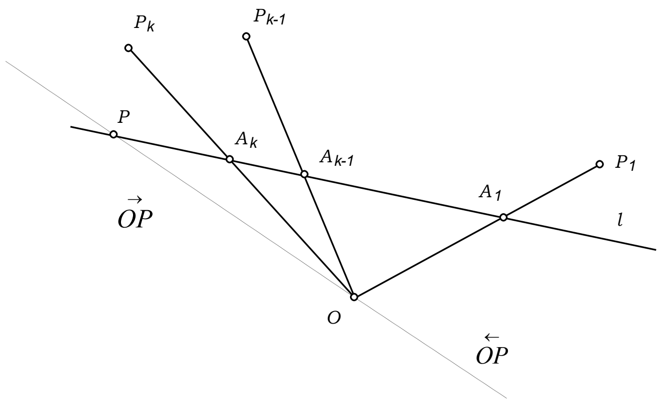


Figura 1.33

Supongamos que la recta l corta a las semirrectas $\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{OP_2}$,..., $\overrightarrow{OP_{k-1}}$ y $\overrightarrow{OP_k}$ en los puntos A_1, A_2 ,..., A_{k-1} y A_k, respectivamente. Tomemos un punto $P \in l$, de tal forma que no pertenezca a ninguno de los segmentos cuyos puntos extremos estén entre los puntos A_1, A_2 ,..., A_{k-1} y A_k (esto es posible aplicando de manera inductiva el Axioma O_4). Veamos que la recta $\overleftrightarrow{OP}$ cumple todas las condiciones. Efectivamente, como la recta $\overleftrightarrow{OP}$ no corta ninguno de los segmentos $A_i A_j$, para cada $1< i \neq j \leq k$, por los Teoremas 1.4.5 y 1.5.5, concluimos que todas las semirrectas $\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{OP_2}$,..., $\overrightarrow{OP_{k-1}}$ y $\overrightarrow{OP_k}$ yacen en un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{OP}$. ♣

1.6. Interior y exterior de un triángulo

1.6.1. Definición. El *interior* de un triángulo ΔABC se define como el conjunto $int(\Delta ABC) = \{ P : P$ y A están en un mismo semiplano determinados por $\overleftrightarrow{BC}$, P y B están en un mismo semiplano determinados por $\overleftrightarrow{AC}$, y P y C están en un mismo semiplano determinados por $\overleftrightarrow{AB}\}$. El *exterior* de un triángulo ΔABC, denotado por $ext(\Delta ABC)$, es el conjunto de puntos que no pertenecen ni al triángulo ΔABC y ni a su interior $int(\Delta ABC)$.

$int(\Delta ABC)$ $ext(\Delta ABC)$

Figura 1.34

No es difícil ver que todo triángulo divide al plano en tres conjuntos $int(\Delta ABC)$, ΔABC y $ext(\Delta ABC)$, que son disjuntos entre sí. A continuación, demostraremos que el interior y el exterior de un triángulo son conjuntos no vacíos.

1.6.2. Teorema. Si ΔABC es un triángulo, entonces $int(\Delta ABC) \neq \varnothing \neq ext(\Delta ABC)$.

Prueba: Sean $M \in BC - \{B, C\}$ y $P \in MA - \{M, A\}$. Probaremos que $P \in int(\Delta ABC)$. En efecto, como $AP \cap \overleftrightarrow{BC} = \varnothing$, P y A están en un mismo semiplano determinado por $\overleftrightarrow{BC}$. En el triángulo ΔBMP, se cumple que $PM \cap \overleftrightarrow{AC} = \varnothing = BM \cap \overleftrightarrow{AC}$ y entonces, por el Axioma de Pasch, hallamos que $PB \cap \overleftrightarrow{AC} = \varnothing$. Lo cual quiere decir que P y B están en un mismo semiplano determinado por $\overleftrightarrow{AC}$. Como

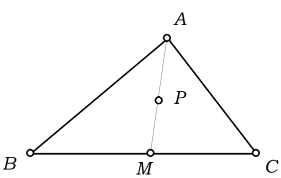


Figura 1.35

$$PM \cap \overleftrightarrow{AB} = \varnothing = CM \cap \overleftrightarrow{AB},$$

mediante el mismo argumento anterior, concluimos que P y C yacen en un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{AB}$. Esto prueba que $P \in int(\Delta ABC)$. Si Q es un punto en el plano determinado por la recta $\overleftrightarrow{BC}$ que no contiene a A, por definición, obtenemos que $Q \notin \text{int}(\Delta ABC) \cup \Delta ABC$. De aquí concluimos que

$$int(\Delta ABC) \neq \varnothing \neq ext(\Delta ABC). \clubsuit$$

Vale la pena recalcar que todo punto $P \in ext(\Delta ABC)$ satisface al menos una de las siguientes afirmaciones:

P y A están en diferentes semiplanos determinados por la recta $\overleftrightarrow{BC}$.

P y B están en diferentes semiplanos determinados por la recta $\overleftrightarrow{AC}$.

P y C están en diferentes semiplanos determinados por la recta $\overleftrightarrow{AB}$.

1.6.3. Teorema. Sea ΔABC un triángulo cualquiera. Si l es una recta que pasa por uno de los vértices del triángulo y $l \cap int(\Delta ABC) \neq \varnothing$, entonces l interseca al lado opuesto al vértice por donde pasa.

Prueba: Sea l una recta que, sin pérdida de generalidad, pasa por el vértice A y por un punto dado $P \in int(\Delta ABC)$. Probaremos que l corta al lado BC. Es claro que $B, C \notin l$, pues de otro modo tendríamos que $P \in l =$

$\overleftrightarrow{AB}$ o que $P \in l = \overleftrightarrow{AC}$, lo cual sería imposible. Fijamos un punto $A' \in \overleftrightarrow{AC}$ tal que A' y C estén en lados opuestos de la recta $\overleftrightarrow{AC}$ con respecto al vértice A (dicho punto A' existe por el Axioma O_4).

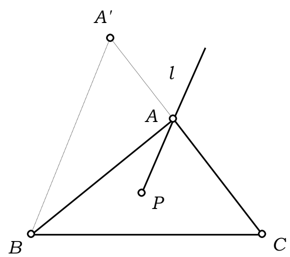


Figura 1.36

Observemos que el punto A' y el punto P están en diferentes semiplanos determinados por la recta $\overleftrightarrow{AB}$. Sabemos que la recta $\overleftrightarrow{AP}$ interseca al lado $A'C$ del triángulo $\Delta A'BC$ y no pasa por ninguno de sus vértices. El Axioma de Pasch nos dice que la recta $\overleftrightarrow{AP}$ debe intersecar a $A'B$ o a BC. Como A' y P están en diferentes semiplanos determinados por la recta $\overleftrightarrow{AB}$, en virtud de los Teoremas 1.5.2 y 1.5.3, $A'B \cap \overleftrightarrow{AP} = \emptyset$. Por consiguiente, obtenemos que $BC \cap \overleftrightarrow{AP} \neq \emptyset$, tal como se deseaba.

♣

Dejamos al lector verificar que el Teorema 1.6.3 es equivalente al Axioma de Pasch (Problema 1.171).

1.7. Congruencia de segmentos

En geometría decimos que dos figuras geométricas son *iguales* si son la misma como conjuntos de puntos del plano. Por otra parte, la idea intuitiva de *congruencia* entre dos figuras geométricas es cuando ambas tienen el mismo tamaño y la misma forma (la palabra *congruente* viene del latín *con* y *gruere* cuyo significado es *en coincidencia con*). Uno también podría decir que dos figuras son congruentes si moviendo libremente una de ellas se puede hacer coincidir con la otra. Pero el principal problema que se encuentra con esta definición es que al mover una figura a través del plano, tenemos que asegurarnos de que esta no se distorsione o sufra alguna otra alteración. La noción de congruencia ofrece muchas dificultades al intentar formalizarla, pero es bastante claro lo que se quiere decir por dos figuras congruentes. Para evitar esta problemática, en la Geometría Euclidiana se da por entendida la noción de congruencia sin ninguna formalización, y sus relaciones y propiedades básicas se dan de manera axiomática. Dos figuras geométricas que son iguales son congruentes, pero dos figuras geométricas congruentes no son necesariamente iguales, pues pueden al mismo tiempo ser congruentes y disjuntas como conjuntos de puntos. Dos figuras geométricas congruentes gozan de las mismas propiedades. Usualmente se usa el símbolo $\cong$ para denotar que dos figuras geométricas son congruentes. Si AB y $A'B'$ son segmentos, la notación $AB \cong A'B'$ se lee *el segmento AB es congruente con el segmentos A'B'*. Las propiedades básicas de la relación de congruencia entre segmentos quedan establecidas por el siguiente grupo de axiomas:

Axiomas de Congruencia:

$\mathbf{CS_1}$: La relación de congruencia es una relación de equivalencia:

1. (Reflexiva) $AB \cong AB$ para todo segmento AB.
2. (Simétrica) Si $AB \cong A'B'$, entonces $A'B' \cong AB$.
3. (Transitiva) $AB \cong A'B'$ y $A'B' \cong A''B''$, entonces $AB \cong A''B''$.

$\mathbf{CS_2}$: Sobre una recta dada y en cada una de sus dos direcciones con respecto a un punto dado sobre ella, es posible determinar uno y solo un segmento congruente a un segmento dado.

$\mathbf{CS_3}$: Sean C un punto entre A y B, y C' un punto entre A' y B'. Si $AC \cong A'C'$ y $CB \cong C'B'$, entonces $AB \cong A'B'$.

En otras palabras, el Axioma CS_3 establece que si a dos segmentos congruentes se les suman segmentos congruentes, entonces las sumas también serán congruentes. El Axioma CS_2 nos asegura, de manera intuitiva, el poder trasladar segmentos en cualquier dirección del plano sin que se distorsionen.

Vale la pena remarcar que la congruencia no depende del orden en que se enuncien los puntos extremos de los segmentos.

1.7.1. Teorema de Sustracción de Segmentos. Sean C un punto entre A y B, y C' un punto entre A' y B'. Si $AB \cong A'B'$ y $AC \cong A'C'$, entonces $CB \cong C'B'$.

Prueba: De acuerdo con el Axioma CS_2, podemos encontrar dos únicos puntos P y Q sobre la recta $\overleftrightarrow{AB}$ tales que P está entre Q y B; los puntos A, P y Q están en un mismo lado de la recta $\overleftrightarrow{AB}$ con respecto al punto B, $QP \cong A'C'$ y $PB \cong C'B'$. Por el Axioma CS_3, sabemos que $QB \cong A'B' \cong AB$. Del Axioma CS_2, encontramos que $Q = A$. Por ello, $AP = QP \cong A'C' \cong AC$. Aplicando una vez mas el Axioma CS_2, obtenemos que $P = C$. Por consiguiente, $CB = PB \cong C'B'$. ♣

En la mayoría de los casos, para resolver un problema geométrico es preciso establecer la congruencia de dos segmentos. Es por esto que la relación de congruencia entre segmentos juega un papel fundamental en la geometría.

1.8. Longitud de segmentos

Intuitivamente nos podemos dar cuenta de la existencia de una correspondencia biunívoca entre los puntos de una recta y los números reales. Esta relación nos permite pensar en la formulación de una escala numérica en cada una de las rectas del plano Euclidiano. El uso de una escala numérica es de gran importancia en la Geometría Euclidiana y tiene muchas aplicaciones en la vida cotidiana. Por ejemplo, mediante una escala se puede medir la longitud de los segmentos de una recta y así poder hablar numéricamente del perímetro de ciertas figuras geométricas. La existencia de la escala mencionada se establece de manera axiomática como a continuación veremos.

AM: Para cada par de puntos A y B, al segmento AB le corresponde un único número real $|AB|$ tal que:
0. $A=B$, si y solo si $|AB| = 0$.
1. $|AB| > 0$.
2. Si $AB \cong A'B'$, entonces $|AB| = |A'B'|$.
3. Si A, B y C son tres puntos colineales tales que C está entre A y B, entonces
$$|AB| = |AC| + |CB|.$$
4. Para cada número real positivo r existe un segmento AB tal que $r < |AB|$.
Al número $|AB|$ se le llama la *longitud* del segmento AB.

1.8.1. Teorema. $AB \cong A'B'$ si y solo si $|AB| = |A'B'|$.

Prueba: La necesidad corresponde a la segunda cláusula del Axioma AM. Para la suficiencia, supongamos que AB y $A'B'$ son dos segmentos tales que $|AB| = |A'B'|$. De acuerdo con el Axioma CS_2, es posible encontrar $E \in \overleftrightarrow{A'B'}$ tal que $AB \cong A'E$, y B' y E estén del mismo lado de la recta $\overleftrightarrow{A'B'}$ con respecto al punto A'. Ahora probaremos que $E = B'$. Supongamos que E está entre A' y B'. De acuerdo con el Axioma AM, $|A'B'| = |A'E| + |EB'| = |AB|$ y como $|AB| = |A'E|$, se cumple entonces que $|EB'| = 0$, lo cual contradice nuestra suposición. Supongamos pues que B' está entre A' y E. Según el Axioma AM, $|AB| = |A'E| = |A'B'| + |B'E|$. De donde se sigue que $|B'E| = 0$. Es decir, $E = B'$ y, por lo tanto, $AB \cong A'B'$. ♣

1.8.2. Teorema. Sean A, B y C tres puntos colineales. Entonces, C está entre A y B si y solo si
$$|AB| = |AC| + |CB|.$$

Prueba: *Necesidad*. Del Axioma AM obtenemos directamente que $|AB| = |AC| + |CB|$.
Suficiencia. Sean A, B y C tres puntos colineales. Sin pérdida de generalidad supondremos que A precede a B. Primero analizaremos el caso cuando A esté entre C y B. Según el Axioma AM, hallamos que $|CB|=|CA| + |AB|$ y como $|AB| = |AC| +|CB|$, se cumple que $2|AC| = 0$, pero esto es una contradicción. Ahora supongamos que B está entre A y C. Del Axioma AM y nuestra hipótesis, se sigue que $|AC| = |AB| + |BC| = |AB| - |CB|$. De aquí hallamos que $2|BC| = 0$, lo cual también es imposible. Por lo tanto, C está entre A y B. ♣

1.8.3. Teorema. Si A_1, A_2..., A_k son puntos consecutivos, en donde $k > 2$ es un número entero, entonces
$$|A_1 A_k| = |A_1 A_2| + \ldots + |A_{k-1} A_k|.$$

Prueba: La demostración es por inducción. Si $k = 3$, el resultado se sigue directamente del Axioma AM. Supongamos que el teorema se cumple para k puntos consecutivos. Sean A_1, A_2,…, A_k y A_{k+1} $k + 1$ puntos consecutivos. Consideremos los puntos A_1, A_2,…, A_{k-1} y A_{k+1}. Por hipótesis de inducción, sabemos que $|A_1 A_{k+1}| = |A_1 A_2| + \ldots + |A_{k-1} A_{k+1}|$. Ya que el punto A_k yace entre los puntos A_{k-1} y A_{k+1}, por el Axioma AM, obtenemos que $|A_{k-1} A_{k+1}| = |A_{k-1} A_k| + |A_k A_{k+1}|$. Sustituyendo esta última igualdad en la identidad anterior hallamos que
$$|A_1 A_{k+1}| = |A_1 A_2| + \ldots + |A_{k-1} A_{k+1}| = |A_1 A_2| + \ldots + |A_{k-1} A_k| + |A_k A_{k+1}|. \text{ ♣}$$

1.8.4. Teorema. Si r es un número real positivo y $\overrightarrow{AB}$ una semirrecta, entonces existe un punto $C \in \overrightarrow{AB}$ tal que $r < |AC|$.

Prueba: De acuerdo con el Axioma AM, podemos encontrar un segmento PQ de tal modo que $r < |PQ|$. Según el Axioma CS_2, existe un punto $C \in \overrightarrow{AB}$ tal que $AC \cong PQ$. Del Axioma AM concluimos que
$$|AC| = |PQ| > r. \text{ ♣}$$

1.8.5. Corolario. Si r es un número real positivo, l es una recta y $P \in l$, entonces existen dos puntos $A, B \in l$ tales que $r < |PA| = |PB|$ y P está entre A y B.

Prueba: Aplicando el Teorema 1.8.4 a las dos semirrectas opuestas de l que tienen a P como su vértice, encontramos dos puntos A y B sobre l, uno en cada una de tales semirrectas, de modo que $r < |PA| = |PB|$. Claramente, P está entre A y B. ♣

Cabe mencionar que un segmento puede tener más de una longitud, puesto que su longitud depende de la escala numérica elegida. Por ejemplo, si $|\ |$ es una función longitud para los segmentos del plano (es decir, cumple con el Axioma AM) y s es un número real positivo, entonces la función que a cada segmento AB le asocia el número $s|AB|$ también cumple con todas las condiciones del Axioma AM (ver Problema 1.259). Una escala queda determinada por los segmentos que tengan longitud unitaria en la misma. En otras palabras, la longitud de un segmento en cierta escala numérica es el resultado de compararla con un segmento de longitud uno. Por ello, si dos escalas tienen los mismos segmentos unitarios, entonces las longitudes de todos los segmentos del plano en ambas escalas coinciden. Veamos esto con un poco más de formalismo, supongamos que AB es un segmento arbitrario y CD un segmento de longitud 1. Si $|AB| = i$ es un número entero positivo, entonces el segmento AB se obtiene del segmento CD al copiar este último i veces. Para el caso cuando $|AB| = \frac{i}{j}$, en donde i y j son dos números enteros positivos, primero dividimos el segmento CD en j segmentos congruentes entre sí y después a uno de estos segmentos lo copiamos i veces y obtenemos así un segmento congruente a AB. El caso cuando la longitud de AB sea irracional, se procede a la aproximación con segmentos de longitud racional. Veremos la existencia de segmentos de longitud 1 más adelante.

1.9. Desigualdad de segmentos

En esta sección, veremos cómo los segmentos del plano se pueden comparar entre sí según su tamaño.

1.9.1. Definición. Sean AB y CD dos segmentos. Decimos que $AB < CD$ si existe un punto E entre C y D tal que $AB \cong CE$.

Procedamos ahora a establecer la equivalencia entre la desigualdad de segmentos y la desigualdad de los números reales.

1.9.2. Teorema. Sean AB y CD dos segmentos. Entonces $AB < CD$ si y solo si $|AB| < |CD|$.

Prueba: *Necesidad*. Supongamos que $AB < CD$. Por definición, existe un punto E entre C y D tal que $AB \cong CE$. Del Axioma AM se sigue la desigualdad $|AB| = |CE| < |CE| + |ED| = |CD|$, tal y como se quería.

Suficiencia. Por el Axioma CS_2, existe un punto $E \in \overrightarrow{CD}$ tal $AB \cong CE$. Supongamos que D está entre C y E. Según el Axioma AM, $|CD| < |CD| + |DE| = |CE| = |AB|$, lo cual contradice la desigualdad $|AB| < |CD|$. Si $D = E$, entonces $AB \cong CD$ y de aquí, en virtud del Axioma AM, $|AB| = |CD|$, pero esto es imposible pues $|AB| < |CD|$. Por lo tanto, E está entre C y D y $AB \cong CE$. Por definición, concluimos que $AB < CD$. ♣

1.9.3. Teorema (Transitividad). Si $AB < A'B'$ y $A'B' < A''B''$, entonces $AB < A''B''$.

Prueba: Del Teorema 1.9.2 sabemos que $|AB| < |A'B'|$ y $|A'B'| < |A''B''|$. Aplicando la transitividad del orden de los números reales, hallamos que $|AB| < |A''B''|$. Por el teorema anterior, $AB < A''B''$. ♣

1.9.4. Teorema. Si P y Q son dos puntos entre A y B, entonces $AP < AB$, $PB < AB$ y $PQ < AB$.

Prueba: Sin perder generalidad, supongamos que los puntos A, P, Q, y B, son consecutivos. Según el Teorema 1.8.3, $|AB| = |AP| + |PQ| + |QB| = |AP| + |PB|$. De donde obtenemos las desigualdades $|AB| > |AP|$, $|AB| > |PB|$ y $|AB| > |PQ|$. De acuerdo con el Teorema 1.9.2, hallamos que $AP < AB$, $PB < AB$ y $PQ < AB$. ♣

Podemos observar del teorema anterior que si C es un punto que está entre A y B, entonces $AC < AB$. Además, si $AB < CD$, entonces AB y CD no pueden ser congruentes.

1.9.5. Lema. Sean AB, $A'B'$ y $A''B''$ tres segmentos cualesquiera.
1. Si $AB < A'B'$ y $AB \cong A''B''$, entonces $A''B'' < A'B'$.
2. Si $AB < A'B'$ y $A'B' \cong A''B''$, entonces $AB < A''B''$.

Prueba: 1. De acuerdo con la hipótesis y el Teorema 1.9.2, sabemos que $|AB| < |A'B'|$ y $|AB| = |A''B''|$. De aquí deducimos que $|A''B''| = |AB| < |A'B'|$. Según el Teorema 1.9.2, $AB < A'B'$.
2. Si $AB < A'B'$ y $A'B' \cong A''B''$, entonces $|AB| < |A'B'|$ y $|A'B'| = |A''B''|$. Por ello, $|AB| < |A'B'| = |A''B''|$. Por el Teorema 1.9.2, concluimos que $AB < A''B''$. ♣

1.9.6. Teorema. Sean A, B y C tres puntos colineales tales que B y C están del mismo lado de la recta que los contiene con respecto al punto A. Entonces, $AB < AC$ si y solo si B está entre A y C.

Prueba: La suficiencia se sigue de manera inmediata del Teorema 1.9.4.

Necesidad. Sabemos, por el Teorema 1.9.2, que $|AB| < |AC|$. Sin perder generalidad supongamos que A precede a B. Entonces, A también precede a C. Si C está entre A y B, en virtud del Axioma AM, encontramos que $|AB| = |AC| + |CB| > |AC|$, pero esto es una contradicción. Por consiguiente, B está entre A y C. ♣

Si AB y CD son dos segmentos, entonces decimos que $AB \leq CD$ si $AB < CD$ o $AB \cong CD$.

1.9.7. Teorema. Sean AB y CD dos segmentos. Entonces, $|AB| \leq |CD|$ si y solo si $AB \leq CD$.

Prueba: *Necesidad*. Si $|AB| \leq |CD|$, por ser las longitudes números reales, entonces $|AB| < |CD|$ o $|AB| = |CD|$. Empleando los Teoremas 1.8.1 y 1.9.2, obtenemos que $AB < CD$ o $AB \cong CD$.

Suficiencia. Supongamos que $AB \leq CD$. Por definición, $AB < CD$ o $AB \cong CD$. Se sigue del Teorema 1.9.2 y del Axioma AM que $|AB| < |CD|$, o bien, $|AB| = |CD|$. Es decir, $|AB| \leq |CD|$. ♣

Así, hemos demostrado que la desigualdad $|AB| \leq |CD|$ es equivalente a decir que "$AB < CD$ o $AB \cong CD$". Con la equivalencia dada en el Teorema 1.9.7, se demuestran fácilmente las siguientes propiedades de la desigualdad de segmentos.

1.9.8. Teorema. Sean AB, $A'B'$ y $A''B''$ tres segmentos cualesquiera. Entonces, se cumplen los siguientes enunciados:

1. (Reflexiva) $AB \leq AB$.
2. (Antisimétrica) Si $AB \leq A'B'$ y $A'B' \leq AB$, entonces $AB \cong A'B'$.
3. (Transitiva) Si $AB \leq A'B'$ y $A'B' \leq A''B''$, entonces $AB \leq A''B''$.

Prueba: 1. Como $AB \cong AB$, obtenemos directamente que $AB \leq AB$.

2. Si $AB \leq A'B'$ y $A'B' \leq AB$, entonces $|AB| \leq |A'B'|$ y $|A'B'| \leq |AB|$. Por consiguiente, $|AB| = |A'B'|$. Del Teorema 1.8.1 concluimos que $AB \cong A'B'$.

3. Supongamos que $AB \leq A'B'$ y $A'B' \leq A''B''$. Según el Teorema 1.9.7, $|AB| \leq |A'B'|$ y $|A'B'| \leq |A''B''|$. Lo cual implica que $|AB| \leq |A''B''|$. Del Teorema 1.9.7, concluimos que $AB \leq A''B''$. ♣

En el siguiente teorema veremos que cualesquiera dos segmentos se pueden comparar (es decir, podemos decir que uno de ellos es más pequeño que el otro).

1.9.9. Teorema. Si AB y CD son dos segmentos, entonces una y solo una de las siguientes afirmaciones se cumplen:

1. $AB < CD$,
2. $AB \cong CD$,
3. $AB > CD$.

Prueba: La demostración es una consecuencia directa de la tricotomía de los números reales y de los Teoremas 1.8.1 y 1.9.2. ♣

1.10. Axiomas de Continuidad y Completo

La posibilidad de poder conseguir segmentos de longitudes arbitrarias sobre una recta fija y ver que nuestras rectas no tengan hoyos, es la idea intuitiva que uno dispone del concepto de continuidad sobre una recta. Mediante los axiomas de Arquímedes y de Cantor, que a continuación describimos, nos será posible introducir de manera axiomática el concepto de continuidad en cualquier recta del plano.

Axioma de Arquímedes: Sean A, B, C y D cuatro puntos distintos. Entonces, sobre la semirrecta $\overrightarrow{AB}$ existe una cantidad finita de puntos consecutivos $A_0 = A,\ A_1,\ A_2, \ldots,\ A_k$ tales que $CD \cong A\,A_1 \cong A_1\,A_2 \cong \ldots \cong A_{k-1}\,A_k$ y se cumple que B está entre A_{k-1} y A_k, o bien, $B = A_k$.

Figura 1.37

Veamos lo que quiere decir geométricamente el Axioma de Arquímedes:

Si $CD \cong AB$, entonces tenemos que el Axioma de Arquímedes se cumple si ponemos $B = A_1$. Si $CD > AB$, por el Axioma CS_2, podemos encontrar un punto $A_1 \in \overrightarrow{AB}$ tal que $A\,A_1 \cong CD$ y por el Teorema 1.9.6, hallamos que B está entre A y A_1. Si $CD < AB$, entonces el Axioma de Arquímedes nos dice, intuitivamente, que colocando el segmento CD una cantidad finita de veces sobre la semirrecta $\overrightarrow{AB}$, se puede obtener un segmento que exceda al mayor, AB, y que dicho segmento quede dividido en una cantidad finita de segmentos congruentes al segmento menor, CD.

El siguiente axioma garantiza que las rectas del plano no tienen agujeros.

Axioma de Cantor: Si$\{ A_k\, B_k : k \in \boldsymbol{N}\}$ es una familia numerable de segmentos tales que $A_{k+1}\, B_{k+1} \subseteq A_k\, B_k$, para todo $k \in \boldsymbol{N}$, entonces $\cap\{ A_k\, B_k : k \in \boldsymbol{N}\} \neq \varnothing$.

A continuación, enunciamos una aplicación muy importante del Axioma de Cantor.

1.10.1. Teorema. Si $\{ A_k\, B_k : k \in \boldsymbol{N}\}$ es una familia numerable de segmentos que satisfacen las siguientes condiciones:

1. $A_{k+1}\, B_{k+1} \subseteq A_k\, B_k$ para todo entero positivo $k \in \boldsymbol{N}$.
2. Para cada segmento arbitrario CD, existe un índice $k \in \boldsymbol{N}$ tal que $A_k\, B_k < CD$.

Entonces, la intersección $\cap\{ A_k\, B_k : \mathrm{k} \in \boldsymbol{N}\}$ consiste de un solo punto.

Prueba: El Axioma de Cantor nos asegura que $\cap\{ A_k\, B_k : k \in \boldsymbol{N}\} \neq \varnothing$. Supongamos que hay dos puntos P, Q $\in \cap\{ A_k\, B_k : k \in \boldsymbol{N}\}$. Por la segunda condición, existe $i \in \boldsymbol{N}$ tal que $A_i\, B_i < PQ$. Pero como $P, Q \in A_i\, B_i$, por el Teorema 1.9.4, hallamos que $PQ < A_i\, B_i$, lo cual es imposible. Por lo tanto, la intersección $\cap\{ A_k\, B_k : k \in \boldsymbol{N}\}$ es igual a un solo punto. ♣

1.10.2. Lema. Sean AB y CD dos segmentos arbitrarios. Entonces, existe un número natural positivo k tal que $|AB| \leq k|CD|$.

Prueba: Solo basta considerar el caso cuando $CD < AB$. De acuerdo con el Axioma de Arquímedes, existen puntos consecutivos $A_1,\ A_2 \ldots,\ A_k$ sobre la semirrecta $\overrightarrow{AB}$ tales que $CD \cong A\,A_1 \cong \ldots\ldots \cong A_{k-1}\,A_k K$, y se tiene que B está entre A_{k-1} y A_k, o $B = A_k$. De estas congruencias, basándonos en el Axioma AM y en los Teoremas 1.8.3 y 1.9.4, obtenemos que

$$|AB| \leq |A\,A_k| = |A\,A_1| + |A_1\,A_2| + \ldots + |A_k\,A_{k-1}| = k|CD|. ♣$$

1.10.3. Lema. Dado un segmento AB, existe una familia numerable de segmentos $\{ P_k Q_k : k \in \boldsymbol{N}\}$ tales que $P_{k+1} Q_{k+1} \subseteq P_k Q_k \subseteq AB$ y $|P_k Q_k| \leq \dfrac{|AB|}{2^k}$, para cada número natural positivo $k \in \boldsymbol{N}$.

Prueba: Fijamos un punto $M \in AB$. Sabemos, por el Axioma AM, que $|AB| = |AM| + |MB|$. De aquí se sigue que $|AM| \leq \dfrac{|AB|}{2}$, o $|MB| \leq \dfrac{|AB|}{2}$. Sea $P_1 Q_1 \in \{AM, MB\}$ tal que $|P_1 Q_1| \leq \dfrac{|AB|}{2}$. Procedamos por inducción matemática. Supongamos que hemos encontrado un segmento $P_k Q_k$ tal que $P_k Q_k \subseteq P_{k-1} Q_{k-1} \subseteq AB$ y $|P_k Q_k| \leq \dfrac{|AB|}{2^k}$. Con el mismo razonamiento anterior podemos encontrar puntos

$P_{k+1}, Q_{k+1} \in P_k Q_k$ tales que $|P_{k+1} Q_{k+1}| \leq \dfrac{|P_k Q_k|}{2}$. De nuestra hipótesis de inducción hallamos que

$$|P_{k+1} Q_{k+1}| \leq \frac{|P_k Q_k|}{2} \leq \frac{|AB|}{2^{k+1}}. \clubsuit$$

El teorema que a continuación enunciamos nos garantiza la existencia de segmentos de cualquier longitud y en cualquier posición.

1.10.4. Teorema de la Colocación de la Regla. Sean r un número real positivo y $\overrightarrow{PR}$ una semirrecta. Entonces, existe un único punto $Q \in \overrightarrow{PR}$ tal que $|PQ| = r$.

Prueba: Según el Teorema 1.8.4, podemos encontrar un punto $S \in \overrightarrow{PR}$ tal que $|PS| \geq r$. Observemos que no hay nada que probar si $|PS| = r$. Así pues, supongamos que la desigualdad $|PS| > r$ se cumple. De acuerdo con el Lema 1.10.3, existe una familia numerable de segmentos $\{P_k Q_k : k \in \boldsymbol{N}\}$ tales que

a. $P_{k+1} Q_{k+1} \subseteq P_k Q_k \subseteq PS$, para todo $k \in \boldsymbol{N}$, y

b. $|P_k Q_k| \leq \dfrac{|PS|}{2^k}$, para todo $k \in \boldsymbol{N}$.

Para fines prácticos, pongamos $P = A_0^k$ para cada $k \in \boldsymbol{N}$. Mediante el Axioma de Arquímedes, es posible encontrar puntos consecutivos $P = A_0^1, A_1^1, A_2^1, \ldots, A_{k_1}^1$ sobre la semirrecta $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PR}$ tales que S está entre $A_{k_1-1}^1$ y $A_{k_1}^1$, o $S = A_{k_n}^1$, y $P_1 Q_1 \cong A_0^1 A_1^1 \cong \ldots \cong A_{k_1-1}^1 A_{k_1}^1$. De donde hallamos que

$$r < |PS| \leq |A_0^1 A_1^1| + \ldots + |A_{k_1-1}^1 A_{k_1}^1| = k_1 |P_1 Q_1|.$$

De aquí, podemos encontrar un número entero positivo $1 \leq i_1 \leq k_1 - 1$ tal que $(i_1 - 1)|P_1 Q_1| \leq r \leq i_1 |P_1 Q_1|$. Como $|A_0^1 A_{i_1-1}^1| = (i_1 - 1)|P_1 Q_1|$ y $i_1 |P_1 Q_1| = |A_0^1 A_{i_1}^1|$, se obtiene que $|A_0^1 A_{i_1-1}^1| \leq r \leq |A_0^1 A_{i_1}^1|$. Mediante la inducción matemática, para cada número natural positivo k podemos encontrar un segmento $A_{i_k-1}^k A_{i_k}^k$ tal que

1. $A_{i_{k+1}-1}^{k+1} A_{i_{k+1}}^{k+1} \subseteq A_{i_k-1}^k A_{i_k}^k$, para todo $k \in \boldsymbol{N}$,
2. $|A_{i_k-1}^k A_{i_k}^k| \leq \dfrac{|PS|}{2^k}$, para todo $k \in \boldsymbol{N}$, y
3. $|A_0^k A_{i_k-1}^k| \leq r \leq |A_0^k A_{i_k}^k|$, para todo $k \in \boldsymbol{N}$.

El teorema queda probado si $|A_0^k A_{i_k-1}^k| = r$ o $r = |A_0^k A_{i_k}^k|$ para algún $k \in \boldsymbol{N}$. Supongamos que $|A_0^k A_{i_k-1}^k| < r < |A_0^k A_{i_k}^k|$, para todo $k \in \boldsymbol{N}$. Por el Axioma de Cantor, sabemos que existe $Q \in \cap\{ A_{i_k-1}^k A_{i_k}^k : k \in \boldsymbol{N}\}$. Del

Teorema 1.9.6 y la tercera cláusula, encontramos que $|A_0^k\ A_{i_k-1}^k| \leq |PQ| \leq |A_0^k\ A_{i_k}^k|$, para todo $k \in \boldsymbol{N}$. Como consecuencia de esto vemos que

$$||PQ| - r| \leq |A_0^k\ A_{i_k}^k| - |A_0^k\ A_{i_k-1}^k| = |A_{i_k-1}^k\ A_{i_k}^k| \leq \frac{|PS|}{2^k},$$

para cualquier número $k \in \boldsymbol{N}$. Lo cual implica la igualdad $|PQ| = r$. La unicidad del punto Q se obtiene del Axioma CS_2 y del Teorema 1.8.1. ♣

1.10.5. Definición. El *punto medio* de un segmento AB es un punto $M \in AB$ tal que $AM \cong MB$.

Probaremos a continuación que el Teorema de la Colocación de la Regla (1.10.4) vale para ambas direcciones de una recta.

1.10.6. Corolario. Sean r un número real positivo, l una recta y $P \in l$. Entonces, existen dos únicos puntos A, $B \in l$ tales que P es el punto medio del segmento AB y $|PA| = |PB| = r$.

Prueba: Por el Teorema de la Colocación de la Regla (1.10.4), existen dos únicos puntos A, $B \in l$ tales que cada uno de ellos pertenece a una de las semirrectas opuestas de l con vértice P y $|AP| = |PB| = r$. De acuerdo con el Teorema 1.8.1, sabemos que $AP \cong PB$. Pero esto significa que P es el punto medio del segmento AB. ♣

Todo segmento tiene un punto medio que resulta ser único:

1.10.7. Teorema. El punto medio de un segmento AB existe y es único.

Prueba: Por el Teorema 1.10.4, sabemos que existe un punto $M \in \overrightarrow{AB}$ tal que $|AM| = \dfrac{|AB|}{2}$. Si $M \notin AB$, entonces tendríamos que B está entre A y M, y por el Axioma AM, $|AM| = |AB| + |BM| = \dfrac{|AB|}{2}$, lo cual sería una contradicción. Por consiguiente, $M \in AB$. Es claro que $A \neq M \neq B$. Del Axioma AM obtenemos que

$$|AB| = |AM| + |MB| = \frac{|AB|}{2} + |MB|,$$

lo cual implica que $|MB| = \dfrac{|AB|}{2}$. De acuerdo con el Teorema 1.8.1, $AM \cong MB$. Esto demuestra la existencia del punto medio de un segmento. Supongamos que M y M' son dos puntos medios del segmento AB. Sabemos que ambos puntos M y M' están entre A y B, $AM \cong MB$ y $AM' \cong M'B$. Según el Axioma AM,

$$|AB| = |AM| + |MB| = |AM'| + |M'B|.$$

Por consiguiente, $2|AM| = 2|AM'|$, es decir, $|AM| = |AM'|$. Del Teorema 1.8.1, obtenemos que $AM \cong AM'$ y con la ayuda del Axioma CS_2, concluimos que $M = M'$. ♣

1.10.8. Corolario. Todo segmento AB se puede dividir en 2^k segmentos de longitud $\dfrac{|AB|}{2^k}$ congruentes entre sí, para cada número entero positivo k.

Prueba: Si $k = 1$, entonces tomamos el punto medio M del segmento AB y observamos que $|AM| = |MB| = \dfrac{|AB|}{2}$. Supongamos que $M_0 = A$, $M_1, \ldots, M_{2^k} = B$ son puntos consecutivos tales que $|M_i\ M_{i+1}| = \dfrac{|AB|}{2^k}$, para cualquier $0 \leq i < 2^k$. Para cada $0 \leq i < 2^k$, tomamos el punto medio N_i del segmento $M_i\ M_{i+1}$, el cual existe por el Teorema 1.10.7. Entonces, tenemos que $M_i\ N_i \cong N_i\ M_{i+1}$ y

$$|M_i\,N_i| = |N_i\,M_{i+1}| = \frac{|M_iM_{i+1}|}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{|AB|}{2^k} = \frac{|AB|}{2^{k+1}},$$

para todo $0 \leq i < 2^k$. Del Teorema 1.8.1 obtenemos que $M_i\,N_i \cong N_i\,M_{i+1}$, para todo $0 \leq i < 2^k$. Por lo tanto, los puntos $M_0 = A$, N_0, M_1, N_1, $M_1, \ldots,$ M_{2^k-1}, N_{2^k-1} y $M_{2^k} = B$ dividen al segmento *AB* en 2^{k+1} segmentos de longitud $\frac{|AB|}{2^{k+1}}$ congruentes entre sí. ♣

Hemos visto en el Teorema 1.2.8 que todo segmento tiene una cantidad infinita de puntos. ¿Pero qué tan grande es esa cantidad infinita de puntos? Para responder a esta pregunta, repetiremos un hermoso argumento utilizado por H. Freudenthal en su libro [l-139]:

Sea *AB* un segmento y supongamos que *AB* sin sus puntos extremos es numerable. Es decir, podemos numerar a los puntos de AB $-\{A, B\}$ como $\{A_k : k \in \mathbf{N}\}$. Primero consideremos al punto A_0. Es posible encontrar un segmento P_0Q_0 contenido en $AB - \{A, B\}$ tal que $A_0 \notin P_0Q_0$. Procediendo de manera inductiva, en la etapa $k > 1$, tomemos un segmento P_kQ_k contenido en $P_{k-1}Q_{k-1}$ tal que $A_k \notin P_kQ_k$. De este modo conseguimos varios segmentos P_kQ_k tales que $P_{k+1}Q_{k+1} \subseteq P_kQ_k$ y $A_k \notin P_kQ_k$, para cada número entero $k \in \mathbf{N}$. Según el Axioma de Cantor, podemos encontrar un punto *C* tal que $C \in P_kQ_k$, para todo $k \in \mathbf{N}$. Es claro que $C \in AB - \{A, B\}$ y que $C \neq A_k$, para todo $k \in N$, lo cual es imposible. Así, queda probado que todo segmento del plano tiene una cantidad no numerable de puntos.

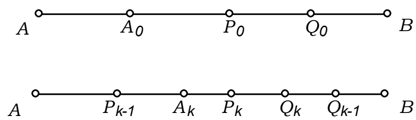


Figura 1.38

Un método geométrico para dividir un segmento en un número arbitrario de segmentos congruentes entre sí será dado en la Construcción 11.1.9. En el Capítulo 11, también analizaremos un método geométrico para encontrar el punto medio de cualquier segmento (11.1.3).

Axioma de Completitud: Los puntos de una recta constituyen un sistema de puntos tales que no puede asignarse ningún nuevo punto a la recta sin que se viole al menos uno de los axiomas precedentes.

Para finalizar esta sección, enunciamos el Axioma de Dedekind que resulta ser equivalente a los axiomas de Arquímedes y de Cantor juntos (Problema 1.404).

Axioma de Dedekind: Si un segmento *AB* es dividido en dos subconjuntos de modo que se cumplan las siguientes condiciones:

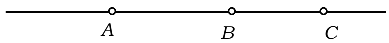
1. Cada punto del segmento *AB* pertenece a alguno de los conjuntos;
2. el punto *A* pertenece al primero de los conjuntos y *B* pertenece al segundo conjunto; y
3. un punto del primer conjunto precede a un punto del segundo conjunto.

Entonces existe un punto $C \in AB$ tal que todo punto de *AB* que preceda a *C* pertenece al primer conjunto, y todo punto de *AB* que le siga pertenece al segundo conjunto.

Los axiomas que aquí hemos presentado, más el Axioma de Congruencia de Triángulos (Capítulo Tercero) y el de las Paralelas (Capítulo Tercero), son suficientes para llevar a cabo un riguroso desarrollo de la Geometría Euclidiana. D. Hilbert [l-180] probó que los cinco grupos de axiomas no se contradicen entre sí. En este libro no pretendemos desarrollar todos los teoremas fundamentales de la Geometría Euclidiana de un modo riguroso, sino de dar una idea de dicho rigor con algunos ejemplos ilustrativos. Uno de los objetivos principales que persigue esta obra es que el estudiante se familiarice y entienda el desarrollo axiomático de la Geometría Euclidiana. Con esto estoy totalmente convencido de que ayudará al lector a entender el desarrollo axiomático que se lleva a cabo en todas las ramas de la matemática moderna. El lector podrá encontrar en la bibliografía algunas referencias sobre el desarrollo axiomático de la Geometría Euclidiana.

1.11. Suma de segmentos

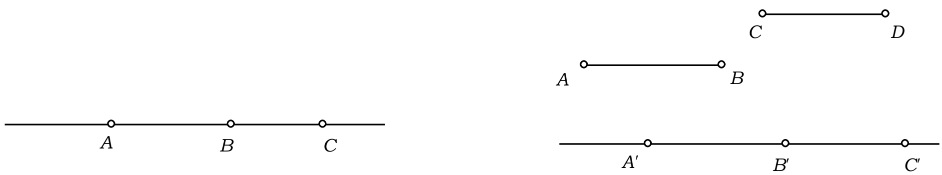
1.11.1. Definición. Se dice que dos segmentos son *consecutivos* si están sobre una misma recta y tienen un punto extremo en común, el cual yace entre los otros dos puntos extremos restantes.



AB y *BC* son segmentos consecutivos, pero *AC* y *BC* no son segmentos consecutivos

Figura 1.39

1.11.2. Definición. La *suma* de dos segmentos consecutivos es el segmento formado por su unión. Sean *AB* y *CD* dos segmentos no consecutivos. La suma de dos segmentos arbitrarios *AB* y *CD*, denotada por *AB* + *CD*, es la suma de dos segmentos consecutivos *A'B'* y *B'C'* tales que $AB \cong A'B'$ y $CD \cong B'C'$.



$AB + BC = AC$ $\qquad$ $AB + CD = A'C'$

Figura 1.40

Podemos ver de la definición que a dos segmentos consecutivos se les asigna como su suma un segmento único bien determinado. Cuando los segmentos no son consecutivos su suma no es única, sin embargo, todas las posibles asignaciones a su suma son segmentos congruentes entre sí como lo establece el siguiente teorema.

1.11.3. Teorema.

1(Propiedad Uniforme). Si *AB* y *CD* son dos segmentos y $AB \cong A'B'$ y $CD \cong C'D'$, entonces

$$AB + CD \cong A'B' + C'D'.$$

2(Propiedad Conmutativa). Si *AB* y *CD* son cualesquiera dos segmentos, entonces $AB + CD \cong CD + AB$.

3(Propiedad Asociativa). Si *AB*, *CD* y *EF* son cualesquiera tres segmentos, entonces

$$(AB + CD) + EF \cong AB + (CD + EF).$$

Prueba: 1. Supongamos que $AB \cong A'B'$ y $CD \cong C'D'$. Por el Axioma CS_2, podemos encontrar dos pares de segmentos consecutivos *EF* y *FG* y *HI* y *IJ* tales que $AB \cong EF$, $CD \cong FG$, $A'B' \cong HI$ y $C'D' \cong IJ$. Por definición, sabemos que $AB + CD = EG$ y $A'B' + C'D' = HJ$. De acuerdo con el Axioma CS_1, tenemos que $EF \cong HI$ y $FG \cong IJ$. En consecuencia, según el Axioma CS_3, concluimos que $EG \cong HJ$.

2. De acuerdo con el Axioma CS_2, podemos encontrar dos pares de segmentos consecutivos *EF* y *FG*, y *HI* y *IJ* tales que $AB \cong EF$, $CD \cong FG$, $CD \cong HI$ y $AB \cong IJ$. Tenemos entonces que $AB + CD = EG$ y $CD + AB = HJ$. Como $EF \cong IJ$ y $FG \cong HI$, por el Axioma CS_3, obtenemos que $EG \cong HJ$. Por consiguiente, $AB + CD \cong CD + AB$.

3. De nueva cuenta usamos el Axioma CS_2 para poder encontrar segmentos consecutivos *GH*, *HI* y *HJ* tales que $AB \cong GH$, $CD \cong HI$ y $EF \cong IJ$. De la definición sabemos que $AB + CD = GI$ y $CD + EF = HJ$. Por lo cual,

$$(AB + CD) + EF = GJ = AB + (CD + EF). \clubsuit$$

Si k es un número natural positivo y AB es un segmento, entonces definimos $1AB = AB$ y $kAB = AB + (k - 1)AB$, para cada número natural $k > 1$. De aquí podemos entonces definir $\frac{1}{k}AB$ como un segmento tal que $k(\frac{1}{k}AB) = AB$, para cada número entero positivo k. Para encontrar el segmento $\frac{1}{k}AB$, hay que dividir el segmento AB en k segmentos congruentes entre sí y observamos que cualquiera de estos segmentos resulta ser congruente con $\frac{1}{k}AB$.

1.11.4. Definición. Sean AB y CD dos segmentos tales que $AB > CD$. La <u>*resta*</u> de los segmentos AB y CD es un segmento $AB - CD$ tal que $CD + (AB - CD) = AB$.

Procedamos a construir el segmento diferencia de dos segmentos AB y CD tales que $AB > CD$:

Por la definición de la desigualdad de dos segmentos, sabemos que existe un punto E entre A y B tal que $CD \cong AE$ y entonces el segmento buscado es $AB - CD = EB$.

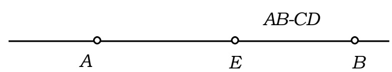


Figura 1.41

1.11.5. Teorema. Para cuatro segmentos arbitrarios AB, CD, EF y GH, se cumplen las siguientes afirmaciones:

1. $|AB + CD| = |AB| + |CD|$.
2. Si $CD < AB$, entonces $|AB - CD| = |AB| - |CD|$.
3. Si $CD < AB$, entonces $CD + EF < AB + EF$.
4(Monotonía). Si $CD < AB$ y $EF < GH$, entonces $CD + EF < AB + GH$.
5. Si $CD + EF \cong AB + EF$, entonces $CD \cong AB$.
6. Si $CD < AB$, entonces $(AB - CD) + CD \cong AB$.

Prueba: 1. Mediante el Axioma CS_2 es posible encontrar segmentos consecutivos EF y FG tales que $AB \cong EF$ y $CD \cong FG$. De la definición y los Teoremas 1.8.1 y 1.8.2, hallamos que

$$|AB + CD| = |EG| = |EF| + |FG| = |AB| + |CD|.$$

2. Por definición, la resta de los segmentos AB y CD es un segmento $AB - CD$ tal que $CD + (AB - CD) = AB$. Aplicando el primer inciso, obtenemos que

$$|AB| = |CD + (AB - CD)| = |CD| + |AB - CD|$$
$$|AB - CD| = |AB| - |CD|.$$

3. Del primer inciso, sabemos que

$$|CD| < |AB|$$
$$|CD| + |EF| < |AB| + |EF|$$
$$|CD + EF| < |AB + EF|.$$

Según el Teorema 1.9.2, $CD + EF < AB + EF$.

4. Con el mismo argumento aplicado en el inciso anterior, obtenemos que

$$|CD| < |AB| \text{ y } |EF| < |GH|$$
$$|CD| + |EF| < |AB| + |GH|$$
$$|CD + EF| < |AB + GH|.$$

De acuerdo con el Teorema 1.9.2, $CD + EF < AB + GH$.

5. Empleando el primer inciso, encontramos que

$$|CD + EF| = |AB + EF|$$
$$|CD| + |EF| = |AB| + |EF|$$
$$|CD| = |AB|$$

$$CD \cong AB.$$

6. Del Teorema 1.8.1 y de los dos primeros incisos, hallamos que

$$|(AB - CD) + CD| = |AB - CD| + |CD| = |AB| - |CD| + |CD| = |AB|$$

$$(AB - CD) + CD \cong AB. \clubsuit$$

1.11.6. Teorema. Si AB es un segmento y k un número natural positivo, entonces $|kAB| = k|AB|$.

Prueba: Procedamos por inducción matemática. Claramente la igualdad se cumple para $k = 1$. Supongamos que $|kAB| = k|AB|$. Según el Teorema 1.11.5(1) y nuestra hipótesis de inducción,

$$|(k + 1)AB| = |AB + kAB| = |AB| + |kAB| = |AB| + k|AB| = (k + 1)|AB|. \clubsuit$$

Como una consecuencia directa de los Teoremas 1.9.2 y 1.11.6 y el Lema 1.10.2, se obtiene la Propiedad arquimediana.

1.11.7. Propiedad arquimediana. Si AB y CD son dos segmentos arbitrarios, entonces existe un número natural k tal que $CD < kAB$.

Problemas

1.1[l-319, p. 29]. Es claro que los axiomas que uno introduzca en un sistema axiomático deben ser compatibles, es decir, que no se contradigan entre ellos. A continuación, enunciamos algunos axiomas que son incompatibles.

a. La población de Smalltown está formada exclusivamente por matrimonios jóvenes y sus hijos.
b. Hay más adultos que niños.
c. Cada niño tiene una hermana.
d. Hay más niños que niñas.
e. No hay pareja sin hijos.

Probar que estos axiomas son incompatibles. ¿Puede el lector hacer algunos cambios para que dichos axiomas sean compatibles?

1.2[l-319, p. 29]. Probar que si se suprime cualquiera de los cinco axiomas del ejercicio anterior, entonces los restantes resultan ser compatibles.

1.3. Se tienen dos términos "hormigas" y "hormigueros". Consideremos los siguientes axiomas:

H_0: Hay al menos un hormiguero.

H_1: Para cualquier par de hormigas, se cumple uno y solamente uno de los siguientes enunciados:

i. Hay uno y solo un hormiguero que las contiene.
ii. Hay dos hormigueros que no contienen hormiga alguna en común y cada uno de ellos contiene a una de las hormigas en cuestión.

H_2: Cada hormiguero es un conjunto de hormigas que contiene por lo menos dos de ellas.

H_3: Por cada hormiguero, hay por lo menos una hormiga que no pertenece al mismo.

Probar las siguientes afirmaciones:

a. Dos hormigueros distintos no pueden tener más de una hormiga en común.
b. Para cada hormiga, hay un hormiguero que no la contiene.
c. Hay por lo menos tres hormigas.
d. Hay por lo menos dos hormigueros.
e. Existen tres hormigas que no pertenecen a un mismo hormiguero.

Contestar las siguientes preguntas:

f. ¿Cualesquiera dos hormigueros siempre tienen una hormiga en común?
g. ¿Es posible que una hormiga pertenezca a dos hormigueros distintos?
h. ¿Hay por lo menos tres hormigueros distintos?
i. ¿Es posible que una hormiga pertenezca a todos los hormigueros?
j. ¿Es posible que dos hormigueros distintos no tengan una hormiga en común?
k. ¿Es posible que cada hormiguero tenga solamente dos hormigas?

1.4. ¿Puede todo el plano ser una recta?

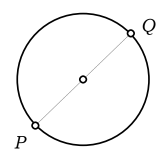
1.5. ¿Puede el conjunto vacío ser una recta?

1.6. ¿Qué Axiomas de Incidencia satisfacen $P = \varnothing$ y $L = \{\varnothing\}$?

1.7. ¿Qué Axiomas de Incidencia satisfacen $P = \{P\}$ y $L = \{\{P\}\}$?

1.8. Si a los puntos del plano que cumpla con todos los Axiomas de Incidencia les llamamos rectas y a las rectas puntos, ¿qué Axiomas de Incidencia se cumplen?

1.9. Consideremos un círculo como nuestro universo P y definamos $L = \{\{P, Q\}: P \text{ y } Q$ son puntos diametralmente opuestos de $P\}$. ¿Cuáles Axiomas de Incidencia satisfacen P y L?



1.10. ¿Cuál es el mínimo número de puntos y rectas en el plano que los Axiomas de Incidencia nos pueden garantizar?
1.11. ¿Cuál es el mínimo número de puntos sobre una recta que los Axiomas de Incidencia nos garantizan?
1.12. ¿Cuál es el mínimo número de rectas que pasan por un punto dado que los Axiomas de Incidencia nos garantizan?
1.13. Dado un punto P, probar que los Axiomas de Incidencia nos garantizan que el plano es igual a la unión $\cup\{l$: l es una recta que pasa por el punto $P\}$. ¿Es esta afirmación equivalente al Axioma I_1?
1.14. Consideremos los conjuntos $P = \{A, B, C\}$ y $L = \{\{A\}, \{B, C\}, \{A, C\}, \{A, B\}\}$. ¿Cuáles Axiomas de Incidencia cumplen los conjuntos P y L?
1.15. Sea $P = \{P_1,\ldots, P_k\}$ un conjunto con k puntos tal que ninguna terna de ellos es colineal, en donde $k > 2$ es un número natural. Consideremos el conjunto $L = \{\{P_i, P_j\}: 1 \leq i < j \leq k\}$.

a. Probar que P y L cumplen con todos los Axiomas de Incidencia.
b. Dados P y $L' \subseteq L$, ¿cuál es el mínimo número de elementos de L' para que P y L' cumplan con todos los Axiomas de Incidencia? Dar la fórmula en términos de k.
c. Dados P y $L' \subseteq L$, ¿cuál es el máximo número de elementos de L' para que P y L' cumplan con todos los Axiomas de Incidencia? Dar la fórmula en términos de k.

1.16. Dado el conjunto $P = \{A, B, C, D\}$ tal que A, B y C no son colineales y $C \in BD$, definimos $L = \{\{A, B\}, \{B, C, D\}, \{A, D\}\}$. Probar que P y L cumplen con todos los Axiomas de Incidencia. En este ejemplo, el lector puede ver que en algunos planos de incidencia el número de puntos de una recta puede variar.
1.17. Dado el conjunto $P = \{A, B, C, D, E\}$. ¿Es posible definir un conjunto L de rectas con puntos de P de tal forma que ningún par de ellas tenga el mismo número de puntos y se cumplan todos los Axiomas de Incidencia?
1.18. ¿Es posible encontrar un conjunto P y una familia L de subconjuntos no vacíos de P en el cual se cumplan todos los Axiomas de Incidencia y L tenga exactamente cinco elementos?
1.19. Para cada número natural $k > 3$, ¿es posible encontrar un modelo con exactamente k puntos y k rectas en el cual se cumplan todos los Axiomas de Incidencia?
1.20. Dados dos números naturales $i > 2$ y $j > 2$, ¿es posible dar un conjunto de axiomas de tal forma que el plano tenga exactamente i puntos y j rectas?
1.21. Si por un punto pasan exactamente k rectas, en donde $k > 1$ es un número entero, ¿garantizan los Axiomas de Incidencia que en cada punto del plano en cuestión pasan exactamente k rectas?
1.22. Si una recta tiene al menos k puntos, en donde $k > 1$ es un número entero, probar que por cada punto del plano fuera de dicha recta pasan por lo menos k rectas.
1.23. ¿Es cierto el enunciado dual del problema anterior?
1.24. Si una recta tiene exactamente k puntos, en donde $k > 1$ es un número entero, ¿garantizan los Axiomas de Incidencia que todas las rectas del plano en cuestión tengan exactamente k puntos?
1.25. Si en un plano de incidencia una de sus rectas tiene k puntos, en donde $k > 1$ es un número entero, ¿cuántas rectas tendrá el plano como mínimo?
1.26. ¿Dos planos de incidencia con el mismo número finito de puntos tienen el mismo número de rectas?
1.27. ¿Dos planos de incidencia con el mismo número finito de rectas tienen el mismo número de puntos?
1.28. Dadas k rectas, en donde $k > 0$ es un número natural, ¿cuántos puntos de intersección de estas rectas se pueden obtener como máximo?
1.29. Definir P y L de tal forma que se cumplan las condiciones de cada uno de los siguientes enunciados:

a. Que se cumplan los axiomas I_1, I_2 y I_3 y no se cumpla el Axioma I_0.
b. Que se cumplan los axiomas I_0, I_2 y I_3 y no se cumpla el Axioma I_1.
c. Que se cumplan los axiomas I_0, I_1 y I_3 y no se cumpla el Axioma I_2.
d. Que se cumplan los axiomas I_0, I_1 y I_2 y no se cumpla el Axioma I_3.

1.30. ¿Garantizan los Axiomas de Incidencia la existencia de tres puntos colineales?
1.31. ¿Pueden 3 puntos en el plano junto con los Axiomas de Incidencia determinar dos y solo dos rectas?
1.32. Dados dos puntos cualesquiera, probar que existen dos rectas tales que cada uno de los puntos dados yace en una y solo una de dichas rectas.

1.33. ¿Pueden los Axiomas de Incidencia testificar el siguiente enunciado?:

Existen dos rectas y dos puntos fuera de dichas rectas tales que si las rectas se cortan, entonces este punto de intersección yace sobre la recta que determinan los dos puntos.

En caso negativo, decir cuáles axiomas nos garantizan la veracidad del enunciado.

1.34. Probar el Teorema 1.1.9.

1.35. Si nuestro plano consiste de los puntos de un triángulo y las rectas son sus tres lados, probar que se cumplen todos los Axiomas de Incidencia y los Axiomas de Orden O_1, O_2 y O_3, pero no el Axioma O_4.

1.36. ¿Pueden garantizar los Axiomas de Incidencia la existencia de un haz de rectas?

1.37[Figuras de Mohíno, I-87]. Sean *P* un conjunto no vacío y L una familia de subconjuntos no vacíos de *P*. Supongamos que se cumplen los siguientes axiomas:

M_1: Cada elemento de L contiene exactamente tres puntos.

M_2: Para cualquier punto de *P*, hay exactamente dos elementos de L que lo contienen.

M_3: Para cualquier par de puntos de *P*, hay exactamente un elemento de L que los contienen.

a. Probar que *P* y *L* no satisfacen el Axioma I_1.

b. Probar que el número de elementos de P es divisible por 3.

c. Probar que el número de puntos de L es divisible por 2.

1.38. Probar que para todo punto *A* en el plano, existen dos puntos *B* y *C* tales que *A*, *B* y *C* no son colineales.

1.39. Probar que si damos dos rectas arbitrarias en el plano, entonces hay una tercera recta que interseca a ambas.

1.40. Si *A*, *B* y *C*, y *A*, *C* y *D* son dos hileras de puntos, probar que *A*, *B* y *D* son colineales.

1.41. Sean *A*, *B* y *C* tres puntos en el plano. Si $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{BC}$, probar que $\overleftrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{AB}$.

1.42. Probar que si *A*, *B* y *C* son puntos no colineales, entonces al menos dos de ellos son distintos.

1.43. Sea *l* una recta. Si $A, B \in l$ y $C \notin l$, probar *A*, *B* y *C* no pueden ser colineales.

1.44. Sean $P_1,\ldots, P_{k-1}$ y P_k puntos colineales, en donde $k > 2$ es un número entero, ¿cuántos subconjuntos colineales tiene el conjunto $\{P_1,\ldots, P_{k-1}, P_k\}$?

1.45. Dado un conjunto finito de puntos, probar que existe una recta que no contiene a ninguno de ellos.

1.46. Dado un conjunto finito de puntos, probar que para cada uno de dichos puntos existe una recta que solo lo contiene a él y no contiene a ninguno de los otros punto dados.

1.47. Probar que *k* puntos sobre una recta la separan en $k + 1$ subconjuntos disjuntos entre sí, en donde *k* es un número entero positivo arbitrario.

1.48. Probar que hay haces de rectas con una cantidad infinita de rectas.

1.49. Probar que hay hileras de puntos con una cantidad infinita de puntos.

1.50[I-72]. Dados *k* puntos no colineales, en donde $k > 3$ es un número natural, probar que si cada par de estos puntos son conectados con una recta, entonces tenemos al menos *k* rectas distintas.

1.51. Si dados *k* puntos en el plano no colineales de tres en tres, en donde $k > 2$ es un número entero, probar que hay $k^2 - \dfrac{k(k+1)}{2}$ rectas que contienen a los puntos en cuestión de dos en dos.

1.52. Dadas *k* rectas, en donde $k > 2$ es un número entero, probar que hay a los más $\dfrac{k(k-1)}{2}$ puntos de intersección.

1.53. Si hay *k* rectas, en donde $k > 2$ es un número entero, tales que ninguna terna de ellas es concurrente y cada par de las mismas se intersecan, probar que hay $\dfrac{k(k-1)}{2}$ puntos de intersección.

1.54[I-311]. Tenemos *k* rectas, en donde $k > 2$ es un número entero, entre las cuales ninguna terna es concurrente y cada par de ellas se intersecan. Probar que el número de conjuntos formados por *k* puntos de intersección de dichas rectas tales que ninguna terna de puntos del conjunto sea colineal es igual a $\dfrac{1}{2}(k-1)$.

1.55. Dado un número natural $k > 1$, ¿cuál es el mayor y el menor número de regiones en que se puede dividir al plano con *k* rectas distintas?

1.56[I-311] Tenemos dos haces de rectas con centros en los puntos A y B; el primero contiene i rectas y el segundo j, en donde i y j son números naturales. Supongamos que cada par de dichas rectas se intersecan y ninguna de ellas pasa por ambos puntos A y B. Hallar el número de regiones en que las rectas de ambos haces dividen al plano.

1.57. Si l, m y n son tres rectas distintas, probar que la intersección $l \cap m \cap n$ consta de a lo más un punto.

1.58. Si l_1, l_2, l_3, ..., l_k y l son $k+1$ rectas diferentes entre sí, probar que el conjunto

$$l \cap (l_1 \cup l_2 \cup l_3 \cup .... \cup l_k)$$

contiene a lo más k puntos, en donde k es un número entero positivo.

1.59. Sean A, B, C y D cuatro puntos en el plano. Probar que $AB = CD$ si y solo si $\{A, B\} = \{C, D\}$.

1.60. ¿En cuántos puntos a lo más se pueden cortar k rectas en el plano, en donde $k > 1$ es un número entero?

1.61. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden colocar k puntos sobre una recta, en donde $k > 1$ es un número entero?

1.62. Sobre una recta se tienen marcados k puntos con distintas letras mayúsculas, en donde $k > 1$ es un número entero, ¿cuántos nombres diferentes se le pueden dar a la recta usando las k letras (considerando la permutación de dos letras como nombres diferentes)?

1.63. Se tienen k puntos en el plano, en donde $k > 2$ es un número entero, dentro de los cuales solamente hay una hilera de $i \geq 3$ puntos, ¿cuántas rectas se necesitan para unir todos los k puntos?

1.64. Dados $k > 2$ puntos en el plano tales que ninguna terna de ellos es colineal, en donde k es un número entero, ¿cuántas rectas se necesitan como mínimo para conectar cada par de los k puntos dados?

1.65. Colocar 10 puntos en el plano de tal forma que determinen 5 rectas tales que cada una de ellas contenga solamente a 4 de los puntos dados.

1.66 (Newman). Sean l una recta y $A \in l$. Supongamos que las rectas l_1, l_2,..., l_k concurren en el punto A, en donde $k > 1$ es un número entero. Si $P \in l - \{A\}$, probar que existe una recta que pasa por P y corta a cada una de las rectas l_1, l_2,..., l_{k-1} y l_k en exactamente un punto.

1.67. Si l_1, l_2, l_3, ..., l_{k-1} y l_k son k rectas diferentes entre sí, probar que el conjunto de puntos en el plano que no pertenecen a ninguna de estas rectas es infinito.

1.68. Dados dos números naturales positivos i y j, probar que hay i rectas que pasan por un punto dado y otras j rectas tales que ninguna terna de ellas son concurrentes. Escribir y probar el dual de este enunciado.

1.69. Dados $k > 1$ puntos en el plano, en donde k es un número entero, ¿es posible encontrar $k-1$ rectas concurrentes tales que cada par de los puntos dados determine exactamente una de las rectas?

1.70. Si sustituimos el Axioma I_2 por el enunciado *cada recta es un conjunto infinito de puntos,* ¿podría uno omitir el Axioma O_3?

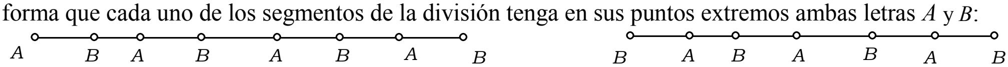
1.71. ¿Puedes desarrollar una demostración intuitiva para convencerte que dos segmentos arbitrarios tienen la misma cantidad de puntos?

1.72. Sean l una recta y $P \notin l$. Probar que existe una correspondencia uno a uno entre el conjunto de rectas que pasan por P y cortan a l y los puntos de l.

1.73. Sean AB un segmento y C un punto no colineal con A y B. Demostrar que hay una cantidad infinita de rectas que pasan por C y cortan al segmento AB.

1.74. Sean A, B y C tres puntos distintos. Sean $\mathbf{A}$ el conjunto de rectas que pasa por A, $\mathbf{B}$ el conjunto de rectas que pasa por B, y $\mathbf{C}$ el conjunto de rectas que pasa por C. Determinar los conjuntos $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \cap \mathbf{C}$, $\mathbf{B} \cap \mathbf{C}$ y $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C}$ en los casos cuando los puntos A, B y C sean colineales y cuando no lo sean.

1.75[I-302]. A un segmento cualquiera, lo dividimos mediante una cantidad finita de sus puntos y a cada uno de dichos puntos lo etiquetamos con una de las letras A o B, incluyendo los puntos extremos del segmento dado, de tal forma que cada uno de los segmentos de la división tenga en sus puntos extremos ambas letras A y B:



a. Si los dos puntos extremos del segmento dado quedan etiquetados con ambas letras A y B, probar que el número de segmentos que dividen al segmento dado es impar.

b. Si los dos puntos extremos del segmento dado quedan etiquetados con solo una de las letras A o B, probar que el número de segmentos que dividen al segmento dado es par.

1.76. Sean A, B, C y D cuatro puntos colineales. Si $C \in AB$ y $D \notin AB$, probar que $A \in CD$, o bien, $B \in CD$.
1.77. Sean AB un segmento y C un punto entre A y B. Si $D \in AB$, probar que $D \in AC$, o bien, $D \in CB$.
1.78. Sea A, B, C y D una hilera de puntos. Si A precede a B, B precede a C y C precede a D, probar que $AB \cap CD = \varnothing$.
1.79. Sean A, B, C y D cuatro puntos colineales. Probar los siguientes enunciados:
a. A precede a B y B precede a C, y A precede a C y C precede a D si y solo si B precede a C y C precede a D, y A precede a B y B precede a D.
b. Si A precede a B y B precede a C, y B precede a C y C precede a D, entonces A precede a B y B precede a D, y A precede a C y C precede a D.
c. ¿Es cierto el recíproco del inciso b?
1.80. Probar que dado un número finito de puntos en una recta, uno de los puntos dados precede a todos los restantes y otro de los puntos sigue después de los restantes.
1.81. Probar que en toda recta del plano se pueden encontrar k puntos consecutivos para cada número entero positivo $k > 1$.
1.82. Probar que dados k puntos sobre una recta se pueden enumerar como $P_1, \ldots, P_k$ de tal forma que P_i preceda a P_{i+1}, para toda $1 \le i < k$, en donde k es un número entero positivo.
1.83. ¿Es cierta la afirmación del problema anterior para una cantidad infinita numerable de puntos colineales?
1.84. Dado un número finito de puntos colineales, probar que existe un segmento que los contiene.
1.85. Sean A, B, C y D cuatro puntos colineales. Si C y D están entre A y B, probar que C está entre A y D, o bien, C está entre D y B.
1.86. Sean A, B y C tres puntos colineales. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
a. C está entre A y B.
b. $AC \cup CB = AB$.
c. $AC \cap CB = \{C\}$.
1.87. Sean A, B, C y D cuatro puntos colineales distintos. Probar las siguientes afirmaciones:
a. Si B está entre A y C, y C está entre A y D, entonces A, B, C y D son consecutivos.
b. Si B está entre A y D, y C está entre B y D, entonces A, B, C y D son consecutivos.
c. Si B está entre A y D, y C está entre A y D, entonces B está entre A y C, o bien, C está entre A y B.
d. Si B está entre A y C, y B está entre A y D, entonces C está entre A y D, o bien, D está entre A y C.
e. Si B está entre A y C y C está entre A y D, probar que C está entre B y D y B está entre A y D.
f. Si B está entre A y C, y B está entre A y D, entonces C está entre B y D, o bien, D está entre B y C.
g. Si C está entre B y D, y C está entre A y D, entonces B está entre A y D, o bien, A está entre B y D.
h. Si C está entre A y B, y D está entre A y C, entonces D está entre A y B.
1.88. Sean A, B y C tres puntos colineales. Si C no está entre A y B y A no está entre B y C, probar que B está entre A y C.
1.89. Sean A, B, C y D cuatro puntos colineales. Si B no está entre A y C y B no está entre D y C, probar que B no está entre A y D.
1.90. Sean A, B, C, D y E cinco puntos colineales. Si B no está entre A y C, B no está entre D y C, y E está entre A y D, probar que B no está entre E y C.
1.91. Sean A, B, C, D y E cinco puntos colineales, ¿es posible ordenar estos cinco puntos sobre la recta que los contiene de tal forma que se cumplan cada una de las siguientes afirmaciones:?
a. D está entre A y C.
b. B está entre E y C.
c. E está entre D y B.
1.92. Dado un segmento AB, ¿es posible encontrar puntos P y $Q \in AB$ de tal forma que B esté entre P y Q?
1.93. Probar que si P y Q son dos puntos, entonces existen dos puntos $A, B \in \overleftrightarrow{PQ}$ tales que Q está entre P y A, y P está entre B y Q.
1.94. Sean l una recta y $O, A, B, C \in l$.
a. Si A y B están en lados opuestos sobre la recta l con respecto al punto O, y B y C están en lados opuestos sobre la recta l con respecto al punto O, probar que A y C están en el mismo lado de l con respecto al punto O.

b. Si A y B están en lados opuestos sobre la recta l con respecto al punto O, y B y C están en el mismo lado de la recta l con respecto al punto O, probar que A y C están en lados opuestos de l con respecto al punto O.

1.95. Sean l una recta y $O \in l$. Tomemos cuatro puntos A, B, C y $D \in l$ distintos de O.

a. Si A y B están en lados opuestos de l con respecto a O, B y C están en lados opuestos de l con respecto a O, y C y D están en lados opuestos de l con respecto a O, probar que B y D están en un mismo lado de l con respecto a O.

b. Si A y B están en lados opuestos de l con respecto a O, C y D están en lados opuestos de l con respecto a O, y A y C están en un mismo lado de l con respecto a O, probar que B y D están en el mismo lado de l con respecto a O.

c. Si A y B están en un mismo lado de l con respecto a O, y A y C están en lados opuestos de l con respecto a O, probar que B y C están en lados opuestos de l con respecto a O.

1.96. Sean AB un segmento y $P_1 = A,\ P_2, ...,\ P_{k-1},\ P_k = B$ k puntos consecutivos, donde $k > 1$ es un número natural. Probar que para cualquier punto $C \in AB$ existe $1 \leq i < k$ tal que $C \in P_i\, P_{i+1}$.

1.97. Dados k puntos en el plano, en donde $k > 2$ es un número natural, ¿cuántos segmentos diferentes se pueden formar de tal manera que sus puntos extremos estén entre los puntos dados?

1.98. Tenemos dos conjuntos finitos de puntos V y W no vacíos y disjuntos tales que el primero tiene i puntos y el segundo tiene j puntos, ¿cuántos segmentos distintos se pueden formar tales que uno de sus puntos extremos esté en V y el otro esté en W?

1.99. Dados k puntos en el plano, en donde $k > 1$ es un número entero, ¿es posible unirlos de dos en dos con segmentos que se intersequen a lo más en algunos de sus puntos extremos?

1.100. Probar que dados dos segmentos colineales diferentes, hay 6 posiciones posibles que pueden tomar uno con respecto al otro en el plano.

1.101. Sean l una recta y $A_1,\ A_2, ...,\ A_{k-1},\ A_k \in l$. Probar que podemos encontrar un punto $A \in l$, de tal manera que no pertenezca a ninguno de los segmentos cuyos puntos extremos sean algunos de los puntos $A_1,\ A_2, ...,$ A_{k-1} y A_k.

1.102. Dadas k rectas distintas, en donde $k > 0$ es un número entero, probar que es posible encontrar un segmento que corte a cada una de las rectas en un solo punto. ¿Es posible encontrar un triángulo con la misma propiedad que el segmento?

1.103. Sean AB un segmento tal que A precede a B y $C \in AB - \{A, B\}$. Probar que si $P \in AC$ y $Q \in CB$, entonces P precede a Q.

1.104. Sean A, B, C y D cuatro puntos consecutivos. Determinar los siguientes segmentos:

a. $(AB \cap BC) \cup BC$.

b. $(AB \cup BC) \cup CD$.

c. $(AC \cap BD) \cup CD$.

d. $AC \cup BD$.

1.105. Sean A, B, C, D y E cinco puntos consecutivos. ¿Cuáles segmentos representan los conjuntos $AC \cup BE$, $BD \cup CE$ y $AC \cup BD \cup CD$?

1.106. Sean A, B, C, D, E, F, G y H ocho puntos colineales. ¿Es posible que la intersección $(AB \cup CD) \cap (EF \cap GH)$ sea un solo punto?

1.107. Probar que la intersección no vacía de dos segmentos es un punto, o bien, un segmento.

1.108. ¿Es posible que $AB \cap CD = \varnothing$ y que $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} \neq \varnothing$?

1.109. Probar que la unión de dos segmentos es un segmento si y solo si son colineales y su intersección es no vacía.

1.110. Sean A, B y C tres puntos colineales. ¿Es cierto que $AB \cap BC \cap AC = \varnothing$?

1.111. Si A, B y C son tres puntos colineales, probar que $AC \subseteq AB \cup BC$.

1.112. Sean A, B y C tres puntos colineales. ¿Es posible que $AB \cup BC = AB \cap BC$?

1.113. Sean AB un segmento y $C \in \overleftrightarrow{AB} - \{A, B\}$. Probar que $C \in AB$ si y solo si $AC \cap CB = \{C\}$.

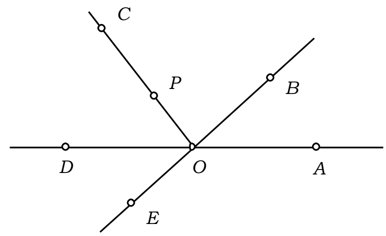
1.114. Sean AB y CD dos segmentos tales que A, B, C y D son todos distintos. Probar que AB y CD son colineales si y solo si dos de las siguientes intersecciones son no vacías: $AB \cap CD$, $AC \cap BD$ y $AD \cap BC$.

1.115. Dado un número natural $k > 2$, probar que cualquier segmento se puede expresar como una unión de k segmentos no congruentes entre sí.
1.116. Dado un número natural $k > 2$, ¿puede ser la unión de k segmentos colineales y disjuntos entre sí igual a la unión de $k + 1$ segmentos disjuntos entre sí?
1.117. Sea AB un segmento. Probar que $B \notin AP$ para todo punto $P \in AB - \{B\}$.
1.118. Sea P un punto fijo en el plano. Dados dos puntos A y B en el plano diferentes de P, decimos que $A \sim B$ si $A = B$, $A = B = P$, o bien, si los puntos P, A y B son colineales. Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia y describir las clases de equivalencia de esta relación.
1.119. Sean l una recta y $O \in l$. Dados $A, B \in l - \{O\}$, definimos $A \sim B$ si $A = B$, o bien, O no está entre los puntos A y B.

a. Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia entre los puntos del conjunto $l - \{O\}$.
b. Dar las clases de equivalencia de la relación $\sim$.

1.120. En la figura:

con una flecha en la punta señalar las semirrectas
$\overleftarrow{OA}$, $\overrightarrow{PO}$, $\overleftarrow{OP}$, $\overleftarrow{EB}$, $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{CP}$.



1.121. Si $k > 1$ es un número entero, ¿cuántas semirrectas diferentes determinan k puntos colineales fijos?
1.122. Dados una recta y k puntos sobre ella, en donde k es un número entero positivo, ¿cuántas semirrectas distintas hay sobre la recta dada cuyos vértices sean los puntos dados?
1.123. Sean l una recta y $O \in l$. Si $A \in l - \{O\}$, probar que $OA - \{O\}$ está contenido en una de las semirrectas de l de vértice O.

1.124. Si $\overrightarrow{AB} \subseteq \overrightarrow{AC}$, probar que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

1.125. Si $\overrightarrow{AB} \subseteq \overrightarrow{CD}$, probar que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$.

1.126. Si $\overrightarrow{AB} \subseteq \overrightarrow{CD}$, probar que $\overrightarrow{CD} = (CA - \{C\}) \cup \overrightarrow{AB}$.

1.127. Si $C \in \overrightarrow{AB}$, probar que $CB \subseteq \overrightarrow{AB}$.

1.128. Si $\overrightarrow{CD} \subseteq \overrightarrow{AB}$ y A precede a B, probar que C precede a D.

1.129. Si $\overrightarrow{AB} \subseteq \overrightarrow{CD}$ y A precede a B, probar que C precede a D.

1.130. Sean A, B, C y D cuatro puntos colineales. Si $\overrightarrow{CB} \subseteq \overrightarrow{DA}$ y $\overrightarrow{BA} \subseteq \overrightarrow{CA}$, ¿cuántas posibles ordenaciones de los puntos A, B, C y D hay sobre la recta que los contiene?

1.131. ¿Es posible que $\overrightarrow{AC} \cap \overrightarrow{BD} = AB - \{A, B\}$?

1.132. Dada una semirrecta $\overrightarrow{AB}$, describir el conjunto $\{C\text{:}\ \overrightarrow{BC} \cap AB \neq \emptyset \neq \overrightarrow{AC} \cap AB\}$.

1.133. Sean AB un segmento y $C \notin \overleftrightarrow{AB}$. Hacer un dibujo para describir los siguientes conjuntos:

a. $\{P\text{: } PC \cap \overrightarrow{AB} \neq \emptyset\}$. b. $\{P\text{: } PC \cap \overleftarrow{AB} \neq \emptyset\}$.

1.134. Sean A, B y C tres puntos colineales. De la siguiente lista, decir cuáles enunciados son falsos, justificando la respuesta con un ejemplo y si es posible dar la condición necesaria para que sean verdaderos.

a. $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC}$. b. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$. c. $AB \cong AC$. d. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$. e. $\overrightarrow{AB} \cap AC = BC$.

f. $|AC| + |CB| = |AB|$. g. Si $AB \cong BC$, entonces $|AB| + |BC| = |AC|$. h. $\overrightarrow{AB} \subseteq \overleftrightarrow{BC}$. i. $BC \subseteq \overrightarrow{AB}$.

j. $B \in \overrightarrow{AB}$. k. $\overrightarrow{AB} \subseteq \overrightarrow{AC}$. l. $AB = BA$. m. Si $AB \cong BC$, entonces $AC \cong AB$.

1.135. Sean A, B y C tres puntos colineales. Probar las siguientes afirmaciones:

a. C está entre A y B si y solo si $C \in \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$.

b. $C \in \overleftarrow{AB}$ si y solo si A está entre C y B.

c. $C \in \overrightarrow{AB}$ si y solo si C y B están del mismo lado de la recta $\overleftrightarrow{AB}$ con respecto a A.

d. Si $C \in \overleftarrow{AB}$, entonces $B \notin \overrightarrow{AC}$.

e. C está entre A y B si y solo si $\overrightarrow{CB} \subseteq \overrightarrow{AB}$.

f. C está entre A y B si y solo si $\overleftarrow{AB} \subseteq \overleftarrow{CB}$.

g. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BA} \neq \varnothing$.

h. ¿Es siempre $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} \neq \varnothing$?

i. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} \neq \varnothing$.

1.136. Sean l una recta y tres puntos $A, B, C \in l$. Dar una condición necesaria y suficiente para que se cumpla la igualdad $l = \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{CA}$.

1.137. Probar que la unión de dos semirrectas de una misma recta es una semirrecta si y solo si una de las semirrectas está contenida en la otra.

1.138. Si A y B son dos puntos arbitrarios, determinar los conjuntos $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AB} \cap \overleftarrow{BA}$, $\overleftarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$, $\overleftarrow{AB} \cap \overleftarrow{BA}$, $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AB} \cup \overleftarrow{BA}$, $\overleftarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$ y $\overleftarrow{AB} \cup \overleftarrow{BA}$.

1.139. Sean A, B y C tres puntos consecutivos. Determinar las siguientes intersecciones: $\overrightarrow{CB} \cap \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CB} \cap \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CA} \cap \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CA} \cap \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC} \cap \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA} \cap \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CA} \cap \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC} \cap \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC} \cap \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC} \cap \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AC} \cap \overrightarrow{AB}$.

1.140. Probar que $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{AQ}$ son semirrectas opuestas si y solo si A está entre P y Q.

1.141. Sean A, B y C tres puntos colineales. Probar que C está entre A y B si y solo si $\overrightarrow{CA} \cup \overrightarrow{CB} = \overleftrightarrow{AB} - \{C\}$.

1.142. Sean A y B dos puntos en el plano. Probar que $\overrightarrow{AB} = (AB - \{A\}) \cup \overleftarrow{BA}$ y que $AB \cap \overleftarrow{BA} = \varnothing$.

1.143. Sean A, B, C y D cuatro puntos colineales. Si $\overrightarrow{CD} \subseteq \overrightarrow{AB}$, probar que B, C y D están del mismo lado de la recta que los contiene con respecto al punto A.

1.144. Sea A, B, C y D una hilera de puntos. Si $AB \cap CD = \varnothing$, probar que C y D están ambos en $\overrightarrow{AB}$ o en $\overleftarrow{AB}$.

1.145. Sean A, B, C y D cuatro puntos colineales. Si $A, B \in \overleftarrow{CD}$ y $A \in \overleftarrow{BC} \cap \overleftarrow{BD}$, encontrar el orden de los puntos A, B, C y D sobre la recta que los contiene.

1.146. Sean A, B, C y D cuatro puntos consecutivos. Si $P \in \overleftarrow{CD} \cap \overleftarrow{BA}$, decir cuál de los segmentos AB, BC y CD contiene a P.

1.147. Sean l una recta y $A, B \in l$. Probar que A precede a B si y solo si existe un punto $C \in l$ tal que A precede a C y $\overrightarrow{BC} \subseteq \overrightarrow{AC}$.

1.148. Sean A y B dos puntos en el plano. Si $C \in \overleftrightarrow{AB} - \{A, B\}$, probar que una de las siguientes contenciones se debe cumplir: $\overrightarrow{BC} \subseteq \overrightarrow{AC}$, $\overleftarrow{BC} \subseteq \overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AC} \subseteq \overrightarrow{BC}$.

1.149. Si $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ y A precede a B, probar que C precede a D.

1.150. Sean A, B, C y D cuatro puntos colineales. Si A precede a B y C precede a D, probar que $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$.

1.151. Sean l una recta y P, $Q \in l$ tales que P precede a Q. Dados A, $B \in l$, probar que A precede a B si y solo si $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{PQ}$.

1.152. Sean l una recta y $A \in l$. Sean S y R las dos semirrectas opuestas de l cuyo vértice es el punto A. Si P, $Q \in l$, entonces decimos que $P \leq Q$, si se cumple una de las siguientes condiciones:

1. $P = Q$.
2. $P \in$ S y $Q \in$ R.
3. $P \in$ S y $Q = A$.
4. $P = A$ y $Q \in$ R.
5. P, $Q \in$ S y Q está entre P y A.
6. P, $Q \in$ R y P está entre A y Q.

a. Probar que la relación $\leq$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva y que $(l, \leq)$ es un orden lineal.

Si P, $Q \in l$, entonces decimos que $P < Q$ si $P \leq Q$ y $P \neq Q$.

b. Probar que S $= \{P \in l: P < A\}$ y R $= \{P \in l: A < P\}$.

c. Si P, $Q \in l$ y $P < Q$, probar que $PQ = \{R \in l: P < R < Q\}$.

1.153. Tenemos $2k$ puntos en una recta l, en donde k es un número natural positivo, ¿es posible encontrar un punto en l, de tal forma que cada una de las semirrectas de l cuyo vértice sea dicho punto contenga exactamente k de los puntos dados?

1.154. ¿Puede ser un triángulo igual a la intersección de dos triángulos diferentes?

1.155. ¿Se puede expresar un triángulo arbitrario como una combinación de uniones e intersecciones de una cantidad finita de triángulos distintos?

1.156. Sea ΔABC un triángulo y supongamos que $\Delta ABC = A'B' \cup B'C' \cup C'D' \cup D'A'$. Probar las siguientes afirmaciones:

a. $\{A, B, C\} \subseteq \{A', B', C', D'\}$.

b. Uno de los puntos A', B', C' y D' es colineal con dos de los vértices del triángulo original y yace entre los mismos.

1.157[I-210]. Considerar seis puntos en el plano tales que cada terna de ellos no son colineales. Si cada par de estos puntos se pueden unir con una recta ya sea de color rojo o verde, mostrar que hay al menos tres puntos que forman un triángulo cuyos lados son de un mismo color.

1.158. Si P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8 y P_9 son nueve puntos en el plano tales que P_3, P_4 y P_5 son colineales; P_2, P_4 y P_7 son colineales; P_1, P_3 y P_6 son colineales; P_2, P_5 y P_9 son colineales; P_1, P_4 y P_8 son colineales; y P_6, P_7, P_8 y P_9 son colineales, determinar el número de triángulos que se pueden formar con vértices en estos puntos.

1.159. Enlistar los axiomas necesarios y suficientes para probar que los semiplanos determinados por una recta son no vacíos.

1.160. Demuestre que cada uno de los dos semiplanos determinados por una recta contienen tres puntos no colineales.

1.161. Dada una cantidad finita de rectas, probar que existe un triángulo que no interseca a ninguna de ellas.

1.162. Dado un triángulo, probar que existe una recta que no interseca a ninguno de sus lados.

1.163. Si ΔABC es un triángulo, probar que todo el plano es igual a la unión

$$\{\overleftrightarrow{AP}: P \in BC\} \cup \{\overleftrightarrow{BQ}: Q \in AC\} \cup \{\overleftrightarrow{CR}: R \in AB\}.$$

1.164. Dadas $k > 2$ rectas que se cortan de dos en dos y cada tres de ellas no son concurrentes, en donde k es un número entero, ¿cuántos triángulos hay cuyos vértices sean los puntos en donde las rectas dadas se cortan?

1.165[I-311]. Tenemos k puntos fijos en el plano, en donde $k > 2$ es un número entero, de los cuales j son colineales y cada terna de los restantes no es colineal, ¿cuántos triángulos se pueden formar con dichos puntos?

1.166[I-311]. Tenemos tres puntos fijos A, B y C en el plano. Por cada uno de estos puntos, trazamos k rectas, de tal forma que si cada tres de ellas pasan por cada uno de los tres puntos no sean concurrentes, cada par de las mismas se intersequen y ninguna de ellas contenga a los tres puntos dados. Hallar el número de puntos de intersección de las rectas trazadas.

1.167[I-311]. Tenemos tres puntos A, B y C fijos en el plano. Por A trazamos i rectas, por B trazamos j rectas y por C trazamos k rectas, de tal forma que cada tres de ellas, si pasan por cada uno de los tres puntos dados, no sean concurrentes, cada par de las mismas se intersequen y ninguna de ellas contenga a los tres puntos dados.

a. Hallar el número de puntos de intersección de las rectas trazadas.

b. Hallar el número de triángulos con vértices entre los puntos de intersección de dichas rectas distintos de los puntos A, B y C.

1.168[I-311]. Fijamos k rectas en el plano y en cada una de ellas fijamos i puntos, de tal forma que ninguna terna de estos puntos sea colineal, y ninguno de los puntos sea punto de intersección de dos de las rectas dadas. Hallar el número de triángulos con vértices entre los puntos dados.

1.169. Sea l una recta. Dados dos puntos A y B fuera de l, decimos que $A \sim B$ si $A = B$ o si $l \cap AB = \varnothing$. Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia y describir las clases de equivalencia de esta relación.

1.170. Probar que una recta no puede atravesar más de 4 de las 7 regiones en las que un triángulo divide al plano.

1.171. Probar que el Teorema 1.6.3 es equivalente al Axioma de Pasch.

1.172. *Propiedad de Separación del Plano*: Toda recta separa a los puntos del plano que no yacen sobre ella en dos conjuntos no vacíos, de tal manera que dos puntos de un mismo conjunto determinan un segmento que no corta a la recta, y dos puntos en conjuntos diferentes determinan un segmento que corta a la recta.

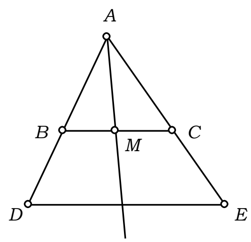
Probar que el Axioma de Pasch es equivalente a la Propiedad de Separación del Plano.

1.173. Probar que un triángulo no puede cortar a una recta en exactamente tres puntos.

1.174. Si una recta corta a los tres lados de un triángulo, probar que dicha recta contiene a uno de los vértices del mismo triángulo.

1.175. En la figura:

si M está entre B y C, probar que la recta $\overleftrightarrow{AM}$ corta al segmento DE.



1.176. Sean ΔABC un triángulo, $P \in AB - \{A, B\}$ y $Q \in AC - \{A, C\}$. Probar que $BQ \cap CP \neq \varnothing$.

1.177. Sean ΔABC un triángulo, $D \in BC$ y $E \in AC$. Probar que si $P \in AB$, entonces $PC \cap DE \neq \varnothing$.

1.178. ΔABC un triángulo, $M \in AB - \{A, B\}$ y $N \in AC - \{A, C\}$. Probar que $AP \cap MN \neq \varnothing$, para todo punto $P \in BC - \{B, C\}$.

1.179. Sean A, B y C tres puntos no colineales. Si A' está entre B y C, B' está entre A y C, y C' está entre A y B, probar que los puntos A', B' y C' tampoco son colineales.

1.180. Probar que el problema anterior es equivalente al Axioma de Pasch.

1.181. Probar que $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ si y solo si $\{A, B, C\} = \{A', B', C'\}$.

1.182. Sean A, B y C tres puntos consecutivos y $P \notin \overleftrightarrow{AB}$. Si l es una recta que corta a PA, $\overrightarrow{PB}$ y $\overrightarrow{PC}$ en los puntos A', B' y C', respectivamente, probar que los puntos A', C' y B' también son consecutivos.

1.183. ¿Cuántos semiplanos se necesitan como mínimo para cubrir todo el plano?

1.184. ¿Puede la intersección de dos semiplanos ser igual a la intersección de tres semiplanos?

1.185 (KöMal, January 2002, A. 281, L. Soukup). Dado un conjunto finito de puntos en el plano, probar que se pueden colorear ya sea de rojo o de verde, de tal forma que si un semiplano contiene al menos tres de los puntos del conjunto, entonces el semiplano contiene dos puntos de distinto color.

1.186. Dadas dos rectas l y m, probar que se cumple una y solo una de las siguientes condiciones:

a. La recta l yace en uno de los semiplanos determinados por m.

b. La recta m divide a l en dos semirrectas cuyo vértice es el punto de intersección de ambas rectas, y cada una de dichas semirrectas yace en uno de los semiplanos determinados por m.

1.187. Dadas dos semirrectas no opuestas con el mismo vértice, probar que existe una recta que pasa por su vértice tal que ambas semirrectas yacen en un mismo semiplano determinado por dicha recta.

1.188. Sean l_1 y l_2 dos rectas en el plano. Si **A** y **B** son los semiplanos determinados por l_1, y **C** y **D** son los semiplanos determinados por l_2, determinar los conjuntos **A** – **C**, **B** ∩ **C** y **A** ∪ **D**, considerando los casos cuando l_1 y l_2 se corten en un punto y cuando no se corten.

1.189. Decir cuál de los siguientes enunciados es verdadero o falso (si es verdadero dar la demostración y si es falso dar el contraejemplo):

Sean l una recta y A, B, C y D cuatro puntos en el plano.

a. Si $AB \cap l = \emptyset$ y $BC \cap l \neq \emptyset$, entonces $AC \cap l \neq \emptyset$.

b. Si $A, B \in l$ y $CD \cap l \neq \emptyset$, entonces $AB \cap CD \neq \emptyset$.

c. Si $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{CD} \neq \emptyset$, entonces $AB \cap CD \neq \emptyset$.

d. Si $AB \cap CD$ es un solo punto diferente de los puntos extremos de ambos segmentos, entonces A y B pertenecen a semiplanos diferentes determinados por la recta $\overleftrightarrow{CD}$.

1.190. Si $C \in AB - \{A, B\}$, probar que A y B están en semiplanos diferentes determinados por cualquier recta distinta de $\overleftrightarrow{AB}$ que pase de por el punto C.

1.191. Sean AB un segmento y l una recta que pasa por A y no contenga a B. Probar que todos los puntos de $AB - \{A\}$ están en el semiplano determinado por l que contiene al punto B.

1.192. Sean $\overrightarrow{AB}$ una semirrecta y l una recta que pasa por A. Probar que todos los puntos de $\overrightarrow{AB}$ están en un mismo semiplano determinado por l.

1.193. Sean l una recta, $A, B \in l$, y C y D dos puntos fuera de l. Probar que las dos semirrectas $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BD}$ están en un mismo semiplano determinado por l si y solo si $l \cap CD = \emptyset$.

1.194. Sean l y $A, B \in l$. Si C y D son dos puntos que yacen en diferentes semiplanos determinados por l, probar que $AC \cap BD = \emptyset$.

1.195. Sean C y D dos puntos situados en un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{AB}$. Probar que se cumple una de las siguientes afirmaciones pero no ambas:

a. $AD \cap BC \neq \emptyset$.

b. $AC \cap BD \neq \emptyset$.

1.196. Sean A, B, C y D cuatro puntos tales que cualesquiera tres de ellos no sean colineales.

a. Probar que $AC \cap BD \neq \emptyset$ si y solo si $AD \cap BC = DC \cap AB = \emptyset$.

b. Si $AB \cap CD \neq \emptyset$, probar que B y D se encuentran en un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{AC}$.

1.197. Sean A, B, C y D cuatro puntos en el plano. Si l es una recta que no pasa por ninguno de estos puntos tal que $l \cap AB \neq \emptyset$, $l \cap CD \neq \emptyset$ y $l \cap AD = \emptyset$, probar que $l \cap BC = \emptyset$. ¿Corta el segmento AC a la recta l?

1.198. Sean A, B y C tres puntos no colineales. Si l es una recta que pasa por uno y solo uno de estos puntos, probar que las rectas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{CA}$ cortan a la recta l en a lo más un punto.

1.199. Tenemos un conjunto finito de puntos tales que cualquier recta que contiene a dos puntos de este conjunto, entonces dicha recta contiene un tercer punto del mismo conjunto. Probar que los puntos del conjunto son colineales. ¿Es cierto el resultado si el conjunto es infinito numerable?

1.200 (Dual del Teorema de Silvestre, 1.4.6). Tenemos un conjunto finito de rectas tales que si dos de ellas pasan por un punto, entonces una tercera recta del mismo conjunto pasa también por dicho punto. Probar que todas las rectas del conjunto son concurrentes.

1.201. Encontrar un conjunto infinito de puntos del plano tal que ninguna terna de dicho conjunto sea colineal.

1.202. Dado un número entero positivo k, ¿es posible encontrar dos triángulos que se corten en exactamente k puntos?

1.203. Sea ΔABC un triángulo, ¿para qué puntos D del plano se cumple que $AD \cap BC \neq \emptyset$?

1.204. Sea ΔABC un triángulo, ¿para qué puntos D del plano se cumple que $\overrightarrow{AD} \cap \overleftarrow{BC} \neq \emptyset$?

1.205. Probar que un triángulo ΔABC está contenido en un mismo semiplano determinado por una recta l si y solo si sus vértices yacen en un mismo semiplano determinado por la recta l.

1.206. Sean ΔABC un triángulo y $D \in AC$. Si E es un punto en el semiplano determinado por $\overleftrightarrow{AC}$ que contiene a B, probar que la semirrecta $\overrightarrow{DE}$ corta al lado AB o al lado BC.
1.207. Probar que existen dos triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$tales que $\Delta ABC \cap \Delta A'B'C' = \varnothing$.
1.208. Probar que existen dos triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$tales que $int(\Delta ABC) \cap int(\Delta A'B'C') = \varnothing$.
1.209. Enlistar los axiomas necesarios para probar que el interior de un triángulo es no vacío.
1.210. ¿Puede ser el interior de un triángulo arbitrario igual a la intersección de los interiores de dos triángulos diferentes?
1.211. ¿Se puede expresar el interior de un triángulo arbitrario como una combinación de uniones e intersecciones de los interiores de una cantidad finita de triángulos distintos?
1.212. Probar que para cada punto P existe un triángulo ΔABC tal que $P \in int(\Delta ABC)$. ¿Cuántos de estos triángulos es posible encontrar?
1.213. Probar que para cada punto P existe un triángulo ΔABC tal que $P \in ext(\Delta ABC)$. ¿Cuántos de estos triángulos es posible encontrar?
1.214. Dados dos puntos arbitrarios en el plano, probar que existe un triángulo tal que uno de los puntos dados yace en el interior del triángulo y el otro en el exterior del mismo.
1.215. Damos k puntos en el plano tales que ninguna de sus ternas sea colineal, en donde $k > 2$ es un número natural. Si tomamos j de los puntos dados, ¿es posible encontrar un triángulo de tal forma que los j puntos que escogimos estén en su interior y los restantes $k - j$ puntos estén en su exterior?
1.216 (KöMal, April 2001, B. 3458). Dados k puntos rojos en el plano, probar que es posible colocar $2k$ puntos verdes de tal forma que cada triángulo formado por los puntos rojos contenga al menos un punto verde en su interior.
1.217. Probar que un punto está en el interior de un triángulo si y solo si la recta que une a dicho punto con cualquiera de los vértices del triángulo es tal que los otros dos vértices están en diferentes semiplanos determinados por ella.
1.218. Sea ΔABC un triángulo. Probar que $P \in int(\Delta ABC)$ si y solo si para cada recta l que pase por el punto P la intersección $l \cap \Delta ABC$ consiste de dos puntos.
1.219. Sean ΔABC un triángulo y $P, Q \in int(\Delta ABC)$. Probar que $\overleftrightarrow{PQ} \cap \Delta ABC \neq \varnothing$.
1.220. Sean ΔABC un triángulo y $P \in BC$, probar que $AP - \{A, P\} \subseteq int(\Delta ABC)$.
1.221. Sea ΔABC un triángulo. Probar que $P \in int(\Delta ABC)$ si y solo si $\overrightarrow{PQ} \cap int(\Delta ABC) \neq \varnothing$, para todo punto Q en el plano.
1.222. Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos. Probar las siguientes afirmaciones:
a. $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ si y solo si $int(\Delta ABC) = int(\Delta A'B'C')$.
b. $\Delta A'B'C' \subseteq int(\Delta ABC)$ si y solo si $A', B', C' \in int(\Delta ABC)$.
c. Si $\Delta ABC \cap int(\Delta A'B'C') \neq \varnothing$, entonces $int(\Delta ABC) \cap int(\Delta A'B'C') \neq \varnothing$.
d. Si $int(\Delta ABC) \cap int(\Delta A'B'C') \neq \varnothing$, entonces $\Delta ABC \cap \Delta A'B'C' \neq \varnothing$.
e. Si $int(\Delta ABC) \subseteq int(\Delta A'B'C')$ y $\Delta ABC \neq \Delta A'B'C'$, entonces $\Delta ABC \cap int(\Delta A'B'C') \neq \varnothing$.
1.223. Sea ΔABC un triángulo. Si un segmento PQ corta a BC en un punto distinto de los puntos B, C, P y Q, probar que uno y solo uno de los puntos P y Q está en el interior del triángulo.
1.224. Si D y E son puntos sobre dos lados diferentes del triángulo ΔABC y $F \in \overleftrightarrow{DE} \cap int(\Delta ABC)$, probar que F está entre D y E.
1.225. Sea ΔABC un triángulo. Si $P, Q \in \Delta ABC$ y PQ no está contenido en ΔABC, probar que $PQ - \{P, Q\} \subseteq int(\Delta ABC)$.
1.226. Sea ΔABC un triángulo. Si $P, Q, R \in \Delta ABC$ no son colinelaes, probar que $int(\Delta PQR) \subseteq int(\Delta ABC)$.
1.227. Sean ΔABC un triángulo y PQ un segmento. Si $PQ \cap int(\Delta ABC) = PQ - \{Q\}$, probar que $P \in int(\Delta ABC)$.
1.228. Sea ΔABC un triángulo. Probar que $P \in int(\Delta ABC)$ si y solo si existe $Q \in BC - \{B, C\}$ tal que $P \in AQ - \{A, Q\}$.

1.229. Sea ΔABC un triángulo. Probar que para cada punto P existen dos puntos Q, $R \in int(\Delta ABC)$ tales que P, Q y R son colineales.

1.230. Sea ΔABC un triángulo. Si P, $Q \in int(\Delta ABC)$, probar que $\overleftrightarrow{PQ}$ corta al menos dos lados del triángulo.

1.231. Sean A, B y C tres puntos no colineales. Probar que

$$\overleftrightarrow{AB} \cap \Delta ABC = AB,\ \overleftrightarrow{BC} \cap \Delta ABC = BC \text{ y } \overleftrightarrow{CA} \cap \Delta ABC = CA.$$

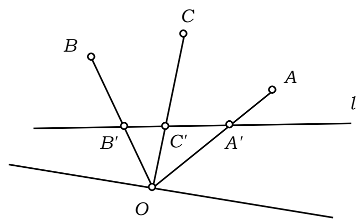
1.232. Sea ΔABC un triángulo. Si $D \in int(\Delta ABC)$, probar que $AD \cap BC = DC \cap AB = \varnothing$.

1.233. Sean ΔABC un triángulo y P, $Q \in int(\Delta ABC)$. Probar que existe un punto $D \in int(\Delta ABC)$ tal que uno de los segmentos AD, BD y CD divide al triángulo ΔABC en dos triángulos, de tal forma que cada uno de los puntos P o Q ésta en el interior de uno de dichos triángulos.

1.234. Dados k puntos en el interior de un triángulo, en donde $k > 2$ es un número entero, ¿es posible dividir al triángulo en k triángulos de tal forma que el interior de cada uno de ellos contenga a uno y solo uno de los k puntos dados?

1.235. Sean l una recta y B, $C \in l$. Si $A \notin l$, probar que $int(\Delta ABC)$ está contenido en el semiplano determinado por l que contiene a A.

1.236. Sean l una recta y $A \in l$. Si B y C son puntos que están en un mismo semiplano determinado por l y no son colineales con A, probar que $int(\Delta ABC)$ está contenido en el semiplano determinado por la recta l que contiene a los puntos B y C.



1.237. Sean $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$ tres semirrectas. Decimos que la semirrecta $\overrightarrow{OC}$ _está entre las semirrectas_ $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ si se cumplen las siguientes dos condiciones:

1. Las semirrectas $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$ yacen en un mismo semiplano determinado por una recta que pasa por su vértice O.

2. Si una recta l corta a $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$ en los puntos A', B' y C', respectivamente, entonces el punto C' está entre los puntos A' y B'.

a. Supongamos que las semirrectas $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$ yacen en un mismo semiplano determinado por una recta que pasa por su vértice O. Si una recta l corta a las tres semirrectas $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$ en los puntos A', C' y B', respectivamente, de tal manera que el punto C' esta entre los puntos A' y B', probar que la semirrecta $\overrightarrow{OC}$ está entre las semirrectas $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$.

b. Dadas dos semirrectas no opuestas $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$, probar que existe una semirrecta $\overrightarrow{OC}$ que yace entre $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$.

c. Dadas dos semirrectas no opuestas $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$, probar que existe una semirrecta $\overrightarrow{OC}$ tal que $\overrightarrow{OA}$ está entre $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$.

d. Dadas dos semirrectas no opuestas $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$, probar que existe una semirrecta $\overrightarrow{OC}$ tal que $\overrightarrow{OB}$ está entre $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OC}$.

e. Sean $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$ tres semirrectas tales que $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$ están contenidas en un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{OA}$. Probar que una de las semirrectas $\overrightarrow{OB}$ o $\overrightarrow{OC}$ está entre la semirrecta $\overrightarrow{OA}$ y la semirrecta restante.

1.238. Sean l una recta y A, B y C tres puntos.

a. Probar que $(A,l,B) = (B,l,A)$.

b. Si (A,l,B) y (B,l,C), probar que l no puede estar entre A y C.

c. Si A, B y C no son colineales, (A,l,B) y $C \notin l$, probar que (B,l,C) o (A,l,C).

1.239. Dada una recta l y un punto A fuera de ella, probar que existe un punto B tal que (A,l,B).

1.240. Dados dos puntos A y B, probar que existe una recta l tal que (A,l,B).

1.241. Sean A, B y C tres puntos en el plano.

a. Probar que no existe una recta l tal que (A,l,B), (B,l,C) y (C,l,A).

b. Si A, B y C no son colineales, probar que existe una recta l tal que (A,l,B) y (B,l,C).

1.242. Sean l una recta y A y B dos puntos en el plano. Probar que (A,l,B) si y solo si existe un punto $C \in l$ tal que A, B y C son colineales y C está entre A y B.

1.243. Sean l y m dos rectas y A y B dos puntos en el plano. Si (A,l,B) y (A,m,B) probar que existe un punto C diferente de A y B tal que (A,l,C) y (C,m,B).

1.244. Probar que dos segmentos AB y $A'B'$ son congruentes si y solo si podemos encontrar una correspondencia biunívoca $f: AB \to A'B'$ entre sus puntos tal que $PQ \cong f(P)f(Q)$, para cualquier par de puntos P, $Q \in AB$.

1.245. Si $AB \cong CD$ y $E \in AB - \{A, B\}$, probar que existe un punto $F \in CD - \{C, D\}$ tal que $EB \cong FD$.

1.246. Si C está entre A y B, probar que AC no puede ser congruente con AB.

1.247. Sean M el punto medio del segmento AB y M' el punto medio del segmento $A'B'$. Si $AM \cong A'M'$, probar que $AB \cong A'B'$.

1.248. Sean AB y CD dos segmentos colineales. Si $AB \cong CD$ y AB y CD tienen el mismo punto medio, probar que $AB = CD$.

1.249. Sean M el punto medio del segmento AB y $M' \in A'B'$. Si $AM \cong A'M'$ y $MB \cong M'B'$, probar que M' es el punto medio de $A'B'$.

1.250. Sean A, B y M tres puntos colineales. Si $AM \cong MB$, ¿es cierto que M es el punto medio del segmento AB?

1.251 (1986-87, 7th Grade Math Contest). Sean A, B, C y D cuatro puntos consecutivos. Si B es el punto medio de AC y C es el punto medio de BD, ¿qué porcentaje de CD es AC?

1.252. Sea AB y CD dos segmentos colineales distintos y congruentes. Probar que $AB - CD \neq \varnothing \neq CD - AB$.

1.253. Sean A, B, C y D cuatro puntos consecutivos. Probar que $AB \cong CD$ si y solo si $AC \cong BD$.

1.254. Sean A, B, C, D, E y F seis puntos consecutivos. Probar que $AC \cong BD \cong CE \cong DF$ si y solo si $AB \cong CD \cong EF$ y $BC \cong DE$.

1.255. Sean A, B, C, D, E, F, G y H ocho puntos colineales. Si $AB \cong EF$, $BC \cong FG$ y $CD \cong GH$. Probar que $AE \cong DH$.

1.256. Sean A, B y C y A', B' y C' dos hileras de puntos. Si B está entre A y C, A' precede a B' y a C', $AC \cong A'C'$ y $AB \cong A'B'$, probar que B' está entre A' y C'.

1.257. Sean A, B, C y D, y A', B', C' y D' dos hileras de puntos consecutivos. Si $AB \cong BC \cong CD$, $A'B' \cong B'C' \cong C'D'$ y $AB \cong A'B'$, probar que $AD \cong A'D'$.

1.258. ¿Es posible asignar a una recta longitud y anchura sin obtener contradicción alguna?

1.259 (Cambio de Escala). Fijemos un número real positivo r y una longitud de segmentos $|\cdot\cdot|$. Si A y B son puntos arbitrarios, entonces definimos $|AB|_r = r|AB|$. Probar que $|\cdot\cdot|_r$ cumple todos los postulados del Axioma AM.

1.260. Sean A y B dos puntos en el plano. Dados dos puntos P y Q definimos $|PQ|_{AB} = \dfrac{|PQ|}{|AB|}$. Por el problema anterior, sabemos que $|\cdot\cdot|_{AB}$ es una longitud. Probar las siguientes afirmaciones:

a. $|AB|_{AB} = 1$.

b. $|PQ|_{AB} = |CD|_{AB}\,|PQ|_{CD}$.

c. Si $|PQ|_{AB} = |PR|_{AB} + |RQ|_{AB}$, entonces $|PQ|_{CD} = |PR|_{CD} + |RQ|_{CD}$, para cualquier par de puntos C y D.

d. Si P, Q, R y S son puntos arbitrarios, probar que $\dfrac{|PQ|_{AB}}{|RS|_{AB}} = \dfrac{|PQ|_{CD}}{|RS|_{CD}}$.

e. $AB \cong CD$ si y solo si $|PQ|_{AB} = |PQ|_{CD}$ para cualquier par de puntos P y Q.

f. Si $C \in AB$, entonces se cumple la identidad $\dfrac{1}{|PQ|_{AB}} = \dfrac{1}{|PQ|_{AC}} + \dfrac{1}{|PQ|_{CB}}$.

g[1-319]. Si $|PQ|^2_{AB} + |QR|^2_{AB} = |PR|^2_{AB}$, entonces $|PQ|^2_{CD} + |QR|^2_{CD} = |PR|^2_{CD}$.
h[1-319]. Si $|PQ|_{AB} + |QR|_{AB} > |PR|_{AB}$, entonces $|PQ|_{CD} + |QR|_{CD} > |PR|_{CD}$.
i. $|PQ|_{AB}|PS|_{CD} = |PQ|_{CD}|RS|_{AB}$.

1.261. Sea $C \in \overleftrightarrow{AB}$. Probar que si $|AC| = |BC|$, entonces C está entre A y B.
1.262. Sean M_1, M_2 y M_3 tres puntos consecutivos. Probar que existen puntos consecutivos P_1, P_2, P_3 y P_4 tales que M_i es el punto medio del segmento $P_i\, P_{i+1}$, para cada $0 < i < 4$. ¿Es posible generalizar este resultado a cualquier cantidad finita de puntos consecutivos?
1.263. Sean $M_1,\ldots, M_k$ k puntos consecutivos, en donde $k > 0$ es un número entero. Probar que existen puntos consecutivos A_1, B_1, A_2, $B_2,\ldots, A_k$ y B_k tales que M_i es el punto medio del segmento $A_i\, B_i$, para cada $0 < i \leq k$.
1.264. Sean A_0, $A_1,\ldots, A_k$ k puntos consecutivos, en donde $k > 1$ es un número natural. Si M es el punto medio de $A_0\, A_k$ probar que $M \in A_i\, A_{i+1}$, para algún $0 \leq i \leq k - 1$.
1.265. Sean A_1, A_2, $A_3,\ldots, A_{k-1}$ y A_k k puntos consecutivos, donde $k > 1$ es un número entero.
a. Si $|A_1\, A_2| = 1$, $|A_2\, A_3| = 2$, $|A_3\, A_4| = 3,\ldots$ y $|A_{k-1}\, A_k| = k - 1$, ¿cuántos segmentos no congruentes entre sí se pueden formar cuyos puntos extremos sean algunos de los k puntos dados?
b. Si $|A_1\, A_2| = |A_2\, A_3| = |A_3\, A_4| = \ldots = |A_{k-1}\, A_k|$, ¿cuántos segmentos no congruentes entre sí se pueden formar cuyos puntos extremos sean algunos de los k puntos dados?
1.266. Dado un conjunto finito C de k puntos consecutivos, en donde $k > 1$ es un número entero, decir cuál es el mínimo y el máximo número de elementos del conjunto $\{\, |AB| : A, B \in \mathsf{C}\,\}$
1.267. Sea C un conjunto finito no vacío de puntos del plano. Si $A, B \in \mathsf{C}$ satisfacen que $|AB| = \max\{\, |PQ| : P, Q \in \mathsf{C}\,\}$, probar que $PQ \subseteq AB$ para todo par de puntos $P, Q \in \mathsf{C}$.
1.268. Si $C, D \in AB$ satisfacen que $\dfrac{|AB|}{|AC|} = \dfrac{|AC|}{|AD|}$, probar que D precede a C.
1.269. Si AB y CD son dos segmentos cuya unión es un segmento, probar que
$$|AB \cup CD| = |AB| + |CD| - |AB \cap CD|,$$
si $AB \cap CD$ consiste de un solo punto le ponemos longitud 0.
1.270. Demostrar que la suma de las longitudes de dos segmentos colineales que se intersecan es mayor que la longitud del segmento formado por su unión.
1.271. Fijemos tres puntos colineales y consideremos los tres segmentos que ellos determinan. Probar que la longitud del segmento mayor es igual a la suma de las longitudes de los dos segmentos restantes.
1.272. Dados tres números reales positivos, ¿es posible encontrar tres puntos colineales tales que las longitudes de los tres segmentos que determinan coincidan con los tres número dados?
1.273. Sean A, B, C, D, E y F seis puntos colineales. Encontrar el lugar de cada uno de estos puntos sobre la recta que los contiene usando la siguiente información:
i. A precede a B.
ii. $|BA| = |BC|$.
iii. C está entre B y E.
iv. E precede a F.
v. $|DE| = |DF|$.
¿Se puede omitir una de estas cinco condiciones y encontrar la posición de dichos puntos?

1.274. Sean $\overrightarrow{PO}$ una semirrecta y $A, B, C \in \overrightarrow{PO}$ tales que $|AB| = 4|PA|$ y $|BC| = 5|PA|$.
a. Ordenar puntos A, B y C sobre la recta que los contiene.
b. Si $|BC| = 2$, calcular las longitudes de los segmentos PB, PC, AB y AC.
1.275. Sean l una recta y $O \in l$. Probar que, para cualesquiera $A, B \in l - \{O\}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:
a. A y B están en lados opuestos de la recta l con respecto a O.
b. $|AO| + |OB| = |AB|$.

c. $AO \cap OB = \{O\}$.

d. $\overrightarrow{OA} \cap \overrightarrow{OB} = \varnothing$.

1.276. Sean A, B y C tres puntos colineales. Si $|AB| = 6$ y $|BC| = 5$, calcular la longitud del segmento AC en cada uno de los siguientes casos:

a. Cuando $C \in AB$.

b. Cuando $B \in AC$.

c. ¿Por qué $A \notin BC$?

1.277. Probar que C está entre A y B si y solo si $|AC| < |AB|$ y $|CB| < |AB|$.

1.278. Sean A, B y C tres puntos colineales. Si $|AB| < |AC|$, ¿cuál de los tres puntos no debe estar entre los otros dos?

1.279. Sea AB un segmento de longitud a. Probar que $AB = \{C \in \overrightarrow{AB} : C = A \text{ o } 0 < |AC| \leq a\}$.

1.280. Sea AB un segmento de longitud 5. Describir el conjunto $\{P \in \overleftrightarrow{AB} : 1 < |PA| < 5 \text{ y } 2 < |PB| < 5\}$.

1.281. Sea AB un segmento de longitud 2. Describir el conjunto $\{P \in \overleftrightarrow{AB} : 2 - 2|PA| - |PB| + |PA||PB| > 0\}$.

1.282. Sean AB un segmento de longitud 18 y $C \in AB$. Si la longitud de AC es igual $\frac{4}{9}$ del doble de la longitud de AB, calcular la longitud del segmento CB.

1.283[I-238]. Sean C y D los puntos de trisección del segmento AB. Probar que $|AB|^2 = |AC|^2 + 3|CB|^2$.

1.284. Sean AB un segmento y $D, C \in \overleftrightarrow{AB}$. Si $|AC|^2 - |BC|^2 = |AD|^2 - |BD|^2$, probar que $C = D$.

1.285. Sean A, B y C tres puntos consecutivos. Si $|AB| = 14$ y $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{2}{3}$, calcular la longitud de los segmentos BC y AC.

1.286. Sean A, B y C tres puntos colineales tales que $C \in AB$. Si $|BC| = 18$ y $|AC| = 5$, calcular la longitud del segmento AB.

1.287. Sean A, B, C y D cuatro puntos consecutivos. Si $|AC| = 16$ y $|BD| = 9$, calcular la longitud del segmento BC.

1.288. Sean A, B, C y D cuatro puntos consecutivos. Si $|AD| = 16$, $|AB'| < 5$ para todo punto B' entre A y B, y $|C'D| < 6$ para todo punto C' entre C y D, probar que $AB \cong BC$.

1.289. Sea $\overrightarrow{AB}$ una semirrecta tal que $|AB| = 5$. Si $C, D \in \overrightarrow{AB}$ son tales que C precede a D y $|CD| = 4$, probar que $C \in AB$ si y solo si $|AD| < 9$.

1.290. Sean AB y CD dos segmentos. Si tuviéramos que $|AB| = 24$, entonces tendríamos que $|CD| = 38$. ¿Cuál es la relación entre los segmentos AB y CD?

1.291. Sean A, C y B tres puntos consecutivos.

a. Si $|AC| = 2x$, $|CB| = y$ y $|AB| = 6x$, probar que el segmento CB duplica al segmento AC.

b. Si $|AB| = 25$, $|AC| = 2x$ y $|CB| = x + 10$, encontrar las longitudes de los segmentos AC y CB.

1.292. Sean A, B, C, $D \in \overrightarrow{OX}$ y pongamos $a = |OA|$, $b = |OB|$, $c = |OC|$ y $d = |OD|$. Si $bc + ab > b^2 + ac$, $bd + ac > ad + bc$ y $cd + bc > bd + c^2$, ¿cuántas posibles posiciones de los puntos A, B, C y D pueden haber sobre la recta que los contiene?

1.293. Sean A, B y C tres puntos colineales. Si $|AB| = 4$, $|BC| = 9$ y $6 < |AC|$, probar que $B \in AC$.

1.294. Sean P, A, B y C cuatro puntos colineales. Si $||PA| - |PC|| + ||PC| - |PB|| = ||PA| - |PB||$, encontrar todas las posibles posiciones de los cuatro puntos sobre la recta que los contiene.

1.295. Si A, C, B y D son cuatro puntos consecutivos, probar que $|AC||BD| = |AB||CD| + |AD||BC|$.

1.296. Sean A, B y C tres puntos colineales. Si $|AB| < 9$, $|BC| = 3$ y $|AC| > 8$, encontrar el orden de los tres puntos sobre la recta que los contiene.

1.297. Sean A, B y C tres puntos colineales tales que $|AC| = 5$, $|AB| = 6$ y $|BC| = 11$. Decir cuál de los tres puntos dados está entre los otros dos.

1.298. ¿Es posible encontrar tres puntos colineales A, B y C tales que $|AB| = 10$, $|BC| = 2$ y $|AC| = 5$?

1.299. Sean A, B, C y D cuatro puntos colineales. Si $|AB| = 4$, $|BC| = 3$, $|AC| = 7$, $|BD| = 2$ y $|DC| = 5$, encontrar el orden de los puntos sobre la recta que los contiene. Si omitimos una de las cinco longitudes dadas, ¿es posible establecer el orden de los cuatro puntos?

1.300. Si $C \in \overleftrightarrow{AB}$ y $|AC| = 2|CB|$, probar que B biseca A o C triseca a AB.

1.301. Sea AB un segmento. Si $|AC| + |BC| \geq 5$ para todo punto $C \in \overleftrightarrow{AB} - AB$, probar que $|AB| \geq 5$.

1.302. Sean A y C dos puntos en el plano. Probar que $|AC| \leq |AB| + |BC|$, para todo punto $B \in \overleftrightarrow{AC}$. Además, demostrar que la igualdad se da si y solo si $B \in AC$.

1.303. Sean AD un segmento y $B, C \in AD - \{A, D\}$ distintos. Probar que $|AB| + |BD| < |AB| + |BD| + |DC|$.

1.304. Tenemos diez segmentos cuyas longitudes suman 43. Si cada uno de dichos segmentos tiene longitud igual a 4 o 5, ¿es posible saber cuántos segmentos hay de cada medida?

1.305. Sean A, B y C tres puntos consecutivos. Si $2 \leq |BX|$ para todo punto $X \in \overleftarrow{AB}$ y $3 \leq |BY|$ para todo punto $Y \in \overleftarrow{CB}$, probar que $|AC| = 5$.

1.306. Sean A, B y C tres puntos colineales tales que $C \in AB$, $|AC| + |CB| = 18$ y $|AC| - |CB| = 6$. Encontrar las longitudes de los segmentos AC, CB y AB.

1.307. Sean A, B, C, D y P puntos colineales tales que $P \in CD$ y A, C, D y B son consecutivos. Si $|CP| = \frac{|AP|}{5}$, $|PD| = \frac{|PB|}{6}$, $|CD| = 5$ y $|AB| = 28$, calcular las longitudes de los segmentos AP, CP, PD y PB.

1.308. Sean P, A, y B tres puntos consecutivos. Si $M \in AB$ satisface que $|AM| = \frac{5}{6}|MB|$, probar que

$$|PM| = \frac{6|PA| + 5|PB|}{11}.$$

1.309. Sean A, B, C y D cuatro puntos consecutivos.

a. Probar que $|AC| + |BD| = |AD| + |BC|$.

b. Si $|BD| = 6|BC|$ y $|AB| = 6$, probar que $\frac{|AD|}{|BD|} - \frac{1}{|BD|} \geq 1$.

c. Si $|AB| = |BD|$ y $|BC| = |CD|$, probar que $|AD| = 4|CD|$.

d. Si $|AC| = 6$, $|BD| = 10$ y $4|BC| = |CD|$, calcular las longitudes de los segmentos AB, BC y CD.

e. Si $|AD| = 15$, $|BC| = 3$ y $|AC| - |BD| = 6$, encontrar las longitudes de los segmentos AB y CD.

f. Si $|AD| - |BC| = 7$, $|AB||CD| = 6$ y $|CD| < |AB|$, encontrar las longitudes de los segmentos AB y CD.

g. Si $|AD| = 10$ y $|AB| + |CD| = 7$, encontrar la longitud del segmento BC.

h. Si $5|AC| - 2|BD| + 5|CD| - 2|AB| = 15$, $|BC| = 3$ y $|AC| - |BD| = 0$, encontrar las longitudes de AB, CD y AD.

1.310. Sean A, B, C y D cuatro puntos consecutivos. Si $|AB| = 3|BC|$, $|BD| = 5|BC|$ y $|CD| = 16$, calcular la longitud de cada uno de los segmentos AB, BC y CD.

1.311. Sean A, B, M, C y D cinco puntos consecutivos tales que $|CD| = 2|AB|$, $2|MC| = |CD|$ y $|BM| = 4|MC|$. Si $|BC| = 10$, encontrar la longitud de cada uno de los segmentos que determinan los 5 puntos dados.

1.312. Sean A, B, C, D y E cinco puntos consecutivos. Si $|EB| = 2|AC|$, $CD \cong DE$, $\frac{|CD|}{|AC|} = \frac{3}{2}$ y $|AB| = 40$, hallar $|AC|$ y $|DE|$.

1.313. Sean A, B, C, D y E cinco puntos consecutivos.

a. Si $|BC| = 3|AB|$, $|CD| = \frac{5}{3}|BC|$ y $|DE| = \frac{1}{2}|CD|$, expresar las longitudes de los segmentos AC, AD, AE, BC, BD y BE en términos de $|AB| = a$.

b. Si $|AB| = 6$, $|BC| = |DC|$, $|BE| = 15$ y $|DE| = 3|CD|$, calcular las longitudes de los segmentos CD, DE y AE.

1.314. Sean AB un segmento y M su punto medio. En cada caso encontrar la longitud del segmento AB.
a. $|AM| = 7x - 5$ y $|MB| = 3x + 11$. b. $|AM| = 2x$ y $|AB| = 2x + 6$.
c. $|AM| = 4x$, $|MB| = 2y + 16$ y $|AB| = 6x + 5y$.

1.315. Sean A, C y B tres puntos consecutivos y M el punto medio de CB.
a. Si $|AC| = 15$ y $|CB| = 24$, encontrar la longitud del segmento AM.
b. Si $|AM| = 20$ y $|CB| = 10$, hallar la longitud del segmento AC.
c. Si $|AC| = 25$ y $|MB| = 5$, encontrar la longitud del segmento AB.
d. Si $|AM| = 2x$ y $|AB| = 2x + 6$, encontrar la longitud del segmento AB.
e. Si $|AM| = 16$, $|CM| = x$ y $|AB| = 5x + 4$, encontrar la longitud del segmento AB.
f. Si $|AM| = 5y + x$, $|CM| = 2x$, $|MB| = y$ y $|AB| = 6x + 14$, encontrar la longitud del segmento AB.

1.316. Sean A, B y C tres puntos consecutivos. Si $|AB| = 16$, $|BC| = 3x - 2$ y $|AC| = 6x + 10$, calcular la longitud del segmento AC.

1.317. Sean A, B, C y D cuatro puntos consecutivos.
a. Si $|AC| = 3x + 5$, $|BC| = 2x + 1$, $|BD| = 4x - 2$ y $|AD| = 31$, calcular la longitud de cada uno de los segmentos AB, BC y CD.
b. Si $|AB| = 2x - 1$, $|CD| = 4x + 1$, $|BD| = 20$ y $|AD| = 6x + 10$, calcular la longitud de cada uno de los segmentos AB, BC, CD y AD.

1.318. Sean A, D, B y C cuatro puntos consecutivos tales que $|AD|$, $|DB|$ y $|BC|$ son números enteros consecutivos. Si $|AB| = |BC| + 2$, encontrar la longitud del segmento DC.

1.319. Se tienen tres segmentos de longitudes x, y y z. Si $2x + 3y + z = 26$, $x + 2y + 3z = 23$ y $4x + y + 2z = 27$, encontrar la longitud de cada uno de los segmentos.

1.320. Sean AB un segmento, M su punto medio y N el punto medio de MB. Probar que $2|MN| = |AN| - |BN|$.

1.321. Sean AB un segmento y M su punto medio. Probar que $2|CM| = |CB| - |AC|$, para todo punto $C \in AM$.

1.322. Sean A, B y C tres puntos colineales y M el punto medio del segmento AB. Probar las siguientes afirmaciones:
a. $C \in AB$ si y solo si $2|CM| = ||CA| - |CB||$. b. $C \notin AB$ si y solo si $2|CM| = |CA| + |CB|$.

1.323. Sean A, B y C tres puntos consecutivos. Si M es el punto medio de AB y N es el punto medio de AC, probar las siguientes afirmaciones:
a. $|MN| = \dfrac{|AC| - |AB|}{2} = \dfrac{|BC|}{2}$.
b. $AB \cong BC$ si y solo si $|MN| = \dfrac{|AB|}{2}$.

1.324. Si A, B, C y D son cuatro puntos consecutivos, M es el punto medio de AB y N es el punto medio de CD, probar la identidad
$$|MN| = \frac{|AD| + |BC|}{2} = \frac{|AC| + |BD|}{2}.$$

1.325. Sean AD y BC dos segmentos colineales con el mismo punto medio. Si B está entre A y D, probar que C está también entre A y D.

1.326. Sean AD y BC dos segmentos colineales. Probar que AD y BC tienen el mismo punto medio si y solo si $AB \cong CD$ y $AC \cong BC$.

1.327. Sean A, B y C tres puntos consecutivos, M el punto medio de AB y N el punto medio de BC. Probar que $AB \cong CD$ si y solo si $|AB| = |MN|$.

1.328. Sean AB un segmento, M el punto medio de AB y $P \in \overleftrightarrow{AB}$.
a. Probar que $|AP| < |PB|$ si y solo si M está entre P y B.
b. Probar que $|AP| > |PB|$ si y solo si M está entre A y P.

1.329. Sean A, B y C tres puntos consecutivos. Dar una condición necesaria y suficiente para que exista un punto $P \in BC$ tal que $2|BP| = |AP| - |PC|$.

1.330. Sean A, B y C tres puntos consecutivos.
a. Si $D \in BC$ y $2|AD| = |AB| + |AC|$, probar que D es el punto medio de BC.
b. Si $D \in AB$ y $2|DB| = |AB| - |BC|$, probar que D es el punto medio de AC.
c. Si $D \in AB$ y $2|DC| = |AC| + |BC|$, probar que D es el punto medio de AB.

1.331. Sean A, B y C tres puntos consecutivos. Si M es el punto medio de AB, P es el punto medio de BC y N es el punto medio de AC, probar que MN y AP tienen el mismo punto medio.
1.332. Sean A, B, C y D cuatro puntos consecutivos tales que $|AB| = 6$, $|BC| = 8$ y $|CD| = 16$. Calcular la longitud del segmento determinado por los puntos medios de los segmentos AB y CD.
1.333. Sean AB un segmento y M su punto medio. Si N es el punto medio de MB y $|NB| = 4$, calcular la longitud del segmento original.
1.334. Sean AB un segmento y $C \in AB$. Supongamos que $|AC| = 4x + 10$ y $|CB| = 2y + 20$.
a. ¿Qué condiciones deben satisfacer x y y para que C sea el punto medio de AB?
b. ¿Si $|AB| = 40$, cuáles son los valores de x y y para que C sea el punto medio de AB?
1.335. Sean AB un segmento y M su punto medio. Si $P \in AB$ satisface que $|MP| = 4$ y $\dfrac{|AP|}{|PB|} = \dfrac{7}{4}$, ¿en cuál de los dos segmentos AM o MB se encuentra el punto P?
1.336. Sean AC un segmento, $B \in \overleftrightarrow{AC}$, M el punto medio de AB, N el punto medio de BC y O el punto medio de AC. Si $|AB| = a$ y $|BC| = b$, expresar $|MN|$, $|MO|$ y $|ON|$ en términos de a y b.
1.337. Sean AB un segmento, M su punto medio y $O \in \overleftrightarrow{AB}$. Si $|OA| = a$ y $|OB| = b$, expresar $|OM|$, $|MA|$ y $|MB|$ en función de a y b.
1.338. Sean A, C y B tres puntos consecutivos y $X \in AB$. Pongamos $a = |AC|$ y $b = |CB|$. Si M es el punto medio de XB y C es el punto medio de AM, expresar $|CX|$ en términos de a y b.
1.339. Sean A, B y C tres puntos consecutivos y M el punto medio de BC. Probar que

$$|AB||AC| = |AM|^2 - |BM|^2.$$

1.340. Sean A, C y B tres puntos consecutivos y M el punto medio de AB. Probar que $M \in CB$ si y solo si $2|AC| < |AB|$.
1.341. Sean A, C, B y D cuatro puntos consecutivos tales que C es el punto medio de AB.
a. Probar que $|AC||AD| = |CB||BD| + 2|AC|^2$.
b. Si $|BD| = 2|AB|$, probar que $|AD||BD| = 24|AC|^2$.
1.342[I-238]. Sean AB un segmento, M su punto medio y $C \in \overleftrightarrow{AB}$. Probar que $|AC|^2 = |BC|^2 + 4|AM||MC|$.
1.343[I-238]. Sean A, B, C y D cuatro puntos consecutivos tales que $AB \cong CD$. Probar que

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC||AD|.$$

1.344[I-238]. Sean A, B, C, D y E cinco puntos consecutivos tales que $AB \cong BC \cong CD$. Probar que

$$|AE|^2 + 3|CE|^2 = 3|BE|^2 + |DE|^2.$$

1.345[I-238]. Sean A, B, C y D cuatro puntos consecutivos tales que $2|AB| = |BC|$. Probar que

$$2|AD|^2 + |CD|^2 = 3|BD|^2 + 2|AB|^2 + |BC|^2.$$

¿Se cumple la identidad si D no es colineal con A, B y C?
1.346[I-238]. Sean A, B, C y D cuatro puntos consecutivos tales que $2|AC| = |CD|$. Probar que

$$2|AB|^2 + |BD|^2 = 3|BC|^2 + 2|AC|^2 + |CD|^2.$$

¿Se cumple la identidad si B no es colineal con A, C y D?
1.347. Sean A, B, C y D cuatro puntos consecutivos. Si L, M y N son los puntos medios de AB, BC y CD, respectivamente, probar que M es el punto medio de LN si y solo si $AB \cong CD$.
1.348. Sean A, B, C y D cuatro puntos consecutivos. Si M, N, P, Q, R y S son los puntos medios de los segmentos AB, BC, CD, AD, AC y BD, mostrar que los segmentos MP, NQ y RS tienen el mismo punto medio.
1.349. Sean A, B, C y D cuatro puntos consecutivos.
a. Si M, N, P, Q, R y S son los puntos medios de AB, CD, AC, BD, AD y BC, respectivamente, probar que los segmentos MN, PQ y RS tienen el mismo punto medio.
b. Si I y J son los puntos medios de los segmentos AB y CD, probar que $2|IJ| = |AC| + |BD|$.
1.350. Sean A, B y C tres puntos consecutivos. Si L, M y N son los puntos medios de AB, BC y AC, respectivamente, probar que $|OL| + |OM| + |ON| = |OA| + |OB| + |OC|$, para todo punto $O \in \overleftrightarrow{AB} - AC$.

1.351. Sean A, B, C y D cuatro puntos consecutivos. Si L, M y N son los puntos medios de AB, BC y CD, respectivamente, y P y Q son los puntos medios de LM y MN, respectivamente, probar las siguientes afirmaciones:

a. $4|OP| + 4|OQ| = |OA| + 3|OB| + 3|OC| + |OD|$, para todo punto $O \in \overleftrightarrow{AD} - AD$.

b. Si R es el punto medio de PQ, entonces $8|OR| = |OA| + 3|OB| + 3|OC| + |OD|$, para todo punto $O \in \overleftrightarrow{AD} - AD$.

1.352. Sean P, A, y B tres puntos consecutivos. Si M es el punto medio del segmento AB, $|PM| = 6$ y $|PB| = 10$, calcular las longitudes de los segmentos PA, AM y AB.

1.353. Sean A, B, C y D cuatro puntos colineales y M y N los puntos medios de los segmentos AB y CD, respectivamente.

a. Si $|AB| = 8$ y $|CD| = 12$, probar que $AB \cap CD = \varnothing$ si y solo si $10 < |MN|$.

b. ¿En qué casos es cierta la igualdad $|MN| = \dfrac{|AB|}{2}$?

1.354. Sean A, B, C, D y E cinco puntos consecutivos. Si $|AE| = 40$, $|AD| = 30$, $|BE| = 25$ y C es el punto medio de BD, calcular la longitud del segmento BC.

1.355. Sean O, A, B, C y D cinco puntos consecutivos, M el punto medio de AB, N el punto medio de CD y P el punto medio de MN. Si $|OA| = 2$, $|OB| = 4$, $|OC| = 6$ y $|OD| = 8$, encontrar la longitud del segmento OP.

1.356. Sean AB un segmento y $C \in AB - \{A, B\}$. Probar que existen dos números reales p y q tales que

a. $p + q = 1$ y

b. $|AC| = p|AB|$ y $|CB| = q|AB|$.

1.357. Dados dos segmentos AB y CD, probar que existen dos números reales p y q tales que

$$p|AB| + q|CD| = 1.$$

¿Cuántas posibles soluciones hay para p y q?

1.358[I-283]. Sean $P_1, P_2, \ldots, P_k$ puntos consecutivos, en donde $k > 1$ es un número natural. Si $u = [\frac{k}{2}]$ y $v = [\frac{k+1}{2}]$, probar que $\displaystyle\sum_{i=1}^{u} |P_i P_{k+1+i}| = \sum_{j=1}^{v} |P_j P_{k+1-j}|$.

La *parte entera* de un número real p es el mínimo número entero $[p]$ mayor o igual que el mismo número.

1.359[I-56]. Sean l una recta y A, A', O, B, $B' \in l$ tales que las longitudes de los segmentos OA y OA' son las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, y las longitudes de los segmentos OB y OB' son las raíces de la ecuación $a'x^2 + b'x + c' = 0$. ¿Qué relación debe existir entre los coeficientes de las dos ecuaciones para que el punto medio M del segmento AA' cumpla igualdad $|AM|^2 = |BM||MB'|$?

1.360. Dados k segmentos arbitrarios, en donde $k > 1$ es un número entero, demuestre que uno de ellos es menor que o congruente con cada uno de los segmentos restantes.

1.361. Dada una cantidad finita de puntos en el plano, probar que dos de ellos determinan un segmento que es congruente a o mayor que cualquier otro segmento, cuyos puntos extremos sean algunos de los puntos dados.

1.362. Dada una cantidad finita de puntos en el plano, probar que dos de ellos determinan un segmento que es congruente con o menor que cualquier otro segmento, cuyos puntos extremos sean algunos de los puntos dados.

1.363. Sean AB, $A'B'$, CD y $C'D'$ cuatro segmentos tales que $AB \cong A'B'$ y $CD \cong C'D'$. Probar que $AB < CD$ si y solo si $A'B' < C'D'$.

1.364. Sean AB, CD y EF tres segmentos. Si $AB < CD$ y CD no es mayor que EF. Encontrar la relación entre los segmentos AB y EF.

1.365. Sean AB y CD dos segmentos y i y j dos números enteros positivos. Si $AB < CD$ y $i < j$, probar que

$$i|AB| < j|CD|.$$

1.366. Sean A, B, C y D cuatro puntos colineales.

a. Si $AC < AB$ y $BD < BC < AC$, encontrar todas las posibles ubicaciones de estos puntos sobre la recta que los contiene.

b. Si $BD < BC < AB < AC$, ¿cuántos ordenamientos posibles hay de los puntos A, B, C y D sobre la recta que los contiene?

c. Si $AC < AB$, $BC < AB < AD$ y $BD < AD$, encontrar el orden de los puntos sobre la recta que los contiene.

1.367. Sean A, B y C tres puntos colineales tales que A precede a B y a C. Si $AB < AC$, probar que B precede a C.
1.368. Sean A, B y C tres puntos colineales. Si $AC > AB$ y $AC > BC$, probar que B está entre A y C.

1.369. Sean A, B y C tres puntos colineales con $C \in \overrightarrow{AB}$. Probar que los siguientes enunciados son equivalentes:
a. C está entre A y B. b. $AC < AB$. c. $CB < AB$. d. $|AC| < |AB|$. e. $|CB| < |AB|$.
1.370. Sean A, B y C tres puntos colineales. Si $BC < AC < AB$, encontrar la posición del punto C con respecto al segmento AB.
1.371. Si C está entre A y B, C' está entre A' y B', $A'B' < AB$ y $A'C' < AC$, probar que $C'B' < CB$.
1.372. Sean A, B y C tres puntos consecutivos.
a. Encontrar un punto $M \in AC$ tal que $MB < MA$.
b. Encontrar un punto $M \in AC$ tal que $MB < MC$.
c. ¿Es posible encontrar un punto $M \in AC$ tal que $MB < MA < MC$?
1.373. Sean AB un segmento y M su punto medio. Si $P \in AB$ y $AP > PB$, probar que $P \in MB$.
1.374. Sean AB un segmento y $C \in AB - \{A, B\}$. Si $D \in AB - \{A, B, C\}$, probar que $AD < AC$ o $BD < BC$.
1.375. Sean A, B, C y D cuatro puntos consecutivos. Si $AB > CD$, probar que $AC > BD$.
1.376. Sean A, D, C y B cuatro puntos consecutivos. Probar que si $CB < DB$, entonces $AD < AC$.
1.377. Sean A, B, C y D cuatro puntos consecutivos. Si $|AC| = 4$ y $|BD| = 3$, probar que $AB > CD$.
1.378. Sean A, B y C, y P, Q y R dos hileras de puntos tales que B está entre A y C, y Q está entre P y R. Probar las siguientes afirmaciones:
a. Si $AB \leq PQ$ y $BC \leq QR$, entonces $AC \leq PR$.
b. Si $AB < PQ$ y $BC < QR$, entonces $AC < PR$.
1.379. Sean A, B y C tres puntos consecutivos tales que $AB \leq BC$. Primero probar que a cada punto P que esté entre A y B le podemos asignar un único punto $f(P)$ que esté entre B y C tal que $|AP| = |f(P)C|$. Probar que la función f es inyectiva, y que f es biyectiva si y solo si $AB \cong BC$.
1.380. Sean A y B dos puntos en el plano. Probar que a cada punto P que esté entre A y B le podemos asignar un único punto $f(P)$ que esté entre A y B tal que $|AP| = |f(P)B|$. Probar además que f es una función biyectiva y que existe un punto M entre A y B tal que $f(M) = M$.
1.381. Sean AB y CD dos segmentos tales que $AB \leq CD$. Probar que a cada punto P que esté entre A y B le podemos asignar un único punto $f(P)$ que esté entre C y D tal que $|AB| = |AP| + |f(P)D|$. También probar que f es una función inyectiva, y que f es suprayectiva si y solo si $AB \cong CD$.
1.382. Teorema de la Construcción de un Segmento. Si AB y CD son dos segmentos no congruentes, entonces existe un punto $P \in \overleftrightarrow{AB}$ tal que $AP \cong CD$ y una de las siguientes condiciones se cumple:
a. P está entre A y B si $CD < AB$.
b. B está entre A y P si $AB < CD$.

1.383. Teorema de la Duplicación de un Segmento. Dados dos puntos A y B probar que existe $C \in \overleftrightarrow{AB}$ tal que B es el punto medio de AC.

1.384. Dado un segmento AB, probar que existen puntos $C, D \in \overleftrightarrow{AB}$ tales que $|BC| = 2|AB|$ y $BC \cong BD$.
1.385. Sea AB un segmento. Supongamos que $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ y a_k son k números reales positivos, en donde $k > 1$ es un número entero, tales que $a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} + a_k = |AB|$. Probar que existen puntos consecutivos $A_1, A_2, \ldots, A_{k-1} \in AB$ tales que $|A\,A_1| = a_1$, $|A_i\,A_{i+1}| = a_i$, para cada $1 \leq i < k-1$, y $|A_{k-1}\,B| = a_k$.
1.386. Sean AB un segmento y $a > 0$ un número real.
a. Si $a < |AB|$, probar que existe un único punto $M \in \overleftrightarrow{AB}$ tal que $|AM| - |BM| = a$.
b. Si $a \geq |AB|$, probar que existe un punto $M \in \overleftrightarrow{AB}$ tal que $|AM| + |BM| = a$.
c. ¿Cuántos puntos existen en $\overleftrightarrow{AB}$ que satisfagan la relación del inciso b?
1.387. Sean l una recta y $\varnothing \neq X, Y \subseteq l$ disjuntos. Supongamos que todo punto de X precede a cualquier punto de Y. Probar que existe un punto $A \in l$ tal que si $P \in X$ y $Q \in Y$, entonces A está entre P y Q. Si además para cada número real $\varepsilon > 0$ existen puntos $P \in X$ y $Q \in Y$ tales que $|PQ| < \varepsilon$, probar que el punto A es único.

1.388. Sean $P_1, P_2, \ldots, P_k$ k puntos en el plano no necesariamente colineales, con $k > 2$ un número natural. Probar que podemos encontrar un segmento AB tal que $|AB| = |P_1 P_2| + |P_2 P_3| + \ldots + |P_{k-1} P_k|$.

1.389. Dada una cantidad finita de números reales positivos $r_1, r_2, \ldots, r_k$ y l una recta arbitraria, probar que podemos encontrar puntos $P_0, P_1, \ldots, P_k \in l$ tales que $|P_0 P_1| = r_1$, $|P_1 P_2| = r_2, \ldots, |P_{k-1} P_k| = r_k$.

1.390. Probar que para cada número racional positivo q y para cada segmento AB existe un segmento PQ tal que

$$|PQ| = q|AB|.$$

1.391. Demuestre que para cada segmento AB y cada número real $\varepsilon > 0$, existe un segmento CD tal que $CD < AB$ y $|CD| < \varepsilon$.

1.392. Dados un segmento AB y dos números reales positivos a y b tales que $a < b$, probar que existe un número racional q tal que $a < q|AB| < b$.

1.393. Dado un segmento AB, probar que para todo número real positivo ε existe un punto $C \in \overleftrightarrow{AB} - AB$ tal que

$$|AC| + |BC| < |AB| + \varepsilon.$$

1.394. Dado un segmento AB, probar que para todo número real positivo ε existe un punto $C \in AB$ tal que

$$||AC| - |BC|| < \varepsilon.$$

1.395. Sean l una recta y O, A_k, $B_k \in l$, para cada número entero positivo k. Si

i. $OA_j \subseteq OB_i$, para cada par de número enteros positivos i y j; y

ii. para cada número real positivo ε existen números enteros positivos i y j tales que $|OB_i| - |OA_j| < \varepsilon$,

probar que existe un punto $P \in l$ tal que $OB_i \subseteq OP \subseteq OB_i$, para todo par de números enteros positivos i y j.

1.396. Sean l una recta, $A \in l$ y, para cada número natural positivo k, $P_k \in l$ tal que A precede a P_k y $|AP_k| < \frac{1}{k}$. Probar que para cualquier punto $B \in l$ que preceda a A existe un número natural i tal que $P_k \in AB$ para todo número natural $k > i$.

1.397. Sean l una recta, $A \in l$ y $k > 1$ un número natural. Si $B \in l - \{A\}$, probar que podemos encontrar puntos $P_1 = A, P_2, \ldots, P_{j-1}, P_j \in l$ tales que $AB \subseteq AP_j$ y $|P_i P_{i+1}| = \frac{1}{k}$, para cada $0 < i < j$.

1.398. Sean AB un segmento y $k > 0$ un número entero. Tomemos puntos consecutivos $A_0, A_1, \ldots, A_k \in AB$ tales que $A_0 = A$ y $B = A_k$. Probar que podemos encontrar $1 \leq j < k$ de tal forma que $|A_j A_{j+1}| \leq \frac{|AB|}{k}$.

1.399. Sean AB un segmento, $P, Q \in AB$ y $k > 1$ un número entero. Tomemos puntos consecutivos $A_1, \ldots, A_k \in AB$ tales que $|A_i A_{i+1}| < \frac{|PQ|}{2}$, para cada $1 \leq i < k$, $A_1 = A$ y $A_k = B$. Probar que podemos encontrar $1 \leq j < k$ de tal forma que $A_j A_{j+1} \subseteq PQ$.

1.400. Sea AB un segmento. Sean M_1 el punto medio de AB, M_2 el punto medio de M_1B, y por inducción, M_{2k} el punto medio de $M_{2k-1}M_{2k-2}$ y M_{2k+1} el punto medio de $M_{2k-1}M_{2k}$, para cada número entero positivo $k > 2$. Probar que existe un punto $P \in \cap\{M_{2k-1}M_{2k} \cap M_{2k+1}M_{2k} : \mathrm{k} \in \boldsymbol{N}\}$ tal que

$$|AP| = \frac{2}{3}|AB| \text{ y } |PB| = \frac{1}{3}|AB|.$$

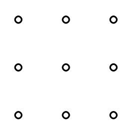
1.401. Sean AB un segmento y $\{P_k : k \in N\}$ una cantidad infinita de puntos de AB. Probar que para todo número real $\varepsilon > 0$ existen $i, j \in N$ tales que $|P_i P_j| < \varepsilon$.

1.402. Probar que es posible encontrar una cantidad infinita de puntos colineales $\{P_k : k \in N\}$ tales que P_i precede a P_j siempre que $i < j \in N$, y para todo número real $\varepsilon > 0$ existen $i, j \in N$ tales que $|P_i P_j| > \varepsilon$.

1.403. En una recta cualquiera l, probar que es posible encontrar un subconjunto numerable C de l tal que si A, $B \in l$, entonces $AB \cap \mathrm{C} \neq \varnothing$.

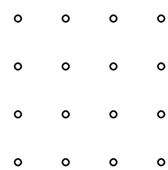
1.404. Probar que los Axiomas de Arquímedes y de Cantor juntos son equivalentes al Axioma de Dedekind.

1.405. Dar una correspondencia biunívoca entre los puntos de una recta del plano y los números reales.
1.406. Dados k puntos en el plano, en donde $k > 0$ es un número entero, y un número entero $0 < i < k$, ¿es posible encontrar una recta tal que en uno de los semiplanos que ella determina hay i puntos de los dados y en el otro semiplano yacen los restantes $k - i$ puntos dados?
1.407. Dada una cantidad infinita numerable de puntos en el plano, probar que podemos encontrar una recta tal que todos los puntos dados estén en los semiplanos determinados por dicha recta y cada uno de estos semiplanos contenga una cantidad infinita de tales puntos.
1.408. ¿Puede un punto cualquiera del plano ser igual a la intersección de los interiores de una cantidad infinita de triángulos? ¿Qué se pude decir si en lugar de un punto consideramos un segmento?
1.409. Sea $\Delta A_k B_k C_k$ un triángulo, para cada número entero positivo k. Si tenemos que $int(\Delta A_{k+1} B_{k+1} C_{k+1}) \subseteq int(\Delta A_k B_k C_k)$, para cada número entero positivo k, ¿es cierto que la intersección de los interiores de todos los triángulos es distinta del vacío?
1.410. En el interior de un triángulo ΔABC tenemos una cantidad infinita numerable de puntos. Probar que existe un punto $D \in BC$ tal que los mismos puntos están en el interior de los triángulos ΔABD y ΔADC, y ambos interiores tiene una cantidad infinita de dichos puntos.
1.411. Tres rectas no concurrentes dividen al plano en siete regiones. Probar que cualquier recta del plano no puede atravesar a más de cuatro de estas regiones.
1.412. Sea AB un segmento. Probar que $AP + PB = AB$, para todo punto $P \in AB - \{A, B\}$.
1.413. Si $AB = CD + EF$, probar que $CD < AB$ y $EF < AB$.
1.414. Sean AB un segmento y i y j dos números enteros positivos. Probar las siguientes afirmaciones:
a. $(i + j)AB = iAB + jAB$.
b. $i(jAB) = ijAB$.
c. Si $i < j$, probar que $i|AB| < j|AB|$.
1.415 (Ken's Puzzle of the Week). a. Colocar 12 árboles en 6 filas con 4 árboles en cada una.
b. Colocar 10 árboles en 5 filas con 4 árboles en cada una.
c. Colocar 9 árboles en 10 filas con 3 árboles en cada una.
d. Colocar 4 árboles en 6 filas con 2 árboles en cada una.
e. En la figura tenemos 9 puntos:



Conectar todos los 9 puntos dibujando 4 rectas sin levantar el lápiz del papel y terminar en donde se empezó.

f. En la figura tenemos 16 puntos:



i. Conectar todos los16 puntos dibujando 6 rectas sin levantar el lápiz del papel y terminar en donde se empezó.
ii. Marcar 10 puntos de tal forma que haya en cada fila, en cada columna y en cada diagonal central un número par de puntos marcados.

g. En la figura tenemos 36 puntos:

Marcar puntos de tal forma que en cada fila, en cada columna y en cada hilera de puntos paralela a una de las diagonales no haya más de dos puntos marcados.

1.416. Se tiene un segmento de longitud 900, el cual se quiere dividir en 12 segmentos de tal forma que la longitud de cada uno de ellos sea 10 veces más grande que la longitud, su segmento anterior (viéndolos de izquierda a derecha). ¿Cuál es la longitud de cada uno de los segmentos?

1.417 (O.M.A.). En el interior de un segmento de longitud 1, se han coloreado algunos segmentos ajenos entre sí de tal modo que si dos puntos del segmento están a una distancia de por lo menos 0.1, uno de ellos quedó sin colorear. Hallar el máximo valor posible de la suma de las longitudes de los segmentos coloreados.
1.418. Sea AB un segmento. Si primero dividimos a AB en 100 partes iguales y posteriormente lo dividimos en 65 partes iguales, ¿cuáles de estas divisiones coinciden si sobreponemos la primera división sobre la segunda?
1.419. Con una cierta regla medimos un segmento y resulta que su longitud es igual a 21 cm, pero luego nos damos cuenta que en dicha regla la graduación no está bien marcada, pues nos enteramos que 1 cm de esta regla equivale a 1.1 cm real. Con esta información, hallar la verdadera longitud del segmento.
1.420[I-279]. Se tiene una regla de 12 cm de largo, la cual se ha encogido y su medida actual es de 11.5 cm de largo. Si con la regla encogida, pensando que mide 12 cm, se cree que una cuerda mide 2 m de largo, ¿cuál es la medida real de la cuerda?
1.421[I-279]. Se tiene una cinta de 2 m de largo, en la cual se hallan marcadas rayas verdes cada 11 milímetros y rayas rojas cada 17 milímetros a lo largo de ella. ¿Cuántas rayas rojas se encuentran a un milímetro de distancia de una raya verde?
1.422. Sabemos que una barra de hierro de 1 m de longitud aumenta 0.014 mm por 1º grado que aumente la temperatura. Si una barra de metal tiene 3 m de longitud a 40º grados de temperatura, ¿cuál será su longitud si la temperatura aumenta a 60º grados?
1.423(Ñandú). Una hormiga camina sobre un segmento. La primera vez llega al final del segmento y se regresa. En las veces siguientes, llega solo hasta la mitad del camino recorrido de la vez anterior y vuelve. En la cuarta vez llega al punto de partida y ha recorrido 15 metros. ¿Cuál es la longitud del segmento?
1.424. Manuel, Pedro y Tomás son tres niños que están formados en línea recta. Pedro, que es el mas bajo de estatura, está en medio de los otros dos. Si Manuel camina, le cuesta ocho pasos para alcanzar a Tomás. Un paso de Tomás es la mitad de un paso de Manuel. Si Tomás camina hasta la posición de Pedro, le cuesta 9 pasos. Un paso de Pedro es la mitad de un paso de Tomás, ¿cuántos pasos necesita Pedro para llegar hasta donde se encuentra Manuel?
1.425. Sean P los puntos de una esfera en el espacio y L el conjunto de los círculos de mayor radio de dicha esfera. Decir cuáles axiomas de este primer capítulo cumplen los conjuntos P y L.
1.426. Sean $P = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 : y > 0\}$ el semiplano superior del plano real y L el conjunto de los semicírculos superiores de $\boldsymbol{R}^2$ cuyos centros yacen sobre la recta $\boldsymbol{R} \times \{0\}$. Decir cuáles axiomas de este primer capítulo cumplen los conjuntos P y L.
1.427. Los cinco axiomas que Euclides consideró en su obra *Elementos de Geometría* fueron los siguientes:
1. Es posible trazar una recta desde un punto arbitrario a otro punto cualquiera.
2. Es posible prolongar una recta en sus dos direcciones.
3. Por cualquier punto se puede trazar un círculo de cualquier radio.
4. Todos los ángulos rectos son congruentes.
5. Dadas dos rectas cortadas por una recta transversal, si la suma de las medidas de dos ángulos internos cuyos interiores estén en un mismo semiplano determinado por la recta transversal es menor que 180, entonces las dos rectas dadas se cortan en dicho semiplano.

El famoso escritor Lewis Carroll, autor del libro de *Alicia en el país de las Maravillas*, interpretó los axiomas de Euclides de la siguiente manera:
1. Dos puntos de vista distintos pueden dar lugar a un solo debate.
2. Es posible prolongar un debate indefinidamente.
3. Desde cualquier punto de vista es posible idear un razonamiento circular sobre cualquier materia, de tal forma que no nos diga nada nuevo sobre ella.
4. Todos los razonamientos correctos son igualmente valiosos.
5. Si un debate está en conexión con otros dos de tal modo que la diferencia entre el primero y cualquiera de los otros dos es menor que un razonamiento correcto, los dos últimos llegarán a resolverse si se prolongan indefinidamente.

¿Podría el lector interpretar algunos de los axiomas que hemos visto en este capítulo dentro de este contexto?
1.428. Discutir las siguientes definiciones de una recta basadas en la noción de movimiento:
a (Leibnitz). Una recta es una línea tal que si inmovilizamos cualesquiera dos de sus puntos, los otros puntos restantes quedarían también inmóviles.
b (Peyrard). Una recta es una línea que si gira en torno a dos de sus puntos, la línea no cambia de posición.

CAPÍTULO 2

ÁNGULOS

2.1. Ángulos

2.1.1. Definición. Si $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ son dos semirrectas con el mismo vértice O, entonces al conjunto $\overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OB}$ $\cup \{O\}$ se le llama *ángulo*. A las semirrectas $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ se les llama los *lados* del ángulo y al punto O el *vértice* de él mismo.

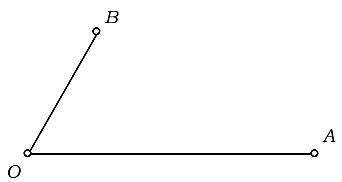


Figura 2.1

Para describir a un ángulo es necesario citar a tres de sus puntos, los cuales son su vértice y un punto de cada uno de sus dos lados. El vértice es el punto que se nombra siempre en segundo lugar y los puntos de los lados se nombran en primer y tercer lugar. En símbolos, al ángulo cuyos lados son las semirrectas $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ se le denotará por $\angle AOB$ (o $\angle BOA$). Puesto que un rayo queda determinado por su vértice y cualquier punto de él mismo, un ángulo puede ser denotado de diferentes maneras:

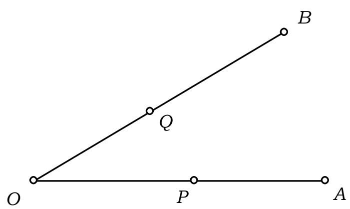


Figura 2.2

Por ejemplo, si $P \in \overrightarrow{OA}$ y $Q \in \overrightarrow{OB}$, entonces el ángulo $\angle AOB$ se denota también como $\angle POQ$, o $\angle AOQ$, o $\angle POB$.

En algunos casos, para denotar a un ángulo arbitrario sin hacer referencia a su vértice y sus dos lados, usaremos el símbolo $\angle$ seguido de alguna de las letras griegas α, β o γ. Por ejemplo, los símbolos $\angle\alpha$, $\angle\beta$ y $\angle\gamma$ denotarán ángulos en algunos casos.

2.1.2. Definición. Sean $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ dos semirrectas con él mismo vértice O. Si $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$, entonces decimos que el ángulo $\angle AOB$ es *nulo*. Si $\overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OB} \cup \{O\} = \overleftrightarrow{AB}$, entonces decimos que el ángulo $\angle AOB$ es *llano*.

ángulo nulo ángulo llano

Figura 2.3

A un ángulo se le llama *degenerado* si es nulo o llano.

De la definición, vemos que todo ángulo nulo es una semirrecta junto con su vértice y todo ángulo llano es una recta cuyos lados resultan ser semirrectas opuestas. En símbolos, si $\angle AOB$ es un ángulo nulo, entonces $\angle AOB = \overrightarrow{OA} \cup \{O\} = \overrightarrow{OB} \cup \{O\}$, y si $\angle AOB$ es un ángulo llano, entonces $\angle AOB = \overleftrightarrow{AB}$. Observemos también que en cualquier ángulo no degenerado sus lados no son colineales.

2.2. Interior y exterior de un ángulo no degenerado

2.2.1. Teorema(Hilbert, 1899). Un ángulo no degenerado divide a los puntos del plano que no están sobre él en dos regiones, ambas no vacías, de tal modo que en una y solo en una de ellas cualesquiera dos de sus puntos, determinan un segmento que no interseca a ninguno de los lados del ángulo.

Prueba: Fijemos un ángulo no degenerado $\angle AOB$. Sean **R** la intersección del semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{OA}$ que contiene al punto B y el semiplano determinado por $\overleftrightarrow{OB}$ que contiene al punto A, y $\mathbf{S} = \{P : P \notin \angle AOB \cup \mathbf{R}\}$. Primero probaremos que **R** y **S** son conjuntos no vacíos. Sea $C \in AB - \{A, B\}$. Como CB no interseca a la recta $\overleftrightarrow{OA}$, por el Teorema 1.4.5, C y B están en un mismo semiplano determinado por $\overleftrightarrow{OA}$. De igual manera, como el segmento CA no interseca a la recta $\overleftrightarrow{OB}$, C y A están en un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{OB}$. De donde hallamos que $C \in \mathbf{R}$. Ahora fijemos un punto $D \in \overleftrightarrow{AB} - AB$, de tal forma que A esté entre D y B. Es claro que $D \notin \angle AOB$. Por Teorema 1.4.5, sabemos que D y B están en diferentes semiplanos determinados por la recta $\overleftrightarrow{OA}$, y es por ello que $D \notin \mathbf{R}$. Por consiguiente, $D \in \mathbf{S}$. Esto demuestra nuestra primera afirmación. Supongamos que P, $Q \in \mathbf{R}$. Entonces, tenemos que P y Q pertenecen al semiplano determinado por $\overleftrightarrow{OA}$ que contiene al punto B. Lo cual implica, por el Lema 1.5.2, que todo el segmento PQ está contenido en el semiplano dicho. Un razonamiento análogo prueba que PQ está contenido en el semiplano determinado por $\overleftrightarrow{OB}$ que contiene al punto A. Por lo tanto, $PQ \subseteq \mathbf{R}$. Finalmente, demostraremos que existen dos puntos cualesquiera en **S** cuyo segmento comprendido interseca al ángulo $\angle AOB$. En efecto, según el Axioma O_4, podemos tomar cualesquiera dos puntos M, $N \in \overleftrightarrow{AB} - AB$ tales que A y B estén entre M y N. Sin perder generalidad, supongamos que los puntos M, A, B y N son consecutivos. Entonces, el segmento MN corta al ángulo $\angle AOB$ en los puntos A y B. Ahora, probaremos que M y N están en **S**. Efectivamente, como el segmento MB interseca a la recta $\overleftrightarrow{OA}$ en el punto A, por el Teorema 1.4.5, M y B están en semiplanos diferentes determinados por la recta $\overleftrightarrow{OA}$ y, por tanto, $M \notin \mathbf{R}$. De aquí, hallamos que $M \in \mathbf{S}$. También tenemos que el segmento AN interseca a la recta $\overleftrightarrow{OB}$ en el punto B y, por consiguiente, N y A están en semiplanos diferentes determinados por la recta $\overleftrightarrow{OB}$. Por ello, $N \in \mathbf{S}$. ♣

Basándonos en el Teorema de Hilbert (2.2.1), podemos definir el interior y el exterior de un ángulo no degenerado de la siguiente manera:

2.2.2. Definición. Sea $\angle AOB$ un ángulo no degenerado. El *interior* del ángulo $\angle AOB$ es la intersección de los siguientes dos semiplanos:

El semiplano determinado por $\overleftrightarrow{OA}$ que contiene al punto B y el semiplano determinado por $\overleftrightarrow{OB}$ que contiene al punto A.

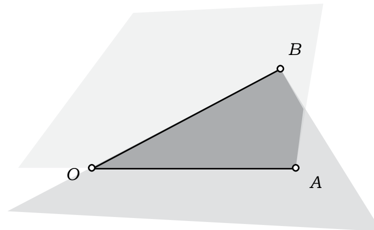


Figura 2.4

El interior de un ángulo $\angle AOB$ será denotado por $int(\angle AOB)$. El *exterior* de un ángulo $\angle AOB$, denotado por $ext(\angle AOB)$, es el conjunto de puntos del plano que no están ni en el ángulo ni en el interior de él mismo.

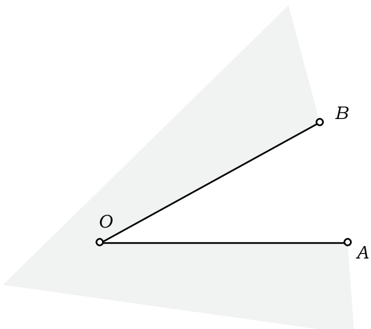


Figura 2.5

Es decir, el $ext(\angle AOB)$ es la unión del semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{OA}$ que no contiene al punto B y el semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{OB}$ que no contiene a A.

Al interior de un ángulo también se le conoce también como *región angular*. Observamos que un ángulo no degenerado no interseca ni a su interior y ni a su exterior. Así, un ángulo que no es nulo ni llano divide al plano en tres regiones disjuntas. Esto quiere decir que si P es un punto cualquiera del plano y $\angle AOB$ un ángulo no degenerado cualquiera, entonces $P \in int(\angle AOB)$, $P \in \angle AOB$ o $P \in ext(\angle AOB)$.

El siguiente teorema es una consecuencia directa del Teorema de Hilbert (2.2.1).

2.2.3. Teorema. Si $\angle AOB$ es un ángulo no degenerado, entonces su interior y exterior son conjuntos no vacíos.

Veamos una manera práctica de encontrar puntos en el interior y en el exterior de un ángulo no degenerado:

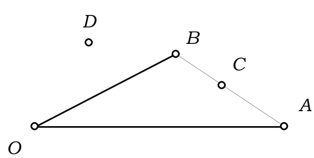


Figura 2.6

Sea $\angle AOB$ un ángulo no degenerado. Si $C \in AB - \{A, B\}$ y D está en el semiplano determinado por $\overrightarrow{OB}$ que no contiene a A, entonces

$$C \in int(\angle AOB) \text{ y } D \in ext(\angle AOB).$$

A continuación, enunciamos algunas propiedades del interior y el exterior de un ángulo no degenerado.

2.2.4. Lema. Sea $\angle AOB$ un ángulo no degenerado. Si $C \notin \overleftrightarrow{OA}$ y los puntos C y B están en un mismo semiplano determinado por $\overleftrightarrow{OA}$, entonces una y solo una de las siguientes condiciones se cumple:

1. $\angle AOB = \angle AOC$.
2. $C \in int(\angle AOB)$.
3. $B \in int(\angle AOC)$.

Prueba: Supongamos que $C \notin int(\angle AOB) \cup \overleftrightarrow{OB}$. Como C y B están en un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{OA}$, C y A deben estar en diferentes semiplanos determinados por la recta $\overleftrightarrow{OB}$. Por el Lema 1.5.6, B está en el semiplano determinado por $\overleftrightarrow{OC}$ que contiene a A y en el semiplano determinado por $\overleftrightarrow{OA}$ que contiene a C. Es decir, $B \in int(\angle AOC)$. ♣

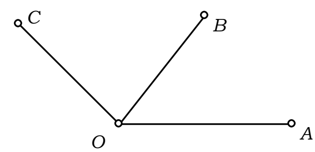


Figura 2.7

2.2.5. Teorema. Sean $\angle AOB$ un ángulo no degenerado y $C \in \overleftrightarrow{AB}$. Entonces, $C \in int(\angle AOB)$ si y solo si C está entre los puntos A y B.

Prueba: *Necesidad*. Supongamos que $C \in int(\angle AOB)$. Por definición, sabemos que C está en el semiplano determinado por $\overleftrightarrow{OA}$ que contiene al punto B, y C está en el semiplano determinado por $\overleftrightarrow{OB}$ que contiene al punto A. Sin perder generalidad, podemos suponer que A precede a B sobre la recta $\overleftrightarrow{AB}$. Del Lema 1.5.4, hallamos que $C \in \overrightarrow{BA} \cap \overrightarrow{AB} \subseteq AB - \{A,B\}$. Es decir, C está entre A y B.

Suficiencia. Supongamos que C está entre A y B.

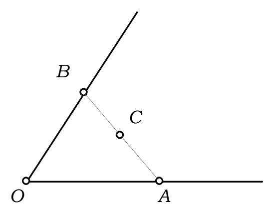


Figura 2.8

Sabemos, por el Lema 1.5.3, que todos los puntos del segmento AB diferentes de A están en el mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{OA}$ que contiene al punto B, y que todos los puntos del segmento AB diferentes de B están en el semiplano determinado por $\overleftrightarrow{OB}$ que contiene al punto A. Es decir, dichos puntos están en el interior. Por lo tanto, $C \in int(\angle AOB)$. ♣

2.2.6. Teorema del Travesaño. Sea $\angle AOB$ un ángulo no degenerado. Si $C \in int(\angle AOB)$, entonces la semirrecta $\overrightarrow{OC}$ interseca al segmento AB.

Prueba: Supongamos que $C \notin AB$. Consideremos primero el caso en que O y C están en diferentes semiplanos determinados por la recta $\overleftrightarrow{AB}$. Del Lema 1.5.3, podemos ver que $\overleftarrow{BA}$ y $\overleftarrow{AB}$ no pueden intersecar al conjunto $int(\angle AOB)$, pero como $\overrightarrow{OC}$ debe cortar a la recta $\overleftrightarrow{AB}$ (esto se debe al Teorema 1.4.5), debemos tener que

$$\overrightarrow{OC} \cap AB \neq \emptyset.$$

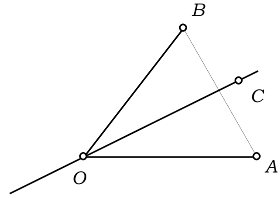


Figura 2.9

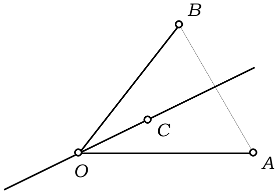


Figura 2.10

Ahora supongamos que O y C están en un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{AB}$. Tenemos entonces que $C \in int(\Delta AOB)$. De acuerdo con el Teorema 1.6.3,

$$\overrightarrow{OC} \cap AB \neq \emptyset. \clubsuit$$

2.2.7. Teorema. Sea $\angle AOB$ un ángulo no degenerado. Si $C \in int(\angle AOB)$ y $D \in ext(\angle AOB)$, entonces el segmento CD corta al ángulo original $\angle AOB$.

Prueba: Fijemos dos puntos cualesquiera tales que $C \in int(\angle AOB)$ y $D \in ext(\angle AOB)$. Por definición, $ext(\angle AOB)$ es la unión del semiplano determinado por $\overleftrightarrow{OA}$ que no contiene a B, y el semiplano determinado por $\overleftrightarrow{OB}$ que no contiene a A. Hay solo tres casos que consideraremos por separado:

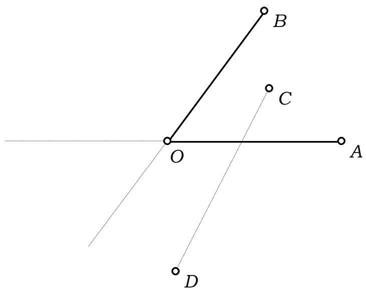


Figura 2.11

Caso I. D está en el semiplano determinado por $\overleftrightarrow{OA}$ que no contiene a B, y C y D están en el semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{OB}$ que contienen a A. Sabemos que C está en el semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{OA}$ que contiene a B y, por lo tanto, los puntos C y D están en diferentes semiplanos determinados por la recta $\overleftrightarrow{OA}$. De acuerdo con el Lema 1.5.5, $DC \cap \overrightarrow{OA} \neq \emptyset$.

Caso II. D está en el semiplano determinado por $\overleftrightarrow{OA}$ que no contiene a B, y C y D están en distintos semiplanos determinados por la recta $\overleftrightarrow{OB}$. Por hipótesis, C está en el semiplano determinado por $\overleftrightarrow{OA}$ que contiene al punto B. Entonces, el segmento CD interseca a las rectas $\overleftrightarrow{OB}$ y $\overleftrightarrow{OA}$. Supongamos que CD no interseca a la semirrecta $\overrightarrow{OA}$ y el vértice O del ángulo dado no pertenece a CD. De aquí la única posibilidad es que CD interseque a la semirrecta $\overleftarrow{OA}$ en un punto P, como lo muestra la figura 2.12. De acuerdo con el Lema 1.5.3,

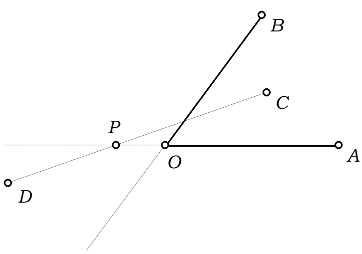


Figura 2.12

las semirrectas opuestas $\overrightarrow{OA}$ y $\overleftarrow{OA}$ están contenidas en diferentes semiplanos determinados por la recta $\overleftrightarrow{OB}$. Esto implica que D y P están en un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{OB}$. Por lo cual, el segmento DP no interseca a la recta $\overleftrightarrow{OB}$. Así que, el punto de intersección de CD y $\overleftrightarrow{OB}$ debe pertenecer al conjunto $PC - \{P\}$. Por ello, $PC - \{P\}$ está contenido en el semiplano determinado por $\overleftrightarrow{OA}$ que contiene a B, y cómo este semiplano contiene solamente a la semirrecta $\overrightarrow{OB}$, concluimos entonces que $DC \cap \overrightarrow{OB} \neq \emptyset$.

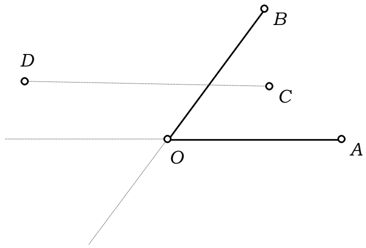


Figura 2.13

Caso III. D está en el semiplano determinado por $\overleftrightarrow{OB}$ que no contiene a A y en el semiplano determinado por $\overleftrightarrow{OA}$ que contiene a B. Este caso, la conclusión se sigue inmediatamente del Lema 1.5.5. ♣

2.2.8. Definición. Sean $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ dos semirrectas no colineales. Decimos que una semirrecta $\overrightarrow{OC}$ *está entre las semirrectas* $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ si $C \in int(\angle AOB)$.

La semirrecta $\overrightarrow{OC}$ está entre las semirrectas $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$, y la semirrecta $\overrightarrow{OD}$ no se encuentra entre las semirrectas $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$.

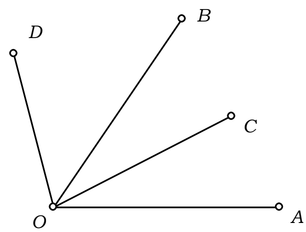


Figura 2.14

Cuando digamos que una semirrecta $\overrightarrow{OC}$ está entre las semirrectas $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$, se entenderá implícitamente que $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ no son colineales.

2.2.9. Teorema. Sean $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ dos semirrectas no colineales. Para una semirrecta $\overrightarrow{OC}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\overrightarrow{OC}$ está entre las semirrectas $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$.
2. $\overrightarrow{OC} \subseteq int(\angle AOB)$.
3. Existen puntos $P \in \overrightarrow{OA}$, $Q \in \overrightarrow{OC}$ y $R \in \overrightarrow{OB}$ tales que P, Q y R son colineales, y Q está entre P y R.

Prueba: $1 \Rightarrow 2$. Observemos que $\overrightarrow{OC}$ interseca a las rectas $\overleftrightarrow{OA}$ y $\overleftrightarrow{OB}$ en el punto O. Por el Lema 1.5.2, la semirrecta $\overrightarrow{OC}$ está contenida en uno de los semiplanos determinados por la recta $\overleftrightarrow{OA}$ y en uno de los semiplanos determinados por la recta $\overleftrightarrow{OB}$. Puesto que C y A están en un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{OB}$, por el Lema 1.5.3, tenemos que $\overrightarrow{OC}$ y A están en uno de los semiplanos determinados por la recta $\overleftrightarrow{OB}$. De igual manera se tiene que $\overrightarrow{OC}$ y B están en uno de los semiplanos determinados por la recta $\overleftrightarrow{OA}$. Por lo tanto, $\overrightarrow{OC} \subseteq int(\angle AOB)$.

$2 \Rightarrow 3$. Sabemos por hipótesis que $\overrightarrow{OC} \subseteq int(\angle AOB)$. Como $C \in int(\Delta AOB)$, según el Teorema del Travesaño 2.2.6, la semirrecta $\overrightarrow{OC}$ corta al segmento AB en un punto que llamaremos Q. Es evidente que Q está entre A y B. Entonces, ponemos $P = A$, $Q = C$ y $R = B$.

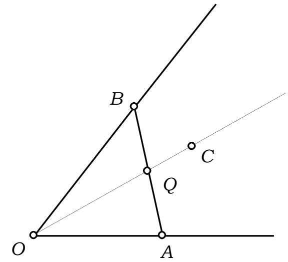


Figura 2.15

$3 \Rightarrow 1$. Supongamos que existen puntos $P \in \overrightarrow{OA}$, $Q \in \overrightarrow{OC}$ y $R \in \overrightarrow{OB}$ tales que P, Q y R son colineales, y Q está entre P y R (ver la figura 2.16). Tenemos que $\angle AOB = \angle POR$ y como Q está entre P y R, por el Teorema 2.2.5, $Q \in int(\angle POR) = int(\angle AOB)$. De aquí, por definición, la semirrecta $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OC}$ está entre las semirrectas $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OB}$. ♣

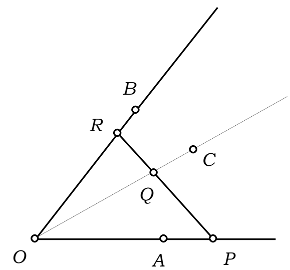


Figura 2.16

Del Teorema 2.2.9 podemos deducir que entre dos semirrectas no colineales siempre hay una entre ellas. Efectivamente, si las semirrectas $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ no son colineales, por el Teorema 2.2.9, tenemos entonces que la semirrecta $\overrightarrow{OC}$ está entre las semirrectas $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$, para cualquier punto $C \in AB$.

La posición de dos ángulos trazados hacia un mismo semiplano queda establecida en el siguiente teorema.

2.2.10. Teorema. Sean $\angle AOB$ y $\angle AOC$ dos ángulos tal que B y C pertenecen a un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{OA}$. Entonces, $\overrightarrow{OB} \subseteq int(\angle AOC)$ o $\overrightarrow{OC} \subseteq int(\angle AOB)$.

Prueba: Supongamos que $\overrightarrow{OB} \not\subset int(\angle AOC)$. Entonces, $\overrightarrow{OB} \cap int(\angle AOC) = \varnothing$. De acuerdo con el Lema 1.5.3, sabemos que $\overrightarrow{OB}$ está contenida en el semiplano determinado por $\overleftrightarrow{OA}$ que no contiene al punto C, o $\overrightarrow{OB}$ está contenido en el semiplano determinado por $\overleftrightarrow{OC}$ que no contiene al punto A. De nuestra hipótesis, deducimos que $\overrightarrow{OB}$ debe estar contenida en el semiplano determinado por $\overleftrightarrow{OC}$ que no contiene al punto A. En vista del Lema 1.5.6, hallamos que $\overrightarrow{OC}$ y A están contenidos en uno de los semiplanos determinados por la recta $\overleftrightarrow{OB}$, pero como B y $\overrightarrow{OC}$ yacen en un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{OA}$, obtenemos que $\overrightarrow{OC} \subseteq int(\angle AOB)$. ♣

2.2.11. Teorema. Si la semirrecta $\overrightarrow{OC}$ está entre las semirrectas $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$, entonces $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ yacen en semiplanos diferentes determinados por la recta $\overleftrightarrow{OC}$.

Prueba: Según el Teorema 2.2.9, sabemos que $C \in int(\angle AOB)$. Del Teorema del Travesaño 2.2.6, vemos que la semirrecta $\overrightarrow{OC}$ corta al segmento AB. Por lo tanto, con base en el Teorema 1.4.5 y el Lema 1.5.3, las semirrectas $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ yacen en semiplanos diferentes determinados por la recta $\overleftrightarrow{OC}$. ♣

2.2.12. Teorema. En todo triángulo ΔABC se cumple que

$$int(\Delta ABC) = int(\angle BAC) \cap int(\angle CBA) = int(\angle BAC) \cap int(\angle ACB) = int(\angle CBA) \cap int(\angle ACB).$$

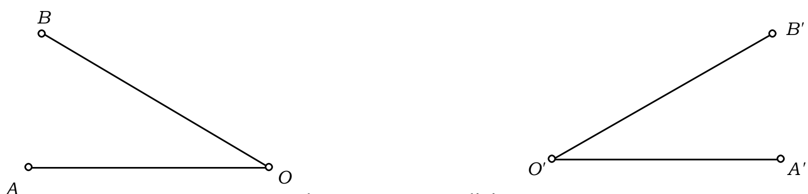
Prueba: Basta con demostrar la primera identidad $int(\Delta ABC) = int(\angle BAC) \cap int(\angle CBA)$. En efecto, por definición, $P \in int(\Delta ABC)$ si y solo si

1. P y A están en un mismo semiplano, determinado por la recta $\overleftrightarrow{BC}$;
2. P y B están en un mismo semiplano, determinado por la recta $\overleftrightarrow{AC}$; y
3. P y C están en un mismo semiplano, determinado por la recta $\overleftrightarrow{AB}$.

Por definición, tenemos que la primera y segunda condición son equivalentes a decir que el punto $P \in int(\angle CBA)$ y las condiciones segunda y tercera son equivalentes a la afirmación $P \in$ int$(\angle BAC)$. ♣

2.3. Congruencia de ángulos

Las relaciones de *igualdad* y *congruencia* entre cualesquiera dos ángulos son muy diferentes una de la otra. Por un lado, decimos que dos ángulos son *iguales* si como conjuntos de puntos son el mismo. La noción de congruencia entre cualesquiera dos ángulos se puede interpretar de manera intuitiva de la siguiente manera: decimos que dos ángulos son congruentes si después de colocar a uno de ellos sobre el otro, vemos que los dos coinciden. Como ya hemos comentado anteriormente la relación de congruencia no se define formalmente, sino que solo se entiende intuitivamente su significado. Así, si dos ángulos son iguales, entonces son congruentes, pero el recíproco no siempre es cierto, pues dos ángulos pueden ser congruentes, y al mismo tiempo, ser disjuntos como conjuntos de puntos:



ángulos congruentes disjuntos

Figura 2.17

Esto nos advierte del cuidado que debemos tener con el uso de los adjetivos *igual* y *congruente*. Por ejemplo, es falso decir que todos los ángulos llanos son iguales; lo correcto es decir que todos los ángulos llanos son congruentes. Para indicar la congruencia entre cualesquiera dos ángulos, usaremos el símbolo $\cong$ ($\angle AOB \cong \angle A'O'B'$ quiere decir que el ángulo $\angle AOB$ es congruente con el ángulo $\angle A'O'B'$). Las propiedades básicas de la relación de congruencia entre ángulos quedan determinadas por los siguientes axiomas.

CA$_1$: La relación de congruencia es una relación de equivalencia.

1. (Reflexiva) $\angle AOB \cong \angle AOB$.
2. (Simétrica) Si $\angle AOB \cong \angle A'O'B'$, entonces $\angle A'O'B' \cong \angle AOB$.
3. (Transitiva) Si $\angle AOB \cong \angle A'O'B'$ y $\angle A'O'B' \cong \angle A''O''B''$, entonces $\angle AOB \cong \angle A''O''B''$.

CA$_2$: Sobre una semirrecta dada es posible construir un ángulo congruente a uno dado que tenga a la semirrecta dada como uno de sus lados y que su vértice sea el vértice de la semirrecta. Si un ángulo dado no es degenerado, entonces sobre una semirrecta dada y en cualquiera de los semiplanos determinados por la recta que la contiene, es posible construir uno y solo un ángulo congruente al ángulo dado que tenga a la semirrecta dada como uno de sus lados y que su vértice sea el vértice de la semirrecta.

La relación de congruencia entre segmentos y la relación de congruencia entre ángulos constituyen los conceptos fundamentales para establecer una relación de congruencia entre diversas figuras geométricas del plano.

2.4. Ángulos adyacentes

2.4.1. Definición. Se dice que dos ángulos son *adyacentes* si tienen el mismo vértice, un lado en común y si además se cumple que los otros dos lados no comunes no están contenidos en un mismo semiplano determinado por la recta que contiene al lado común, o uno de los lados no comunes sea colineal con el lado común.

Ejemplos de ángulos adyacentes son los siguientes $\angle AOB$ y $\angle BOC$:

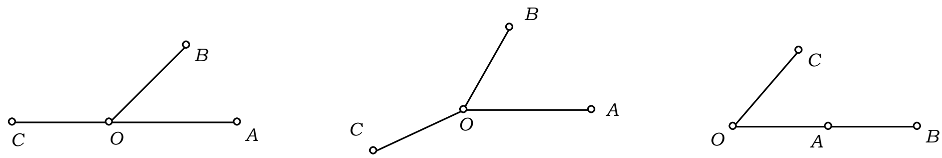


Figura 2.18

Un ejemplo de dos ángulos que tienen un vértice y un lado en común que no son adyacentes, es el siguiente:

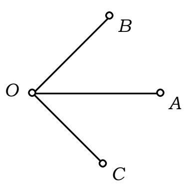


Figura 2.19

En la figura 2.19, los ángulos $\angle AOB$ y $\angle BOC$ no son adyacentes, puesto que los lados no comunes $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OC}$ están en un mismo semiplano determinado por la recta que contiene al lado común $\overrightarrow{OB}$. Pero en la misma figura, podemos ver que los ángulos $\angle COA$ y $\angle AOB$ sí son adyacentes.

En el ejemplo de la derecha, los ángulos $\angle AOB$ y $\angle AO'C$ tampoco son adyacentes, ya que no comparten el vértice.

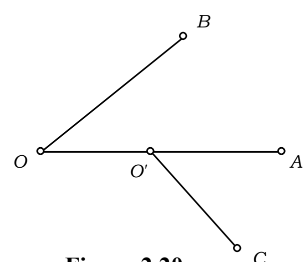


Figura 2.20

En general, cuando hablemos de dos ángulos adyacentes, los dos ángulos en cuestión serán no nulos, las excepciones se entenderán dentro del contexto.

2.5. Medida de ángulos

Es interesante mencionar que Euclides no habla de magnitudes de ángulos, sin embargo, para usos prácticos, el siguiente axioma establece una escala numérica para poder medir todos los ángulos del plano.

AT (Axioma del Transportador): A cada ángulo $\angle AOB$ le corresponde un número real $m(\angle AOB)$ entre 0 y 180, de tal forma que se cumplen cada una de las siguientes condiciones:

1. $\angle AOB$ es nulo si y solo si $m(\angle AOB) = 0$.
2. Si $\angle AOB$ es llano, entonces $m(\angle AOB) = 180$.
3. Si $\angle AOB \cong \angle A'O'B'$, entonces $m(\angle AOB) = m(\angle A'O'B')$.
4. Sean $\angle AOB$ y $\angle BOC$ dos ángulos adyacentes. Si $\angle AOC$ es llano o $B \in int(\angle AOC)$, entonces
$$m(\angle AOB) + m(\angle BOC) = m(\angle AOC).$$
5. Si r es un número real tal que $0 \leq r \leq 180$ y $\overrightarrow{OA}$ es cualquier semirrecta, entonces existe un punto B en el plano tal que $m(\angle AOB) = r$.

Al número $m(\angle AOB)$ se le llama la *medida* del ángulo $\angle AOB$.

Las cláusulas primera y tercera del Axioma AT establecen de manera directa el siguiente resultado.

2.5.1. Teorema. Todo ángulo congruente a un ángulo nulo es nulo.

Para fines puramente matemáticos, no es necesario referirnos a la medida de los ángulos en grados, lo haremos solamente en algunos casos prácticos presentados en la sección de problemas. En el Problema 2.42, damos otra escala numérica para medir los ángulos.

La circunferencia de un reloj está dividida en 60 partes iguales que constituyen los minutos. En medida de ángulos, a un minuto de tiempo le corresponde la medida de $\frac{360}{60} = 6$. Sabiendo esto, podemos encontrar la medida de un ángulo con solo poner su vértice sobre el centro del reloj y multiplicando por 6 el número de los minutos que abarque.

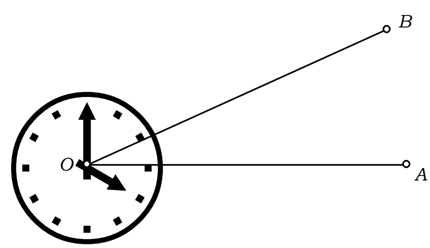


Figura 2.21

2.5.2. Teorema. Si $\angle AOB$ es un ángulo no degenerado y $C \in int(\angle AOB)$, entonces
$$m(\angle AOC) < m(\angle AOB) \text{ y } m(\angle COB) < m(\angle AOB).$$

Prueba: Por el Axioma AT, $m(\angle AOC) + m(\angle COB) = m(\angle AOB)$, pero como $C \in int(\angle AOB)$, el punto C no puede estar en las rectas que contienen a los lados del ángulo $\angle AOB$. Por consiguiente, ni el ángulo $\angle AOC$ y ni el ángulo $\angle COB$ son nulos. De aquí y por el Axioma AT, $0 < m(\angle AOC)$ y $0 < m(\angle COB)$. Lo cual implica que
$$m(\angle AOC) < m(\angle AOC) + m(\angle COB) = m(\angle AOB) \text{ y } m(\angle COB) < m(\angle AOC) + m(\angle COB) = m(\angle AOB). \clubsuit$$

Para ángulos llanos, tenemos una situación similar a la del primer inciso del Axioma AT.

2.5.3. Teorema. Un ángulo $\angle AOB$ es llano si y solo si $m(\angle AOB) = 180$.

Prueba: *Necesidad*. Ésta es la segunda condición del Axioma AT.

Suficiencia. Procedamos por contradicción. Supongamos que $\angle AOB$ no es llano. Como $m(\angle AOB) = 180$, el ángulo $\angle AOB$ tampoco pude ser nulo. Así pues, B debe pertenecer a uno de los semiplanos determinados por la recta $\overleftrightarrow{OA}$. Sea $C \in \overleftrightarrow{OA}$ un punto que esté en el lado opuesto de A con respecto al punto O sobre la recta $\overleftrightarrow{OA}$. Tenemos entonces que el ángulo $\angle AOC$ es llano. Sabemos que el ángulo $\angle BOC$ no es degenerado, pues de otra forma $\angle AOB$ también sería degenerado. De acuerdo con el Axioma AT, sabemos que $0 < m(\angle BOC)$ y
$$180 = m(\angle AOB) < m(\angle AOB) + m(\angle BOC) = m(\angle AOC) = 180,$$
lo cual es imposible. Por lo tanto, $\angle AOB$ es llano. $\clubsuit$

El teorema anterior y el Axioma AT aseguran que si $\angle AOB$ es llano y $\angle AOB \cong \angle A'O'B'$, entonces $\angle A'O'B'$ es también un ángulo llano (ver Teorema 2.6.4).

2.5.4. Lema. Si r es un número real entre 0 y 180 y $\overrightarrow{OA}$ es una semirrecta, entonces existen puntos B y B' tales que cada uno de ellos está en uno de los semiplanos determinados por la recta $\overleftrightarrow{OA}$ y

$$m(\angle AOB) = r = m(\angle AOB').$$

Prueba: Fijamos un número $0 < r < 180$ y una semirrecta $\overrightarrow{OA}$. Por el Axioma AT, existe un punto B en el plano tal que $m(\angle AOB) = r$. Del Axioma AT y el teorema anterior, el ángulo $\angle AOB$ no puede ser degenerado. De acuerdo con el Axioma CA_2, existe un punto B' en el semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{OA}$ que no contiene a B tal que $\angle AOB \cong \angle AOB'$. Aplicando de nueva cuenta el Axioma AT, encontramos que $m(\angle AOB) = r = m(\angle AOB')$. ♣

2.5.5. Teorema. Todos los ángulos nulos son congruentes.

Prueba: Sean $\angle AOB$ y $\angle A'O'B'$ dos ángulos nulos. Por la definición de ángulo nulo, $\angle AOB = \overrightarrow{OA} \cup \{O\} = \overrightarrow{OB} \cup \{O\}$ y $\angle A'O'B' = \overrightarrow{O'A'} \cup \{O\} = \overrightarrow{O'B'} \cup \{O\}$. El Axioma CA_2 nos garantiza la existencia de un punto B'' en el plano tal que $\angle AOB \cong \angle A'O'B''$. Por el Axioma AT, obtenemos las identidades

$$m(\angle AOB) = m(\angle A'O'B'') = m(\angle A'O'B') = 0.$$

Aplicando el Axioma AT por segunda vez, hallamos que el ángulo $\angle A'O'B''$ debe ser nulo, es decir,

$$\angle A'O'B'' = \overrightarrow{OA'} \cup \{O\} = \overrightarrow{OB''} \cup \{O\}.$$

Como $\angle A'O'B' = \overrightarrow{OA'} \cup \{O\} = \overrightarrow{OB'} \cup \{O\}$, por ser también nulo, encontramos que $\angle A'O'B'' = \angle A'O'B'$. Por lo tanto, $\angle AOB \cong \angle A'O'B'$. Esto demuestra el teorema. ♣

2.5.6. Teorema. Todos los ángulos llanos son congruentes.

Prueba: Sean $\angle AOB$ y $\angle A'O'B'$ dos ángulos llanos. Mediante el Axioma CA_2, podemos encontrar en el plano un punto B'' tal que $\angle AOB \cong \angle A'O'B''$. Del Axioma AT, se sigue que

$$180 = m(\angle AOB) = m(\angle A'O'B'') = m(\angle A'O'B'').$$

El Teorema 2.5.3 implica que $\angle A'O'B''$ es también un ángulo llano. Es decir, $\angle A'O'B'' = \overleftrightarrow{A'B''} = \overleftrightarrow{A'O'}$. Por otro lado, sabemos que $\angle A'O'B' = \overleftrightarrow{A'B'} = \overleftrightarrow{A'O'}$. Por consiguiente, $\angle A'O'B'' = \angle A'O'B'$. De aquí concluimos que $\angle AOB \cong \angle A'O'B'$. ♣

2.5.7. Teorema. $\angle AOB \cong \angle A'O'B'$ si y solo si $m(\angle AOB) = m(\angle A'O'B')$.

Prueba: La necesidad es parte del Axioma AT.

Suficiencia. Si $\angle AOB$ es llano, por el Teorema 2.5.3, se tiene que $\angle A'O'B'$ es un ángulo llano. Por el Teorema 2.5.6, $\angle A'O'B'$ es congruente al ángulo $\angle AOB$. Obtenemos la misma afirmación si suponemos que $\angle AOB$ es nulo. Supongamos pues que $\angle AOB$ y $\angle A'O'B'$ tienen la misma medida y que ambos son no degenerados. Por medio del Axioma CA_2, podemos encontrar un punto B'' en el semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{O'C'}$ que contiene a B' tal que $\angle AOB \cong \angle A'O'B''$. Obviamente, si el punto B'' yace en la semirrecta

$\overrightarrow{O'B'}$, obtenemos la congruencia deseada. Supongamos que $B'' \notin \overrightarrow{O'B'}$. Tenemos entonces que $m(\angle B''O'B') > 0$. Si $B'' \in int(\angle A'O'B')$, por el Axioma AT, entonces hallamos que

$$m(\angle AOB) = m(\angle A'O'B'') < m(\angle A'O'B'') + m(\angle B''O'B') = m(\angle A'O'B'),$$

lo cual es una contradicción. Si $B' \in int(\angle A'O'B'')$, entonces

$$m(\angle AOB) = m(\angle A'O'B'') = m(\angle A'O'B') + m(\angle B'O'B'') > m(\angle A'O'B'),$$

contrario a nuestra hipótesis. Por lo tanto, $\angle AOB \cong \angle A'O'B'$. ♣

2.5.8. Teorema. Sean $\angle AOB$ y $\angle BOC$ dos ángulos adyacentes.

1. Si $\angle AOC$ es llano, entonces
$$m(\angle AOB) + m(\angle BOC) = m(\angle AOC) = 180.$$
2. Si $\angle AOB$ es nulo, entonces
$$m(\angle AOB) + m(\angle BOC) = m(\angle BOC) = m(\angle AOC).$$
3. Si B y C están en un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{OA}$, entonces
$$m(\angle AOB) + m(\angle BOC) = m(\angle AOC).$$
4. Si B y C están en semiplanos diferentes determinados por la recta $\overleftrightarrow{OA}$, entonces
$$360 - (m(\angle AOB) + m(\angle BOC)) = m(\angle AOC).$$

Prueba: 1. Se sigue inmediatamente del Axioma AT.

2. Supongamos que $\angle AOB$ es nulo. Entonces, por el Axioma AT,

$$m(\angle AOB) + m(\angle BOC) = 0 + m(\angle BOC) = m(\angle BOC).$$

Pero como $\angle BOC = \overrightarrow{OB} \cup \overrightarrow{OC} \cup \{O\}$ y $\angle AOB = \overrightarrow{OA} \cup \{O\} = \overrightarrow{OB} \cup \{O\}$, se tiene entonces que

$$\angle AOC = \overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OC} \cup \{O\} = \overrightarrow{OB} \cup \overrightarrow{OC} \cup \{O\} = \angle BOC.$$

Por consiguiente,

$$m(\angle AOB) + m(\angle BOC) = m(\angle BOC) = m(\angle AOC).$$

3. Supongamos que B y C están en un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{OA}$.

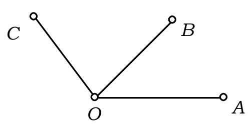


Figura 2.22

Esta suposición nos conduce a que $\angle AOC$ no es degenerado. Entonces, tenemos que $B \in int(\angle AOC)$ (ver Figura 2.22). De acuerdo con el Axioma AT, vemos que

$$m(\angle AOB) + m(\angle BOC) = m(\angle AOC).$$

4. Sobre la recta $\overleftrightarrow{OB}$ tomamos un punto B' que esté en el lado opuesto de B con respecto a O. Tenemos entonces que las semirrectas $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OB'}$ son opuestas, y C y B' están en un mismo semiplano determinado por la lrecta $\overleftrightarrow{OA}$ (esto lo asegura el Lema 1.5.3). Consideremos las tres posibles ubicaciones del punto B':

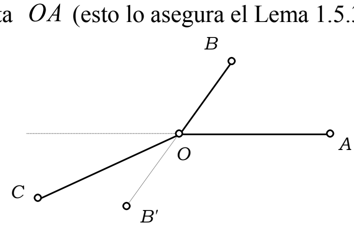


Figura 2.23

Caso I. $B' \in int(\angle AOC)$. Según el Axioma AT, hallamos que

$$m(\angle AOC) = m(\angle AOB') + m(\angle B'OC) =$$
$$(180 - m(\angle AOB)) + (180 - m(\angle BOC)) =$$
$$360 - (m(\angle AOB) + m(\angle BOC)).$$

Caso II. $B' \in \overrightarrow{OC}$. Tenemos entonces que B, O, C, y B' son colineales. En particular, $\angle BOC$ es llano. Ya que $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB'}$, por el Axioma AT, hallamos que:

$$\begin{gathered} m(\angle AOC) + m(\angle AOB) = 180 \\ m(\angle AOC) = 180 - m(\angle AOB) = \\ 180 - m(\angle AOB) + 180 - m(\angle BOC) = \\ 360 - (m(\angle AOB) + m(\angle BOC)). \end{gathered}$$

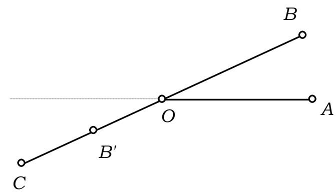


Figura 2.24

Caso III. El caso en que $B' \in ext(\angle AOC)$ no puede ser posible porque los ángulos $\angle AOB$ y $\angle BOC$ son adyacentes (ver Problema 2.51). ♣

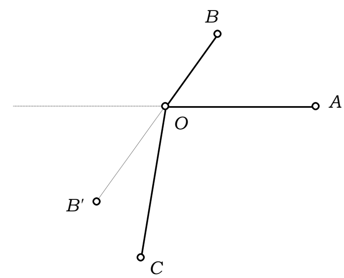


Figura 2.25

Una consecuencia directa del teorema anterior es el siguiente corolario.

2.5.9. Corolario. Si $\angle AOB$ y $\angle BOC$ son dos ángulos adyacentes y $m(\angle AOB) + m(\angle BOC) = 180$, entonces $\angle AOC$ es un ángulo llano.

Prueba: Solo consideraremos el caso cuando $\angle AOB$ y $\angle BOC$ no sean degenerados. Evidentemente, el ángulo $\angle AOC$ no puede ser llano. Por el teorema anterior, sabemos que

$$360 - (m(\angle AOB) + m(\angle BOC)) = m(\angle AOC) < 180$$

y de aquí hallamos que

$$m(\angle AOB) + m(\angle BOC) > 180,$$

lo cual es una contradicción. Por consiguiente, C y B están en un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{OA}$. Del Teorema 2.5.8(3), encontramos que

$$180 = m(\angle AOB) + m(\angle BOC) = m(\angle AOC).$$

De acuerdo con el Teorema 2.5.3, $\angle AOC$ es un ángulo llano. ♣

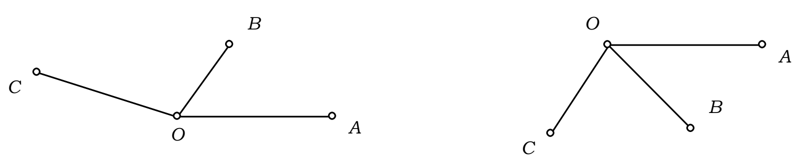


Figura 2.26

La afirmación del tercer inciso del Teorema 2.5.8 no es cierta si los puntos B y C pertenecen a semiplanos diferentes determinados por la recta $\overleftrightarrow{OA}$. Por ejemplo:

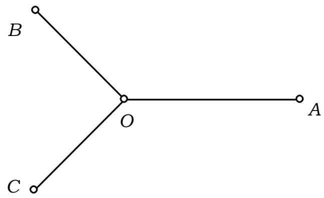


Figura 2.27

En la figura 2.27, tenemos que

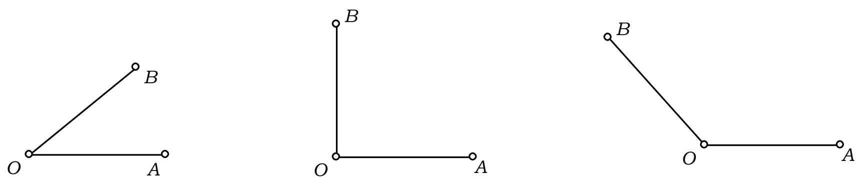
$$m(\angle AOB) = m(\angle AOC) = 135 \text{ y } m(\angle BOC) = 90.$$

Pero,

$$m(\angle AOB) + m(\angle BOC) = 225 \text{ y } m(\angle AOC) = 135.$$

2.6. Ángulos agudos, rectos y obtusos

2.6.1. Definición. Decimos que un ángulo es *agudo* si su medida es menor que 90. Un ángulo se dice que es *recto* si su medida es 90. Un ángulo se llama *obtuso* si su medida es mayor que 90.



agudo *recto* *obtuso*

Figura 2.28

Del Axioma AT, se deduce la existencia de ángulos agudos, de ángulos rectos y de ángulos obtusos.

El siguiente teorema corresponde al cuarto postulado de Euclides.

2.6.2. Teorema. Todos los ángulos rectos son congruentes.

Prueba: Si $\angle AOB$ y $\angle A'O'B'$ satisfacen que $m(\angle AOB) = m(\angle A'O'B') = 90$, según el Teorema 2.5.7, tenemos entonces que $\angle AOB \cong \angle A'O'B'$. ♣

2.6.3. Teorema. Todo ángulo congruente a un ángulo recto es recto.

Prueba: Supongamos que $\angle AOB$ es un ángulo recto y $\angle AOB \cong \angle A'O'B'$. Por el Teorema 2.5.7, hallamos que $m(\angle AOB) = m(\angle A'O'B') = 90$, lo cual significa que el ángulo $\angle A'O'B'$ es recto. ♣

Para los ángulos llanos, tenemos un resultado similar:

2.6.4. Teorema. Todo ángulo congruente a un ángulo llano es llano.

Prueba: Supongamos que $\angle AOB$ es un ángulo llano y $\angle AOB \cong \angle A'O'B'$. De acuerdo con el Axioma AT, sabemos que $180 = m(\angle AOB) = m(\angle A'O'B')$. De donde se sigue que $m(\angle A'O'B') = 180$. Por ello, el Teorema 2.5.3 nos garantiza que $\angle A'O'B'$ es un ángulo llano. ♣

2.6.5. Teorema. Todo ángulo congruente a un ángulo agudo es agudo y todo ángulo congruente a un ángulo obtuso es obtuso.

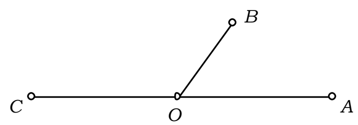
Prueba: Supongamos que $\angle AOB$ es un ángulo agudo y $\angle AOB \cong \angle A'O'B'$. Por definición y el Axioma AT, se tiene que $90 > m(\angle AOB) = m(\angle A'O'B')$; lo cual quiere decir que $\angle A'O'B'$ es también un ángulo agudo. La conclusión para el caso cuando el ángulo en cuestión sea obtuso, se obtiene de manera similar. ♣

2.6.6. Teorema. Si $\angle AOB$ y $\angle BOC$ son dos ángulos adyacentes y $m(\angle AOB) + m(\angle BOC) = 90$, entonces $\angle AOC$ es un ángulo recto.

Prueba: Si $\angle AOB$ es un ángulo nulo, entonces $m(\angle BOC) = 90$ y, por consiguiente, $\angle BOC = \angle AOC$ es un ángulo recto. Supongamos pues que el ángulo $\angle AOB$ no es nulo. Del Teorema 2.5.8(3), podemos deducir que los puntos C y B yacen en un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{OA}$ y $m(\angle AOB) + m(\angle BOC) = m(\angle AOC) = 90$. Por lo tanto, $\angle AOC$ es un ángulo recto. ♣

2.7. Ángulos suplementarios y complementarios

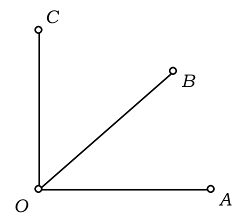
2.7.1. Definición. Dos ángulos adyacentes son *suplementarios adyacentes* si la suma de sus medidas es 180.



ángulos suplementarios adyacentes
Figura 2.29

Dos ángulos son *suplementarios* si la suma de sus medidas es igual a 180. Dos ángulos adyacentes son *complementarios adyacentes* si son agudos y la suma de sus medidas es 90.

Dos ángulos agudos son *complementarios* si la suma de sus medidas es 90. Si dos ángulos son suplementarios, entonces decimos que uno es un *suplemento* del otro, y si dos ángulos son complementarios, entonces decimos que uno es un *complemento* del otro.



ángulos complementarios adyacentes
Figura 2.30

Dos ángulos pueden ser complementarios y no ser adyacentes. Lo mismo pasa con los ángulos suplementarios. El suplemento de un ángulo llano es, por definición, un ángulo nulo, y el complemento de un ángulo recto, por definición, es un ángulo nulo.

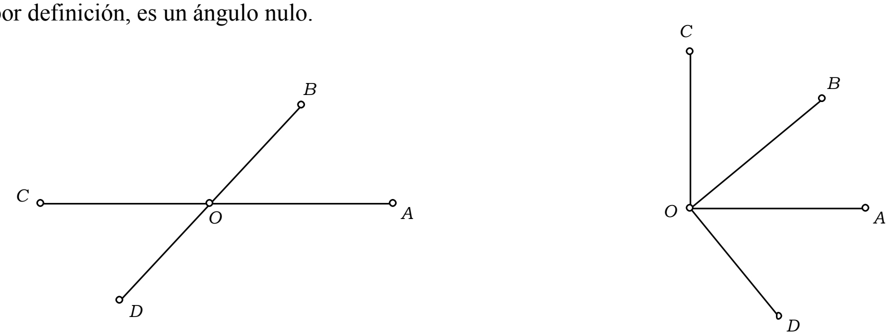


Figura 2.31

Todo ángulo tiene dos ángulos suplementarios adyacentes (los cuales son congruentes por el Corolario 2.7.9). Por ejemplo, en la figura 2.31 de la izquierda, $\angle BOC$ y $\angle DOA$ son ángulos suplementarios adyacentes del ángulo $\angle AOB$. También todo ángulo agudo tiene dos ángulos complementarios adyacentes (los cuales resultan ser congruentes por el Corolario 2.7.8). En la figura 2.31 de la derecha, $\angle BOC$ y $\angle DOA$ son ángulos complementarios adyacentes del ángulo agudo $\angle AOB$. Debido a esta situación convenimos en que cuando digamos *el ángulo suplementario adyacente* de un ángulo, nos referiremos a su ángulo suplementario adyacente que se encuentra después de ángulo dado en sentido contrario de las manecillas del reloj. Una interpretación similar se tendrá cuando digamos *el ángulo complementario adyacente* de un ángulo agudo. Hacemos notar que dos ángulos adyacentes $\angle AOB$ y $\angle BOC$ son suplementarios si y solo si el ángulo $\angle AOC$ es llano y $m(\angle AOB) + m(\angle BOC) = m(\angle AOC)$ (Corolario 2.5.9), y $\angle AOB$ y $\angle BOC$ son complementarios si y solo si $\angle AOC$ es un ángulo recto y $m(\angle AOB) + m(\angle BOC) = m(\angle AOC) = 90$ (Corolario 2.6.6).

2.7.2. Teorema del Ángulo Suplementario. Si $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ son semirrectas opuestas y $\overrightarrow{OC}$ es una tercera semirrecta diferente a las dos primeras, entonces los ángulos $\angle AOC$ y $\angle COB$ son suplementarios.

Prueba: Por definición, sabemos que $\angle AOB$ es un ángulo llano. De acuerdo con el segundo y el cuarto inciso del Axioma AT, obtenemos que $m(\angle AOC) + m(\angle COB) = m(\angle AOB) = 180$. Lo cual asegura que los ángulos $\angle AOC$ y $\angle COB$ son suplementarios. ♣

2.7.3. Lema. Sean $\angle AOB$ y $\angle BOC$ dos ángulos suplementarios adyacentes y $\angle A'O'B'$ y $\angle B'O'C'$ dos ángulos adyacentes. Si $\angle AOB \cong \angle A'O'B'$ y $\angle BOC \cong \angle B'O'C'$, entonces $\angle A'O'B'$ y $\angle B'O'C'$ también son suplementarios adyacentes.

Prueba: Según el Axioma AT, sabemos que $m(\angle AOB) = m(\angle A'O'B')$ y $m(\angle BOC) = m(\angle B'O'C')$ y, por consiguiente,

$$180 = m(\angle AOB) + m(\angle BOC) = m(\angle A'O'B') + m(\angle B'O'C').$$

Lo cual significa que los ángulos $\angle A'O'B'$ y $\angle B'O'C'$ son suplementarios adyacentes. ♣

2.7.4. Lema. Sean $\angle AOB$ y $\angle BOC$ dos ángulos complementarios adyacentes y $\angle A'O'B'$ y $\angle B'O'C'$ dos ángulos adyacentes. Si $\angle AOB \cong \angle A'O'B'$ y $\angle BOC \cong \angle B'O'C'$, entonces $\angle A'O'B'$ y $\angle B'O'C'$ también son complementarios adyacentes.

Prueba: El Axioma AT nos asegura que $m(\angle AOB) = m(\angle A'O'B')$ y $m(\angle BOC) = m(\angle B'O'C')$. Por hipótesis, sabemos que $90 = m(\angle AOB) + m(\angle BOC) = m(\angle A'O'B') + m(\angle B'O'C')$. Por lo tanto, los ángulos $\angle A'O'B'$ y $\angle B'O'C'$ son también complementarios adyacentes. ♣

2.7.5. Teorema. Los ángulos complementarios de dos ángulos agudos congruentes son congruentes.

Prueba: Sean $\angle AOB$ y $\angle A'O'B'$ dos ángulos agudos congruentes, y $\angle PQR$ y $\angle P'Q'R'$ dos ángulos complementarios de $\angle AOB$ y $\angle A'O'B'$, respectivamente. Por definición,

$$m(\angle AOB) + m(\angle PQR) = m(\angle A'O'B') + m(\angle P'Q'R') = 90.$$

Como $m(\angle AOB) = m(\angle A'O'B')$, hallamos que $m(\angle PQR) = m(\angle P'Q'R')$. De acuerdo con el Teorema 2.5.7, concluimos que $\angle PQR \cong \angle P'Q'R'$. ♣

2.7.6. Corolario. Los ángulos complementarios de un ángulo agudo son congruentes.

2.7.7. Corolario. Si dos ángulos tienen ángulos complementarios congruentes, entonces son congruentes.

Omitimos la demostración del siguiente teorema, ya que es similar a la del Teorema 2.7.5.

2.7.8. Teorema. Los ángulos suplementarios de dos ángulos congruentes son congruentes.

2.7.9. Corolario. Los ángulos suplementarios de un ángulo son congruentes.

2.7.10. Corolario. Si dos ángulos tienen ángulos suplementarios congruentes, entonces son congruentes.

2.7.11. Teorema. Las siguientes condiciones para un ángulo $\angle AOB$ son equivalentes.
1. $\angle AOB$ es un ángulo es recto.
2. $\angle AOB$ es congruentes a cada uno de sus suplementarios.
3. $\angle AOB$ es congruente a su suplementario adyacente.
4. $\angle AOB$ es congruente a uno de sus suplementarios.

Prueba: Las implicaciones $2 \Rightarrow 3$ y $3 \Rightarrow 4$ son evidentes.

$1 \Rightarrow 2$. Supongamos que $\angle AOB$ es un ángulo recto y sea $\angle B'O'C'$ un ángulo suplementario de $\angle AOB$. Por definición, $m(\angle AOB) + m(\angle B'O'C') = 180$ y como $m(\angle AOB) = 90$, se sigue que $m(\angle B'O'C') = 90$. Por ello, $\angle B'O'C'$ es un ángulo recto. De acuerdo con el Teorema 2.6.2, hallamos que $\angle AOB \cong \angle B'O'C'$.

$4 \Rightarrow 1$. Sea $\angle B'O'C'$ un ángulo suplementario del ángulo $\angle AOB$ tal que $\angle AOB \cong \angle B'O'C'$. De la definición, sabemos que $m(\angle AOB) + m(\angle B'O'C') = 180$ y como $m(\angle AOB) = m(\angle B'O'C')$, obtenemos que $2m(\angle AOB) = 180$. Por consiguiente, $m(\angle AOB) = 90$. Es decir, $\angle AOB$ es un ángulo recto. ♣

2.8. Teoremas de adición y sustracción de ángulos

2.8.1. Teorema de Adición de Ángulos. Sean $\angle AOB$ y $\angle BOC$ y $\angle A'O'B'$ y $\angle B'O'C'$ dos pares de ángulos adyacentes. Si $\angle AOB \cong \angle A'O'B'$ y $\angle BOC \cong \angle B'O'C'$, entonces $\angle AOC \cong \angle A'O'C'$.

Prueba: Consideremos separadamente cada uno de los tres casos probables.

Caso I. $\angle AOC$ es llano. Entonces, los ángulos $\angle AOB$ y $\angle BOC$ son suplementarios adyacentes. Por el Lema 2.7.3, $\angle A'O'B'$ y $\angle B'O'C'$ también son suplementarios adyacentes y, por lo tanto, $\angle A'O'C'$ es un ángulo llano (esto es cierto por el Corolario 2.5.9). Del Teorema 2.5.6, concluimos que $\angle AOC \cong \angle A'O'C'$.

Caso II. $\angle AOC$ no es llano y B y C están en un mismo semiplano determinado por $\overleftrightarrow{OA}$. De acuerdo con el Teorema 2.5.8(3) y el Axioma AT,

$$m(\angle AOB) + m(\angle BOC) = m(\angle AOC)$$
$$m(\angle A'O'B') + m(\angle B'O'C') = m(\angle AOC) < 180.$$

Supongamos que B' y C' pertenecen a diferentes semiplanos determinados por la recta $\overleftrightarrow{O'A'}$. El Teorema 2.5.8(4) nos asegura que

$$360 - (m(\angle A'O'B') + m(\angle B'O'C')) = m(\angle A'O'C') \leq 180$$
$$m(\angle A'O'B') + m(\angle B'O'C') \geq 180.$$
$$m(\angle AOB) + m(\angle BOC) \geq 180.$$
$$m(\angle AOC) \geq 180,$$

lo cual es imposible. Por consiguiente, C' y B' están en un mismo semiplano determinados por la recta $\overleftrightarrow{O'A'}$. De acuerdo con el Teorema 2.5.8(3), $m(\angle A'O'B') + m(\angle B'O'C') = m(\angle A'O'C')$. Por ello, $m(\angle AOC) = m(\angle A'O'C')$. Según el Teorema 2.5.7, concluimos que $\angle AOC \cong \angle A'O'C'$.

Caso III. $\angle AOC$ no es llano y C y B están en diferentes semiplanos determinados por $\overleftrightarrow{OA}$. En vista del Axioma AT y el Teorema 2.5.8(4), hallamos que

$$360 - (m(\angle AOB) + m(\angle BOC)) = m(\angle AOC)$$
$$360 - (m(\angle A'O'B') + m(\angle B'O'C')) = m(\angle AOC) < 180.$$

Si *C'* y *B'* pertenecen a un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{O'A'}$, por el Teorema 2.5.8(3), hallamos que $m(\angle A'O'B') + m(\angle B'O'C') = \angle A'O'C'$ y, por consiguiente,

$$360 - m(\angle A'O'C') = m(\angle AOC) < 180$$
$$180 < m(\angle A'O'C'),$$

pero esto es una contradicción. Por lo cual, debemos tener que los puntos *C* y *B'* están en diferentes semiplanos determinados por $\overleftrightarrow{O'A'}$. Según el Teorema 2.5.8(4), sabemos que $360 - (m(\angle A'O'B') + m(\angle B'O'C')) = m(\angle A'O'C')$. De donde se sigue que $m(\angle AOC) = m(\angle A'O'C')$. Finalmente, con base en el Teorema 2.5.7, concluimos que $\angle AOC \cong \angle A'O'C'$. ♣

2.8.2. Teorema de Sustracción de Ángulos. Sean $\angle AOB$ y $\angle BOC$, y $\angle A'O'B'$ y $\angle B'O'C'$ dos pares de ángulos adyacentes tales que $\angle AOB \cong \angle A'O'B'$ y $\angle AOC \cong \angle A'O'C'$. Supongamos que los puntos *C*, *B*, *C'* y *B'* satisfacen una de las siguientes condiciones:

1. Los puntos *B* y *C* están en un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{OA}$, y los puntos *B'* y *C'* están en un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{O'A'}$.

2. Los puntos *B* y *C* están en semiplanos diferentes determinados por la recta $\overleftrightarrow{OA}$, y los puntos *B'* y *C'* están en diferentes semiplanos determinados por la recta $\overleftrightarrow{O'A'}$.

Entonces, se cumple la congruencia $\angle BOC \cong \angle B'O'C'$.

Prueba: Supongamos que se cumplen las condiciones del primer inciso. Por el Teorema 2.5.8(3), tenemos que $m(\angle AOB) + m(\angle BOC) = m(\angle AOC)$ y $m(\angle A'O'B') + m(\angle B'O'C') = m(\angle A'O'C')$. Pero como $m(\angle AOB) = m(\angle A'O'B')$ y $m(\angle AOC) = m(\angle A'O'C')$, obtenemos que $m(\angle BOC) = m(\angle B'O'C')$. Según el Teorema 2.5.7, tenemos que $\angle BOC \cong \angle B'O'C'$. Supongamos ahora que las condiciones del segundo inciso se cumplen, de acuerdo con el Teorema 2.5.8(4), $360 - (m(\angle AOB) + m(\angle BOC)) = m(\angle AOC)$ y $360 - (m(\angle A'O'B') + m(\angle B'O'C')) = m(\angle A'O'C')$. Al igualar y cancelar, hallamos que $m(\angle BOC) = m(\angle B'O'C')$. Por el Teorema 2.5.7, concluimos que $\angle BOC \cong \angle B'O'C'$. ♣

En el siguiente ejemplo, los puntos *B* y *C* están en diferentes semiplanos determinados por la recta $\overleftrightarrow{OA}$ y los puntos *B'* y *C'* están en un mismo semiplano determinados por la recta $\overleftrightarrow{O'A'}$:

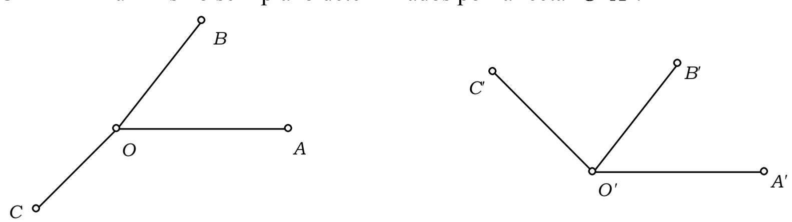


Figura 2.32

En la figura 2.32, se cumple que $m(\angle AOB) = m(\angle A'O'B') = 52$, $m(\angle AOC) = m(\angle A'O'C') = 135$, $m(\angle BOC) = 173$ y $m(\angle B'O'C') = 83$. Por lo cual, $\angle BOC$ y $\angle B'O'C'$ no pueden ser congruentes.

A continuación, definiremos la suma de dos ángulos, pero para esto necesitamos el siguiente lema que nos ayudará a convencernos de que nuestra definición no posee ninguna contradicción.

2.8.3. Lema. Si $\angle AOB$ y $\angle BOC$ son dos ángulos adyacentes tales que $m(\angle AOB) + m(\angle BOC) \leq 180$, entonces $\angle AOC$ es un ángulo llano, o *B* y *C* están en un mismo semiplano determinados por la recta $\overleftrightarrow{OA}$.

Prueba: Si $m(\angle AOB) + m(\angle BOC) = 180$, con base en el Corolario 2.5.9, tenemos entonces que $\angle AOC$ es un ángulo llano. Supongamos que B y C están en semiplanos diferentes determinados por la recta $\overleftrightarrow{OA}$ y $m(\angle AOB) + m(\angle BOC) < 180$. En vista del Teorema 2.5.8(4), se cumplen las desigualdades

$$360 - (m(\angle AOB) + m(\angle BOC)) = m(\angle AOC) \leq 180$$
$$360 - (m(\angle AOB) + m(\angle BOC)) \leq 180$$
$$180 - (m(\angle AOB) + m(\angle BOC)) \leq 0$$
$$180 \leq m(\angle AOB) + m(\angle BOC),$$

lo cual no es posible. Por lo tanto, los puntos B y C pertenecen a uno de los semiplanos determinados por la recta $\overleftrightarrow{OA}$. ♣

2.8.4. Definición (Suma de Ángulos). Si $\angle AOB$ y $\angle BOC$ son dos ángulos adyacentes tales que $m(\angle AOB) + m(\angle BOC) \leq 180$, entonces definimos $\angle AOB + \angle BOC = \angle AOC$. Si $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ son dos ángulos arbitrarios tales que $m(\angle\alpha) + m(\angle\beta) \leq 180$, y $\angle AOB$ y $\angle BOC$ son dos ángulos adyacentes tales que $\angle\alpha \cong \angle AOB$ y $\angle\beta \cong \angle BOC$, entonces definimos $\angle\alpha + \angle\beta = \angle AOC$.

Observemos que para dos ángulos arbitrarios $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ en los que se cumpla la desigualdad $m(\angle\alpha) + m(\angle\beta) \leq 180$, la definición de $\angle\alpha + \angle\beta$ es única, salvo congruencias. Es decir, si $\angle AOB$ y $\angle BOC$, y $\angle A'O'B'$ y $\angle B'O'C'$ son dos pares de ángulos adyacentes tales que $\angle\alpha \cong \angle AOB \cong \angle A'O'B'$ y $\angle\beta \cong \angle BOC \cong \angle B'O'C'$, entonces $\angle\alpha + \angle\beta = \angle AOC \cong \angle A'O'C'$. Veamos que efectivamente esto se cumple. Por el Lema 2.8.3, B y C no pueden estar en diferentes semiplanos determinados por la recta $\overleftrightarrow{OA}$. Lo mismo pasa con los puntos B' y C' con respecto a la recta $\overleftrightarrow{O'A'}$. Así, en virtud del Axioma AT y el Teorema 2.5.8(3),

$$m(\angle AOC) = m(\angle AOB) + m(\angle BOC) = m(\angle A'O'B') + m(\angle B'O'C') = m(\angle A'O'C').$$

De acuerdo con el Teorema 2.5.7, hallamos que $\angle AOC \cong \angle A'OC'$. Con base en lo anterior, al sumar dos ángulos arbitrarios podemos suponer, en la mayoría de los casos, que los ángulos en cuestión son adyacentes.

Veamos el siguiente ejemplo que trata de dos ángulos que no se pueden sumar según nuestra regla:

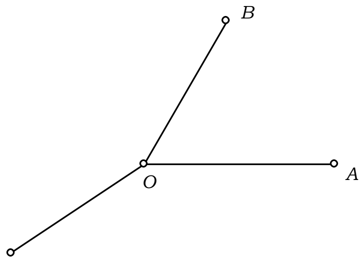


Figura 2.33

En la figura 2.33, tenemos dos ángulos adyacentes $\angle AOB$ y $\angle BOC$ tales que $m(\angle AOB) = 60$ y $m(\angle BOC) = 160$. Por el Teorema 2.5.8(4),

$$m(\angle AOC) = 360 - (m(\angle AOB) + m(\angle BOC)) = 140.$$

Por otra parte, tenemos que

$$m(\angle AOB) + m(\angle BOC) = 220 > 180.$$

2.8.5. Lema. Si $\angle\alpha \cong \angle\alpha'$, $\angle\beta \cong \angle\beta'$ y $m(\angle\alpha) + m(\angle\beta) \leq 180$, entonces $\angle\alpha + \angle\beta \cong \angle\alpha' + \angle\beta'$.

Prueba: Del Axioma AT y nuestra hipótesis, se deduce que $m(\angle\alpha') + m(\angle\beta') = m(\angle\alpha) + m(\angle\beta) \leq 180$. En particular, los ángulos $\angle\alpha'$ y $\angle\beta'$ también se pueden sumar. Supongamos $\angle\alpha = \angle AOB$, $\angle\beta = \angle BOC$, $\angle\alpha' = \angle A'O'B'$ y $\angle\beta' = \angle B'O'C'$, en donde $\angle AOB$, y $\angle BOC$ y $\angle A'O'B'$, y $\angle B'O'C'$ son dos pares de ángulos adyacentes. Si $\angle AOC$ es llano, por el Corolario 2.5.9 y el Lema 2.7.3, $\angle A'O'C'$ es también llano y, por ello, $\angle\alpha + \angle\beta \cong \angle\alpha' + \angle\beta'$, ya que todos los ángulos llanos son congruentes (2.5.6). Supongamos que $\angle AOC$ no es llano. El Lema 2.8.3 nos asegura que los puntos B y C no pueden estar en diferentes semiplanos determinados por la recta $\overleftrightarrow{OA}$, y que los puntos B' y C' tampoco pueden estar en diferentes semiplanos determinados por la recta $\overleftrightarrow{O'A'}$. De acuerdo con el Teorema 2.8.1, obtenemos que

$$\angle\alpha + \angle\beta = \angle AOB + \angle BOC = \angle AOC \cong \angle A'O'C' = \angle A'O'B' + \angle B'O'C' = \angle\alpha' + \angle\beta'. \clubsuit$$

2.8.6. Teorema. Si $m(\angle\alpha) + m(\angle\beta) \leq 180$, entonces $m(\angle\alpha + \angle\beta) = m(\angle\alpha) + m(\angle\beta)$.

Prueba: Sean $\angle AOB$ y $\angle BOC$ dos ángulos adyacentes tales que $\angle\alpha \cong \angle AOB$ y $\angle\beta \cong \angle BOC$. Por definición, $\angle\alpha + \angle\beta = \angle AOC$. Del Lema 2.8.3, sabemos que el ángulo $\angle AOC$ es llano o que los puntos B y C no pueden estar en distintos semiplanos determinados por la recta $\overleftrightarrow{OA}$. Por el Teorema 2.5.8 y el Axioma AT, concluimos que

$$m(\angle\alpha + \angle\beta) = m(\angle AOC) = m(\angle AOB) + m(\angle BOC) = m(\angle\alpha) + m(\angle\beta). \clubsuit$$

2.8.7. Teorema. Si $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ son dos ángulos complementarios, entonces $\angle\alpha + \angle\beta$ es un ángulo recto. Si $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ son ángulos suplementarios, entonces $\angle\alpha + \angle\beta$ es un ángulo llano.

Prueba: Si $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ son ángulos complementarios, por definición, tenemos entonces que $m(\angle\alpha) + m(\angle\beta) = 90$. Según el teorema anterior, $m(\angle\alpha + \angle\beta) = m(\angle\alpha) + m(\angle\beta) = 90$. Lo cual quiere decir que $\angle\alpha + \angle\beta$ es un ángulo recto. Supongamos ahora que $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ son ángulos suplementarios. De la definición y el Teorema 2.8.6, hallamos que $180 = m(\angle\alpha) + m(\angle\beta) = m(\angle\alpha + \angle\beta)$. Del Teorema 2.5.3, concluimos que $\angle\alpha + \angle\beta$ es un ángulo llano. ♣

2.8.8. Teorema (Asociatividad). Si $\angle\alpha$, $\angle\beta$ y $\angle\gamma$ son tres ángulos tales que $m(\angle\alpha) + m(\angle\beta) + m(\angle\gamma) \leq 180$, entonces $(\angle\alpha + \angle\beta) + \angle\gamma \cong \angle\alpha + (\angle\beta + \angle\gamma)$.

Prueba: Pongamos $\angle\alpha = \angle AOB$ y como base la semirrecta $\overrightarrow{OB}$. Mediante el Axioma CA_2, podemos encontrar un punto C en el plano de tal forma que $\angle AOB$ y $\angle BOC$ sean dos ángulos adyacentes y $\angle BOC \cong \angle\beta$. De igual forma, conseguimos un punto D tal que $\angle BOC$ y $\angle COD$ sean ángulos adyacentes y $\angle COD \cong \angle\gamma$.

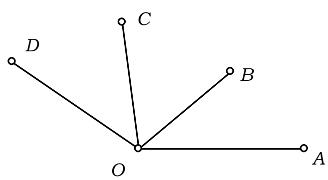


Figura 2.34

Por definición, $\angle\alpha + \angle\beta = \angle AOB + \angle BOC = \angle AOC$ y de aquí,

$$(\angle\alpha + \angle\beta) + \angle\gamma = \angle AOC + \angle COD = \angle AOD.$$

Por otra parte, $\angle\alpha = \angle AOB$ y $\angle\beta + \angle\gamma = \angle BOC + \angle COD = \angle BOD$. Por ello, $\angle\alpha + (\angle\beta + \angle\gamma) = \angle AOB + \angle BOD = \angle AOD$. Esto demuestra la identidad

$$(\angle\alpha + \angle\beta) + \angle\gamma \cong \angle\alpha + (\angle\beta + \angle\gamma). \clubsuit$$

Como una consecuencia de la asociatividad de la suma de ángulos, al tener tres ángulos $\angle\alpha$, $\angle\beta$ y $\angle\gamma$ con $m(\angle\alpha) + m(\angle\beta) + m(\angle\gamma) \leq 180$, su suma se denotará simplemente por $\angle\alpha + \angle\beta + \angle\gamma$. Si $\angle\alpha$ es un ángulo tal que $m(\angle\alpha) \leq \frac{180}{k}$, en donde k es un número natural positivo, entonces $k\angle\alpha$ denotará al ángulo que se obtiene al sumar k veces el ángulo $\angle\alpha$. Si $\angle\alpha$ es un ángulo obtuso, entonces $\angle 180 - \angle\alpha$ y, en caso de que sea agudo, $\angle 90 - \angle\alpha$ denotarán al ángulo suplementario adyacente y al ángulo complementario adyacente de $\angle\alpha$, respectivamente.

2.8.9. Teorema (Conmutatividad). Si $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ dos ángulos tales que $m(\angle\alpha) + m(\angle\beta) \leq 180$, entonces

$$\angle\alpha + \angle\beta \cong \angle\beta + \angle\alpha.$$

Prueba: De acuerdo con el Teorema 2.8.6,

$$m(\angle\alpha + \angle\beta) = m(\angle\alpha) + m(\angle\beta) = m(\angle\beta) + m(\angle\alpha) = m(\angle\beta + \angle\alpha).$$

Por el Teorema 5.2.6, obtenemos la congruencia $\angle\alpha + \angle\beta \cong \angle\beta + \angle\alpha$. ♣

2.8.10. Teorema (Neutro Aditivo). Si $\angle\alpha$ es un ángulo arbitrario y $\angle\beta$ es un ángulo nulo, entonces $\angle\alpha + \angle\beta \cong \angle\alpha$. Recíprocamente, si $\angle\alpha + \angle\beta \cong \angle\alpha$, entonces $\angle\beta$ es un ángulo nulo.

Prueba: Como $m(\angle\alpha) \leq 180$ y $m(\angle\beta) = 0$, por ser este último nulo, $m(\angle\alpha) + m(\angle\beta) \leq 180$, es decir, $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ se pueden sumar. Podemos entonces suponer que $\angle\alpha = \angle AOB$ y $\angle\beta = \angle BOC$, en donde $\angle AOB$ y $\angle BOC$ son dos ángulos adyacentes. Por definición, $\angle\alpha + \angle\beta = \angle AOC$. Del Teorema 2.8.6 se sigue que

$$m(\angle\alpha + \angle\beta) = m(\angle AOB + \angle BOC) = m(\angle AOB) + m(\angle BOC) = m(\angle AOB) = m(\angle AOC).$$

El Teorema 2.5.7 nos asegura que $\angle AOB \cong \angle AOC$. Por consiguiente, $\angle\alpha + \angle\beta \cong \angle\alpha$. Para probar el recíproco, supongamos que $\angle\beta$ no es nulo y que $\angle\alpha + \angle\beta \cong \angle\alpha$. Del Teorema 2.8.6 sabemos que $m(\angle\alpha + \angle\beta) = m(\angle\alpha) + m(\angle\beta) > m(\angle\alpha)$, pues $m(\angle\beta.) > 0$. El Teorema 2.5.7 implica que los ángulos $\angle\alpha + \angle\beta$ y $\angle\alpha$ no pueden ser congruentes, pero esto contradice nuestra hipótesis. Por lo tanto, $\angle\beta$ es un ángulo nulo. ♣

La suma de una cantidad finita de ángulos se puede llevar a cabo de la siguiente manera:

Sean $\angle\alpha_1, ..., \angle\alpha_{k-1}$ y $\angle\alpha_k$ k ángulos tales que $m(\angle\alpha_1) + ... + m(\angle\alpha_k) \leq 180$, en donde $k > 1$ es un número entero. Procedamos por inducción matemática. Supongamos que la suma de $k - 1$ ángulos ha sido definida. Entonces, obtenemos primero el ángulo $\angle\alpha_1 + ... + \angle\alpha_{k-1}$ y luego le sumamos $\angle\alpha_k$. De este modo obtenemos la suma $(\angle\alpha_1 + ... + \angle\alpha_{k-1}) + \angle\alpha_k$, la cual será denotada por $\angle\alpha_1 + ... + \angle\alpha_{k-1} + \angle\alpha_k$. La asociatividad (2.8.8) y la conmutatividad (2.8.9) de la adición nos garantizan que la suma de una cantidad finita de ángulos no depende de la enumeración de los mismos.

2.9. Desigualdad de ángulos

En esta sección compararemos los ángulos según el tamaño que tenga su región angular.

2.9.1. Definición. Sean $\angle AOB$ y $\angle A'O'B'$ dos ángulos. Decimos que $\angle AOB < \angle A'O'B'$ si se cumple una de las siguientes condiciones:

1. $\angle AOB$ es nulo y $\angle A'O'B'$ no es nulo.
2. $\angle A'O'B'$ es llano y $\angle AOB$ no es llano.
3. $\angle A'O'B'$ es no degenerado y existe $C' \in int(\angle A'O'B')$ tal que $\angle A'O'C' \cong \angle AOB$.

Si $\angle AOB < \angle A'O'B'$, entonces decimos que $\angle AOB$ es *menor* que $\angle A'O'B'$ o, equivalentemente, que $\angle A'O'B'$ es *mayor* que $\angle AOB$.

Para cualquier par de ángulos $\angle AOB$ y $\angle A'O'B'$, la desigualdad $\angle AOB \leq \angle A'O'B'$ significa que $\angle AOB < \angle A'O'B'$ o que $\angle AOB \cong \angle A'O'B'$.

El siguiente lema nos garantiza que la relación de orden $\leq$ está bien definida.

2.9.2. Lema. Sean $\angle AOB$, $\angle A'O'B'$, $\angle PQR$ y $\angle P'Q'R'$ cuatro ángulos. Si $\angle AOB \cong \angle A'O'B'$, $\angle PQR \cong \angle P'Q'R'$ y $\angle AOB \leq \angle PQR$, entonces $\angle A'O'B' \leq \angle P'Q'R'$.

Prueba: Si $\angle AOB \cong \angle PQR$, por la transitividad de la congruencia de ángulos (Axioma CA_2), tenemos entonces que $\angle A'O'B' \cong \angle P'Q'R'$. Supongamos pues que $\angle AOB < \angle PQR$. Tenemos que analizar cada uno de los siguientes tres casos por separado:

Caso I. $\angle AOB$ es nulo y $\angle PQR$ no es nulo. Por el Teorema 2.5.1, sabemos que $\angle A'O'B'$ es nulo y $\angle P'Q'R'$ no es nulo. Por definición, concluimos que $\angle A'O'B' < \angle P'Q'R'$.

Caso II. $\angle AOB$ no es llano y $\angle PQR$ es llano. Por el Teorema 2.6.4, $\angle A'O'B'$ no puede ser llano y $\angle P'Q'R'$ es llano. De la definición concluimos directamente que $\angle A'O'B' < \angle P'Q'R'$.

Caso III. Supongamos que $\angle AOB$ y $\angle PQR$ no son degenerados. De aquí, obtenemos que $\angle P'Q'R'$ no es degenerado. Por definición, existe $S \in int(\angle PQR)$ tal que $\angle AOB \cong \angle PQS$. Por el Axioma AT y el Teorema 2.5.2, sabemos que $m(\angle AOB) = m(\angle PQS) < m(\angle PQR)$. Según el Axioma CA_2, podemos encontrar un punto S' en el plano tal que $\angle PQS \cong \angle P'Q'S'$, y S' y R' están en un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{P'Q'}$. Si $S' \in \overleftrightarrow{Q'R'}$, entonces $\angle P'Q'S' = \angle P'Q'R'$. De aquí se sigue, por el Axioma AT, que

$$m(\angle PQR) = m(\angle P'Q'R') = m(\angle P'Q'S') = m(\angle PQS) = m(\angle AOB),$$

lo cual es una contradicción. Si $R' \in int(\angle P'Q'S')$, por el Axioma AT y el Axioma 2.5.2, tenemos entonces

$$m(\angle PQR) = m(\angle P'Q'R') < m(\angle P'Q'S') = m(\angle PQS) = m(\angle AOB),$$

pero esto también es una contradicción. Por consiguiente, $S' \in int(\angle P'Q'R')$. Como

$$\angle A'O'B' \cong \angle AOB \cong \angle PQS \cong \angle P'Q'S',$$

se sigue de la definición que $\angle A'O'B' < \angle P'Q'R'$. ♣

2.9.3. Teorema. Sean $\angle AOC$ y $\angle AOB$ dos ángulos no degenerados tales que B y C pertenecen a un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{OA}$. Entonces, $\angle AOC < \angle AOB$ si y solo si $\overrightarrow{OC}$ está entre las semirrectas $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$.

Prueba: *Necesidad*. Supongamos que $\angle AOC < \angle AOB$. Por ser $\angle AOC$ y $\angle AOB$ dos ángulos no degenerados, podemos encontrar un punto $D \in int(\angle AOB)$ tal que $\angle AOD \cong \angle AOC$. Pero por el Axioma CA_2, debemos tener que $C = D$. Por definición, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}$ está entre las semirrectas $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$.

Suficiencia. Si la semirrecta $\overrightarrow{OC}$ está entre las semirrectas $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$, por definición, debemos tener que $C \in int(\angle AOB)$. En otras palabras, $\angle AOC < \angle AOB$. ♣

2.9.4. Teorema. Sean $\angle AOB$ y $\angle A'O'B'$ dos ángulos cualesquiera. Entonces, $\angle AOB < \angle A'O'B'$ si y solo si $m(\angle AOB) < m(\angle A'O'B')$.

Prueba: *Necesidad*. Consideremos tres casos.

Caso I. $\angle AOB$ es nulo y $\angle A'O'B'$ no es nulo. De acuerdo con el Axioma AT, $0 = m(\angle AOB) < m(\angle A'O'B')$.

Caso II. $\angle A'O'B'$ es llano y $\angle AOB$ no es llano. El Axioma AT y el Teorema 2.5.3 nos garantizan que $m(\angle AOB) < m(\angle A'O'B') = 180$.

Caso III. En este caso, $\angle AOB$ y $\angle A'O'B'$ no son degenerados. Por definición existe $C' \in int(\angle A'O'B')$ tal que $\angle A'O'C' \cong \angle AOB$. Entonces, por el Axioma AT y el Teorema 2.5.2,

$$m(\angle AOB) = m(\angle A'O'C') < m(\angle A'O'B').$$

Suficiencia. Supongamos que $m(\angle AOB) < m(\angle A'O'B')$. Tenemos que considerar tres casos:

Caso I. Si $\angle AOB$ es nulo y $\angle A'O'B'$ no es nulo, por definición, $\angle AOB < \angle A'O'B'$.

Caso II. Si suponemos que $\angle A'O'B'$ es llano y que $\angle AOB$ no es llano, entonces por la definición del orden hallamos que $\angle AOB < \angle A'O'B'$.

Caso III. Supongamos que $\angle AOB$ no es nulo y $\angle A'O'B'$ no es llano. Por el Axioma AT y el Teorema 2.5.3, sabemos $0 < m(\angle AOB) < m(\angle A'O'B') < 180$ y, por consiguiente, $\angle AOB$ no es llano y $\angle A'O'B'$ no es nulo. Sea C' un punto en el semiplano determinado por $\overleftrightarrow{O'A'}$ que contiene a B' tal que $\angle AOB \cong \angle A'O'C'$. Si $C' \in \overleftrightarrow{O'B'}$, entonces $\angle AOB \cong \angle A'O'C' = \angle A'O'B'$ y, por el Axioma AT, obtenemos que $m(\angle AOB) = m(\angle A'O'C') = m(\angle A'O'B')$, lo cual contradice nuestra hipótesis. Por ello, $C' \in int(\angle A'O'B')$ o $B' \in int(\angle A'O'C')$. Si $B' \in int(\angle A'O'C')$, por el Teorema 2.5.2, tenemos entonces que $m(\angle A'O'B') < m(\angle A'O'C') = m(\angle AOB)$, pero esto es imposible. En consecuencia, $C' \in int(\angle A'O'B')$. Como $\angle AOB \cong \angle A'O'C'$, concluimos que $\angle AOB < \angle A'O'B'$. ♣

El siguiente teorema muestra que ≤ es un pre orden en el conjunto de todos los ángulos del plano.

2.9.5. Teorema. Sean $\angle AOB$, $\angle A'O'B'$ y $\angle A''O''B''$ tres ángulos cualesquiera. Se cumple que:
1. (Reflexiva) $\angle AOB \leq \angle AOB$.
2. (Antisimétrica) Si $\angle AOB \leq \angle A'O'B'$ y $\angle A'O'B' \leq \angle AOB$, entonces $\angle AOB \cong \angle A'O'B'$.
3. (Transitiva) Si $\angle AOB \leq \angle A'O'B'$ y $\angle A'O'B' \leq \angle A''O''B''$, entonces $\angle AOB \leq \angle A''O''B''$.

Prueba: 1. Esta es evidente.
2. Por el Teorema 2.9.4, obtenemos las desigualdades
$$m(\angle AOB) \leq m(\angle A'O'B') \text{ y } m(\angle A'O'B') \leq m(\angle AOB).$$
De donde se sigue que $m(\angle AOB) = m(\angle A'O'B')$. De acuerdo con el Teorema 2.5.7, $\angle AOB \cong \angle A'O'B'$.
3. Del Teorema 2.9.4, encontramos que
$$m(\angle AOB) \leq m(\angle A'O'B') \text{ y } m(\angle A'O'B') \leq m(\angle A''O''B'').$$
Por consiguiente, $m(\angle AOB) \leq m(\angle A''O''B'')$. Según los Teoremas 2.5.7 y 2.9.4, $\angle AOB \leq \angle A''O''B''$. ♣

2.9.6. Teorema. Para cualesquiera dos ángulos $\angle AOB$ y $\angle A'O'B'$, se cumple una y solamente una de las siguientes afirmaciones:
1. $\angle AOB \cong \angle A'O'B'$.
2. $\angle AOB < \angle A'O'B'$.
3. $\angle AOB > \angle A'O'B'$.

Prueba: Consideremos las medidas $m(\angle AOB)$ y $m(\angle A'O'B')$. Por ser $m(\angle AOB)$ y $m(\angle A'O'B')$ dos números reales sabemos que se cumple una y solo una de las siguientes afirmaciones:
$$m(\angle AOB) = m(\angle A'O'B'),\ m(\angle AOB) < m(\angle A'O'B') \text{ o } m(\angle AOB) > m(\angle A'O'B').$$
La conclusión se sigue directamente del Teorema 2.9.4. ♣

2.9.7. Teorema. Sean $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ dos ángulos.
1. Si $m(\angle\alpha) + m(\angle\beta) \leq 180$ y $\angle\alpha$ no es nulo, entonces $\angle\beta < \angle\alpha + \angle\beta$.
2. Si $\angle\alpha < \angle\beta$, entonces $\angle\alpha + \angle\gamma < \angle\beta + \angle\gamma$, para cualquier ángulo $\angle\gamma$ tal que $m(\angle\beta) + m(\angle\gamma) \leq 180$.
3. Si $\angle\alpha < \angle\beta$, entonces existe un ángulo $\angle\gamma$ tal que $\angle\alpha + \angle\gamma \cong \angle\beta$.

Prueba: 1. Supongamos que $m(\angle\alpha) + m(\angle\beta) \leq 180$ y $\angle\alpha$ no es nulo. Por el Axioma AT y el Teorema 2.8.6, $m(\angle\beta) < m(\angle\alpha) + m(\angle\beta) = m(\angle\alpha + \angle\beta)$. Según el Teorema 2.9.4, obtenemos que $\angle\beta < \angle\alpha + \angle\beta$.
2. Supongamos que $\angle\alpha < \angle\beta$ y que $\angle\gamma$ es un ángulo tal que $m(\angle\beta) + m(\angle\gamma) \leq 180$. Del Teorema 2.9.4, vemos que $m(\angle\alpha) < m(\angle\beta)$. Por ello, $m(\angle\alpha) + m(\angle\gamma) < m(\angle\beta) + m(\angle\gamma) \leq 180$, lo cual nos dice que se puede hablar de la suma $\angle\alpha + \angle\gamma$. Como una consecuencia de Teorema 2.8.6, obtenemos que
$$m(\angle\alpha + \angle\gamma) = m(\angle\alpha) + m(\angle\gamma) < m(\angle\beta) + m(\angle\gamma) = m(\angle\beta + \angle\gamma).$$
Entonces, por el Teorema 2.9.4, concluimos que $\angle\alpha + \angle\gamma < \angle\beta + \angle\gamma$.
3. Si $\angle\alpha$ es un ángulo nulo, entonces ponemos $\angle\gamma = \angle\beta$. En lo que resta de la prueba, supongamos que $\angle\alpha$ no es nulo y pongamos $\angle\alpha = \angle AOB$. Si $\angle\beta$ es llano y $\angle\gamma = \angle BOC$ es el ángulo suplementario adyacente de $\angle\alpha$, entonces, por el Axioma AT y el Teorema 2.8.6, hallamos que
$$180 = m(\angle AOC) = m(\angle AOB) + m(\angle BOC) = m(\angle\alpha) + m(\angle\gamma) = m(\angle\alpha + \angle\gamma).$$
Esto implica, por el Teorema 2.5.3, que $\angle\alpha + \angle\gamma$ es un ángulo llano. Por el Teorema 2.5.6, tenemos que $\angle\alpha + \angle\gamma \cong \angle\beta$. Nos resta ver el caso cuando $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ no sean degenerados. Pongamos $\angle\beta = \angle A'O'B'$. De la definición, existe $C' \in int(\angle A'O'B')$ tal que $\angle A'O'C' \cong \angle AOB$. Pongamos $\angle\gamma = \angle C'O'B'$. Entonces, por definición, hallamos que $\angle\alpha + \angle\gamma = \angle AOB + \angle C'O'B' \cong \angle A'O'C' + \angle C'O'B' = \angle A'O'C' = \angle\beta$. ♣

Con base en el tercer inciso del teorema anterior, si $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ son dos ángulos tales que $\angle\alpha \leq \angle\beta$, entonces $\angle\alpha - \angle\beta$ denotará al ángulo $\angle\gamma$ tal que $\angle\beta = \angle\alpha + \angle\gamma$. En algunos casos, un ángulo suplementario de un ángulo dado $\angle\alpha$ será denotado por $\angle 180 - \angle\alpha$, y si $\angle\alpha$ es un ángulo agudo, entonces $\angle 90 - \angle\alpha$ denotará un ángulo complementario de $\angle\alpha$.

2.9.8. Teorema. Sean $\angle AOB$ y $\angle A'O'B'$ dos ángulos no degenerados congruentes. Fijamos dos puntos cualesquiera tales que $C \in int(\angle AOB)$ y $C' \in int(\angle A'O'B')$. Si $\angle AOC < \angle A'O'C'$, entonces $\angle COB > \angle C'O'B'$.

Prueba:

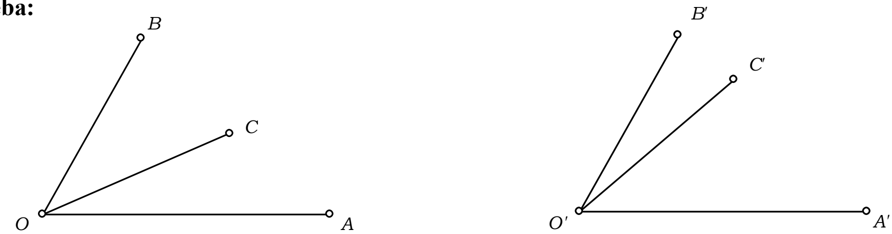


Figura 2.35

Del Axioma AT sabemos que

$$m(\angle AOB) = m(\angle A'O'B')$$
$$m(\angle AOC) + m(\angle COB) = m(\angle A'O'C') + m(\angle C'O'B').$$

El Teorema 2.9.4 nos dice que $m(\angle AOC) < m(\angle A'O'C')$. Por consiguiente, $m(\angle COB) > m(\angle C'O'B')$. De acuerdo con el mismo Teorema 2.9.4, obtenemos que $\angle COB > \angle C'O'B'$, tal como se deseaba. ♣

2.10. Ángulos opuestos por el vértice

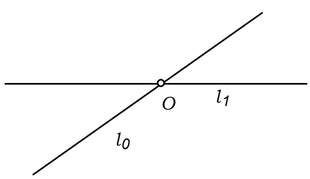


Figura 2.36

Observemos que dos rectas l_0 y l_1 que se intersecan en un punto O formando cuatro ángulos cuyo vértice es O (ver la figura 2.36).

Esta observación nos sugiere considerar los siguientes pares de ángulos.

2.10.1. Definición. Dos ángulos con el mismo vértice se dice que son *opuestos por el vértice* si los lados de uno son las semirrectas opuestas a las semirrectas que forman los lados del otro.

En la figura siguiente:

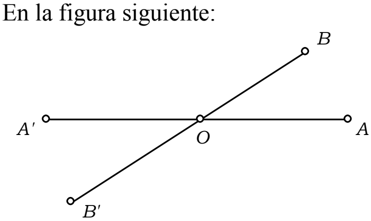


Figura 2.37

Los pares de ángulos $\angle AOB$ y $\angle A'OB'$, y $\angle BOA'$ y $\angle B'OA$ son opuestos por el vértice.

2.10.2. Teorema. Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.

Prueba: Sean $\angle AOB$ y $\angle A'OB'$ dos ángulos opuestos por el vértice O (ver la figura 2.37). Por definición, $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OA'}$, y $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OB'}$ son dos pares de semirrectas opuestas. En consecuencia, $\angle AOA'$ y $\angle BOB'$ son ángulos llanos. Por el Axioma AT, $m(\angle AOB) + m(\angle BOA') = 180 = m(\angle BOA') + m(\angle A'OB')$. De donde obtenemos que $m(\angle AOB) = m(\angle A'OB')$. Por el Teorema 2.5.7, concluimos que $\angle AOB \cong \angle A'OB'$. ♣

Como una consecuencia del Teorema 2.10.2, dos rectas que se cortan forman dos pares de ángulos opuestos por el vértice que son congruentes y dos pares de ángulos suplementarios.

2.10.3. Definición. Sean m y n dos rectas que se cortan en el punto O. Tomemos puntos A, $B \in m$ y $C, D \in n$, de tal manera que el punto O esté entre A y B y entre C y D. De acuerdo con el Teorema 2.10.2, sabemos que $\angle AOC \cong \angle BOD$ y $\angle COB \cong \angle DOA$. Con base en esto, el símbolo (m,n) denotará a cualquiera de los ángulos $\angle AOC$ o $\angle BOD$, y el símbolo (n,m) hará referencia a cualquiera de los ángulos $\angle COB$ o $\angle DOA$. Los *ángulos formados* por las rectas m y n son los ángulos (m,n) y (n,m). Observemos que el ángulo (m,n) es el ángulo formado por las rectas m y n leyendo ambas rectas en sentido contrario a las manecillas del reloj con respecto al punto O (ver la figura 2.38), y el ángulo (n,m) es el ángulo formado por la rectas n y m leyendo ambas rectas en sentido contrario a las manecillas del reloj con respecto al punto O (ver figura 2.38).

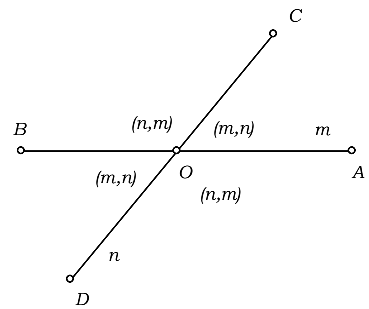


Figura 2.38

2.10.4. Teorema. Si m y n dos rectas que se cortan, entonces los ángulos (m,n) y (n,m) son suplementarios.

Prueba: Es consecuencia directa del Teorema 2.10.2 y la definición. ♣

2.11. Perpendicularidad

2.11.1. Definición. Dos semirrectas $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ con el mismo vértice se llaman *perpendiculares* si el ángulo que forman es recto. Si $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ son perpendiculares, entonces escribimos $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$. Dos rectas l y m que se cortan se llaman *perpendiculares*; escribimos $l \perp m$, si uno de los cuatro ángulos que forman es recto. Dos segmentos AB y CD se dice que son *perpendiculares*; escribimos $AB \perp CD$, si son perpendiculares las rectas que los contienen. Un segmento AB y una semirrecta $\overrightarrow{OP}$ son perpendiculares; escribimos $AB \perp \overrightarrow{OP}$, si son perpendiculares las rectas que los contienen.

Es claro de la definición que si $l \perp m$, entonces $m \perp l$.

2.11.2. Teorema. Si $l \perp m$, entonces los cuatro ángulos que forman las rectas l y m son rectos.

Prueba: Sea O el punto de intersección de las rectas l y m. Consideremos la figura 2.39.

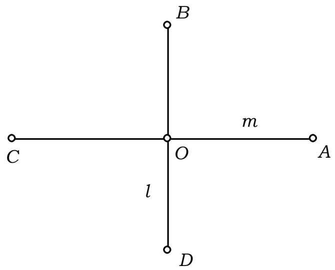


Figura 2.39

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\angle AOB$ es recto. Como $\angle AOB$ y $\angle BOC$ son suplementarios, por los Teoremas 2.6.3 y 2.7.11, $\angle BOC$ es también recto. Similarmente, ya que $\angle BOC$ y $\angle COD$, y $\angle AOB$ y $\angle DOA$ son dos pares de ángulos suplementarios, con base en los Teoremas 2.6.3 y 2.7.11, $\angle COD$ y $\angle DOA$ son ángulos rectos. ♣

2.11.3. Teorema. Dos rectas son perpendiculares si y solo si forman dos ángulos adyacentes congruentes.

Prueba: *Necesidad*. Sean l y m dos rectas perpendiculares. Del teorema anterior, se obtiene que los cuatro ángulos que forman estas dos rectas son rectos. De acuerdo con el Teorema 2.6.2, cualquier par de ángulos adyacentes de los cuatro que se forman son congruentes.
Suficiencia.

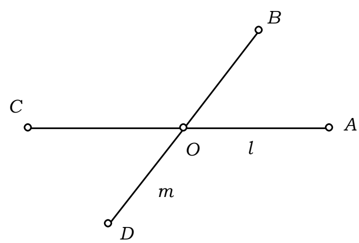


Figura 2.40

Sean l y m dos rectas, $A, C \in l$ y B, $D \in m$. Supongamos que $\angle AOB \cong \angle BOC$. Por el Axioma AT,

$$180 = m(\angle AOB) + m(\angle BOC) = m(\angle AOC) = 2m(\angle AOB).$$

Por consiguiente, $m(\angle AOB) = 90$. Es decir, $\angle AOB$ es un ángulo recto. Por definición, $l \perp m$. ♣

2.12. La bisectriz de un ángulo

2.12.1. Definición. La *bisectriz* de un ángulo no degenerado $\angle AOB$ es una semirrecta $\overrightarrow{OC}$ tal que $\angle AOC \cong \angle COB$ y $C \in int(\angle AOB)$.

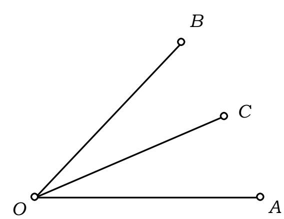


Figura 2.41

Si $\overrightarrow{OC}$ es la bisectriz del ángulo no degenerado $\angle AOB$, tenemos entonces que

$$m(\angle AOB) = 2m(\angle AOC) = 2m(\angle COB).$$

Esto quiere decir que la bisectriz de un ángulo no degenerado divide al ángulo en dos ángulos con la misma medida. En algunos casos, uno de estos ángulos será denotado por $\dfrac{\angle AOB}{2}$. Probaremos que la bisectriz de un ángulo no degenerado existe y es única (en la Construcción 11.112, veremos cómo trazar la bisectriz de un ángulo no degenerado usando solamente regla y compás).

2.12.2. Teorema. La bisectriz de un ángulo no degenerado existe y es única.

Prueba: Sea $\angle AOB$ un ángulo no degenerado. Por el Axioma AT, podemos encontrar un punto C en el plano tal que $m(\angle AOC) = \dfrac{m(\angle AOB)}{2}$. Según los Axiomas CA_2 y AT, podemos suponer que B y C están en un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{OA}$. Consideremos la semirrecta $\overrightarrow{OC}$. Como $m(\angle AOC) < m(\angle AOB)$, por los Teoremas 2.2.9 y 2.9.3, la semirrecta $\overrightarrow{OC}$ está contenida en el interior del ángulo $\angle AOB$. Del Axioma AT, hallamos que

$$m(\angle AOB) = m(\angle AOC) + m(\angle COB) = \frac{m(\angle AOB)}{2} + m(\angle COB).$$

$$m(\angle COB) = \frac{m(\angle AOB)}{2}.$$

El Teorema 2.5.7 nos conduce a la congruencia $\angle AOC \cong \angle COB$. Esto prueba que la semirrecta $\overrightarrow{OC}$ es la bisectriz del ángulo $\angle AOB$. Solo nos resta probar su unicidad. Para esto, supongamos que $\overrightarrow{OP}$ es una semirrecta en el plano tal que $\angle AOP \cong \angle POB$ y $P \in int(\angle AOB)$. Por el Axioma AT,

$$m(\angle AOP) + m(\angle POB) = m(\angle AOB) = 2m(\angle AOP)$$

$$m(\angle AOP) = \frac{m(\angle AOB)}{2} = m(\angle AOC).$$

De acuerdo con el Teorema 2.5.7, obtenemos que $\angle AOP \cong \angle AOC$, pero como C y P están en un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{OA}$, por el Axioma CA_2, hallamos que $C = P$. Por lo tanto, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP}$. ♣

Es importante hacer notar que para cada ángulo no degenerado $\angle AOB$, hay dos semirrectas opuestas $\overrightarrow{OC}$ y $\overrightarrow{OC'}$ tales que $\angle AOC \cong \angle COB$ y $\angle AOC' \cong \angle C'OB$ (ver la figura 2.42). Es por esto que en la definición de bisectriz se requiere que $C \in int(\angle AOB)$.

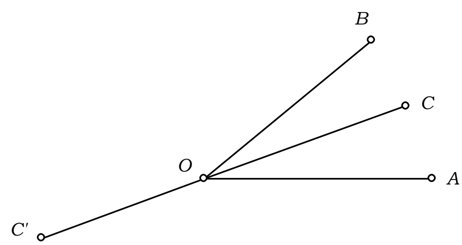


Figura 2.42

2.12.3. Teorema. Las bisectrices de dos ángulos suplementarios adyacentes forman un ángulo recto.

Prueba:

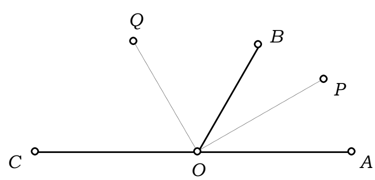


Figura 2.43

Supongamos que $\angle AOB$ y $\angle BOC$ son dos ángulos suplementarios adyacentes. Sean $\vec{OP}$ y $\vec{OQ}$ las bisectrices de los ángulos $\angle AOB$ y $\angle BOC$, respectivamente. Tenemos entonces que

$m(\angle AOB) = m(\angle AOP) + m(\angle POB) = 2m(\angle POB)$ y $m(\angle BOC) = m(\angle BOQ) + m(\angle QOC) = 2m(\angle BOQ)$.

Aplicando el Teorema 2.5.8(1) y sustituyendo, hallamos que

$$180 = m(\angle AOC) = m(\angle AOB) + m(\angle BOC) =$$
$$2m(\angle POB) + 2m(\angle BOQ) = 2(m(\angle POB) + m(\angle BOQ))$$
$$m(\angle POQ) = m(\angle POB) + m(\angle BOQ) = 90,$$

lo cual significa que $\angle POQ$ es un ángulo recto. ♣

2.12.4. Teorema. Las bisectrices de dos ángulos complementarios adyacentes forman un ángulo de medida 45.

Prueba: Sean $\angle AOB$ y $\angle BOC$ dos ángulos complementarios adyacentes.

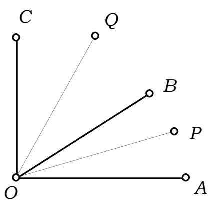


Figura 2.44

Supongamos que $\vec{OP}$ y $\vec{OQ}$ son las bisectrices de los ángulos $\angle AOB$ y $\angle BOC$, respectivamente. Entonces,

$$m(\angle AOB) = m(\angle AOP) + m(\angle POB) = 2m(\angle POB) \text{ y}$$
$$m(\angle BOC) = m(\angle BOQ) + m(\angle QOC) = 2m(\angle BOQ).$$

Por el Teorema 2.5.8(3) y haciendo las sustituciones correspondientes, encontramos que

$$90 = m(\angle AOC) = m(\angle AOB) + m(\angle BOC) =$$
$$= 2m(\angle POB) + 2m(\angle BOQ) = 2(m(\angle POB) + m(\angle BOQ)).$$

Por lo tanto,

$$m(\angle POQ) = m(\angle POB) + m(\angle BOQ) = 45. ♣$$

2.12.5. Teorema. Las bisectrices de dos ángulos opuestos por el vértice están sobre una misma recta.

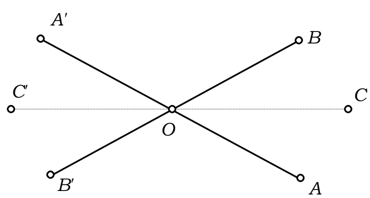


Figura 2.45

Prueba: Sean $\angle AOB$ y $\angle A'OB'$ dos ángulos opuestos por el vértice, $\vec{OC}$ la bisectriz del ángulo $\angle AOB$ y $\vec{OC'}$ la semirrecta opuesta de $\vec{OC}$. Basta con probar que $\vec{OC'}$ es la bisectriz del ángulo $\angle A'OB'$. Por el Teorema 2.10.2, tenemos que $\angle AOB \cong \angle A'O'B'$, $\angle AOC \cong \angle A'OC'$ y $\angle COB \cong \angle C'OB'$, por ser opuestos por el vértice O. Como $\angle AOC \cong \angle COB$, se tiene que $\angle A'OC' \cong \angle C'OB$. Esto prueba que la semirrecta $\vec{OC'}$ es la bisectriz del ángulo $\angle A'OB'$. ♣

El siguiente corolario es una consecuencia directa de los Teoremas 2.12.3 y 2.12.5.

2.12.6. Corolario. Las cuatro bisectrices de los cuatro ángulos que forman dos rectas que se cortan están sobre dos rectas perpendiculares.

Problemas

2.1. Si una lupa aumenta 3 veces las cosas, ¿cuánto medirá el ángulo que se observa a través de la lupa con respecto al ángulo original?
2.2. ¿Pueden dos ángulos distintos tener dos lados en común?
2.3. ¿Cuántos ángulos diferentes se pueden nombrar con cuatro letras?
2.4. ¿Cuántos ángulos como máximo se pueden formar con k rectas, en donde $k > 2$ es un número natural?
2.5. Dados k puntos en el plano no colineales de tres en tres, en donde $k > 2$ es un número natural, ¿cuántos ángulos diferentes se pueden formar de tal manera que sus vértices estén entre los puntos dados y sus lados pasen por algunos de los puntos dados?
2.6. ¿La intersección de dos ángulos puede ser?:
a. un punto, b. una recta, c. una semirrecta,
d. una semirrecta sin su vértice, o e. un segmento
2.7. ¿Es posible que $\overrightarrow{OP} \subseteq \angle AOB \cap \angle CPD$?
2.8. Probar que si dos ángulos tienen el mismo interior, entonces son el mismo. ¿Qué pasa si dos ángulos tienen el mismo exterior?
2.9. ¿Puede el interior de un ángulo ser el exterior de otro ángulo?
2.10. ¿Puede el interior de un ángulo ser la intersección de los interiores de una cantidad finita de ángulos? y ¿de una cantidad infinita de ángulos?
2.11. ¿Puede el exterior de un ángulo ser igual a la intersección de los exteriores de una cantidad finita de ángulos?
2.12. Enlistar los axiomas necesarios y suficientes para probar que el interior de un ángulo es no vacío.
2.13. Sea $\angle\alpha$ un ángulo no degenerado. Suponiendo que en el plano solo se cumplen los axiomas de incidencia y orden, ¿es posible demostrar que $int(\angle\alpha) \neq \varnothing$?
2.14. Sea $\angle AOB$ un ángulo no degenerado. Fijemos dos puntos $X \in OA$ y $Y \in OB$. Decir cuáles de los siguientes conjuntos pertenecen ya sea a $\angle AOB$, a $int(\angle AOB)$ o a $ext(\angle AOB)$:

a. $\{X, Y\}$.
b. $XY - \{X, Y\}$.
c. $\overrightarrow{YB}$
d. $\overleftarrow{OY}$
e. $AY \cap BX$.
f. AX.

2.15. Sean $\angle AOB$ y $\angle A'O'B'$ dos ángulos no degenerados. Si $ext(\angle AOB) \subseteq ext(\angle A'O'B')$, ¿es cierto que $int(\angle A'O'B') \subseteq int(\angle AOB)$?
2.16. Sean $\angle AOB$ un ángulo no degenerado y C un punto en el plano. Si $int(\Delta AOC) \cap int(\Delta AOB) \neq \varnothing$, ¿es cierto que $C \in int(\angle AOB)$?
2.17. Si $\angle AOB$ es un ángulo no degenerado, probar que $int(\angle AOB) = \cup\{\overrightarrow{OC} : C \in AB - \{A, B\}\}$.
2.18. Si $\angle AOB$ es un ángulo no degenerado, probar que $\overrightarrow{OC} \subseteq int(\angle AOB)$ si y solo si $int(\angle AOC) \subseteq int(\angle AOB)$.
2.19. Sea ΔABC un triángulo. Probar que $AB - \{A, B\} \subseteq int(\angle ACB)$, $AC - \{A, C\} \subseteq int(\angle CBA)$ y $BC - \{B, C\} \subseteq int(\angle BAC)$.
2.20. ¿Es posible encontrar un punto en el plano que no pertenezca a ninguno de los interiores de los ángulos de un triángulo dado?
2.21. ¿Puede un punto estar en el exterior de un triángulo y en el interior de uno de sus ángulos?
2.22. ¿Puede un punto estar en el exterior de un triángulo y en el exterior de cada uno de sus ángulos?
2.23. ¿Puede un punto no pertenecer al exterior de un triángulo, ni al interior de cada uno de sus ángulos?
2.24. Dadas tres semirrectas en un mismo semiplano determinado por una recta dada, probar que una de ellas está entre las otras dos.

2.25. Sean l_1, l_2 y l_3 tres rectas que concurren a un punto O. Probar que existen puntos $A \in l_1$, $B \in l_2$ y $C \in l_3$ tales que la semirrecta $\overrightarrow{OB}$ está entre las semirrectas $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$.

2.26. Dadas dos semirrectas $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ no colineales, probar que existe una semirrecta $\overrightarrow{OC}$ tal que la semirrecta $\overrightarrow{OA}$ está entre $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$.

2.27. Probar que $\overrightarrow{OC}$ está entre $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ si y solo si $\overleftarrow{OC}$ está entre $\overleftarrow{OA}$ y $\overleftarrow{OB}$.

2.28. Supongamos que la semirrecta $\overrightarrow{OC}$ está entre $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$.

a. Probar que $\overleftarrow{OC}$ no está entre $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$.

b. Probar que $\overrightarrow{OC}$ no está entre $\overleftarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$.

2.29. Si la semirrecta $\overrightarrow{OC}$ está entre $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$, probar que $\overrightarrow{OA}$ no puede estar entre $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$.

2.30. Supongamos que la semirrecta $\overrightarrow{OC}$ está entre $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$. Probar que $\overrightarrow{OC}$ está en todo semiplano que contenga a las semirrectas $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$.

2.31. Sean $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ dos semirrectas no colineales. Si $\overrightarrow{OC}$ está entre $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$, probar que toda recta que corte a $\overrightarrow{OC}$ debe cortar a $\overrightarrow{OA}$ o a $\overrightarrow{OB}$.

2.32. Si $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ y $\overrightarrow{OD}$ son cuatro semirrectas tales que $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OD}$ son semirrectas opuestas y $\overrightarrow{OB}$ está entre $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OC}$, probar que $\overrightarrow{OC}$ está entre $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OD}$.

2.33. Si $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ y $\overrightarrow{OD}$ son cuatro semirrectas tales que $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ no son colineales, $\overrightarrow{OC}$ está entre $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$, y $\overrightarrow{OD}$ está entre $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$, probar que $\overrightarrow{OD}$ está entre $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$.

2.34. Si $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ y $\overrightarrow{OD}$ son cuatro semirrectas tales que $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ no son colineales, $\overrightarrow{OC}$ y $\overrightarrow{OD}$ no son colineales, $\overrightarrow{OC}$ está entre $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OB}$ está entre $\overrightarrow{OC}$ y $\overrightarrow{OD}$, probar que $\overrightarrow{OB}$ está entre $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OD}$.

2.35. Sean $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$ tres semirrectas no colineales entre sí. De la siguientes lista, decir cuáles enunciados son falsos y si es posible dar la condición necesaria para que sean verdaderos.

a. Si $m(\angle AOB) = m(\angle AOC)$, entonces la semirrecta $\overrightarrow{OA}$ está entre $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$.

b Si $m(\angle AOB) < m(\angle AOC)$, entonces la semirrecta $\overrightarrow{OB}$ está entre $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OC}$.

c. $m(\angle AOC) = m(\angle AOB) + m(\angle BOC)$.

d. Si $\angle AOB \cong \angle AOC$, entonces la semirrecta $\overrightarrow{OA}$ es la bisectriz del ángulo $\angle BOC$.

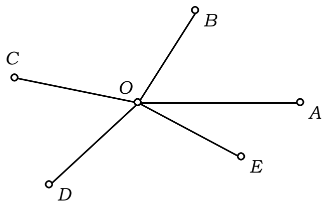
2.36. Si $\overrightarrow{OC}$ y $\overrightarrow{OD}$ son dos semirrectas que forman un ángulo no degenerado, $A \in OC$, $B \in OD$ y $E \in AB$, probar que la semirrecta $\overrightarrow{OE}$ corta al segmento CD.

2.37. Sea $\angle AOB$ un ángulo no degenerado. Tomamos puntos $C \in OA - \{O, A\}$ y $D \in OB - \{O, B\}$. Probar que las rectas $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{BC}$ se cortan en un punto interior del ángulo dado.

2.38. Sean $Hs(O)$ un haz de semirrectas y $\overrightarrow{OP} \in Hs(O)$. Sea W el conjunto de semirrectas del haz $Hs(O)$ que yacen en un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{OP}$. Dados $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB} \in Hs(O)$, definimos $\overrightarrow{OA} \leq \overrightarrow{OB}$ si $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$ o si la semirrecta $\overrightarrow{OA}$ está entre $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OB}$. Probar que esta relación $\leq$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

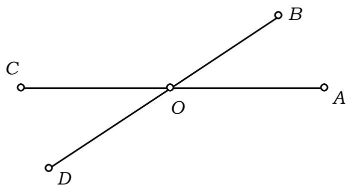
2.39. Probar que dos ángulos $\angle AOB$ y $\angle A'O'B'$ son congruentes si podemos encontrar una correspondencia biunívoca f: $\angle AOB \to \angle A'O'B'$ tal que $PQ \cong f(P)f(Q)$ para cada par de puntos P, $Q \in \angle AOB$.

2.40. Sean $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$, $\vec{OD}$ y $\vec{OE}$ cinco semirrectas colocadas como muestra la figura:



si $\angle AOB \cong \angle COD$ y $\angle BOC \cong \angle DOE$, probar que $\angle AOC \cong \angle BOD \cong \angle COE$.

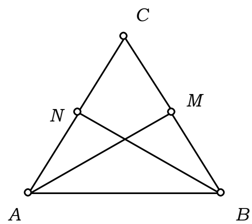
2.41. Sean $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ y $\vec{OD}$ cuatro semirrectas colocadas como muestra la figura:



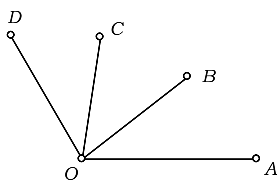
si $\angle AOB \cong \angle COD$ y $\angle BOC \cong \angle DOA$, probar que A, O y C son colineales, y que D, O y B también son colineales.

2.42. En la figura:

si $\angle BAM \cong \angle NBA$ y $AM \cong BN$, probar que $\angle MAC \cong \angle NBC$.



2.43. Sean $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ y $\vec{OD}$ cuatro semirrectas tales que los puntos B, C y D pertenecen a un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{OA}$ y están colocados como muestra la figura:



si $\angle AOC \cong \angle BOD$, probar que $\angle AOB \cong \angle COD$.

2.44[I-96]. Sea $\angle AOB$ un ángulo. Tomamos $X \in \vec{OA}$ y $Y \in \vec{OB}$ tales que $|OX| = |OY| = 1$. Definimos

$$m'(\angle AOB) = |XY|.$$

¿Cumple la función m' con todos los enunciados del Axioma del Transportador?

2.45. Probar que la suma de las medidas de los ángulos formados por las rectas de un conjunto finito de rectas concurrentes es igual a 360.

2.46. Sean $\angle AOB$ y $\angle AOC$ dos ángulos tales que $m(\angle AOC) = 3m(\angle AOB)$ y $m(\angle AOC) - m(\angle AOB) = 90$. Calcular la medida de cada uno de los ángulos.

2.47. Si en el inciso 4 del Axioma del Transportador quitamos la condición "$\angle AOB$ es llano" , ¿es posible con este nuevo enunciado probar la siguiente afirmación?:

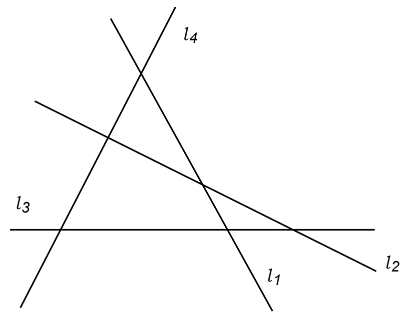
Si $\angle AOB$ y $\angle BOC$ son adyacentes y A, O y C son colineales, entonces $m(\angle AOB) + m(\angle BOC) = 180$

2.48. Sean $\angle AOB$ un ángulo no degenerado y $P \notin \angle AOB$. Probar que $P \in int(\angle AOB)$ si y solo si

$$m(\angle AOP) + m(\angle POB) = m(\angle AOB).$$

2.49. En la figura:

¿cuál es el menor número de ángulos cuyas medidas debemos de conocer para poder calcular la medida de cada uno de los ángulos que forman las rectas l_1, l_2, l_3 y l_4?



2.50. Sean $\angle AOB$ un ángulo no degenerado y C un punto en el plano fuera de dicho ángulo tal que $m(\angle AOC) = 60$ y $m(\angle COB) = 80$.

a. Si $m(\angle AOB) = 140$, probar que $C \in int(\angle AOB)$.

b. Si $m(\angle AOB) = 20$, probar que $C \notin int(\angle AOB)$.

2.51. Probar que dos ángulos no degenerados con el mismo vértice y un lado en común son adyacentes si y solo si sus interiores no se intersecan.

2.52. Si dos rectas se cortan, ¿cuántos pares de ángulos adyacentes se forman?

2.53. Sean $\angle AOB$ y $\angle BOC$ dos ángulos adyacentes.

a. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes.

i. $B \in int(\angle AOC)$.

ii. $m(\angle AOB) + m(\angle BOC) \leq 180$.

iii. B y C pertenecen a un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{OA}$.

b. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes.

i. $\overleftarrow{OB} \subseteq int(\angle AOC)$.

ii. $m(\angle AOB) + m(\angle BOC) > 180$.

iii. B y C pertenecen a diferentes semiplanos determinados por la recta $\overleftrightarrow{OA}$.

2.54. Sean $\angle AOB$ y $\angle AOC$ dos ángulos de medida 100 y 60, respectivamente. Calcular $m(\angle BOC)$ en cada uno de los siguientes casos:

a. $\overrightarrow{OC}$ está entre $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$. b. $\overrightarrow{OC} \cap int(\angle AOB) = \emptyset$.

2.55. Sean $\angle AOB$ y $\angle COD$ dos ángulos tales que $m(\angle AOB) + m(\angle COD) < 180$. Probar que podemos encontrar un punto P en el plano tal que $\overrightarrow{OP} \cap [int(\angle AOB) \cup int(\angle COD)] = \emptyset$.

2.56. Tenemos $2k + 1$ rectas concurrentes, en donde k es un número entero positivo. Consideremos los ángulos que dichas rectas forman. Probar que la suma de las medidas de los ángulos no consecutivos es igual a 180.

2.57. Si $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ son dos ángulos no degenerados tales que $3m(\angle\alpha) + 2m(\angle\beta) < 400$, probar que uno de los ángulos $\angle\alpha$ o $\angle\beta$ tiene que ser agudo.

2.58. Si $\angle\alpha$ es un ángulo obtuso, probar que $\dfrac{\angle\alpha}{2}$ es un ángulo agudo.

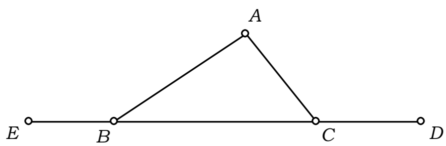
2.59. Sean $\overrightarrow{OA_1}$,…, $\overrightarrow{OA_{2k}}$ semirrectas tales que $\angle A_iOA_{i+1} \cong \angle A_{i+2}OA_{i+3} \cong \angle A_{2k}OA_1$, para cada $1 \leq i \leq 2k - 3$, en donde $k \geq 3$ es un número entero. Probar que las semirrectas $\overrightarrow{OA_i}$ y $\overrightarrow{OA_{k+i}}$ están en una misma recta, para cada $1 \leq i \leq k$.

2.60. Sean $\overrightarrow{OA_0}$,...,$\overrightarrow{OA_k}$ y $\overrightarrow{O'A'_0}$,..., $\overrightarrow{O'A'_k}$ semirrectas, en donde $k \geq 1$ es un número entero. Si $\angle A_i O A_{i+1} \cong \angle A'_i O' A'_{i+1}$, para cada $0 \leq i < k - 1$, y $\angle A_0 O A_k \cong \angle A'_0 O' A'_k$, probar que $\angle A_{k-1} O A_k \cong \angle A'_{k-1} O' A'_k$.

2.61. Si construimos una sucesión infinita de ángulos adyacentes $\angle AOA_1$, $\angle A_1OA_2$,..., $\angle A_kOA_{k+1}$,... cada uno de medida 65, ¿es posible que la semirrecta $\overrightarrow{OA}$ coincida con alguna de las semirrectas $\overrightarrow{OA_k}$? En caso negativo, ¿qué medida debe tener cada uno de los ángulos para que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_k}$ para algún entero positivo k?

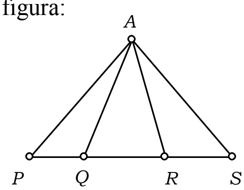
2.62. Se tiene un ángulo no degenerado $\angle AOB$. Primero giramos la semirrecta $\overrightarrow{OB}$ alrededor del vértice O en el sentido de las manecillas del reloj, un ángulo de 45, obteniendo así una semirrecta $\overrightarrow{OB'}$; ahora giramos la semirrecta $\overrightarrow{OB'}$ alrededor del vértice O en el sentido contrario de las manecillas del reloj, un ángulo de 180, obteniendo así una semirrecta $\overrightarrow{OB''}$; y, finalmente, giramos la semirrecta $\overrightarrow{OB''}$ alrededor del vértice O en el sentido de las manecillas del reloj, un ángulo de 135, obteniendo así la semirrecta $\overrightarrow{OB'''}$. ¿Cuál tiene que ser la medida del ángulo $\angle AOB$ para que $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB'''}$?

2.63. Considerar la figura siguiente:



a. Si $m(\angle ABE) + m(\angle ACB) = 180$, probar que $\angle CBA \cong \angle ACB$.
b. Si $\angle CBA \cong \angle ACB$, probar que $\angle ABE \cong \angle ACD$.

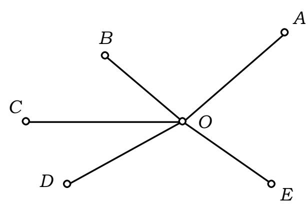
2.64. En la figura:



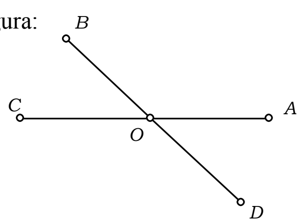
si $m(\angle PAR) + m(\angle QAS) = 180$ y $m(\angle PAQ) + m(\angle RAS) = 36$, calcular $m(\angle QAR)$.

2.65. En la figura:

si $a = m(\angle COD)$, $m(\angle BOC) = 40$, $m(\angle AOB) = 7a$, $m(\angle EOA) = 8a + 60$ y $m(\angle DOE) = 4a$, calcular las medidas de los ángulos $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$, $\angle DOE$ y $\angle EOA$.



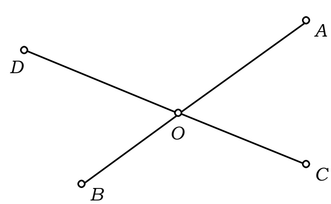
2.66. En la figura:



si $\angle AOC$ es llano y $m(\angle BOC) = m(\angle DOA)$, probar que los puntos B, O y D son colineales.

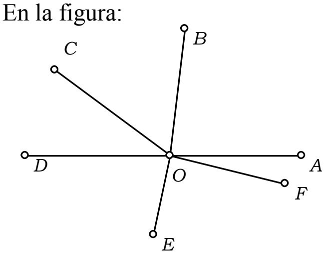
2.67. En la figura:

si $5m(\angle DOB) = m(\angle BOC)$, ¿cuánto mide el ángulo $\angle AOC$?



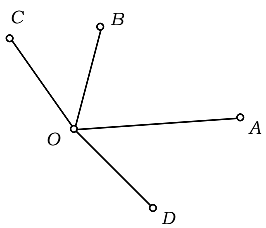
2.68. Probar que un ángulo agudo es menor que un ángulo recto, y que un ángulo obtuso no degenerado es mayor que un ángulo recto, pero menor que un ángulo llano.

2.69. En la figura:



si A, O y D son colineales, $m(\angle AOB) = 3x - 2y$, $m(\angle BOC) = 60$, $m(\angle COD) = x$, $m(\angle DOE) = 2x + 4$, $m(\angle EOF) = 2x + y$ y $m(\angle FOA) = y$, calcular las medidas de los ángulos $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$, $\angle DOE$, $\angle EOF$ y $\angle FOA$.

2.70. Sean $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ y $\overrightarrow{OD}$ cuatro semirrectas colocadas como muestra la figura:



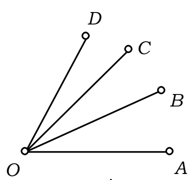
si $m(\angle AOC) = 120$, $m(\angle DOB) = 120$ y $m(\angle DOC) = 170$, dar las medidas de los ángulos $\angle AOB$, $\angle BOC$ y $\angle DOA$.

2.71. Sean $\angle AOB$ un ángulo no degenerado y $\overrightarrow{OC}$ una semirrecta en el plano. Si $\angle AOC < \angle AOB$ y $\angle COB < \angle AOB$, probar que $C \in int(\angle AOB)$.

2.72. Sean $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{OB'}$, $\overrightarrow{OC'}$ y $\overrightarrow{OD'}$ ocho semirrectas concurrentes en el punto O. Si $m(\angle AOA') = m(\angle BOB') = m(\angle COC') = m(\angle DOD') = 15$, $m(\angle C'OD') = 40$, y los ángulos $\angle A'OB'$ y $\angle C'OD'$ son opuestos por el vértice, encontrar los valores de $m(\angle AOB)$, $m(\angle BOC)$, $m(\angle COD)$ y $m(\angle DOA)$.

2.73. Probar que $\angle AOB \cong \angle A'O'B'$ y $\angle PQR \cong \angle P'Q'R'$ si y solo si $m(\angle AOB) + m(\angle PQR) = m(\angle A'O'B') + m(\angle P'Q'R')$ y $m(\angle AOB) - m(\angle PQR) = m(\angle A'O'B') - m(\angle P'Q'R')$.

2.74. Sean $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ y $\overrightarrow{OD}$ cuatro semirrectas tales que los puntos B, C y D están en un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{OA}$ y están colocados como muestra la figura:



a. Si $m(\angle AOB) > m(\angle COD)$, probar que $m(\angle AOC) > m(\angle BOD)$.
b. Si $\angle AOB \cong \angle COD$, probar que $\angle AOC \cong \angle BOD$.
c. Si $\angle AOC \cong \angle BOD$, probar que $\angle AOB \cong \angle COD$.

2.75. Si $m(\angle AOB) = \frac{4}{3} m(\angle A'O'B')$ y $\angle A'O'B'$ es un ángulo recto, decir qué clase de ángulo es $\angle AOB$.

2.76. Encontrar un par de ángulos adyacentes cuyas medidas sumen 160 y la medida del mayor sea 40 más que la medida del menor.

2.77. Si la suma de las medidas de dos ángulos es 150 y la diferencia de sus medidas es 30, encontrar la medida de cada ángulo.

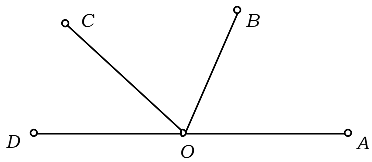
2.78. Sea $\angle\alpha$ un ángulo agudo. Si $40 \leq m(\angle\alpha) + m(\angle\beta) < 130$ para todo ángulo agudo $\angle\beta$, calcular la medida del ángulo $\angle\alpha$.

2.79. Si un ángulo obtuso mide $2y + 40$, en donde y es un número real positivo, ¿entre qué valores se encuentra el número y?

2.80. Si $\angle\alpha$ es un ángulo no degenerado y $5\angle\alpha$ es obtuso, ¿entre qué números debe estar la medida de $\angle\alpha$?

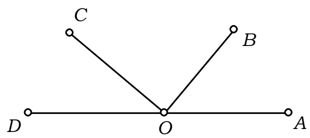
2.81. Sean $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ dos ángulos. Si $m(\angle\alpha) + 40 = 2m(\angle\beta)$ y $m(\angle\alpha) - 40 = m(\angle\beta)$, encontrar las medidas de los ángulos $\angle\alpha$ y $\angle\beta$.

2.82. Sean $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ y $\overrightarrow{OD}$ cuatro semirrectas tales que $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OD}$ son semirrectas opuestas y las restantes están colocadas como muestra la figura:



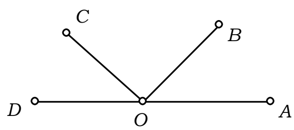
Consideremos los ángulos $\angle AOB$, $\angle BOC$ y $\angle COD$. Si la medida del ángulo mayor es 5 veces más grande que la medida del menor, y la diferencia de las medidas del de en medio y del menor es 20, calcular la medida de cada uno de los tres ángulos $\angle AOB$, $\angle BOC$ y $\angle COD$.

2.83. En la figura:



supongamos que $m(\angle AOB) = 3x - 10$, $m(\angle BOC) = 4x + 10$ y $m(\angle COD) = 2x$, en donde x es un número real positivo. Probar que $\angle AOD$ es llano si y solo si $\angle AOB$ es recto.

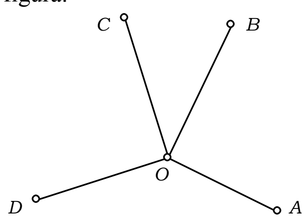
2.84. En la figura:



si $\angle AOB$, $\angle BOC$ y $\angle COD$ no son obtusos, probar que

$$m(\angle AOB) \le m(\angle BOC) + m(\angle COD),$$
$$m(\angle BOC) \le m(\angle AOB) + m(\angle COD) \text{ y}$$
$$m(\angle COD) \le m(\angle AOB) + m(\angle BOC).$$

2.85. En la figura:

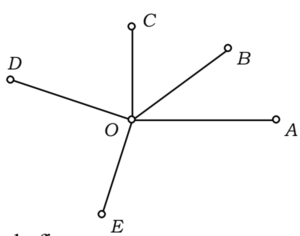


supongamos que los ángulos $\angle AOB$ y $\angle COD$ son rectos y que el ángulo $\angle BOC$ no es degenerado.

a. Si $30 < m(\angle BOC) < 60$, probar que $120 < m(\angle DOA) < 150$.

b. ¿Cuánto debe medir $\angle BOC$ para que $\angle BOC \cong \angle DOA$?

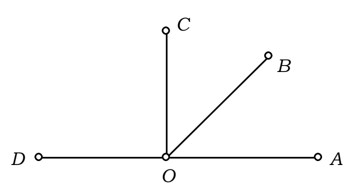
2.86. Sean $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ y $\overrightarrow{OE}$ cinco semirrectas colocadas como muestra la figura:



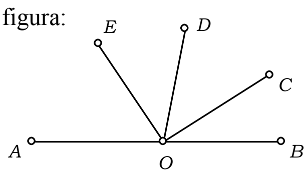
Si las medidas de los ángulos $m(\angle AOB)$, $m(\angle BOC)$, $m(\angle COD)$, $m(\angle DOE)$ y $m(\angle EOA)$ están en la proporción 2:3:4:5:6, dar la medida de cada uno de los ángulos.

2.87. En la figura:

si $\angle AOC$ es un ángulo recto, probar que $m(\angle BOD) - m(\angle AOB) = 2m(\angle BOC)$.

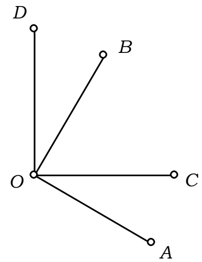


2.88. En la figura:



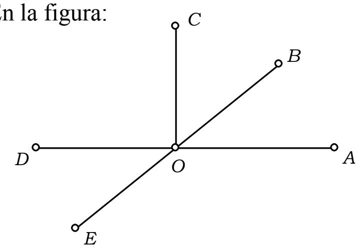
si $m(\angle EOA) = 2m(\angle DOE)$, $m(\angle BOC) = 2m(\angle COD)$, $m(\angle DOE) - m(\angle COD) = 30$ y $\angle BOA$ es llano, calcular las medidas de los ángulos $\angle BOC$, $\angle COD$, $\angle DOE$ y $\angle EOA$.

2.89. En la figura:



tenemos dos ángulos rectos $\angle AOB$ y $\angle COD$. Si $m(\angle AOC) = x + y - 10$, $m(\angle COB) = 2x + 3y$ y $m(\angle BOD) = x - y$, calcular la medida del ángulo $\angle COB$.

2.90. En la figura:



supongamos que $\angle AOC$ es recto y $\angle AOD$ es llano. En cada uno de los siguientes incisos, dar dos ángulos que cumplan las condiciones que se piden:

a. Suplementarios adyacentes.
b. Suplementarios no adyacentes.
c. Complementarios adyacentes.
d. Complementarios no adyacentes.
e. Opuestos por el vértice.

2.91. ¿Qué clase de ángulo es menor que uno de sus suplementarios?
2.92. ¿Qué clase de ángulo es congruente con uno de sus suplementarios?
2.93. ¿Qué clase de ángulo es mayor que uno de sus suplementarios?
2.94. ¿Si un ángulo no degenerado se incrementa, qué pasa con su suplementario adyacente?
2.95. ¿Es la relación *es un complementario* de equivalencia?
2.96. ¿Es la relación *es un suplementario* de equivalencia?
2.97. Si dos ángulos son complementarios, ¿deben dos de sus lados ser perpendiculares?
2.98. Si dos ángulos son suplementarios y no congruentes, probar que uno de ellos es un ángulo agudo y el otro es obtuso.
2.99. Si $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ son ángulos suplementarios y $m(\angle\alpha) + 40 > m(\angle\beta)$, probar que $70 < m(\angle\alpha)$.
2.100[a-320]. Dadas k rectas concurrentes, en donde $k > 1$ es un número natural, probar que con estas rectas se forman $2k(k-1)$ ángulos suplementarios.
2.101. Probar que si los ángulos $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ son complementarios y $\angle\beta \cong \angle\gamma$, entonces los ángulos $\angle\alpha$ y $\angle\gamma$ son complementarios.
2.102. Probar que si los ángulos $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ son suplementarios y $\angle\beta \cong \angle\gamma$, entonces los ángulos $\angle\alpha$ y $\angle\gamma$ son suplementarios.
2.103. Probar que la medida de un ángulo agudo es igual a la medida de su suplementario adyacente, menos dos veces la medida de su complementario adyacente.
2.104. ¿En qué medida excede el ángulo suplementario adyacente de un ángulo agudo al complementario adyacente del mismo ángulo?
2.105. Si un ángulo es agudo, probar que la diferencia entre las medidas de su ángulo suplementario adyacente y su ángulo complementario adyacente es igual a 90.
2.106. Probar que la diferencia entre las medidas de dos ángulos dados es igual a la diferencia entre las medidas de sus ángulos suplementarios.
2.107. Probar que la diferencia entre las medidas de dos ángulos agudos dados es igual a la diferencia entre las medidas de sus ángulos complementarios.
2.108. Si un ángulo agudo se incrementa, ¿permanece constante la diferencia entre las medidas de su ángulo suplementario adyacente y su complementario adyacente?
2.109. ¿Es posible que un ángulo complementario de un ángulo dado sea igual a la mitad de un ángulo suplementario del mismo ángulo?
2.110. Sean $\angle\alpha$ un ángulo agudo no degenerado, $\angle\beta$ uno de sus complementarios y $\angle\gamma$ uno de sus suplementarios. Probar que $m(\angle\alpha) = m(\angle\gamma) - 2m(\angle\beta)$.

2.111. Probar que un ángulo agudo $\angle\alpha$ y un ángulo obtuso $\angle\beta$ son complementario y suplementario, respectivamente, de un ángulo si y solo si $m(\angle\alpha) = m(\angle\beta) - 90$.

2.112. Sean $\angle AOB$ y $\angle BOC$ dos ángulos adyacentes tales que $m(\angle AOB) = 2x + 30$ y $m(\angle BOC) = 10y + 20$.

a. Para qué valores de x y y los ángulos son suplementarios.

b. Para qué valores de x y y los ángulos son complementarios.

c. Para qué valores de x y y los ángulos son congruentes.

2.113. Si las medidas de dos ángulos suplementarios difieren por un número positivo r, expresar la medida del ángulo mayor en términos de r.

2.114. Sean $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ dos ángulos complementarios. Si $m(\angle\beta) + 2r = m(\angle\alpha)$, probar que $m(\angle\alpha) = 45 + r$, en donde r es un número real positivo.

2.115. La medida de un ángulo suplementario de un ángulo $\angle\alpha$ excede 3 veces la medida de uno de los complementarios del mismo ángulo $\angle\alpha$ multiplicada por $2r$, en donde $r > 0$ es un número real. Probar que $m(\angle\alpha) = 45 + r$.

2.116. Si las medidas de un ángulo suplementario y un ángulo complementario de un ángulo suman 120, encontrar la medida del ángulo.

2.117. Hallar la medida de un ángulo sabiendo que la suma de las medidas de uno de sus ángulos suplementarios y de uno de sus ángulos complementarios es 7 veces la medida del ángulo dado.

2.118. Si un ángulo $\angle\alpha$ es mayor que otro ángulo $\angle\beta$, ¿cuál de los dos tiene un ángulo suplementario más grande?

2.119. Si un ángulo complementario de un ángulo $\angle\alpha$ es más grande que un ángulo suplementario de otro ángulo $\angle\beta$, probar la desigualdad $2m(\angle\alpha) < m(\angle\beta)$.

2.120. Probar que un ángulo agudo es nulo si y solo si la medida de su complementario adyacente es la mitad de la medida de su suplementario adyacente.

2.121. Si la medida de un ángulo excede al triple la medida de su ángulo suplementario adyacente multiplicada por 44, encontrar la medida del ángulo.

2.122. ¿Qué medida tiene un ángulo cuyo ángulo complementario mide el doble de la medida del mismo ángulo más 15?

2.123. Si un ángulo suplementario de un ángulo, que mide 6 veces la medida de un ángulo dado, mide el triple del ángulo dado, calcular la medida del ángulo dado.

2.124. Si dos ángulos son suplementarios y tres veces la medida del menor excede a la medida del mayor por 20, encontrar la medida de cada uno de los ángulos.

2.125. ¿Entre qué números se encuentra la medida de un ángulo dado, si su ángulo complementario adyacente tienen medida menor que 40 y su ángulo suplementario adyacente mide más de 125?

2.126. Si un ángulo complementario de un ángulo dado mide menos de 30, estimar entre qué números se encuentra la medida del ángulo dado.

2.127. Si la mitad de un ángulo no degenerado mide < 60 y $\frac{1}{4}$ de su ángulo suplementario adyacente mide < 35, entre qué números se encuentra la medida del ángulo original.

2.128. Si los ángulos $\angle AOB$ y $\angle BOC$ son complementarios y $m(\angle AOB) - m(\angle BOC) = 18$, encontrar las medidas de los ángulos $\angle AOB$ y $\angle BOC$.

2.129. Sean $\angle AOB$ y $\angle BOC$ dos ángulos suplementarios adyacentes no degenerados. Si $\dfrac{m(\angle AOB)}{m(\angle BOC)} = \dfrac{a}{b}$, expresar $m(\angle AOB)$ y $m(\angle BOC)$ en función de a y b.

2.130. Sean $\angle\alpha$, $\angle\beta$ y $\angle\gamma$ tres ángulos tales que

i. $\angle\alpha$ es complementario de $\angle\beta$,

ii. $\angle\gamma$ es suplementario $\angle\alpha$, y

iii. $m(\angle\alpha) = 3x + 2y$, $m(\angle\beta) = 4y$ y $m(\angle\gamma) = 6x$,

en donde x y y son dos números reales positivos. Calcular la medida de cada uno de los tres ángulos.

2.131. Sean $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ dos ángulos tales que $m(\angle\alpha) = \dfrac{x+200}{2}$ y $m(\angle\beta) = \dfrac{180-y}{2}$, en donde x y y son números reales positivos. Encontrar los valores de x y y para que los ángulos $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ sean suplementarios.

2.132. Si el ángulo $\angle\alpha$ es el complementario adyacente de un ángulo cuya medida es 43, y el ángulo $\angle\beta$ es el suplementario adyacente de $\angle\alpha$, ¿cuánto mide el ángulo $\angle\beta$?
2.133. Sean $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ dos ángulos suplementarios adyacentes tales que $m(\angle\alpha) = 50$. Si $\angle\alpha$ se incrementa en un 40% , ¿qué tanto por ciento disminuye $\angle\beta$?
2.134. Si la medida de un ángulo decrece en un 50%, ¿en qué tanto por ciento la medida de su ángulo suplementario adyacente crece?
2.135. Sea $\angle\alpha$ un ángulo agudo no degenerado. Si $\angle\alpha$ se duplica, ¿qué tanto por ciento disminuye su ángulo suplementario adyacente?
2.136. ¿Cuál es la medida de un ángulo si las medidas de su ángulo complementario adyacente y su ángulo suplementario adyacente suman 176?
2.137. ¿Cuánto debe medir un ángulo para que cuando se duplique su ángulo suplementario adyacente se reduzca a la mitad?
2.138. Si la suma de las medidas de tres ángulos es 180, y sus medidas están en proporción 1:2:3, encontrar la medida de cada uno de los tres ángulos.
2.139. Sea $\angle\alpha$ un ángulo tal que $m(\angle\alpha) = \dfrac{3a+100}{2}$, en donde a es un número entero positivo.

a. Expresar la medida de un ángulo suplementario de $\angle\alpha$ en función de a.
b. ¿Para qué valores de a, $\angle\alpha$ es obtuso, $\angle\alpha$ es recto y $\angle\alpha$ es agudo?

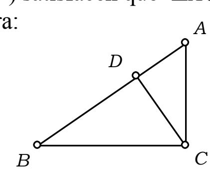
2.140. Sean $\angle AOB$ y $\angle BOC$ dos ángulos suplementarios adyacentes y $\angle PQR$ y $\angle RQS$ dos ángulos complementarios adyacentes. Si $m(\angle AOB) = 50 + 3m(\angle PQR)$ y $m(\angle BOC) = m(\angle RQS) + 18$, encontrar las medidas de los ángulos $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle PQR$ y $\angle RQS$.
2.141. Sean $\angle\alpha$ y $\angle\alpha'$ y $\angle\beta$ y $\angle\beta'$ dos pares de ángulos suplementarios tales que $m(\angle\alpha) = 8m(\angle\beta)$ y $2m(\angle\alpha') = m(\angle\beta')$. Encontrar las medidas de los ángulos $\angle\alpha$, $\angle\alpha'$, $\angle\beta$ y $\angle\beta'$.
2.142. Sean $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ dos ángulos tales que $m(\angle\alpha) - m(\angle\beta) = 60$. Si $\angle\gamma$ es un ángulo tal que $3m(\angle\gamma)$ es la medida de un ángulo suplementario de $\angle\alpha$, y $18m(\angle\gamma)$ es la medida de un ángulo suplementario de $\angle\beta$, encontrar las medidas de los ángulos $\angle\alpha$, $\angle\beta$ y $\angle\gamma$.
2.143. Si $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ son dos ángulos suplementarios y $\angle\gamma$ es un ángulo tales que $m(\angle\alpha) = 2m(\angle\gamma) + 10$ y $m(\angle\beta) = 3m(\angle\gamma) + 20$, encontrar las medidas de los ángulos $\angle\alpha$ y $\angle\beta$.
2.144. Si $\angle AOB$ y $\angle BOC$ son dos ángulos suplementarios y $m(\angle AOB) - m(\angle BOC) = 32$, calcular las medidas de los ángulos $\angle AOB$ y $\angle BOC$.
2.145. Sean $\angle AOB$ y $\angle BOC$ dos ángulos adyacentes.

a. Probar que B y C no están en diferentes semiplanos determinados por la recta $\overleftrightarrow{OA}$ si y solo si
$$m(\angle AOB) + m(\angle BOC) = m(\angle AOC).$$
b. Probar que B y C están en diferentes semiplanos determinados por la recta $\overleftrightarrow{OA}$ si y solo si
$$m(\angle AOB) + m(\angle BOC) + m(\angle AOC) = 360.$$

2.146. Sean $\angle AOB$ un ángulo no degenerado y P un punto que está en el semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{OA}$ que contiene al punto B. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

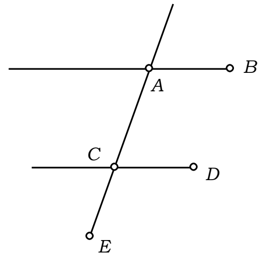
a. $P \in int(\angle AOB)$.
b. $\angle AOP < \angle AOB$.
c. $m(\angle AOP) < m(\angle AOB)$.

2.147. Sean $\angle AOB$ y $\angle A'O'B'$ dos ángulos no degenerados tales que $\angle AOB > \angle A'O'B'$. Si $C \in int(\angle AOB)$ y $C' \in int(\angle A'O'B')$ satisfacen que $\angle AOC \cong \angle A'O'C'$, probar que $\angle COB > \angle C'O'B'$.
2.148. En la figura:



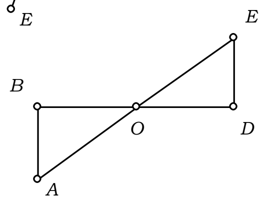
si los ángulos $\angle CBA$ y $\angle DCB$ son complementarios y $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{BC}$, probar que $m(\angle CBA) = m(\angle ACD)$.

2.149. En la figura:



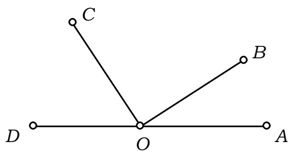
si $\angle CAB \cong \angle ECD$, probar que los ángulos $\angle CAB$ y $\angle DCA$ son suplementarios.

2.150. En la figura:



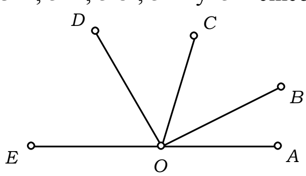
supongamos que $\angle OAB$ y $\angle BOA$, y $\angle OED$ y $\angle DOE$ son dos pares de ángulos complementarios. Probar que $\angle OAB \cong \angle OED$.

2.151. Sean $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ y $\vec{OD}$ cuatro semirrectas colocadas como muestra la figura:



si $\angle AOD$ es llano y $\angle BOC$ es recto, probar que $\angle AOB$ y $\angle COD$ son complementarios.

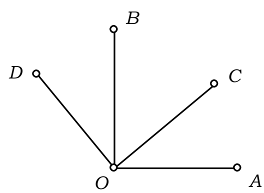
2.152. Sean $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$, $\vec{OD}$ y $\vec{OE}$ cinco semirrectas colocadas como muestra la figura:



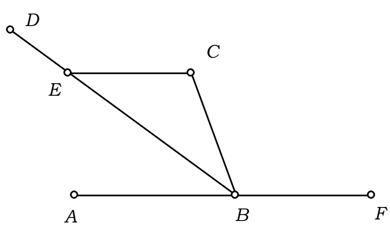
si $m(\angle AOB) + m(\angle BOC) + m(\angle COD) + m(\angle DOE) = 180$, probar que $\angle AOE$ es un ángulo llano.

2.153. En la figura tenemos dos ángulos rectos $\angle AOB$ y $\angle COD$:

a. Probar que los ángulos $\angle AOD$ y $\angle COB$ son suplementarios.
b. Si $m(\angle COB) = 40$, encontrar la medida del ángulo $\angle AOD$.
c. Si $m(\angle AOD) = 3m(\angle COB)$, encontrar la medida del ángulo $\angle AOD$.

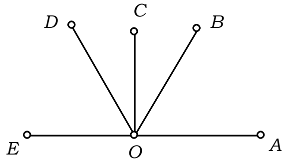


2.154. En la figura:



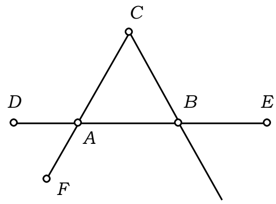
supongamos que $m(\angle FBC) = 110$, $m(\angle CBE) = 34$ y $m(\angle BEC) = 36$. Probar que $\angle CED$ y $\angle EBA$ son suplementarios.

2.155. Sean $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$, $\vec{OD}$ y $\vec{OE}$ cinco semirrectas colocadas como muestra la figura:



si $\vec{OA}$ y $\vec{OE}$ son semirrectas opuestas, $m(\angle AOD) = 4m(\angle COD)$ y $m(\angle BOE) = 4m(\angle BOC)$, encontrar $m(\angle BOD)$.

2.156. En la figura:



si $\angle BAC \cong \angle CBA$, probar que los ángulos $\angle EBC$ y $\angle DAF$ son suplementarios.

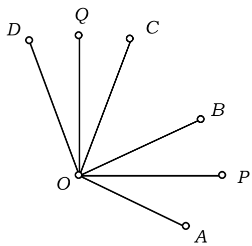
2.157. Sean $\angle\alpha$, $\angle\beta$, $\angle\gamma$ y $\angle\delta$ cuatro ángulos. Probar las siguientes afirmaciones:

a. Si $\angle\alpha < \angle\beta$ y $\angle\beta \cong \angle\gamma$, entonces $\angle\alpha < \angle\gamma$.
b. Si $\angle\alpha \cong \angle\beta$ y $\angle\beta > \angle\gamma$, entonces $\angle\alpha > \angle\gamma$.
c. Si $\angle\alpha \cong \angle\beta$ y $\angle\beta \leq \angle\gamma$, entonces $\angle\alpha \leq \angle\gamma$.
d. Si $\angle\alpha > \angle\beta$, $\angle\beta \cong \angle\gamma$ y $\angle\delta \leq \angle\gamma$, entonces $\angle\alpha > \angle\delta$.
e. Si $\angle\alpha \cong \angle\beta$, $\angle\beta > \angle\gamma$ y $\angle\delta \leq \angle\gamma$, entonces $\angle\alpha > \angle\delta$.
f. Si $\angle\alpha < \angle\beta$ y $\angle\beta \leq \angle\gamma$ y $\angle\delta \cong \angle\gamma$, entonces $\angle\delta > \angle\alpha$.

2.158. Sean $\angle\alpha$, $\angle\beta$, $\angle\gamma$ y $\angle\varepsilon$ cuatro ángulos. Si $\angle\alpha < \angle\beta$, $\angle\gamma$ no es mayor que $\angle\beta$ y $\angle\gamma \cong \angle\varepsilon$, ¿cuál es la relación entre $\angle\alpha$ y $\angle\varepsilon$?

2.159. Sean $\angle\alpha$, $\angle\beta$, $\angle\gamma$ y $\angle\varepsilon$ cuatro ángulos. Si $\angle\alpha < \angle\beta$, $\angle\gamma$ no es mayor que $\angle\beta$ y $\angle\gamma \cong \angle\varepsilon$, ¿cuál es la relación entre $\angle\alpha$ y $\angle\varepsilon$?

2.160. En la figura:



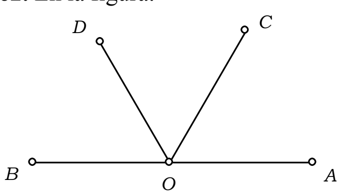
tenemos que el ángulo $\angle POQ$ es recto, $\overrightarrow{OP}$ es la bisectriz del ángulo $\angle AOB$ y $\overrightarrow{OQ}$ es la bisectriz del ángulo $\angle COD$. Probar que los ángulos $\angle AOC$ y $\angle BOD$ son suplementarios.

2.161. Sean $\angle AOB$ un ángulo y $\overrightarrow{OC}$ y $\overrightarrow{OD}$ dos semirrectas tales que $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OC}$ y $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{OD}$. Probar que una de las siguientes dos condiciones se cumple:

a. $\angle AOB \cong \angle COD$.
b. $\angle AOB$ y $\angle COD$ son suplementarios.

¿Qué se puede decir acerca de las bisectrices de los ángulos $\angle AOB$ y $\angle COD$?

2.162. En la figura:



tenemos que A, O y B son colineales, la bisectriz del ángulo $\angle COD$ es perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ y las bisectrices de los ángulos $\angle AOD$ y $\angle COB$ forman un ángulo de medida 60. Calcular las medidas de los ángulos $\angle AOD$, $\angle COD$ y $\angle COB$.

2.163. Sean $\angle AOB$ y $\angle BOC$ dos ángulos adyacentes y $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$ sus bisectrices, respectivamente. Si $m(\angle AOP) = 2x - 1$, $m(\angle POB) = x + y$, $m(\angle BOQ) = x - y$ y $m(\angle QOC) = 3y - 5$, calcular la medida del ángulo $\angle POQ$.

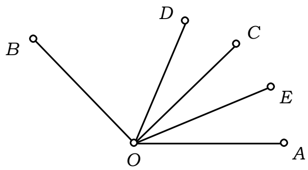
2.164. Sean $\overrightarrow{OA_1}, \ldots, \overrightarrow{OA_{2k+1}}$ semirrectas tales que $\angle A_iOA_{i+1} \cong \angle A_{i+2}OA_{i+3} \cong \angle A_{2k+1}OA_1$ para cada $i \leq 2k - 2$. ¿Cuál es la bisectriz del ángulo $\angle A_{k+1}OA_{k+2}$?

2.165. ¿Es posible encontrar dos ángulos no congruentes $\angle AOB$ y $\angle COD$ tales que $\angle AOC \cong \angle BOD$ y $\angle AOD \cong \angle BOC$?, ¿Pueden dichos ángulos tener la misma bisectriz?

2.166 Sean $\angle AOB$ y $\angle BOC$ y $\angle A'O'B'$ y $\angle B'O'C'$ dos pares de ángulos suplementarios adyacentes. Probar que $\angle AOB < \angle A'O'B'$ si y solo si $\angle BOC > \angle B'O'C'$.

2.167. Si las bisectrices de dos ángulos adyacentes no forman un ángulo recto, probar que los lados no comunes no pueden formar un ángulo llano.

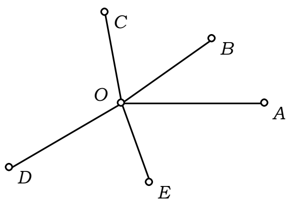
2.168[Math. Teacher Calendar, February 1998, # 18]. En la figura:



si $\angle AOB$ es obtuso, $\vec{OB} \perp \vec{OC}$, $\vec{OD}$ es la bisectriz de $\angle AOB$ y $\vec{OE}$ es la bisectriz de $\angle AOC$, probar que

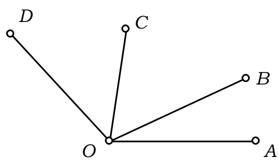
$$m(\angle EOD) = \frac{m(\angle COB)}{2}.$$

2.169. Sean $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$, $\vec{OD}$ y $\vec{OE}$ cinco semirrectas colocadas como muestra la figura:



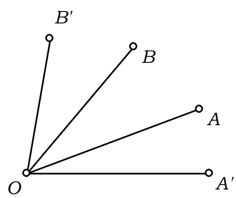
si $m(\angle AOB) = 35$, $m(\angle BOC) = 65$, $m(\angle COD) = 110$ y $m(\angle DOE) = 80$, encontrar las medidas de los ángulos que forman la semirrecta opuesta a $\vec{OD}$ y los lados del ángulo $\angle EOA$.

2.170. Sean $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ y $\vec{OD}$ cuatro semirrectas tales que los puntos B, C y D pertenecen a un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{OA}$ y están colocados como muestra la figura:



Probar que $m(\angle AOC) + m(\angle BOD) = m(\angle AOD) + m(\angle BOC)$.

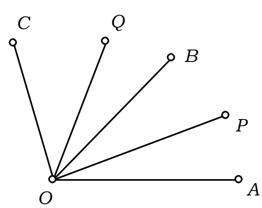
2.171. En la figura:



si $m(\angle BOB') = \frac{3}{8}\, m(\angle AOB)$, $m(\angle AOA') = \frac{1}{4}\, m(\angle AOB)$, $\vec{OP}$ es la bisectriz de $\angle AOB$ y $\vec{OQ}$ es la bisectriz del ángulo $\angle A'OB'$, encontrar la razón $\frac{m(\angle A'OQ)}{m(\angle AOP)}$.

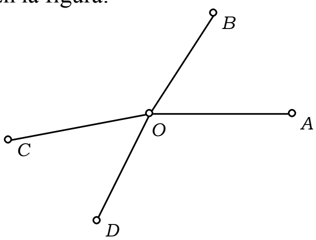
2.172. En la figura:

si $\frac{m(\angle AOB)}{m(\angle AOP)} = \frac{m(\angle BOC)}{m(\angle BOQ)}$, probar que $\frac{m(\angle AOB)}{m(\angle POB)} = \frac{m(\angle BOC)}{m(\angle QOC)}$.



2.173. Sean $\angle AOB$ y $\angle BOC$ dos ángulos adyacentes agudos tales que $m(\angle AOB) - m(\angle BOC) = 40$. Si $\vec{OX}$ y $\vec{OY}$ son las bisectrices de los ángulos $\angle AOB$ y $\angle BOC$, respectivamente, y $\vec{OZ}$ es la bisectriz de $\angle XOY$, encontrar la medida del ángulo $\angle BOZ$.

2.174. En la figura:



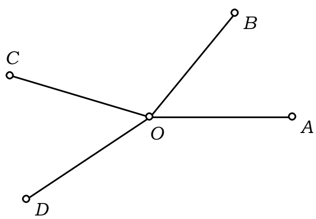
si $\dfrac{m(\angle AOB)}{m(\angle BOC)} = \dfrac{2}{5}$, $\dfrac{m(\angle BOC)}{m(\angle COD)} = 5$, $\dfrac{m(\angle COD)}{m(\angle DOA)} = \dfrac{1}{4}$ y $\dfrac{m(\angle DOA)}{m(\angle AOB)} = 2$, encontrar las medidas de los cuatro ángulos formados por las bisectrices de los ángulos $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$ y $\angle DOA$.

2.175. Sean $\angle AOB$ un ángulo, y $\angle BOC$ y $\angle COD$ dos ángulos adyacentes tales que la suma de sus medidas es menor o igual a 180. Si $m(\angle AOB) = a$, $m(\angle BOC) = b$, $m(\angle COD) = c$, y $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ y $\overrightarrow{OP}$ son las bisectrices de los ángulos $\angle AOD$, $\angle AOC$ y $\angle BOD$, respectivamente, expresar las medidas de los ángulos $\angle NOM$, $\angle MOP$ y $\angle NOP$ en términos de a, b y c.

2.176. Sean $\angle AOB$ un ángulo agudo, $\angle COA$ y $\angle BOD$ dos ángulos congruentes y adyacentes a $\angle AOB$, y $\overrightarrow{OM}$ y $\overrightarrow{ON}$ las bisectrices de los ángulos $\angle COA$ y $\angle AOD$, respectivamente. Probar que el ángulo $\angle MON$ es recto si y solo si los ángulos $\angle AOB$ y $\angle COA$ son complementarios.

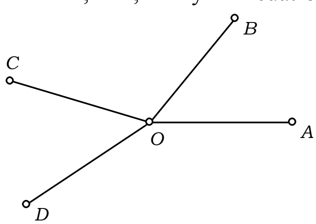
2.177. Sean $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ dos ángulos adyacentes. Si la medida del ángulo que forman las bisectrices de $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ es igual a 15 y $m(\angle\alpha) > 20$, probar que $0 < m(\angle\beta) < 10$.

2.178. Sean $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ y $\overrightarrow{OD}$ cuatro semirrectas colocadas como muestra la figura:



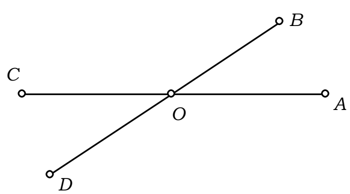
Si $\angle AOB \cong \angle COD$, probar que las bisectrices de $\angle DOA$ y $\angle BOC$ forman una recta.

2.179. Sean $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ y $\overrightarrow{OD}$ cuatro semirrectas colocadas como muestra la figura:



Si las bisectrices de $\angle AOB$ y $\angle COD$ forman una recta, probar que $\angle BOC \cong \angle DOA$.

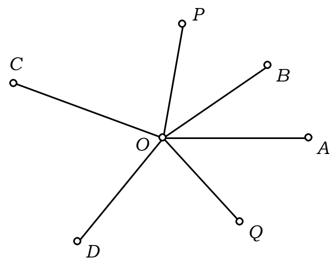
2.180. Sean $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ y $\overrightarrow{OD}$ cuatro semirrectas colocadas como muestra la figura:



Si las bisectrices de $\angle AOB$ y $\angle COD$ forman una recta y $\angle AOB \cong \angle COD$, probar que los ángulos $\angle AOB$ y $\angle COD$ son opuestos por el vértice.

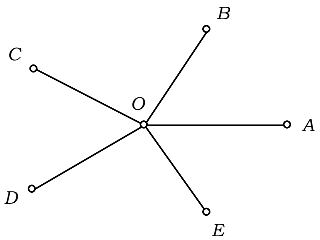
2.181. Sean $\angle AOB$ y $\angle BOC$ un par de ángulos adyacentes. Si la medida del ángulo formado por las bisectrices de $\angle AOB$ y $\angle BOC$ es 110 y $m(\angle AOB) = 60$, encontrar $m(\angle BOC)$.

2.182. Sean $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ y $\vec{OD}$ cuatro semirrectas colocadas como muestra la figura:



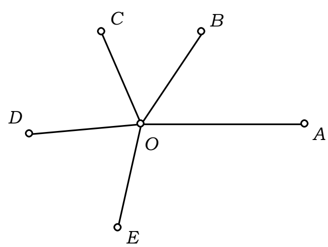
Si $\vec{OP}$ es la bisectriz de $\angle AOC$ y $\vec{OQ}$ es la bisectriz de $\angle DOB$, encontrar la bisectriz de $\angle QOP$.

2.183. Sean $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$, $\vec{OD}$ y $\vec{OE}$ cinco semirrectas colocadas como en la siguiente figura:



Si $\angle AOB \cong \angle COD$ y $\angle BOC \cong \angle DOE$, probar que la semirrecta $\vec{OC}$ y la bisectriz del ángulo $\angle EOA$ yacen sobre una misma recta.

2.184. Sean $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$, $\vec{OD}$ y $\vec{OE}$ cinco semirrectas colocadas como en la figura:



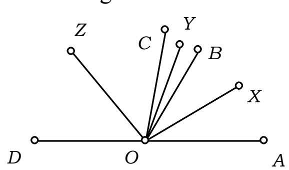
Supongamos que $\angle AOB \cong \angle BOC$ y $\angle COD \cong \angle DOE$. Probar que la medida del ángulo que forman las bisectrices de $\angle EOA$ y $\angle BOD$ es:

a. $180 - \dfrac{m(\angle COD) - m(\angle AOB)}{2}$, si $\angle AOB < \angle COD$.

b. 180, si $\angle AOB \cong \angle COD$.

c. $180 - \dfrac{m(\angle AOB) - m(\angle COD)}{2}$, si $\angle AOB > \angle COD$.

2.185. En la figura:



si $\vec{OX}$, $\vec{OY}$ y $\vec{OZ}$ son las bisectrices de los ángulos $\angle AOB$, $\angle BOC$ y $\angle COD$, respectivamente, $\angle AOD$ es un ángulo llano, $m(\angle XOY) = 40$ y $m(\angle YOZ) = 60$, encontrar las medidas de $\angle AOB$, $\angle BOC$ y $\angle COD$.

2.186. Sean $\angle AOB$ y $\angle BOC$ dos ángulos adyacentes tales que C y B están en el mismo semiplano determinado por $\overleftrightarrow{OA}$ y $\angle AOB < \angle BOC$. Si $\vec{OX}$ es la bisectriz del ángulo $\angle AOB$, $\vec{OY}$ es la bisectriz del ángulo $\angle BOC$, y $\vec{OZ}$ es la bisectriz del ángulo $\angle AOC$, probar que la bisectriz del ángulo $\angle ZOB$ es la bisectriz del ángulo $\angle XOY$.

2.187. Sean $\angle AOB$ un ángulo recto y $C \in int(\angle AOB)$. Si $\vec{OP}$ es la bisectriz de $\angle AOC$ y $\vec{OQ}$ es la bisectriz de $\angle COB$, encontrar la medida del ángulo $\angle POQ$.

2.188. Si $\angle AOB \cong \angle A'O'B'$ y $\vec{OC}$ y $\vec{O'C'}$ son las bisectrices de los ángulos $\angle AOB$ y $\angle A'O'B'$, respectivamente, probar que $\angle AOC \cong \angle A'O'C'$.

2.189. Sean $\angle AOB$ un ángulo agudo, y $\angle AOA'$ y $\angle BOB'$ dos ángulos rectos no adyacentes a $\angle AOB$. Probar las siguientes afirmaciones:
a. $\angle AOB$ y $\angle A'OB'$ son suplementarios.
b. $\angle AOB$ y $\angle A'OB'$ tienen la misma bisectriz.
c. $\angle AOB' \cong \angle BOA'$.
2.190. Sean $\angle AOB$ un ángulo, y $\angle AOA'$ y $\angle BOB'$ dos ángulos rectos adyacentes a $\angle AOB$.
a. Probar que $\angle AOB$ y $\angle A'OB'$ son suplementarios.
b. Probar que las bisectrices de $\angle AOB$ y $\angle A'OB'$ están sobre una misma recta.
2.191. Sean $\angle AOB$ un ángulo no degenerado y $\vec{OC}$ su bisectriz. Si $\vec{OD}$ es la semirrecta opuesta a $\vec{OC}$, probar que $\angle BOD \cong \angle DOA$.
2.192. Sean $\angle AOB$ y $\angle BOC$ dos ángulos adyacentes.
a. Si la medida del ángulo que forman las bisectrices de $\angle AOB$ y $\angle BOC$ es 45, ¿son los ángulos $\angle AOB$ y $\angle BOC$ complementarios?
b. Si la medida del ángulo que forman las bisectrices de dos ángulos $\angle AOB$ y $\angle BOC$ es de 90, ¿son los ángulos $\angle AOB$ y $\angle BOC$ suplementarios?
2.193. Si tres semirrectas con un mismo vértice forman tres ángulos congruentes dos a dos alrededor del vértice, probar que cada semirrecta opuesta a una de las semirrectas dadas es la bisectriz del ángulo formado por las otras dos.
2.194. Sean $\angle AOB$ y $\angle BOC$ dos ángulos adyacentes tales que $m(\angle AOC) \leq 180$. Si $\vec{OP}$ es la bisectriz de $\angle BOC$, probar que $m(\angle AOP) = \dfrac{m(\angle AOB) + m(\angle AOC)}{2}$.
2.195. Sean $\angle AOB$ y $\angle BOC$ dos ángulos adyacentes. Probar que la medida del ángulo formado por las bisectrices de $\angle AOB$ y $\angle BOC$ es igual a $\dfrac{m(\angle AOB) + m(\angle BOC)}{2}$.
2.196. Si las bisectrices de dos ángulos adyacentes forman un ángulo menor que uno recto, probar que los lados no comunes forman un ángulo menor que un llano.
2.197. Encontrar las medidas de dos ángulos adyacentes $\angle\alpha$ y $\angle\beta$, si sabemos que $m(\angle\alpha) - m(\angle\beta) = 30$ y sus bisectrices forman un ángulo de medida igual a 30.
2.198. Si la diferencia de las medidas de dos ángulos adyacentes es 80, ¿cuánto vale la medida del ángulo que forman sus bisectrices?
2.199. Si la diferencia de las medidas de dos ángulos adyacentes es igual a 90, probar que sus bisectrices forman un ángulo de medida 45.
2.200. Sean $\angle AOB$ y $\angle BOC$ dos ángulos adyacentes y $\vec{OD}$ la bisectriz del ángulo $\angle AOC$.
a. Si B y C están en un mismo semiplano determinado por $\vec{OA}$, mostrar que

$$m(\angle BOD) = \frac{1}{2}|m(\angle AOB) - m(\angle BOC)|.$$

b. Si B y C están en diferentes semiplanos determinados por $\vec{OA}$, mostrar que

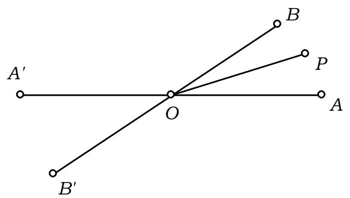
$$m(\angle BOD) = 180 - \frac{1}{2}|\, m(\angle AOB) - m(\angle BOC)|.$$

2.201. Sean $\angle AOB$ un ángulo no degenerado y $\vec{OP}$ su bisectriz.
a. Si $\vec{OC} \subseteq ext(\angle AOB)$ y los puntos B y C pertenecen a un mismo semiplano determinado por $\vec{OA}$, probar que

$$m(\angle COP) = \frac{m(\angle AOC) + m(\angle BOC)}{2}.$$

b. Si $\overrightarrow{OC} \subseteq int(\angle AOB)$, probar que $m(\angle COP) = \dfrac{|\, m(\angle AOC) - m(\angle BOC)\,|}{2}$.

2.202. Sean $\overrightarrow{OP}$ la bisectriz del ángulo $\angle AOB$ y $\angle A'OB'$ el ángulo opuesto por el vértice O de $\angle AOB$ como muestra la figura:



a. Si $C \in int(\angle AOB)$, probar que

$$m(\angle COP) = \frac{|\, m(\angle COA) - m(\angle COB)\,|}{2}.$$

b. Si $C \in int(\angle A'OB')$, probar que

$$m(\angle COP) = 180 - \frac{|\, m(\angle COA) - m(\angle COB)\,|}{2}.$$

c. Si $C \in int(\angle BOA')$, probar que $m(\angle COP) = \dfrac{m(\angle COA) + m(\angle COB)}{2}$.

d. Si $C \in int(\angle B'OA)$, probar que $m(\angle COP) = \dfrac{m(\angle COA) + m(\angle COB)}{2}$.

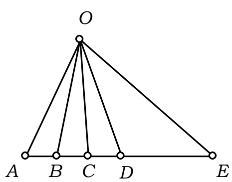
2.203. Sean $\angle AOC$ un ángulo, y $\angle COD$ y $\angle DOB$ dos ángulos adyacentes tales que $m(\angle AOC) = 50$, $m(\angle COD) = 80$ y $m(\angle DOB) = 40$. Supongamos que $\overrightarrow{OM}$ es la bisectriz de $\angle AOC$, $\overrightarrow{ON}$ es la bisectriz de $\angle AOD$, $\overrightarrow{OP}$ es la bisectriz de $\angle BOC$ y $\overrightarrow{OQ}$ es la bisectriz de $\angle BOD$.

a. Calcular las medidas de los ángulos $\angle MON$ y $\angle POQ$.
b. Probar que $m(\angle COD) = m(\angle MON) + m(\angle POQ)$.
c. Probar que los ángulos $\angle MOQ$ y $\angle NOP$ tienen la misma bisectriz.

2.204. Sean $\angle AOB$ un ángulo, y $\overrightarrow{OA'}$ y $\overrightarrow{OB'}$ semirrectas perpendiculares a $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$, respectivamente. Probar que las bisectrices de $\angle AOB$ y $\angle A'OB'$ cumplen una de las siguientes condiciones:

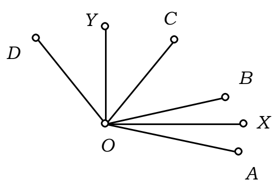
a. Son perpendiculares. b. Coinciden. c. Forman una recta.

2.205. En la figura:



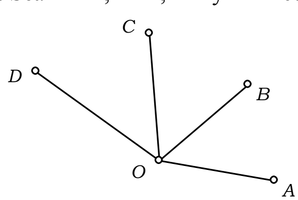
si $\overrightarrow{OC}$ es la bisectriz del ángulo $\angle BOD$, $m(\angle AOD) = 44$, $m(\angle BOE) = 60$ y $\angle AOB$ y $\angle DOE$ son complementarios, encontrar las medidas de los ángulos $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$ y $\angle DOE$.

2.206. En la figura:



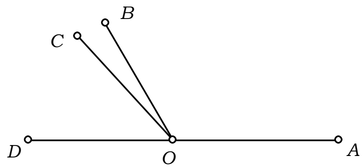
si $\overrightarrow{OX}$ es la bisectriz de $\angle AOB$ y $\overrightarrow{OY}$ es la bisectriz de $\angle COD$, probar que $m(\angle AOC) + m(\angle BOD) = 2m(\angle XOY)$.

2.207. Sean $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ y $\overrightarrow{OD}$ cuatro semirrectas colocadas como muestra la figura:



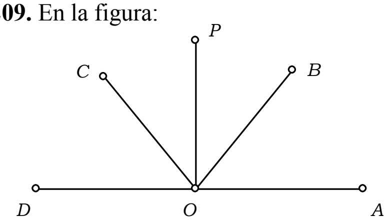
Probar que $\angle AOB \cong \angle COD$ si y solo si la bisectriz de $\angle BOC$ es la bisectriz de $\angle AOD$.

2.208. Sean $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ y $\overrightarrow{OD}$ cuatro semirrectas colocadas como muestra la figura:



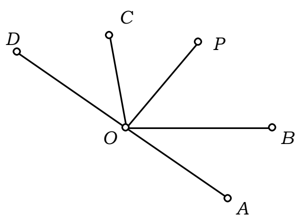
Si $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OD}$ son dos semirrectas opuestas, $m(\angle AOB) = 10m(\angle BOC)$ y $m(\angle COD) = 4m(\angle BOC)$, calcular las medidas de los ángulos adyacentes que forman las bisectrices de los ángulos $\angle AOB$, $\angle BOC$ y $\angle COD$.

2.209. En la figura:



tenemos que $\angle AOC \cong \angle BOD$ y $\overrightarrow{OP}$ es la bisectriz del ángulo $\angle BOC$. Probar que $\overleftrightarrow{OP} \perp \overleftrightarrow{AD}$.

2.210. En la figura:

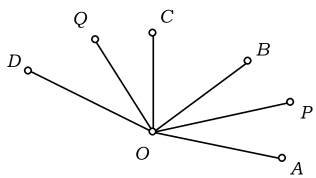


Si A, O y D son colineales y $\overrightarrow{OP}$ es la bisectriz de $\angle BOC$, probar que

$$m(\angle AOP) = \frac{m(\angle AOC) + m(\angle AOB)}{2} \text{ y}$$

$$m(\angle POD) = \frac{m(\angle BOD) + m(\angle COD)}{2}.$$

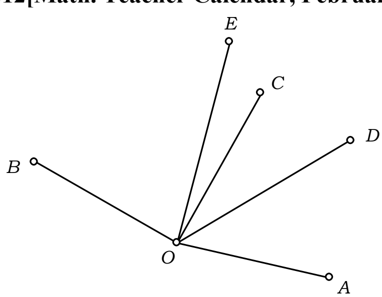
2.211. Sean $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ y $\overrightarrow{OD}$ cuatro semirrectas tales que los puntos B, C y D están en un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{OA}$ como muestra la figura:



Si $\overrightarrow{OP}$ es la bisectriz de $\angle AOB$ y $\overrightarrow{OQ}$ es la bisectriz del ángulo $\angle COD$, mostrar que

$$m(\angle POQ) = \frac{1}{2}(m(\angle AOC) + m(\angle BOD)).$$

2.212[Math. Teacher Calendar, February 1998, # 21]. En la figura:

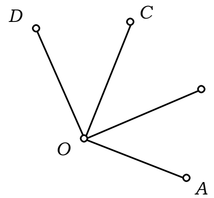


si $\angle AOB$ es obtuso, $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OE}$ es la bisectriz del ángulo $\angle AOB$, y $\overrightarrow{OD}$ es la bisectriz de $\angle AOC$, calcular la medida del ángulo $\angle DOE$.

2.213. ¿Si $\angle\alpha$ es un ángulo obtuso y $\angle\beta$ es un ángulo recto, qué clase de ángulo es $\angle\alpha - \angle\beta$?

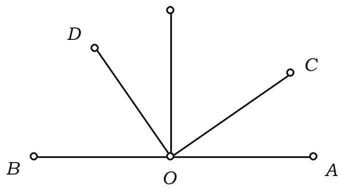
2.214. Dado un ángulo agudo $\angle\alpha$, probar que existe un número entero positivo k tal que $k\angle\alpha$ es obtuso.

2.215. En la figura:



si $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{OD}$ y $m(\angle AOD) = 3m(\angle BOC)$, calcular la medida del ángulo $\angle BOC$.

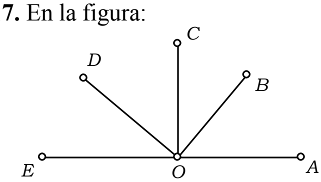
2.216. En la figura:



tenemos que A, O y B son colineales, los ángulos $\angle AOC$ y $\angle DOB$ son complementarios, y $\overleftrightarrow{OE} \perp \overleftrightarrow{AB}$. Probar las siguientes afirmaciones:

a. $\angle AOC \cong \angle EOD$.
b. $\angle DOB \cong \angle COE$.
c. Los ángulos $\angle COE$ y $\angle EOD$ son complementarios.

2.217. En la figura:



Si A, O y E son colineales, $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{OD}$ y $m(\angle BOC) = 40$, encontrar las medidas de los ángulos $\angle AOB$, $\angle COD$ y $\angle DOE$.

2.218. Si las medidas de dos ángulos opuestos por el vértice son $25x + 25$ y $40x - 5$, calcular las medidas de cada uno de los dos ángulos.

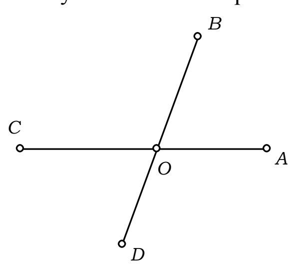
2.219[I-318]. Dadas k rectas concurrentes, probar que se forman $k(k - 1)$ ángulos opuestos por el vértice, en donde $k > 2$ es un número natural.

2.220. Sean $\overrightarrow{OA_1}, \ldots, \overrightarrow{OA_k}$ semirrectas colocadas en sentido contrario a las manecillas del reloj, en donde $k > 2$ es un número entero positivo. Probar que

$$m(\angle A_1 O A_2) + \ldots + m(\angle A_{k-1} O A_k) = (-1)^i m(\angle A_1 O A_k) + 360i,$$

en donde i es un número entero positivo.

2.221. Sean $\overleftrightarrow{CA}$ y $\overleftrightarrow{BD}$ dos rectas que se intersecan en un punto O como muestra la figura:

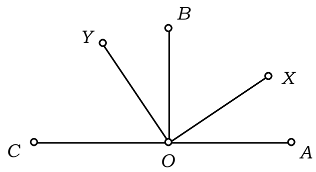


si $m(\angle AOB) = m(\angle DOA) + \frac{1}{2} m(\angle BOC)$, encontrar las medidas de los ángulos $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$ y $\angle DOA$.

2.222. Sea $\angle AOB$ un ángulo no degenerado. Si l es una recta perpendicular a la bisectriz del ángulo $\angle AOB$ y pasa por el vértice O, probar que la recta forma ángulos congruentes con los lados del ángulo $\angle AOB$.

2.223. Sean $\angle AOB$ y $\angle A'O'B'$ dos ángulos de medidas 40 y 70, respectivamente. ¿Cuánto deben medir los ángulos $\angle BOC$ y $\angle B'O'C'$ adyacentes a los ángulos dados, respectivamente, para que el ángulo formado por las bisectrices de $\angle AOB$ y $\angle BOC$ sea congruente con el ángulo formado por las bisectrices de los ángulos $\angle A'O'B'$ y $\angle B'O'C'$?

2.224. En la figura:



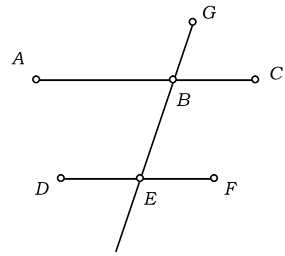
supongamos que $\vec{CA} \perp \vec{OB}$ y los puntos C, O y A son colineales. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a. $\angle AOX \cong \angle BOY$.

b. $\angle XOB \cong \angle YOC$.

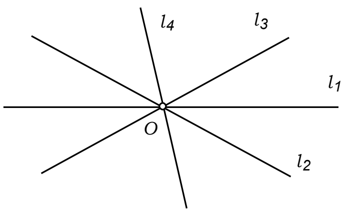
c. $\vec{OX} \perp \vec{OY}$.

2.225. En la figura:



si $\angle ABE$ y $\angle BED$ son suplementarios, demuestre que $\angle CBG \cong \angle FEB$.

2.226. En la figura:



tenemos que l_1, l_2, l_3 y l_4 son rectas concurrentes tales que la l_1 biseca a dos ángulos opuestos por el vértice formados por las rectas l_2 y l_3. Probar que

$$m((l_4, l_2)) + m((l_4, l_3)) = 2m((l_4, l_1)).$$

2.227. Sean l_1, l_2 y l_3 tres rectas concurrentes. Probar que $m((l_1, l_2)) + m((l_1, l_3)) = m((l_2, l_3)) + 180k$, en donde k es un número entero positivo.

2.228. Sean m y n y m' y n' dos pares de rectas que se cortan. Si l y l' bisecan a un par de ángulos opuestos por el vértice formados por las rectas m y n y m' y n', respectivamente, probar que

$$m((m,m')) + m((n,n')) = 2m((l,l')) + 180k,$$

en donde k es un número entero positivo.

2.229. Sean m y n y m' y n' dos pares de rectas que se cortan. Si l y l' bisecan a un par de ángulos opuestos por el vértice formados por las rectas m y n y m' y n', respectivamente, probar que

$$m((l,m')) + m((l',m)) + m((l,n')) + m((l',n)) = 180k,$$

en donde k es un número entero positivo.

2.230. Sean $l_1, \ldots, l_k$ rectas, en donde $k > 2$ es un número entero positivo, tales que l_1 y l_k, y l_i y l_{i+1} se intersecan, para cada número entero $0 < i < k$. Probar que

$$m((l_1, l_2)) + \ldots + m((l_{k-1}, l_k)) + m((l_k, l_1)) = 180j,$$

en donde j es un número entero positivo.

2.231. Sean $l_1, \ldots, l_k$ rectas, en donde $k > 2$ es un número entero positivo, tales que l_1 y l_k se cortan y también l_i y l_{i+1} se cortan para cada número entero $0 < i < k$. Probar que

$$m((l_1, l_2)) + \ldots + m((l_{k-1}, l_k)) = m((l_1, l_k)) + 180j,$$

en donde j es un número entero positivo.

2.232. Sean n y n' dos rectas que se cortan y l una recta que biseca a un par de ángulos opuestos por el vértice formados por las rectas n y n'. Probar que $m((n,l)) + m((n',l)) = 180$.

2.233. Sean n y n' dos rectas que se cortan y l una recta que biseca a un par de ángulos opuestos por el vértice formados por las rectas n y n'. Probar que $m((t,n)) + m((t,n')) = 2m((t,l)) + 180k$ para toda recta t que corte a las rectas n y n', en donde k es un número entero positivo.

2.234. Sean A, B y C tres puntos no colineales en el plano. Si los puntos A', B' y C' se obtienen de los puntos A, B y C por medio de una traslación y rotación del plano, respectivamente, probar las siguientes afirmaciones:

a. $(\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{AC}) \cong (\overleftrightarrow{A'B'}, \overleftrightarrow{A'C'})$.

b. $m((\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{AC})) + m((\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{A'C'})) + m((\overleftrightarrow{A'C'}, \overleftrightarrow{A'B'})) + m((\overleftrightarrow{A'B'}, \overleftrightarrow{AB})) = 180k$, en donde k es un número entero positivo.

c. $(\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{A'B'}) \cong (\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{A'C'})$.

2.235. Con dobleces de una hoja de papel, marcar sobre la misma un ángulo de medida 45.

2.236. Sobre una hoja de papel se tienen dos rectas que se intersecan marcadas con dobleces de la misma. Mediante otros dobleces de la hoja, marcar la bisectrices de los ángulos que forman dichas rectas.

2.237. Se tiene un ángulo no degenerado marcado con dobleces sobre una hoja de papel. Con un solo doblez de la hoja, marcar la bisectriz del ángulo.

2.238. Si las manecillas de las horas, los minutos y los segundos de un reloj se encuentran todas apuntando al número 12, ¿qué horas serán cuando la manecilla de los segundos sea la bisectriz de las otras dos?

2.239. ¿Cuál es la medida del ángulo que se forma al girar el minutero de un reloj 25 minutos?

2.240. ¿Cuál es la medida del ángulo que se forma al girar el segundero de un reloj 3 segundos?

2.241. ¿Cuál es la medida del ángulo que se forma al girar la manecilla de las horas de un reloj 45 minutos?

2.242. ¿Cuánto tiempo tarda un minutero en recorrer un ángulo de medida 12?

2.243. Si el minutero de un reloj tarda 15 minutos en recorrer un cierto ángulo, ¿cuál es la medida del ángulo?

2.244. Si la manecilla de las horas de un reloj está entre el 3 y el 4, la manecilla de los minutos marca el 8 y el ángulo que forma ambas manecillas es de 140, ¿qué hora marca el reloj?

2.245. Si un reloj marca la una con 20 minutos y 10 segundos, ¿cuál es la medida de los ángulos que forman entre sí las tres manecillas del reloj?

2.246. ¿Cuántas horas tienen que pasar para que la manecilla de las horas de un reloj recorra un ángulo recto?

2.247. ¿Las manecillas de los minutos y las horas de un reloj forman un ángulo congruente al ángulo que formaron inicialmente después de una hora?

2.248. ¿Cuánto tiempo tarda la manecilla de las horas de un reloj en recorrer un ángulo de 60?

2.249. En un reloj cuya hora está entre las 5 y 7 horas en punto, ¿a qué hora sus manecillas forman un ángulo recto?

2.250. En un reloj cuya hora está entre las 4 y 6 horas en punto, ¿a qué hora sus manecillas forman un ángulo llano?

2.251. En un reloj cuya hora está entre las 3 y 4 horas en punto, ¿a qué hora sus manecillas coinciden?

2.252. Se tiene un reloj que se atrasa un minuto por cada hora. Si dicho reloj empieza al mediodia, ¿cuánto mide el ángulo que recorre la manecilla de las horas cuando el tiempo real es 4 p. m?

2.253. Si las manecillas de un reloj marcan las 3:30, ¿cuál será la medida del ángulo que la manecilla de las horas tiene que recorrer hasta llegar a las 5:15 horas?

2.254. Después de las 2:00 en punto de la tarde, ¿a qué hora la manecilla de las horas y el minutero forman un ángulo llano?

2.255. Si una rueda gira a razón de 20 revoluciones por minuto, ¿cuál es el ángulo que forman la posición inicial de uno de sus rayos y la posición final de este después de 37 segundos?

2.256. Se tiene una rueda de engrane con 30 dientes. Encuentre el ángulo de giro cuando pasan 13 dientes del engrane a partir de una marca dada.

2.257. Se tienen dos ruedas de engrane conectadas entre sí, la mayor tiene 32 dientes y la menor 16. Si la mayor hace un giro de 45 grados, ¿cuál es el ángulo de giro que hace la menor?

2.258. Sabemos que la tierra gira completamente en 24 hrs, ¿cuántos grados se mueve en 3:30 hrs?

2.259. Sabemos que es imposible trisecar un ángulo usando solamente regla y compás, pero si uno cuenta con un tiempo infinito, ¿es posible llevar a cabo tal trisección?

2.260. Una báscula de 4 kg tiene un indicador que se mueve sobre un semicírculo. Se tienen cuatro paquetes que pesan 400g, 700g, 900g y 800g.

a . Si pesamos juntos los cuatro paquetes, ¿cuánto mide el ángulo que tiene que recorrer el indicador para marcar el peso de los cuatro paquetes?

b. ¿Cuál es la medida del ángulo que le corresponde a los 100g?

c. Si el indicador se mueve un ángulo de 60, ¿cuál es el peso que marca la báscula?

CAPÍTULO 3

CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS Y PARALELISMO

3.1. Ángulos interiores y exteriores de un triángulo

3.1.1. Definición. Sea ΔABC un triángulo.

Los *ángulos interiores* de un triángulo ΔABC son los ángulos $\angle BAC$, $\angle CBA$ y $\angle ACB$, y sus *ángulos exteriores* $\angle BCC'$ y $\angle C''CA$.

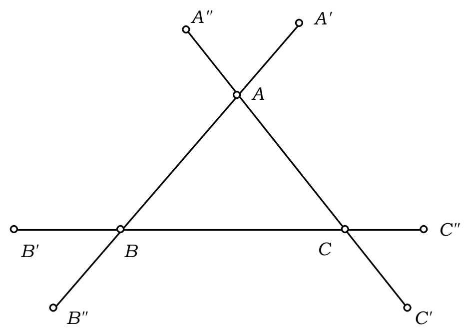


Figura 3.1

Observemos que $\angle CAA' \cong \angle A''AB$, $\angle ABB' \cong \angle B''BC$ y $\angle C'CB \cong \angle C''CA$. Estas congruencias son consecuencias directas del Teorema 2.10.2. De aquí podemos ver que prácticamente un triángulo tiene solamente tres ángulos exteriores. Cuando no haya ningún problema de confusión, nos referiremos a los ángulos interiores de un triángulo simplemente como sus ángulos.

3.1.2. Notación. En general, los ángulos interiores de un triángulo ΔABC serán denotados por $\angle A = \angle BAC$, $\angle B = \angle CBA$ y $\angle C = \angle ACB$. Las longitudes de los lados del triángulo ΔABC serán representadas por las letras $a = |BC|$, $b = |AC|$ y $c = |AB|$. En algunos, casos las letras a, b y c también harán referencia a los lados del triángulo ΔABC, en cuyo caso el triángulo ΔABC será denotado por $\Delta(a,b,c)$. Convenimos que en la notación $\Delta(a,b,c)$, el primer número que se escriba de izquierda a derecha será el correspondiente a la longitud del lado BC, el siguiente a la longitud del lado AC y el último a la longitud del lado AB.

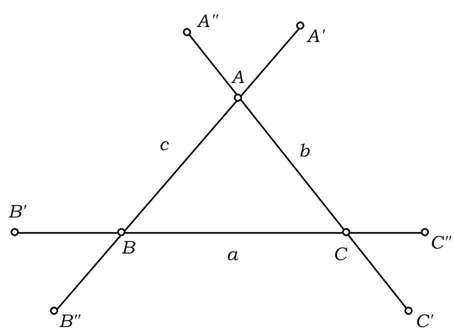


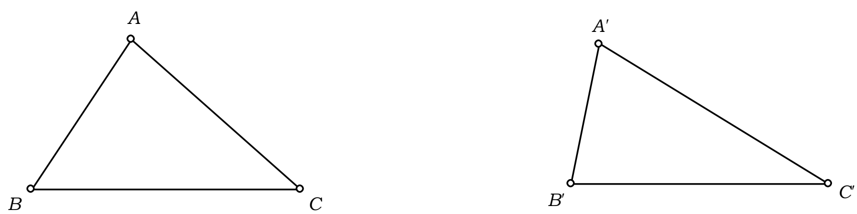
Figura 3.2

Es común en muchos libros de Geometría que al lado de un triángulo que aparece horizontalmente en la ilustración, entendiendo esto de manera intuitiva, se le llame *base* del mismo. Por ejemplo, en la figura 3.2, la base del triángulo ΔABC es el lado BC. En este libro adoptaremos este concepto, algunas veces, cuando sea conveniente.

3.1.2. Definición. Sea ΔABC un triángulo. Decimos que BC es el *lado puesto* al vértice A y al ángulo $\angle A$, AC es el *lado puesto* al vértice B y al ángulo $\angle B$, y AB es el *lado opuesto* al vértice C y al ángulo $\angle C$. En cuanto a los ángulos del triángulo, decimos que $\angle A$ es el *ángulo opuesto* al lado BC y *adyacente* a los lados AB y AC,$\angle B$ es el *ángulo opuesto* al lado AC y *adyacente* a los lados BA y BC, y $\angle C$ es el *ángulo opuesto* al lado AB y *adyacente* a los lados AC y BC. Con respecto a los ángulos exteriores del triángulo (ver figura 3.2), el ángulo $\angle CAA'$ ($\angle A''AB$) se llamará el *ángulo exterior opuesto* al lado BC y *adyacente* al ángulo $\angle A$, el ángulo $\angle ABB'$ ($\angle B''BC$) se dirá que es el *ángulo exterior opuesto* al lado AC y *adyacente* al ángulo $\angle B$, y el ángulo $\angle C'CB$ ($\angle C''CA$) será llamado el *ángulo exterior opuesto* al lado AB y *adyacente* al ángulo $\angle C$. Diremos que un lado de un triángulo *está comprendido entre dos ángulos* del mismo si los puntos extremos del segmento son los vértices de dichos ángulos. Un ángulo de un triángulo se dice que *está comprendido entre* dos lados del mismo triángulo si cada uno de dichos lados está contenido en uno de los lados del ángulo.

3.2. Congruencia de triángulos

Una *correspondencia* entre los vértices de dos triángulos es una función que asigna a cada uno de los vértices de uno de ellos uno y solo uno de los vértices del segundo triángulo. Por ejemplo, una correspondencia entre los vértices del triángulo ΔABC y los vértices del triángulo $\Delta A'B'C'$ es:



$A \to A' = f(A)$, $B \to C' = f(B)$ y $C \to B' = f(C)$.

Figura 3.3

3.2.1. Definición. Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos. Supongamos que hay una correspondencia f entre los vértices del triángulo ΔABC y los vértices del triángulo $\Delta A'B'C'$, en símbolos $A \to f(A')$, $B \to f(B')$ y $C \to f(C')$. Decimos que bajo esta correspondencia

al lado AB le corresponde el lado $f(A)f(B)$,
al lado AC le corresponde el lado $f(A)f(C)$,
al lado BC le corresponde el lado $f(B)f(C)$,
al ángulo $\angle A$ le corresponde el ángulo $\angle f(A)$,
al ángulo $\angle B$ le corresponde el ángulo $\angle f(B)$ y
al ángulo $\angle C$ le corresponde el ángulo $\angle f(C)$.

Observemos que a un lado opuesto a uno de los vértices del primer triángulo, le corresponde el lado opuesto al vértice correspondiente del segundo triángulo, y que a un ángulo opuesto a uno de los lados del primer triángulo, le corresponde el ángulo opuesto al lado correspondiente del segundo triángulo.

3.2.2. Definición. Dos triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ se llaman *congruentes* si existe una correspondencia entre sus vértices de manera que cada lado es congruente con su lado correspondiente y cada ángulo es congruente con su ángulo correspondiente. Esta relación se denotará como $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

Por lo general, al escribir $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ entenderemos que la correspondencia está dada por $A \to A'$, $B \to B'$ y $C \to C'$. Pero si escribimos $\Delta ABC \cong \Delta PQR$, el contexto nos dirá cuál es la correspondencia entre los vértices de los triángulos en cuestión. Simbólicamente, en la notación $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$, convenimos que $AB \cong A'B'$,

BC≅*B*'*C*', *AC*≅*A*'*C*', ∠*A* ≅∠*A*', ∠*B* ≅∠*B*' y ∠*C* ≅∠*C*'. Es recomendable que el lector tenga mucha precaución con la correspondencia al establecer la congruencia entre dos triángulos. El primer axioma de este capítulo nos dice que la relación de congruencia es una relación de equivalencia.

$\mathbf{CT_1}$: Sean *ΔABC*, *ΔA'B'C'* y *ΔA''B''C''* tres triángulos. La congruencia entre triángulos satisface las siguientes propiedades:

1(Reflexiva). *ΔABC* ≅ *ΔABC*.
2(Simétrica). Si *ΔABC* ≅ *ΔA'B'C'*, entonces *ΔA'B'C'* ≅ *ΔABC*.
3(Transitiva). Si *ΔABC* ≅ *ΔA'B'C'* y *ΔA'B'C'* ≅ *ΔA''B''C''*, entonces *ΔABC* ≅ *ΔA''B''C''*.

Para establecer la congruencia entre dos triángulos, se necesita verificar que las 6 partes (los 3 lados y los 3 ángulos) de uno sean congruentes a las correspondientes 6 partes del otro. Pero hay que tener mucho cuidado en mantener la congruencia entre las partes correspondientes. Por ejemplo, los siguientes triángulos tienen sus ángulos congruentes y dos lados congruentes, pero no son congruentes:

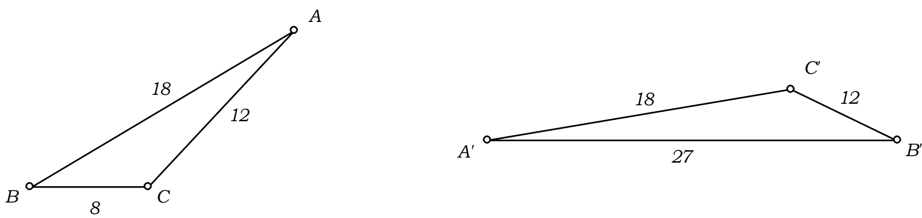


Figura 3.4

Estos dos triángulos cumplen que *AB* ≅*A*'*C*', *AC* ≅*B*'*C*', ∠*A*≅∠*A*', ∠*B*≅∠*B*', ∠*C*≅∠*C*', *BC* no es congruente con ninguno de los lados del triángulo Δ*A*'*B*'*C*', y *A*'*B*' no es congruente con ninguno de los lados del triángulo Δ*ABC*. Más adelante, daremos los cuatro criterios generales mediante los cuales solo basta ver que 3 de las 6 partes de un triángulo sean congruentes a las correspondientes 3 partes de un segundo triángulo para probar que ambos triángulos sean congruentes. Para esta tarea, necesitaremos la siguiente notación:

LLL significa los tres lados.
LLA = ***ALL*** significa dos lados y un ángulo no comprendido entre dichos lados.
LAL significa dos lados y el ángulo comprendido entre estos dos lados.
AAL = ***LAA*** significa dos ángulos y un lado no común a estos dos ángulos.
ALA significa dos ángulos y el lado adyacente a ambos ángulos.
AAA significa los tres ángulos.

Por el criterio ***LAL***, queremos decir que dos lados y el ángulo de un triángulo comprendido entre ellos de un triángulo son congruentes a los correspondientes dos lados y el ángulo comprendido de un segundo triángulo. Con la especificación de este primer criterio, queda claro el significado de los criterios restantes. En dichos criterios es muy importante que los ángulos y los lados en cuestión sean correspondientes. Veamos qué se quiere decir con esto en el siguiente ejemplo.

3.2.3. Ejemplo. Dos triángulos no congruentes que tienen los ángulos y un lado congruentes.

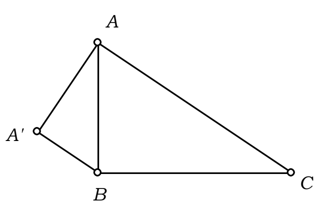


Figura 3.5

Tenemos que los triángulos Δ*ABC* y Δ*BA*'*A* no son congruentes, porque el lado *AA*' no es congruentes a ninguno de los lados del triángulo Δ*ABC*, y *AC* no es congruente a ninguno de los lado del triángulo Δ*BA*'*A*. Sin embargo, *BA* es un lado común de ambos triángulos, ∠*A*'*AB* ≅ ∠*ACB*, ∠*ABA*'≅∠*BAC* y ∠*BA*'*A*≅∠*CBA*. ♣

El criterio *AAA* no implica la congruencia entre dos triángulos como lo muestra el siguiente ejemplo.

3.2.4. Ejemplo. Dos triángulos con ángulos congruentes, pero que no son congruentes.

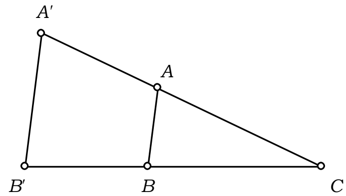


Figura 3.6

Los ángulos de los triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C$ son congruentes, pero cualquier lado de uno de los triángulos no es congruente con ningún lado del otro triángulo. ♣

El criterio $LLA = ALL$ tampoco garantiza congruencia, excepto en algunos casos particulares como por ejemplo el criterio del Teorema 3.2.13:

3.2.5. Ejemplo. Dos triángulos no congruentes que tienen dos lados y un ángulo no comprendido entre estos dos lados congruentes:

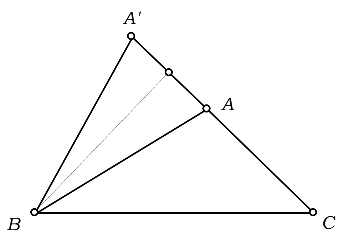


Figura 3.7

Observemos que los triángulos ΔABC y $\Delta A'BC$ no son congruentes, ya que los lados AC y $A'C$ no son congruentes y los ángulos $\angle ABC$ y $\angle A'BC$ tampoco son congruentes. Sin embargo, BC es un lado común a ambos triángulos, $BA\cong BA'$ y $\angle A'CB=\angle ACB$.♣

El siguiente axioma fue propuesto por D. Hilbert y es la pieza fundamental de la relación de congruencia entre triángulos.

$\mathbf{CT_2}$*: Axioma de Congruencia de Triángulos.* *Si* ΔABC y $\Delta A'B'C'$ son dos triángulos tales que $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$ y $\angle B \cong \angle B'$, entonces $\angle A \cong \angle A'$ y $\angle C \cong \angle C'$.

Veamos ahora que el Axioma de Congruencia de Triángulos nos garantiza nuestro primer criterio.

3.2.6. Primer Criterio de Congruencia de Triángulos (*LAL*). Si dos lados y el ángulo comprendido de un triángulo son congruentes, a sus correspondientes dos lados y al correspondiente ángulo comprendido de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

Prueba: Supongamos que en los triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ se cumple las congruencias $AB\cong A'B'$, $BC \cong B'C'$ y $\angle B\cong\angle B'$. De acuerdo con el Axioma CT_2, sabemos $\angle A\cong\angle A'$ y $\angle C\cong\angle C'$. Para establecer la congruencia deseada solo basta demostrar que $AC\cong A'C'$. Procedamos por contradicción suponiendo que AC y $A'C'$ no son congruentes. Según el Teorema 1.9.9, debemos tener que $AC<A'C'$ o $A\ C>A'C'$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $AC<A'C'$. De la definición podemos encontrar un punto $D\in A'C'$ tal que $AC\cong DC'$.

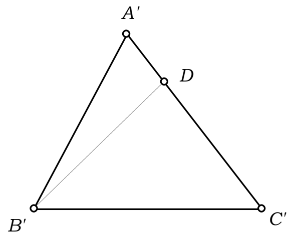


Figura 3.8

Consideremos los triángulos ΔABC y $\Delta DB'C'$. En ellos se cumplen las congruencias $BC \cong B'C'$, $AC \cong DC$ y $\angle C \cong \angle DC'B'$. Por el Axioma CT_2, hallamos que $\angle B'DC' \cong \angle A$ y $\angle B \cong \angle C'B'D$. De nuestra hipótesis sabemos que $\angle B \cong \angle B'$, lo cual implica que, $\angle B' \cong \angle C'B'D$, pero esto contradice el Axioma CA_2. Por consiguiente $AC \cong A'C'$. Así concluimos que $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$. ♣

3.2.7. Segundo Criterio de Congruencia de Triángulos (*ALA*). Si dos ángulos y el lado comprendido de un triángulo son congruentes a sus correspondientes dos ángulos y al correspondiente lado comprendido de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes

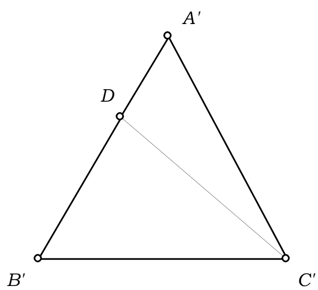


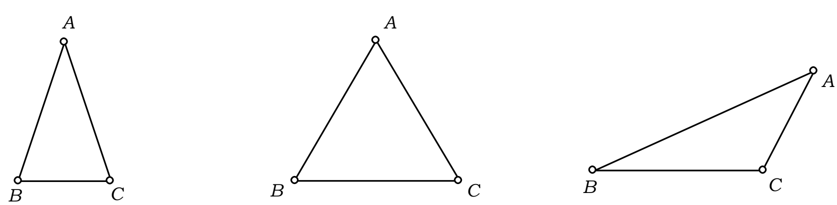
Figura 3.9

Prueba: Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos tales que $\angle B \cong \angle B'$, $\angle C \cong \angle C'$ y $BC \cong B'C'$. En virtud del Primer Criterio de Congruencia, basta demostrar que $AB \cong A'B'$. Supongamos que AB y $A'B'$ no son congruentes. De acuerdo con el Teorema 1.9.9, podemos suponer, sin perder generalidad, que $AB < A'B'$. Entonces, en el segmento $A'B'$ existe un punto D tal que $AB \cong DB'$. Como $AB \cong DB'$, $BC \cong B'C'$ y $\angle B \cong \angle C'B'D$, por el Axioma CT_2, los ángulos correspondientes de los triángulos ΔABC y $\Delta DB'C'$ son congruentes. En particular, $\angle C \cong \angle DC'B'$ y como $\angle C \cong \angle C'$, se obtiene la congruencia $\angle DC'B' \cong \angle C'$, la cual es imposible debido al Axioma CA_2. Por lo tanto, $AB \cong A'B'$. ♣

Lo que esencialmente se demostró en la prueba del Teorema 3.2.7 es que el criterio *LAL* implica el criterio *ALA*, por supuesto bajo la suposición del Axioma CT_2.

Para establecer el tercer criterio de congruencia, necesitamos los siguientes triángulos especiales:

3.2.8. Definición. Un triángulo ΔABC es *isósceles* si tiene dos lados congruentes. Se dice que un triángulo ΔABC es *equilátero* si tiene sus tres lados congruentes. Un triángulo se llama *escaleno* si ninguno de sus lados es congruente con los otros dos.



isósceles equilátero escaleno

Figura 3.10

Por lo general, cuando mencionemos la base de un triángulo isósceles que no sea equilátero, nos referiremos al lado que no sea congruente con los otros dos y será el que se represente en la figura de manera horizontal.

Las Proposiciones 5 y 6 del Primer Libro de Euclides (ver [l-171]) se enuncian en el siguiente teorema.

3.2.9. Teorema del Triángulo Isósceles. Un triángulo es isósceles si y solo si dos de sus ángulos son congruentes.

Prueba: *Necesidad*. Sea ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$. Veamos qué pasa en el triángulo ΔABC bajo la correspondencia $A \to A$, $B \to C$ y $C \to B$. Con esta correspondencia se cumple que $\angle BAC = \angle CAB$, $AB \cong AC$, $AC \cong AB$. Por el Criterio *LAL* (3.2.6), $\Delta ABC \cong \Delta ACB$. Por ello, $\angle B \cong \angle CBA \cong \angle BCA \cong \angle C$, tal y como se deseaba.

Suficiencia. En el mismo triángulo ΔABC consideraremos la correspondencia dada en el párrafo anterior. Sabemos que el segmento BC pertenece a ambos triángulos ΔABC y ΔACB. Por hipótesis, $\angle B \cong \angle C$. De acuerdo con el criterio *ALA* (3.2.7), hallamos que $\Delta ABC \cong \Delta ACB$. En consecuencia, $AB \cong AC$. ♣

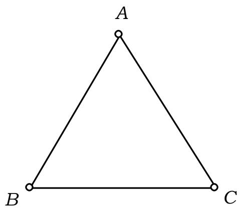


Figura 3.11

Al Teorema 3.2.9 se le conoció en la edad media como el *Teorema del Puente de los Burros* (Pons Asinorum) y se le atribuye al griego Tales de Mileto. El nombre se debe a que los alumnos tontos no entendían su demostración y por ello no podían seguir adelante en sus estudios de geometría. Esta situación es semejante a aquella cuando los burros no quieren seguir adelante ante un puente.

Nuestro siguiente resultado es una consecuencia inmediata del Teorema 3.2.9.

3.2.10. Teorema del Triángulo Equilátero. Un triángulo es equilátero si y solo si sus tres ángulos son congruentes entre sí.

A continuación, veremos la construcción puramente axiomática de un triángulo que sea congruente a un triángulo dado. La construcción geométrica correspondiente se explicará en la Construcción 11.2.1.

3.2.11. Lema. Sean ΔABC un triángulo y $B'C'$ un segmento en el plano tal que $BC \cong B'C'$. Entonces, podemos encontrar un punto A' en el plano no colineal con B' y C' tal que $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

Prueba:

Figura 3.12

Poniendo como vértice el punto B' y como uno de sus lados la semirrecta $\overrightarrow{B'C'}$, construimos un ángulo $\angle C'B'D$ congruente con el ángulo $\angle B$ (esto es posible hacerlo por el Axioma CA_2). El Axioma CS_2 nos asegura que podemos encontrar un punto $A' \in \overleftrightarrow{B'D}$ tal que $AB \cong A'B'$, y los puntos A' y D estén del mismo lado de la recta que los contiene con respecto al punto B'. Por el criterio *LAL* (3.2.6), hallamos que $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

♣

3.2.12. Tercer Criterio de Congruencia de Triángulos (*LLL*). Si los tres lados de un triángulo son congruentes a sus correspondientes lados de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

Prueba: Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos tales que $AB\cong A'B'$, $AC\cong A'C'$ y $BC\cong B'C'$. De acuerdo con el lema anterior, en el semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{BC}$ que no contiene al punto A, podemos colocar un punto A'' de tal forma que $\Delta A'B'C' \cong \Delta A''BC$. La siguiente figura ilustra la ubicación de dicho punto:

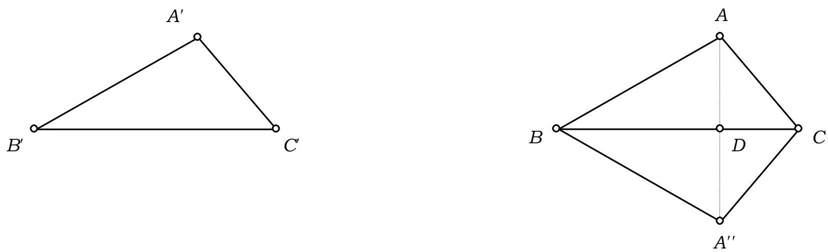
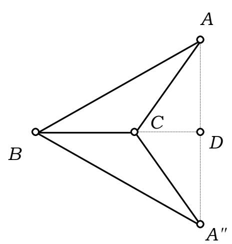


Figura 3.13

En los triángulos ΔABC y $\Delta A''BC$ se cumple que $AB\cong A''B$ y $AC\cong A''C$. Sea D el punto de intersección del segmento AA'' y de la recta $\overleftrightarrow{BC}$. Consideremos las cuatro posibles ubicaciones del punto D:

Caso I. $D = C$. En este caso, el triángulo $\Delta BA''A$ es isósceles, puesto que $AB\cong A''B$. De acuerdo con el Teorema 3.2.9, sabemos que $\angle BAC\cong\angle BA''C$. Aplicando el criterio *LAL* (3.2.6), hallamos que $\Delta ABC \cong \Delta A''BC$ y, por lo tanto, $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

Caso II. $D\in BC$. Para este caso consideraremos la figura 3.13. Como $AC\cong A''C$, el triángulo $\Delta AA''C$ es isósceles. Según el Teorema 3.2.9, vemos que $\angle DAC\cong\angle CA''D$. Del mismo modo, obtenemos que el triángulo $\Delta BA''A$ es isósceles y como una consecuencia de esto tenemos que $\angle BAD\cong\angle DA''B$. De acuerdo con el Teorema de Adición de Ángulos (2.8.1), sabemos que $\angle BAC\cong\angle CA''B$. Puesto que $\angle CA''B\cong\angle B'A'C'$, se tiene que $\angle BAC\cong\angle B'A'C'$. Del Primer Criterio de Congruencia (3.2.6), concluimos que $\Delta ABC\cong\Delta A'B'C'$.



Caso III. $C\in BD$. Como los triángulos $\Delta BAA''$ y $\Delta CAA''$ son isósceles, por el Teorema 3.2.9, $\angle BAD\cong\angle DA''B$ y $\angle CAD \cong\angle DA''C$. Empleando el Teorema de Sustracción de Ángulos (2.8.2), nos encontramos con que $\angle BAC\cong\angle BA''C$. Así, por el Primer Criterio de Congruencia *LAL* (3.2.6), hallamos que $\Delta ABC \cong \Delta A''BC$. Por consiguiente, $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

La demostración del cuarto caso, cuando B está entre D y C, es completamente similar a la del tercero.♣

Figura 3.14

Revisando la prueba del Tercer Criterio de Congruencia (3.2.12), podemos darnos cuenta que se demostró que el criterio *LAL* implica el criterio *LLL*. Haciendo uso de las demostraciones de los criterios 3.2.7 y 3.2.12 junto con los Problemas 3.3 y 3.4, se prueba que los criterios *LAL*, *ALA* y *LLL* son equivalentes.

El Ejemplo 3.2.5 testifica que el criterio Lado-Lado-Ángulo (*LLA*) no garantiza en general la congruencia de dos triángulos. Sin embargo, es claro que el criterio *LLA* establece la congruencia de dos triángulos en caso de que los dos ángulos congruentes en cuestión sean ambos obtusos o rectos. Esto muestra que del criterio *LLA* podemos obtener, en algunos casos particulares, un criterio de congruencia para cierto tipo de triángulos. También podemos formular una relación entre dos triángulos que no sean congruentes, pero que satisfagan el criterio *LLA*:

Prueba. Si $AB\cong A'B'$, por el Criterio *LAL* (3.2.6), obtenemos que $\Delta ABC\cong\Delta A'B'C'$. Supongamos, sin perder generalidad, que $AB<A'B'$. Fijamos un punto $D\in A'B'$, de tal manera que $AB\cong A'D$.

Prueba. Si *AB*≅*A'B'*, por el Criterio *LAL* (3.2.6), obtenemos que∆*ABC*≅∆*A'B'C'*. Supongamos, sin perder generalidad, que *AB*<*A'B'*. Fijamos un punto *D*∈*A'B'*, de tal manera que *AB*≅*A'D*.

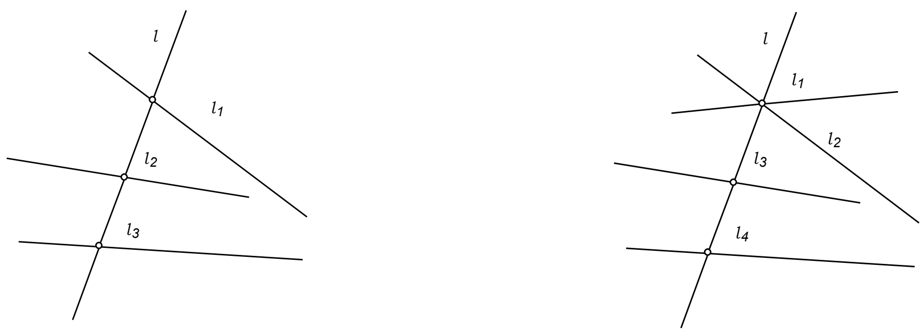
Figura 3.15

Como *AC*≅*A'C'*, ∠*A*≅∠*A'* y *AB*≅*A'D*, por el criterio *LAL* (3.2.6), hallamos que ∆*ABC*≅∆*A'DC'*. En consecuencia, ∠*B* ≅∠*C'DA'* y *B'C'* ≅*BC*≅*DC'*. Lo cual quiere decir que el triángulo ∆*C'DB'* es isósceles. Por ello y el Teorema 3.2.9, obtenemos que ∠*B'*≅∠*B'DC'*. Por otra parte, sabemos que los ángulos ∠*C'DA'* y ∠*B'DC'* son suplementarios. Así, por el Problema 2.100, concluimos que ∠*B* y ∠*B'* son suplementarios. ♣

A pesar de su importancia, el Teorema 3.2.13 no se menciona en la mayoría de los libros de texto de Geometría, pero el lector lo puede encontrar en los libros [l-192] y [l-237]. Para terminar esta sección, me gustaría sugerir al lector que consulte el artículo de L. Gillman [a-55], el cual contiene ilustraciones sin palabras de los criterios de congruencia que hasta aquí hemos visto. Un análisis mediante giros de los cuatro criterios de congruencia se encuentra en el libro [l-216].

3.3. Rectas transversales

3.3.1. Definición. Una recta que intercepta a dos o más rectas, de tal forma que el punto de intersección con una de ellas no pertenece a ninguna de las otras, se llama *recta transversal* a las rectas dadas.



l es una recta transversal de las rectas l_1, l_2 y l_3 *l* no es una recta transversal de las rectas l_1, l_2, l_3 y l_4

Figura 3.16

3.3.2. Definición. Sean *m* y *n* dos rectas cortadas por una recta transversal *l*. La *región interior* formada por las rectas *m*, *n* y *l* consiste en la intersección del semiplano determinado por la recta *m* que contiene al punto de intersección de *n* y *l*, y el semiplano determinado por la recta *n* que contiene al punto de intersección de *m* y *l*. La *región exterior* formada por las rectas *m*, *n* y *l* es el conjunto de puntos que no pertenecen a la región interior formada por las mismas rectas y que no están en ninguna de las rectas *m* y *n*.

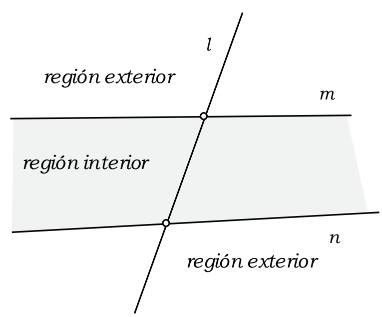


Figura 3.17

3.3.3. Definición. Cuando dos rectas m y n son cortadas por una recta transversal l, se forman ocho ángulos tal como lo muestra la siguiente figura:

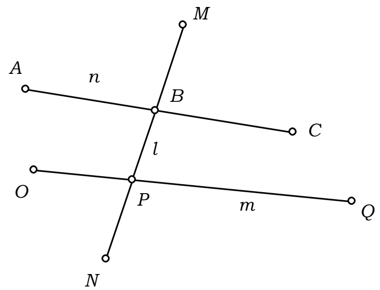
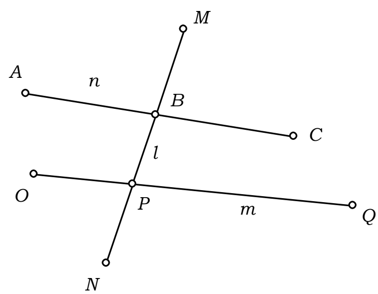


Figura 3.18

A los ángulos $\angle ABP$, $\angle PBC$, $\angle BPO$ y $\angle QPB$ se les llama *ángulos internos* y a los ángulos $\angle MBA$, $\angle CBM$, $\angle OPN$ y $\angle NPQ$ se les llama *ángulos externos*. A las parejas de ángulos $\angle ABP$ y $\angle QPB$, y $\angle PBC$ y $\angle BPO$ se les llama *ángulos alternos internos*. A los pares de ángulos $\angle MBA$ y $\angle NPQ$, y $\angle CBM$ y $\angle OPN$ se les llama *ángulos alternos externos*. A los pares de ángulos $\angle MBA$ y $\angle BPO$, $\angle PBC$ y $\angle NPQ$, $\angle ABP$ y $\angle OPN$ y $\angle CBM$ y $\angle QPB$ se les llama *ángulos correspondientes*.

El siguiente teorema se sigue directamente del Teorema 2.10.2.

3.3.4. Teorema. Supongamos que m y n son dos rectas cortadas por una recta transversal l:



Entonces $\angle CBM \cong \angle ABP$, $\angle MBA \cong \angle PBC$, $\angle BPO \cong \angle NPQ$ y $\angle QPB \cong \angle OPN$. ♣

Figura 3.19

En otras palabras, el Teorema 3.3.4 nos dice que un ángulo interior es congruente con un ángulo exterior, y que un ángulo exterior es congruente con un ángulo interior.

3.4. Rectas paralelas

3.4.1. Definición. Dos rectas que no se intersecan se llaman *paralelas*. Si l y m son dos rectas, entonces la notación $l \parallel m$ significa que la recta l es paralela a la recta m. Si dos rectas no son paralelas, entonces decimos que son *secantes*. Decimos que dos segmentos AB y CD son *paralelos*, escribimos $AB \parallel CD$, si $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$, o si $AB \neq CD$ y $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{CD}$. Un segmento AB y una semirrecta $\overrightarrow{OP}$ se dicen *paralelos*, en símbolos $AB \parallel \overrightarrow{OP}$, si $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{OP}$, o si $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{OP}$. Un segmento AB y una recta l serán paralelos, escribimos $AB \parallel l$, si $\overleftrightarrow{AB} \parallel l$ o $\overleftrightarrow{AB} = l$.

En la siguiente figura, ilustramos algunos de los conceptos dados en la definición anterior.

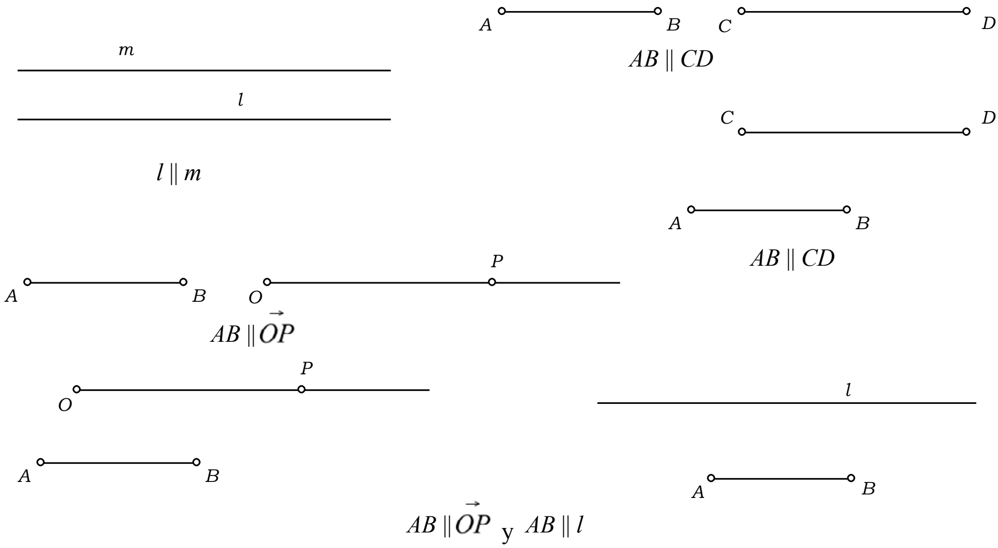


Figura 3.20

Por lo general, un segmento AB y una recta l serán paralelos si $\overleftrightarrow{AB} \parallel l$. Si dos segmentos son paralelos, el contexto nos dirá en qué caso de la definición nos encontramos. El paralelismo entre semirrectas será discutido con todo detalle en la sección 3.8.

Si AB y CD son dos segmentos, $AB \parallel CD$ no se puede definir como $AB \cap CD = \varnothing$, pues en la figura de la derecha los segmentos AB y CD no se cortan y no son paralelos, según nuestra Definición 3.4.1.

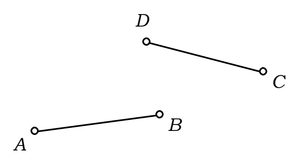


Figura 3.21

En el Corolario 3.7.5 veremos que por un punto dado fuera de una recta dada existe una recta que es paralela a la recta dada y que pasa por el punto dado. Sin embargo, la unicidad de esta recta depende fuertemente del siguiente axioma.

***AP* (Axioma de las Rectas Paralelas):** Dados una recta y un punto fuera de ella, no puede haber más de una recta paralela a la recta dada que pase por el punto dado.

El Axioma de la Rectas Paralelas también es conocido por el Axioma de Playfair y es equivalente al Quinto Postulado de Euclides (Teorema 3.4.9). Le recomendamos al lector el primer capítulo del libro de D. Gans [l-147] que habla sobre dicho postulado y de algunas de sus equivalencias. Una lista de 26 equivalencias se encuentra en el libro de E. Martin [l-221] (esta lista se repite en la página de internet [i-5]).

Una de las principales consecuencias del Axioma de la Paralelas es el siguiente resultado.

3.4.2. Teorema. Si una recta corta a una de dos rectas paralelas, entonces corta a la segunda.

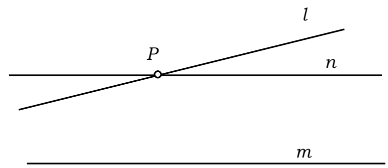


Figura 3.22

Prueba: Supongamos que *m* y *n* son dos rectas paralelas y que *l* es una recta que corta a *n* en el punto *P*. Si *l* no cortara a *m*, entonces las rectas *l* y *n* serían dos rectas paralelas a *m* que pasan por el punto *P*, pero esto obviamente contradice el Axioma AP. ♣

El siguiente resultado se sigue directamente del teorema anterior.

3.4.3. Teorema. Si $l \parallel m$ y $m \parallel n$, entonces $l \parallel n$.

3.4.4. Teorema. Dos rectas cortadas por una transversal son paralelas si y solo si dos ángulos alternos internos son congruentes.

Prueba: *Suficiencia.* Sean *m* y *n* dos rectas cortadas por una recta transversal *l* en los puntos *A* y *B*, respectivamente. Supongamos que *m* y *n* se cortan en el punto *P* y que $\angle QAB \cong \angle PBA$ (ver la figura 3.23).

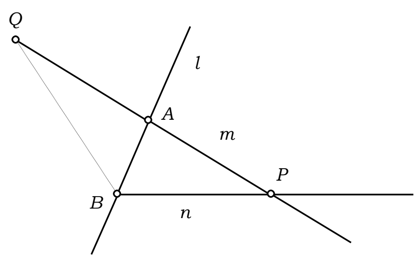


Figura 3.23

Podemos además suponer, sin perder generalidad, que $QA \cong BP$. En los triángulos ΔABP y ΔBAQ tenemos que AB es un lado común, $BP \cong AQ$ y $\angle QAB \cong \angle PBA$. De acuerdo con el criterio *LAL* (3.2.6), $\Delta ABP \cong \Delta BAQ$. Por consiguiente, $\angle QAB \cong \angle PBA$ y $\angle ABQ \cong \angle BAP$. Por otro lado, sabemos que $\angle QAB$ y $\angle BAP$ son ángulos suplementarios adyacentes y como $\angle PBA$ y $\angle ABQ$ son adyacentes, por el Lema 2.7.3, hallamos que los ángulos $\angle PBA$ y $\angle ABQ$ también son suplementarios adyacentes. Por ello, los puntos *Q*, *B* y *P* son colineales, pero esto es imposible, ya que *m* y *n* son rectas distintas. Esto demuestra que las rectas *m* y *n* son paralelas. ♣

Necesidad. Sean m y n dos rectas paralelas cortadas por una recta transversal l en los puntos A y B, respectivamente.

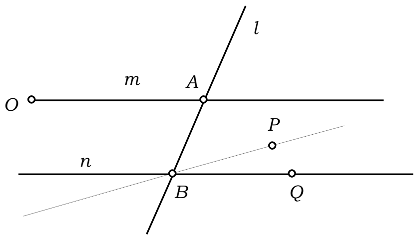


Figura 3.24

Supongamos que los ángulos $\angle OAB$ y $\angle QBA$ no son congruentes. De nuestras hipótesis podemos ver que $\angle OAB$ y $\angle QBA$ no son degenerados. Por el Teorema 2.9.6, $\angle OAB < \angle QBA$ o $\angle OAB > \angle QBA$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\angle OAB < \angle QBA$. Por definición, podemos hallar un punto $P \in int(\angle QBA)$ tal que $\angle OAB \cong \angle PBA$. Por la parte suficiente de este mismo teorema, las rectas $\overleftrightarrow{BP}$ y m son paralelas, lo cual contradice el Axioma AP, pues $\overleftrightarrow{BP}$ y n serían dos rectas paralelas distintas a la recta m que pasan por el punto B.

3.4.5. Corolario. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:
1. Dos rectas cortadas por una transversal son paralelas.
2. Los ángulos alternos externos son congruentes.
3. Un par de ángulos alternos externos son congruentes.
4. Los ángulos alternos internos son congruentes.
5. Un par ángulos alternos internos son congruentes.

Prueba: Todas las equivalencias son consecuencias directas del los Teoremas 3.3.4 y 3.4.4. ♣

3.4.6. Teorema. Dos rectas cortadas por una recta transversal son paralelas si y solo si cualquier par de ángulos correspondientes son congruentes.

Prueba: *Necesidad*. Sean m y n dos rectas paralelas cortadas por una recta transversal l. Basemos nuestro razonamiento en la figura 3.25. Consideremos los ángulos correspondientes $\angle AOB$ y $\angle OPD$. Por el Teorema 2.10.2, $\angle AOB \cong \angle POC$. Como las rectas m y n son paralelas, por el Teorema 3.4.4, los ángulos alternos internos $\angle POC$ y $\angle OPD$ son congruentes. Por ello, los ángulos $\angle AOB$ y $\angle OPD$ son congruentes. La congruencia de las parejas restantes de ángulos correspondientes se establece de manera similar.

Suficiencia. Sean m y n dos rectas cortadas por una recta transversal l.

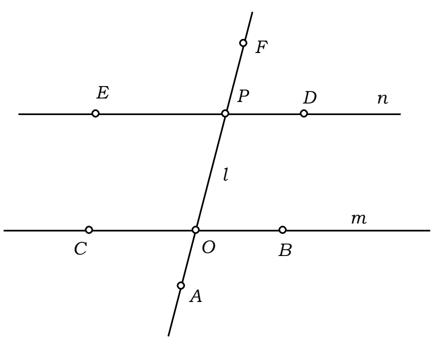


Figura 3.25

Basta con analizar el caso cuando $\angle AOB \cong \angle OPD$, ya que los otros casos son completamente análogos. Según el Teorema 2.10.2, hallamos que $\angle AOB \cong \angle POC$. Lo cual nos garantiza que los ángulos alternos internos $\angle POC$ y $\angle OPD$ son congruentes. De acuerdo con el Teorema 3.4.4, concluimos que las rectas m y n son paralelas. ♣

3.4.7. Teorema. Si dos rectas son cortadas por una recta transversal de tal forma que un par de ángulos internos son suplementarios, y los interiores de dichos ángulos están contenidos en un mismo semiplano determinado por la recta transversal, entonces las rectas son paralelas.

Prueba: Sean m y n dos rectas cortadas por la recta transversal l en los puntos A y B, respectivamente. Consideremos la siguiente figura:

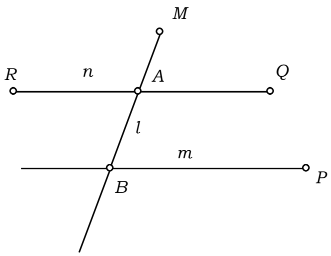


Figura 3.26

Supongamos, sin perder generalidad, que los ángulos $\angle PBA$ y $\angle BAQ$ son suplementarios. Sabemos que los ángulos $\angle BAQ$ y $\angle RAB$ son suplementarios, y como $\angle PBA$ y $\angle BAQ$ son también suplementarios, por el Corolario 2.7.8, hallamos que $\angle PBA \cong \angle RAB$. De acuerdo con el Teorema 3.4.4, m y n son paralelas. ♣

El recíproco del Teorema 3.4.7 también se cumple:

3.4.8. Teorema. Si dos rectas paralelas son cortadas por una recta transversal, entonces cada par de ángulos internos cuyos interiores estén contenidos en un mismo semiplano determinado por la recta transversal son suplementarios.

Prueba: Supongamos que m y n son rectas paralelas cortadas por una recta transversal l en los puntos A y B, respectivamente.

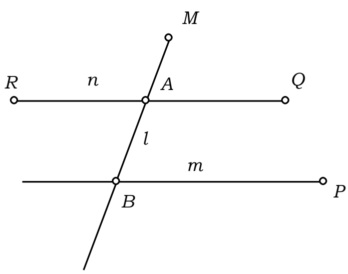


Figura 3.27

Consideremos los ángulos interiores $\angle PBA$ y $\angle BAQ$. Por el Teorema 3.4.4, sabemos que los ángulos alternos internos $\angle PBA$ y $\angle RAB$ son congruentes. Como $\angle RAB$ y $\angle QAM$ son opuestos por el vértice A, por el Teorema 2.10.2, $\angle RAB \cong \angle QAM$. Ya que $\angle QAM$ y $\angle BAQ$ son ángulos suplementarios, usando el Problema 2.100, concluimos que $\angle PBA$ y $\angle BAQ$ son suplementarios. ♣

3.4.9. Teorema. Sean m y n rectas cortadas por una recta transversal l. Si la suma de las medidas de dos ángulos internos cuyos interiores están en un mismo semiplano determinado por la recta l es menor que 180, entonces las rectas m y n se cortan en dicho semiplano.

Prueba: Sean m y n rectas cortadas por una recta transversal l en los puntos A y B, respectivamente. Por el Teorema 3.4.8, sabemos que las rectas m y n tienen que cortarse, digamos que en el punto P. Consideremos la siguiente figura:

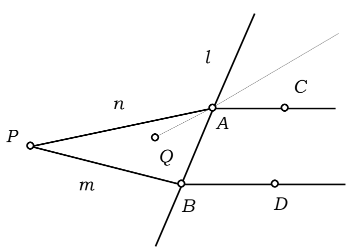


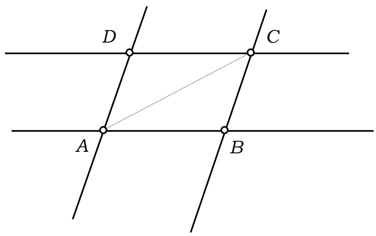
Figura 3.28

Supongamos que $m(\angle BAC) + m(\angle DBA) < 180$, y que P y los interiores de los ángulos $\angle BAC$ y $\angle DBA$ están en semiplanos diferentes determinados por l (ver la figura 3.28). Sabemos que

$$m(\angle BAC) + m(\angle PAB) = 180,$$

de donde se obtiene la desigualdad $m(\angle DBA) < m(\angle PAB)$. Lo cual es equivalente a decir que $\angle DBA < \angle PAB$ (Teorema 2.9.4). Tomemos un punto $Q \in int(\Delta PBA)$ tal que $\angle DBA \cong \angle QAB$. Entonces, la recta l es una recta transversal a las rectas $\overleftrightarrow{QA}$ y m, y todas ellas forman dos ángulos alternos internos congruentes, a saber $\angle DBA$ y $\angle QAB$. Por el Teorema 3.4.4, las rectas $\overleftrightarrow{QA}$ y m son paralelas. Por otro, lado la recta $\overleftrightarrow{QA}$ pasa por un punto $Q \in int(\Delta APB)$ y el vértice A del triángulo ΔAPB. Según el Teorema 1.6.3, la recta $\overleftrightarrow{QA}$ debe cortar al segmento PB, él cual está contenido en la recta m, pero esto es imposible. Por lo tanto, el punto P y los interiores de los ángulos $\angle BAC$ y $\angle DBA$ yacen en un mismo semiplano determinado por l. ♣

3.4.10. Teorema. En la figura,



$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$ y $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ si y solo si $AB \cong DC$ y $AD \cong BC$.

Figura 3.29

Prueba: Consideremos los triángulos ΔDAC y ΔBCA.

Necesidad. Por el Teorema 3.4.4, sabemos que $\angle DCA \cong \angle BAC$ y $\angle ACB \cong \angle CAD$. De acuerdo con el criterio *ALA* (3.2.7), $\Delta DAC \cong \Delta BCA$. Por consiguiente, $AB \cong DC$ y $AD \cong BC$.

Suficiencia. Según el Tercer Criterio de Congruencia de Triángulos (3.2.12), $\Delta DAC \cong \Delta BCA$. Por ello, $\angle DCA \cong \angle BAC$ y $\angle ACB \cong \angle CAD$. Del Teorema 3.4.4, concluimos que $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$ y $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$. ♣

3.4.11. Definición. Un *Plano Euclidiano* es un conjunto no vacío con una familia de subconjuntos, los cuales cumplen todos los axiomas que hasta aquí hemos presentado.

Por brevedad nos referiremos a un Plano Euclidiano simplemente como Plano.

3.5. Cuarto criterio de congruencia de triángulos

En esta sección, presentamos el cuarto y último criterio de congruencia de triángulos.

3.5.1. Cuarto Criterio de Congruencia de Triángulos (*AAL*). Si dos ángulos de un triángulo y un lado opuesto a uno de estos dos ángulos son congruentes a sus correspondientes dos ángulos y a su correspondiente lado opuesto a uno de estos dos ángulos de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes

Prueba: Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos tales que $\angle B \cong \angle B'$, $\angle C \cong \angle C'$ y, sin pérdida de generalidad, supongamos que $AB \cong A'B'$.

Figura 3.30

Con base al criterio *ALA* (3.2.7) basta demostrar que $BC \cong B'C'$. Supongamos que este no es el caso. Según el Teorema 1.9.9, $BC < B'C'$ o $BC > B'C'$. Sin perder generalidad, supongamos que $BC < B'C'$. Entonces, podemos encontrar un punto $D \in B'C'$ tal que $BC \cong B'D$. Así vemos que en los triángulos ΔABC y $\Delta A'B'D$ se cumple que $\angle B \cong \angle B'$, $AB \cong A'B'$ y $BC \cong B'D$. De acuerdo con el primer criterio de congruencia (3.2.6), $\Delta ABC \cong \Delta A'B'D$. Por consiguiente, $\angle C \cong \angle A'DB'$, y entonces, $\angle C' \cong \angle A'DB'$. Por lo cual, la rectas $\overleftrightarrow{A'D}$ y $\overleftrightarrow{A'C'}$ son cortadas por la recta transversal $\overleftrightarrow{B'C'}$ de tal forma que los ángulos correspondientes $\angle C'$ y $\angle A'DB'$ son congruentes. En vista del Teorema 3.4.6, las rectas $\overleftrightarrow{A'D}$ y $\overleftrightarrow{A'C'}$ deben ser paralelas, pero esto es imposible pues ambas comparten el punto A'. Por lo tanto, $BC \cong B'C'$. ♣

3.5.2. Teorema. Un triángulo no puede tener dos ángulos que no sean agudos.

Prueba: Supongamos que ΔABC es un triángulo en el cual los ángulos $\angle B$ y $\angle C$ no son ángulos agudos. Por el Corolario 3.4.7, sabemos que $\angle B$ y $\angle C$ no pueden ser ángulos rectos al mismo tiempo. Sin perder generalidad, supongamos que $\angle B$ es un ángulo obtuso. Consideremos la siguiente figura:

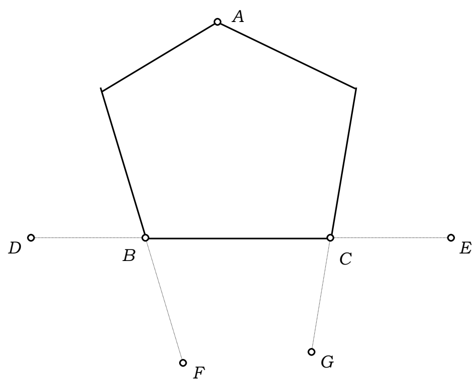


Figura 3.31

La recta $\overleftrightarrow{BC}$ corta transversalmente a las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{AC}$. Por suposición, $m(\angle FBC) < 90$ y $m(\angle BCG) \leq 90$. De aquí se sigue que $m(\angle FBC) + m(\angle BCG) < 180$. Por el Teorema 3.4.9, las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{AC}$ se cortan en un punto que está en el semiplano determinado por $\overleftrightarrow{BC}$ que contiene a los interiores de los ángulos $\angle FBC$ y $\angle BCG$. Pero esto es imposible pues las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{AC}$ se cortan en el punto A, que está en el otro semiplano determinado por $\overleftrightarrow{BC}$. ♣

Por último, damos otro criterio de congruencia para triángulos que poseen un ángulo obtuso (este criterio se encuentra en el artículo [a-LD]).

3.5.3. Corolario. Si un triángulo tiene dos lados y un ángulo obtuso congruentes a sus correspondientes dos lados y un ángulo de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

Prueba: Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos tales que $\angle B \cong \angle B'$ y $\angle B$ es un ángulo obtuso. Es claro que $\angle B$ es también un ángulo obtuso. Si $AB \cong A'B'$ y $BC \cong B'C'$, entonces la conclusión se sigue del criterio *LAL* (3.2.6). Supongamos pues, sin perder generalidad, que $AC \cong A'C'$ y $BC \cong B'C'$ y que los triángulos dados no son congruentes. Según el Teorema 3.2.13 (criterio *LLA*), los ángulos $\angle C$ y $\angle C'$ tienen que ser suplementarios. Por otra parte, según el Teorema 3.5.2, sabemos que $\angle C$ y $\angle C'$ deben ser ángulos agudos, de donde encontramos que $m(\angle C) + m(\angle C') < 90 + 90 = 180$, pero esto es una contradicción. ♣

3.6. Congruencia de triángulos rectángulos

Del Teorema 3.5.2, podemos señalar que un triángulo no puede tener más de dos ángulos rectos, pero es muy posible que un triángulo tenga un ángulo recto.

3.6.1. Definición. Un triángulo con un ángulo recto se llama rectángulo. El lado opuesto al ángulo recto se llama *hipotenusa* y los dos lados restantes se llaman *catetos*.

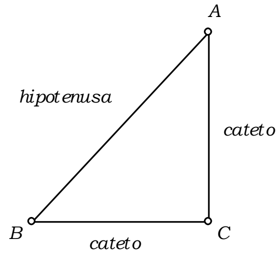


Figura 3.32

La demostración de la existencia de un triángulo rectángulo se deja al lector (Problema 3.171). Una consecuencia inmediata del Teorema 3.5.2 es que los ángulos no rectos de un triángulo rectángulo son agudos.

3.6.2. Primer Criterio de Congruencia de Triángulos Rectángulos (*CA*). Si un cateto y un ángulo no recto de un triángulo rectángulo son, respectivamente, congruentes a un cateto y a un ángulo no recto de otro triángulo rectángulo, entonces los triángulos son congruentes.

Prueba: Supongamos que ΔABC y $\Delta A'B'C'$ son triángulos rectángulos tales que $\angle C$ y $\angle C'$ son ángulos rectos. Sin perder generalidad, supongamos que $\angle B \cong \angle B'$. Del Teorema 2.6.2, sabemos que $\angle C \cong \angle C'$ por ser ambos ángulos rectos.

Figura 3.33

Si $BC \cong B'C'$, entonces, por el criterio *ALA* (3.2.7), los triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ son congruentes. Si $AC \cong A'C'$, entonces, por el criterio *AAL* (3.5.1), ΔABC es congruente con $\Delta A'B'C'$. ♣

3.6.3. Segundo Criterio de Congruencia de Triángulos Rectángulos (*HA*). Si la hipotenusa y un ángulo no recto de un triángulo rectángulo son respectivamente congruentes a la hipotenusa y a un ángulo no recto de otro triángulo rectángulo, entonces los triángulos son congruentes.

Prueba: Supongamos que ΔABC y $\Delta A'B'C'$ son dos triángulos rectángulos cuyas hipotenusas AB y $A'B'$ son congruentes. De acuerdo con el Teorema 2.6.2, sus ángulos rectos son congruentes. Si $\angle A \cong \angle A'$ o $\angle B \cong \angle B'$, entonces, por el criterio *AAL* (3.5.1), hallamos que $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$. ♣

3.6.4. Tercer Criterio de Congruencia de Triángulos Rectángulos (*CC*). Si los catetos de un triángulo rectángulo son, respectivamente, congruentes a los catetos de otro triángulo rectángulo, entonces los triángulos son congruentes.

Prueba: Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos rectángulos con hipotenusas AB y $A'B'$. Supongamos que $AC \cong A'C'$ y $BC \cong B'C'$. Del Teorema 2.6.2 y el criterio *LAL* (3.2.6), deducimos que $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$. ♣

3.6.5. Cuarto Criterio de Congruencia de Triángulos Rectángulos (*HC*). Si la hipotenusa y un cateto de un triángulo rectángulo son, respectivamente, congruentes a la hipotenusa y un cateto de otro triángulo rectángulo, entonces los triángulos son congruentes.

Prueba: Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos rectángulos cuyas hipotenusas AB y $A'B'$ son congruentes y $AC \cong A'C'$. Supongamos que ΔABC y $\Delta A'B'C'$ no son congruentes. Por el Teorema 2.6.2 y el criterio *LLA* (3.2.13), los ángulos $\angle B$ y $\angle B'$ son suplementarios, y, por consiguiente, uno de ellos no es agudo. Pero esto contradice el Teorema 3.5.2, pues $\angle C$ y $\angle C'$ son ángulos rectos. ♣

3.7. Rectas perpendiculares

3.7.1. Teorema. Dos rectas perpendiculares a una misma recta son paralelas.

Prueba: Sean l y m rectas perpendiculares a una recta k. Entonces k es una recta transversal a las rectas l y m y los ocho ángulos que se forman son todos rectos (2.11.2) y, por tanto, congruentes (esto es por el Teorema 2.6.2). De acuerdo con el Teorema 3.4.4, concluimos que las rectas l y m son paralelas. ♣

3.7.2. Teorema. Sean m, n y l tres rectas. Si $l \parallel m$ y $n \perp l$, entonces $n \perp m$.

Prueba: Sea P el punto de intersección de las rectas n y l. Según el Teorema 3.4.2, n debe cortar a m en un punto que llamaremos Q. Tomemos $A \in l - \{P\}$ y $B \in m - \{Q\}$, tal y como lo muestra la siguiente figura:

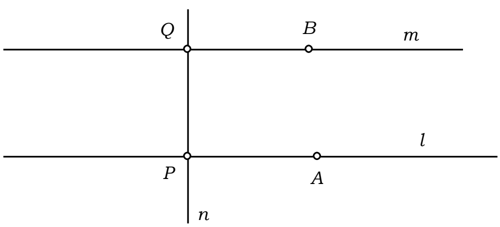


Figura 3.34

Entonces, n es una recta transversal a las rectas paralelas l y m. Por el Teorema 3.4.8, $\angle APQ$ y $\angle PQB$ son suplementarios. Por hipótesis, sabemos que $\angle APQ$ es un ángulo recto. De los Teoremas 2.6.3 y 2.7.11, obtenemos que $\angle PQB$ es también recto. Como consecuencia, hallamos que $n \perp m$. ♣

3.7.3. Teorema. Si l es una recta y P un punto fuera de l, entonces existe una única recta perpendicular a l que pasa por el punto P.

Prueba: Fijamos dos puntos A y B sobre l.

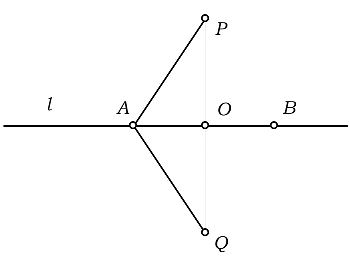
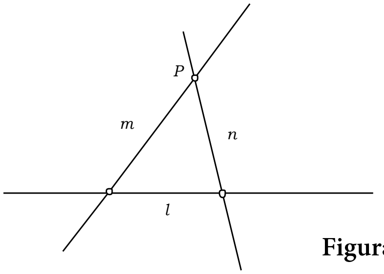


Figura 3.35

En el semiplano determinado por l que no contiene a P fijamos un punto Q, de tal forma que $\angle BAP \cong \angle QAB$ y $AP \cong AQ$ (esto es posible por los Axiomas CS_2 y CA_2). Tenemos que el segmento PQ corta a la recta l en un punto O (1.4.5). Si $A = O$, entonces $\angle BOP$ y $\angle QOB$ son suplementarios, y como $\angle BOP \cong \angle QOB$, por el Teorema 2.7.11, hallamos que $\angle BOP$ es un ángulo recto. Por ello, $\overleftrightarrow{PQ} \perp l$. Supongamos que $A \neq O$. Entonces, por el Primer Criterio de Congruencia (3.2.6), $\Delta PAO \cong \Delta QAO$. De aquí obtenemos que $\angle POA \cong \angle AOQ$. Como $\angle POA$ y $\angle AOQ$ son suplementarios, por el Teorema 2.7.11, $\angle POA$ tiene que ser un ángulo recto. Por lo tanto, $\overleftrightarrow{PQ} \perp l$. Para demostrar la unicidad supongamos que m y n son dos rectas perpendiculares a l que pasan por el punto P.



Por el Teorema 3.7.1, $m \parallel n$, lo cual es imposible, pues m y n se cortan en P. ♣

Figura 3.36

3.7.4. Teorema. Si l es una recta y $P \in l$, entonces existe una única recta m perpendicular a l en el punto P.

Prueba: Fijemos un punto $N \notin l$. Si $\overleftrightarrow{PN} \perp l$, entonces no hay nada que probar. Supongamos que este no es el caso. Por el Teorema 3.7.3, podemos encontrar un punto $A \in l$ diferente de P tal que $\overleftrightarrow{AN} \perp l$. Pongamos $m = \overleftrightarrow{AN}$ y supongamos, sin perder generalidad, que $PA \cong NA$; esto último es posible por el Axioma CS_2. Sea O el punto medio del segmento PN. Por el Axioma CS_2, podemos encontrar un punto $M \in \overleftrightarrow{OA}$ tal que O está entre A y M y $MO \cong OA$. Probaremos que $\overleftrightarrow{PM} \perp l$. Para esto, primero demostraremos que $\overleftrightarrow{PM} \parallel m$. Como $\angle MOP \cong \angle AON$ (esto es por el Teorema 2.10.2), $OP \cong ON$ y $MO \cong OA$. Según el criterio *LAL* (3.2.6), los triángulos ΔMOP y ΔAON son congruentes. Por ello, se sigue que $\angle NPM \cong \angle PNA$. Puesto que la recta $\overleftrightarrow{PN}$ corta transversalmente a las rectas $\overleftrightarrow{PM}$ y m, por el Teorema 3.4.4, hallamos que $\overleftrightarrow{PM} \parallel m$. De acuerdo con el Teorema 3.7.2, $\overleftrightarrow{PM} \perp l$. Procedamos ahora a probar la unicidad. Si hubiera dos rectas perpendiculares a l en el punto P, entonces en uno de los semiplanos determinados por la recta l se formarían dos ángulos rectos que, en vista del Teorema 2.6.2, serían congruentes, pero esto contradice el Axioma CA_2. ♣

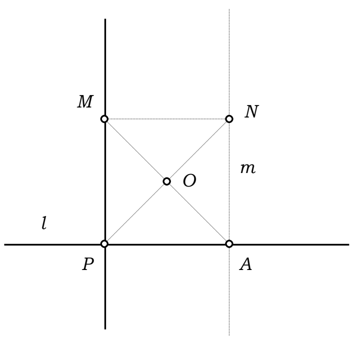
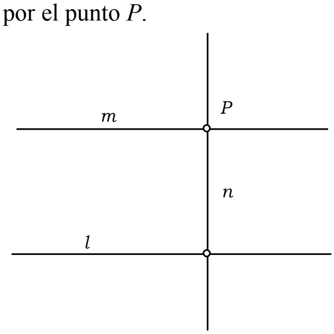


Figura 3.37

Como hemos visto, el Axioma AP solo nos garantiza que no pueden existir dos rectas paralelas a una recta dada que pasen por un punto dado, pero no nos dice nada sobre su existencia. En el siguiente corolario, daremos la construcción axiomática de dicha recta, dejando la construcción geométrica para el Capítulo 11 (Construcción 11.1.8).

3.7.5. Corolario. Si l es una recta y P un punto fuera de l, entonces existe una única recta m paralela a l que pasa por el punto P.



Prueba: La unicidad es consecuencia del Axioma AP. Procedamos a construir la recta m. De acuerdo con el Teorema 3.7.3, existe una recta n perpendicular a l que pasa por el punto P. Según el Teorema 3.7.4, existe una recta m perpendicular a n en el punto P. Por el Teorema 3.7.1, $l \parallel m$. ♣

Figura 3.38

De la demostración del Teorema 3.7.5, uno podría pensar que la unicidad de las rectas perpendiculares implicaría la unicidad de la recta paralela. Lo cual no es cierto, pues el procedimiento usado en la prueba solo nos garantiza una y solo una recta paralela, pero no descarta la posibilidad de que se pueda encontrar una segunda recta paralela por algún otro procedimiento. Una discusión más detallada sobre esto se da en la Falacia 13.25.

3.7.6. Teorema. Se tienen dos ángulos cuyos lados correspondientes están en rectas paralelas.
1. Si ambos son agudos u obtusos, entonces son congruentes.
2. Si uno de ellos es recto, entonces también lo es el otro.
3. Si uno de ellos es agudo y el otro obtuso, entonces son suplementarios.

Prueba: Sean $\angle AOB$ y $\angle A'O'B'$ dos ángulos tales que $\overleftrightarrow{OA} \parallel \overleftrightarrow{O'A'}$ y $\overleftrightarrow{OB} \parallel \overleftrightarrow{O'B'}$. Primero supongamos que $\angle AOB$ es un ángulo recto. Entonces, tenemos que $\overleftrightarrow{OA} \perp \overleftrightarrow{OB}$. Del Teorema 3.7.2, se sigue que $\overleftrightarrow{O'A'} \perp \overleftrightarrow{O'B'}$, es decir, $\angle A'O'B'$ es también un ángulo recto. De igual manera, se concluye que $\angle AOB$ es recto, siempre que $\angle A'O'B'$ sea un ángulo recto. Supongamos pues que ninguno de nuestros ángulos son rectos y que $\angle A'O'B'$ es agudo. Por la primera parte de la demostración, $\angle AOB$ no puede ser recto. Por simplicidad, ponemos $l = \overleftrightarrow{OA}$, $m = \overleftrightarrow{OB}$, $l' = \overleftrightarrow{O'A'}$ y $m' = \overleftrightarrow{O'B'}$. Por hipótesis, sabemos que $l \parallel l'$ y $m \parallel m'$. De acuerdo con el Teorema 3.4.2, la recta m' debe cortar a la recta l, digamos que en el punto P, y la recta m debe cortar a la recta l', digamos que en el punto Q. Sin perder generalidad, supongamos que P y B' están en lados opuestos de la recta m' con respecto al punto O'. Tenemos entonces las siguientes cuatro posibilidades:

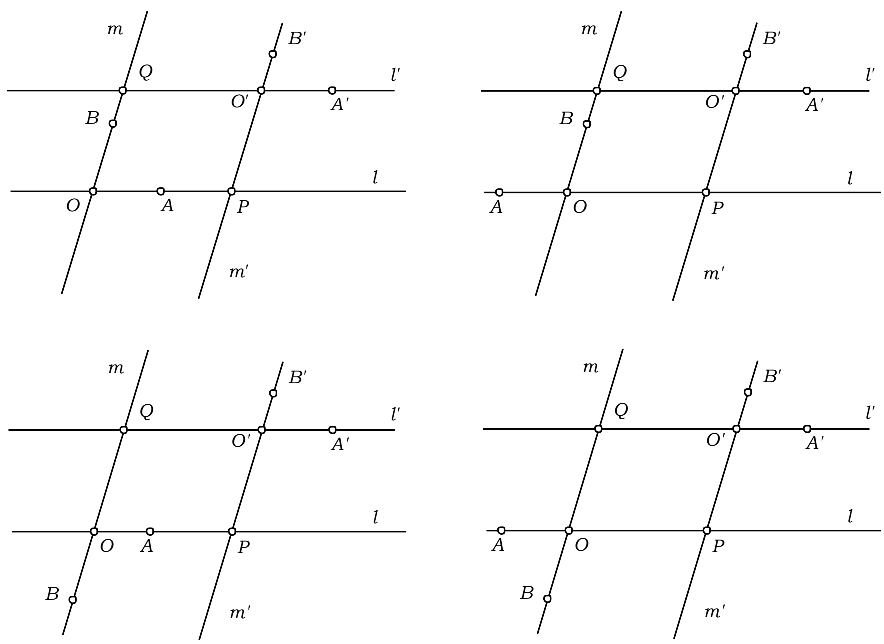


Figura 3.39

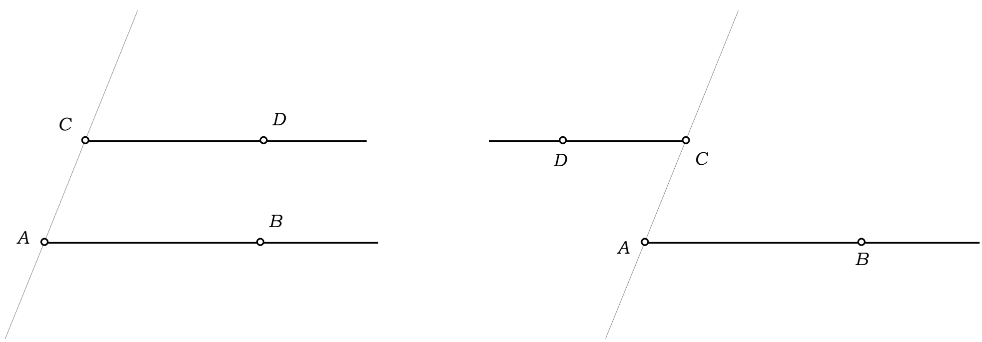
Del Teorema 3.4.6, se sigue que $\angle A'O'B'$ es congruente a su ángulo correspondiente de vértice P formado por las rectas l y m', pero este ángulo es a su vez congruente con su ángulo correspondiente de vértice O formado por las rectas l y m. Por ello, este último ángulo resulta ser también agudo. Aplicando el Teorema 2.10.2, obtenemos como resultado que si $\angle AOB$ es agudo, entonces $\angle AOB \cong \angle A'O'B'$, y si $\angle AOB$ es obtuso, entonces $\angle AOB$ y $\angle A'O'B'$ son suplementarios. La prueba del caso cuando $\angle A'O'B'$ es obtuso es completamente análoga. ♣

3.8. Semirrectas paralelas

Esta sección será dedicada al estudio del paralelismo entre semirrectas. Veremos que hay una gran diferencia entre el paralelismo de rectas y la noción de paralelismo entre semirrectas, pues a éstas últimas se les equipó con una orientación (1.3.10). En este libro no daremos ninguna orientación de manera formal a las rectas.

3.8.1. Definición. Decimos que dos semirrectas $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son *paralelas*, escribimos $\overrightarrow{AB} \| \overrightarrow{CD}$, si se cumple una de las siguientes condiciones:

1. $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$.
2. $\overleftrightarrow{AB} \| \overleftrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ yacen en un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{AC}$.



$\overrightarrow{AB} \| \overrightarrow{CD}$ $\qquad$ $\overrightarrow{AB}$ no es paralela a $\overrightarrow{CD}$

Figura 3.40

Advertimos al lector que algunas veces al decir que un lado de un ángulo es paralelo a un lado de un segundo ángulo, se entenderá que dichos lados yacen sobre rectas paralelas y no que dichos lados sean paralelos como semirrectas. El contexto ayudará a evitar cierta confusión al respecto.

De la definición, podemos ver que $\overrightarrow{AB}$ y $\overleftarrow{AB}$ no pueden ser paralelas. En general, se cumple lo siguiente.

3.8.2. Teorema. Si $\overrightarrow{AB} \| \overrightarrow{CD}$, entonces las semirrectas $\overrightarrow{AB}$ y $\overleftarrow{CD}$ no son paralelas.

Prueba: Es claro que si $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$, entonces $\overrightarrow{AB}$ y $\overleftarrow{CD}$ no pueden tener la misma orientación. Supongamos que $\overleftrightarrow{AB} \| \overleftrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ yacen en un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{AC}$. Según el Lema 1.5.3, $\overrightarrow{AB}$ y $\overleftarrow{CD}$ están en semiplanos diferentes determinados por la recta $\overleftrightarrow{AC}$. Lo cual significa, por definición, que $\overrightarrow{AB}$ y $\overleftarrow{CD}$ no pueden ser paralelas. ♣

3.8.3. Teorema. Sea $\overrightarrow{AB}$ una semirrecta, l una recta paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ y $C \in l$. Entonces, existe un punto $D \in l$ tal que $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$.

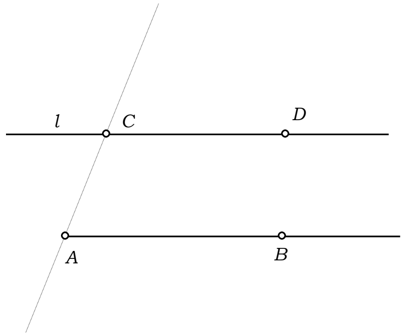
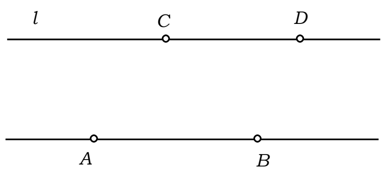


Figura 3.41

Prueba: Consideremos la recta $\overleftrightarrow{AC}$. Por el Lema 1.5.3, sabemos que las semirrectas de l cuyo vértice es C yacen en semiplanos diferentes determinados por la recta $\overleftrightarrow{AC}$. Escogemos un punto $D \in l$, de tal manera que las semirrectas $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ estén en un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{AC}$ (vale la pena recalcar que, por el Lema 1.5.3, $\overrightarrow{AB}$ está contenida en uno de los semiplanos determinados por la recta $\overleftrightarrow{AC}$). De la definición se sigue directamente que $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$. ♣

3.8.4. Corolario. Sean $\overrightarrow{AB}$ una semirrecta y $C \notin \overleftrightarrow{AB}$. Entonces, existe un punto D en el plano tal que $\overrightarrow{AB} \| \overrightarrow{CD}$.



128

Figura 3.42

Prueba: De acuerdo con el Corolario 3.7.5 podemos trazar una recta l paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ que pase por el punto C. Según el Teorema 3.8.3, podemos encontrar $D \in l$ tal que $\overrightarrow{AB} \| \overrightarrow{CD}$. ♣

3.8.5. Lema. Si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son dos semirrectas tales que $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{CD}$ o $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$, entonces se cumple que $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ o $\overrightarrow{AB} \parallel \overleftarrow{CD}$.

Prueba: Primero supongamos que $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{CD}$. Del Teorema 1.3.12, se sigue inmediatamente que $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ o que $\overrightarrow{AB} \sim \overleftarrow{CD}$. Es decir, $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ o $\overrightarrow{AB} \parallel \overleftarrow{CD}$. Supongamos ahora que $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$. Del Teorema 3.8.3, podemos encontrar un punto $E \in \overleftrightarrow{CD}$ tal que $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CE}$. Ya que $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CD}$ o $\overrightarrow{CE} = \overleftarrow{CD}$, hallamos que $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ o $\overrightarrow{AB} \parallel \overleftarrow{CD}$. ♣

3.8.6. Lema. Si $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{EF}$ y $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{EF}$ yacen en un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{CE}$, entonces $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{EF}$ yacen en un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{AE}$.

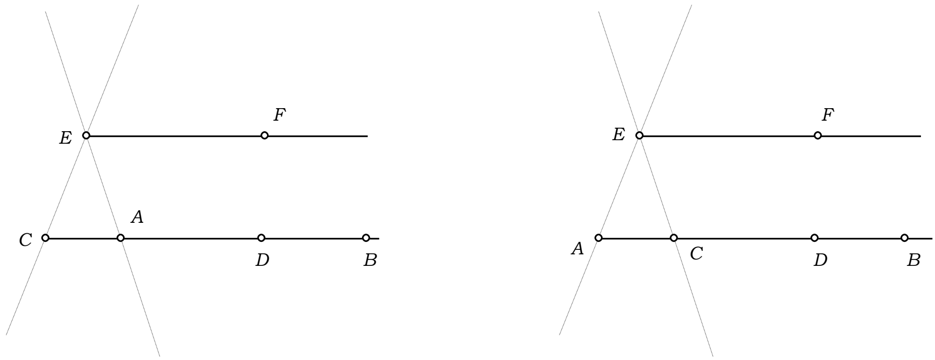


Figura 3.43

Prueba: Sabemos, por el 1.5.3, que $\overrightarrow{AB}$ yace en un semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{AE}$, y también $\overrightarrow{EF}$ yace en un semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{AE}$. Consideremos los siguientes dos casos:

Caso I. $\overrightarrow{AB} \subseteq \overrightarrow{CD}$. Entonces, A, $B \in \overrightarrow{CD}$. De aquí podemos deducir que C y B están en diferentes semiplanos determinados por la recta $\overleftrightarrow{AE}$ (Teorema 1.4.5), pero sabemos que BF no puede cortar a $\overleftrightarrow{AE}$ (esto se puede deducir del Axioma de Pach y de nuestra suposición). Aplicando el Problema 1.186, concluimos que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{EF}$ yacen en un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{AE}$.

Caso II. $\overrightarrow{CD} \subseteq \overrightarrow{AB}$. De esta suposición encontramos que $D \in \overrightarrow{AB}$. Según nuestra hipótesis, los puntos D y F pertenecen a un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{CE}$ y, por lo cual, DF no corta a la recta $\overleftrightarrow{CE}$. De acuerdo con el Axioma de Pasch, el segmento DF no corta a la recta $\overleftrightarrow{AE}$. Pero como $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$, por el Problema 1.186, obtenemos que las semirrectas $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{EF}$ yacen en un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{AE}$. ♣

Supongamos que $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$. Por definición, sabemos que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ yacen en un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{AC}$. Tracemos una recta l paralela a $\overleftrightarrow{AC}$ que pase por el punto B. Según el Problema 3.157, la recta l debe corta a $\overleftrightarrow{CD}$ en un punto que llamaremos D'. Ya que l no corta a $\overleftrightarrow{AC}$, entonces BD' tampoco corta a $\overleftrightarrow{AC}$. De acuerdo con el Problema 1.186, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD'}$ yacen en un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{AC}$, y como los puntos D y D' pertenecen a un mismo semiplano determinado por $\overleftrightarrow{AC}$, tenemos que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD'}$. Todo esto nos sugiere que

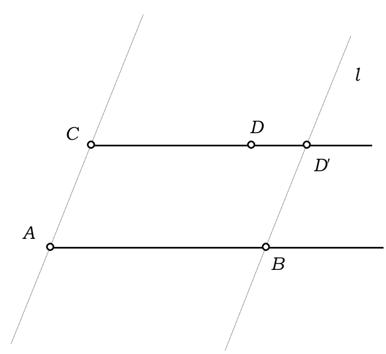


Figura 3.44

podemos suponer, sin perder generalidad, que $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{BD}$ siempre que tengamos la notación $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$.

3.8.7. Teorema. Sean $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{EF}$ tres semirrectas.

1. $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AB}$.
2. Si $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$, entonces $\overrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{AB}$.
3. Si $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{EF}$, entonces $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{EF}$.

Prueba: Los enunciados de los dos primeros incisos son inmediatos de la definición. Así que procedemos a probar el tercer inciso. Supongamos que $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{EF}$. Consideremos cada uno de los cuatro casos posibles por separado:

Caso I. Si $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF}$, por el Teorema 1.3.15, hallamos que $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$. Por lo cual, $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{EF}$.

Caso II. $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{EF}$, y $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{EF}$ están en un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{CE}$. Por el Lema 3.8.5, hallamos que las semirrectas $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{EF}$ yacen en un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{AE}$. Lo cual significa que $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{EF}$.

Caso III. $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ yacen en un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{AC}$, y $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF}$. En este caso aplicamos de nueva cuenta el Lema 3.8.5.

Caso IV. $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$, y $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ yacen en un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{AC}$; y $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{EF}$ y $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{EF}$ yacen en un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{CE}$. Primeramente, tenemos que $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{EF}$. Si A, E y C fueran colineales, entonces la conclusión se obtendría directamente. Sin pérdida de generalidad,

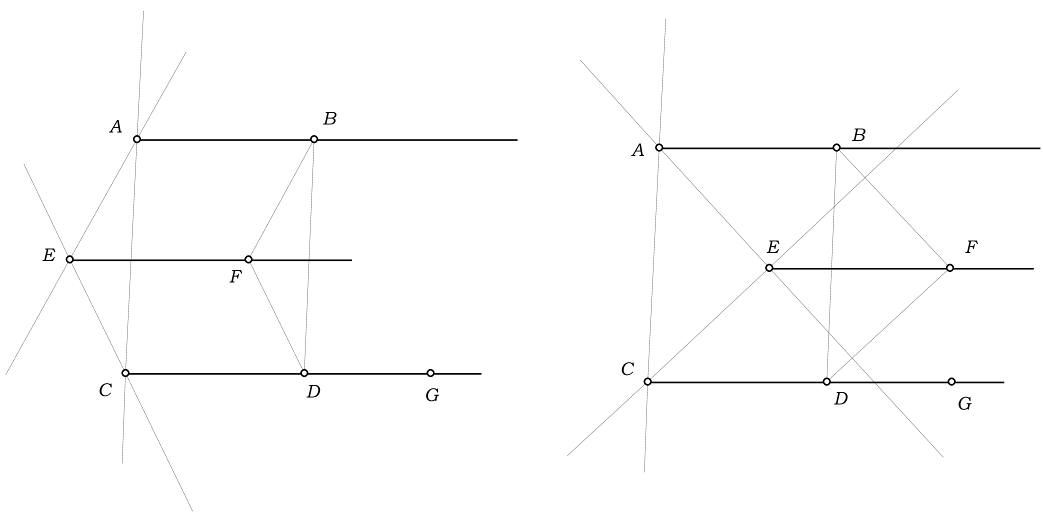


Figura 3.45

supongamos que las semirrectas $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{EF}$ están colocadas como se muestra en la figura 3.45. Podemos también suponer $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{BD}$ y $\overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{DF}$. Si los puntos B, D y F son colineales, entonces $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{EF}$ yacen en un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{AE}$. Analicemos el caso cuando B, D y F no sean colineales. Consideremos los triángulos ΔAEC y ΔBFD. Del Teorema 3.4.10 hallamos que $AC \cong BD$, $CD \cong AB$, $CE \cong DF$ y $CD \cong EF$. De aquí podemos ver que $AB \cong EF$. De acuerdo con el Teorema 3.4.6, sabemos que $\angle DCE \cong \angle GDF$ y $\angle DCA \cong \angle GDB$. El Teorema 2.8.2 nos garantiza la congruencia $\angle ACE \cong \angle BDF$. Entonces, por criterio LAL (3.4.7), obtenemos que $\Delta AEC \cong \Delta BFD$. En particular, se cumple que $AE \cong BF$. Según el Teorema 3.4.10, tenemos que $\overleftrightarrow{AE} \parallel \overleftrightarrow{BF}$. Así, por el Problema 1.186, concluimos que $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{EF}$. ♣

3.9. Direcciones

La relación de paralelismo entre las rectas del plano se define como $l \sim m$ si $l = m$ o $l \parallel m$. Claramente, el paralelismo entre rectas así definido es una relación de equivalencia en el conjunto de todas las rectas del plano. Es decir, si l, m y n son tres rectas arbitrarias, entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

1. (Reflexiva) $l \sim l$.
2. (Simétrica) Si $l \sim m$, entonces $m \sim l$.
3. (Transitiva) Si $l \sim m$ y $m \sim n$, entonces $m \sim n$.

Por ser la relación de paralelismo de equivalencia, tenemos que el conjunto de rectas del plano queda dividido en clases de equivalencias. A cada una de dichas clases de equivalencia se le llama *dirección*. Con estos términos vemos que dos rectas distintas tienen la misma dirección si y solo si son paralelas. En el plano hay una cantidad infinita de direcciones (ver Problema 3.237). Decimos que una recta l es la *dirección* de la clase de equivalencia a la que pertenece.

3.9.1. Teorema. Sean l una recta y $\mathcal{D}$ una dirección que no contenga a l. Entonces, por cada punto P del plano existe una única recta $m \in \mathcal{D}$, tal que $P \in m$ y las rectas m y l se cortan en un punto $f(P)$.

Prueba: Fijamos una recta $n \in \mathcal{D}$. Como l no pertenece a la dirección $\mathcal{D}$, entonces cualquier recta de $\mathcal{D}$ corta a la recta l. En particular, n y l se cortan en un punto. Si $P \in n$, entonces ponemos $m = n$ siendo $f(P)$ el punto de intersección de l y n. Supongamos que P no pertenece a n. De acuerdo con el Corolario 3.7.5, existe una única recta m paralela a n que pasa por el punto P. Entonces, $m \in \mathcal{D}$ y, por tanto, l y m se cortan en un punto $f(P)$. El Axioma AP nos garantiza la unicidad de la recta m. ♣

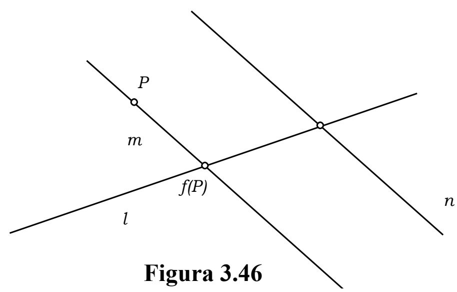


Figura 3.46

3.9.2. Definición. Sean l una recta, $\mathcal{D}$ una dirección que no contenga a l y P un punto en el plano. Al punto $f(P)$ se le conoce como la *proyección del punto P sobre la recta l en la dirección* $\mathcal{D}$. Algunas veces diremos que $f(P)$ es la proyección del punto P sobre la recta l en la dirección m, en donde $m \in \mathcal{D}$ es arbitraria.

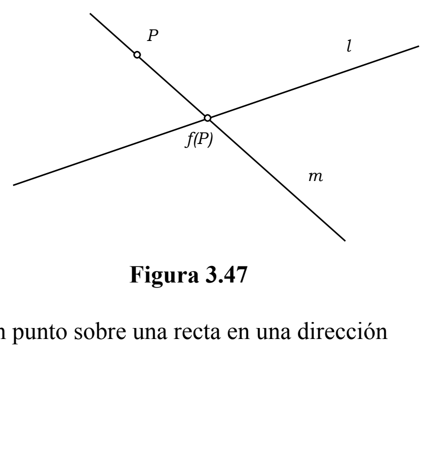


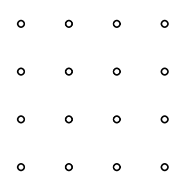
Figura 3.47

El Teorema 3.9.1 nos asegura la existencia de la proyección de un punto sobre una recta en una dirección dada.

Problemas

3.1. Probar que dos triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ son congruentes si y solo si existe una correspondencia biunívoca f: $\Delta ABC \to \Delta A'B'C'$ tal que $PQ \cong f(P)f(Q)$ para cada par de puntos P, $Q \in \Delta ABC$.
3.2. Si construimos un triángulo con palos de madera, ¿es posible deformarlo moviendo sus lados?
3.3. Probar que el criterio *ALA* implica el criterio *LAL*.
3.4. Probar que el criterio *LLL* implica el criterio *LAL*.
3.5. ¿Bajo cuantas correspondencias distintas un triángulo puede ser congruente a sí mismo? Discutir los casos cuando el triángulo sea isósceles y cuando sea equilátero.
3.6. Probar que si un lado de un triángulo equilátero es congruente a un lado de otro triángulo equilátero, entonces los triángulos son congruentes.
3.7. Si un lado y el ángulo opuesto a la base de un triángulo isósceles son respectivamente congruentes a un lado y al ángulo opuesto a la base otro triángulo isósceles, probar que los triángulos tienen que ser congruentes.
3.8. Si un lado y un ángulo adyacente a la base de un triángulo isósceles son respectivamente congruentes a un lado y a un ángulo adyacente a la base otro triángulo isósceles, probar que los triángulos tienen que ser congruentes.
3.9. Si un lado y un ángulo de un triángulo isósceles son respectivamente congruentes a un lado y a un ángulo de otro triángulo isósceles, ¿son los dos triángulos congruentes?
3.10. Si un lado y la base de un triángulo isósceles son respectivamente congruentes a un lado y la base de otro triángulo isósceles, probar que los dos triángulos son congruentes.
3.11. Probar que dos triángulos rectángulos isósceles son congruentes si un cateto de uno es congruente a un cateto del otro.
3.12. Probar que dos triángulos rectángulos isósceles son congruentes si la hipotenusa de uno es congruente a la hipotenusa del otro.
3.13. ¿Es cierto que dos triángulos rectángulos isósceles son congruentes siempre que ambos tengan un lado congruente?
3.14. Probar que si dos triángulos tienen un lado correspondiente congruente, un ángulo adyacente a este lado congruente y las diferencias de las longitudes de los otros dos lados iguales, entonces los dos triángulos son congruentes.
3.15. Probar que si dos triángulos tienen un lado correspondiente congruente, un ángulo adyacente a este lado congruente y las sumas de las longitudes de los otros dos lados iguales, entonces los dos triángulos son congruentes.
3.16. Dados dos números reales positivos a y c, ¿cuántos triángulos diferentes se pueden construir tales que dos de sus lados tengan longitud a y c y el ángulo comprendido entre estos dos lados tenga medida igual a 70?
3.17. En la figura:

a. ¿Cuántos triángulos no congruentes entre sí se pueden formar conectando tres de los 16 puntos?
b. Dado un triángulo, conectando cualesquiera tres puntos, ¿cuántos triángulos congruentes al dado se pueden formar?



3.18. Sean l_1, l_2, l_3, l_4 y l_5 cinco rectas concurrentes en un punto O. Si A_i, $B_i \in l_i$ satisfacen que $O \in A_i B_i$ y $OA_i \cong OB_i$, para cada $i = 1,..., 5$, decir cuántos pares de triángulos congruentes se pueden formar con los puntos A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, O, B_1, B_2, B_3, B_4 y B_5.
3.19. Probar que si la bisectriz de un ángulo de un triángulo biseca al lado opuesto, entonces el triángulo es isósceles.

3.20. Supongamos que $\Delta ABC \cong \Delta A'BC$ bajo la correspondencia $A \to A'$, $B \to B$ y $C \to C$.

a. Si A y A' están en un mismo semiplano determinado por $\overleftrightarrow{BC}$, probar que $A = A'$ o $\overleftrightarrow{AA'} \parallel \overleftrightarrow{BC}$.

b. Si A y A' están en diferentes semiplanos determinados por la recta $\overleftrightarrow{BC}$, probar que $\overleftrightarrow{AA'} \perp \overleftrightarrow{BC}$ o los lados correspondientes de ambos triángulos son paralelos.

3.21. Sean l una recta y $B, C \in l$. Denotemos por W y V a los dos semiplanos determinados por la recta l.

a. Probar que para cada punto $A \in W$, existe un punto $f(A) \in V$ tal que $\Delta ABC \cong \Delta f(A)BC$.

b. Probar que la función $f: W \to V$ es biyectiva.

3.22. Si $\Delta OAB \cong \Delta OCD$ y A, B, C, y D son cuatro puntos colineales, probar que $\Delta OAC \cong \Delta OBD$.

3.23. Sean AB y $A'B'$ dos segmentos que se cortan en un punto P. Probar que P es el punto medio de los dos segmentos si y solo si $\Delta APB' \cong \Delta A'PB$.

3.24. Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos, $D \in BC$ y $D' \in B'C'$. Si $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$, $BD \cong B'D'$ y $DC \cong D'C'$. Probar que $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

3.25. Sean ΔABC un triángulo y M_a el punto medio de BC. Si $\angle A M_a B$ no es un ángulo recto, probar que AB y AC no pueden ser congruentes.

3.26. Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos isósceles con $AB \cong AC$ y $A'B' \cong A'C'$. Si $AB \cong A'B'$, ¿es cierto que $\angle A \cong \angle A'$?

3.27. Sean ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$, M_a el punto medio de BC, $D \in AB$ y $E \in AC$. Si $AD \cong AE$, probar que los triángulos $\Delta AD M_a$ y $\Delta AE M_a$ son congruentes.

3.28. Sean $\angle AOB$ y $\angle BOC$ dos ángulos adyacentes y $\overrightarrow{OM}$ y $\overrightarrow{ON}$ sus bisectrices, respectivamente, tales que $OA \cong OB \cong OC \cong OM \cong ON$. Probar que son equivalentes las siguientes afirmaciones:

a. $\angle AOB \cong \angle BOC$.

b. $AM \cong BN$.

c. $\angle BNM \cong \angle BMN$.

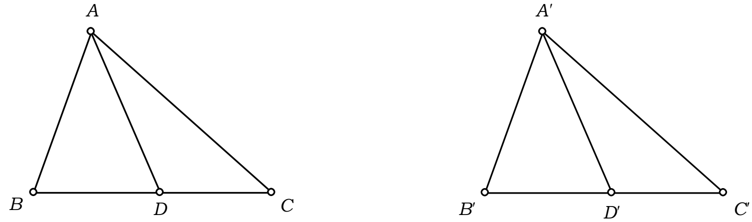
3.29. Sean $\angle AOB$ un ángulo no degenerado, $P, Q \in \overrightarrow{OA}$ y $N, M \in \overrightarrow{OB}$ tales que $OP \cong ON$ y $OQ \cong OM$. Probar que $NQ \cong MP$, $\Delta NOQ \cong \Delta POM$ y que el punto de intersección de los segmentos $NQ \cong MP$ yace en la bisectriz del ángulo $\angle AOB$.

3.30. Sea $\angle AOB$ un ángulo no degenerado. Si $C \in \overrightarrow{OA}$ y $D \in \overrightarrow{OB}$ satisfacen que $OC \cong OD$ y P es un punto en la bisectriz del ángulo $\angle AOB$, probar que $PC \cong PD$.

3.31. Sean $\angle AOB$ y $\angle APB$ dos ángulos no degenerados. Si $\overrightarrow{OP}$ es la bisectriz del ángulo $\angle AOB$ y la bisectriz del ángulo $\angle APB$ yace en $\overrightarrow{OP}$, probar que $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{OP}$.

3.32. Sean $\angle AOB$ y $\angle A'O'B'$ dos ángulos tales que $OA \cong O'A'$ y $OB \cong O'B'$. Probar que $\angle AOB \cong \angle A'O'B'$ si y solo si $AB \cong A'B'$.

3.33. Considerar los siguientes triángulos:



a. Si $BD \cong B'D'$, $BC \cong B'C'$, $AB \cong A'B'$ y $AD \cong A'D'$, probar que $AC \cong A'C'$.

b. Si $BD \cong B'D'$, $DC \cong D'C'$, $AB \cong A'B'$ y $AC \cong A'C'$, probar que $AD \cong A'D'$.

3.34[a-98]. Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos tales que $b = b'$, $c = c'$ y $\angle B \cong \angle B'$. Probar que cualquiera de las siguientes condiciones es suficiente para garantizar la congruencia de ambos triángulos:

a. $m(\angle A) \geq 90$ y $m(\angle A') \geq 90$.
b. $m(\angle B) \geq 90$ y $m(\angle B') \geq 90$.
c. $m(\angle C) \geq 90$ y $m(\angle C') \geq 90$.

3.35. Si ΔABC es un triángulo isósceles con $AB \cong AC$ y $P \in int(\Delta ABC)$ satisface que $\Delta PAB \cong \Delta PAC$, probar que $\overleftrightarrow{AP} \perp \overleftrightarrow{BC}$.

3.36. Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos. Si $BC \cong B'C'$, $m(\angle B) + m(\angle C) = 130$, $m(\angle C) - m(\angle B) = 10$, $m(\angle B') = 60$ y $m(\angle C') = 70$, probar que $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

3.37. Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos. Si $BC \cong B'C'$, $m(\angle B) + m(\angle C) = m(\angle B') + m(\angle C')$, $m(\angle B) - m(\angle C) = m(\angle B') - m(\angle C')$, probar que $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

3.38. Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos. Probar que $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ si y solo si las longitudes de los lados del triángulo $\Delta A'B'C'$ son raíces del polinomio $x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc = 0$.

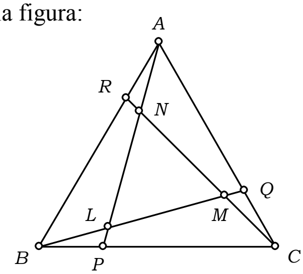
3.39. Sean ΔABC un triángulo y l una recta. Si B', $C' \in l$ y $BC \cong B'C'$, probar que en cualquiera de los semiplanos determinados por l uno puede encontrar un punto A' tal que $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

3.40. Sean ΔABC un triángulo equilátero, $L \in BC$, $M \in AC$ y $N \in AB$. Probar que $LC \cong MA \cong NB$ si y solo si ΔLMN es un triángulo equilátero.

3.41. Sean ΔABC un triángulo equilátero y $P \in BC$. Si ΔQBP es un triángulo equilátero y A y Q yacen en un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{BC}$, probar que $Q \in AB$.

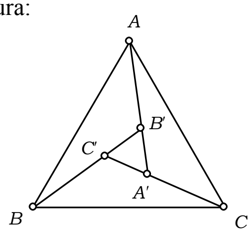
3.42. Sean ΔLBC, ΔMAC y ΔNAB tres triángulos equiláteros sobre los lados de un triángulo dado ΔABC colocados hacia el exterior del mismo. Probar que $AL \cong BM \cong CN$.

3.43. En la figura:



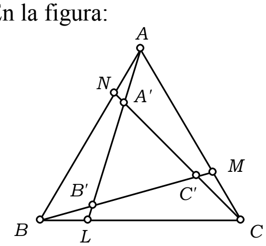
ΔABC es un triángulo equilátero y $AR \cong BP \cong CQ$. Probar que ΔLMN es un triángulo equilátero.

3.44. En la figura:



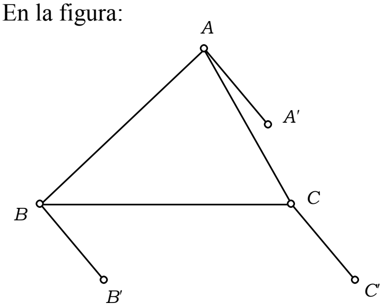
tenemos que ΔABC es un triángulo equilátero, $\angle B'BA \cong \angle A'AC$ y $AA' \cong BB' \cong CC'$. Probar que $\Delta A'B'C'$ es un triángulo equilátero.

3.45. En la figura:



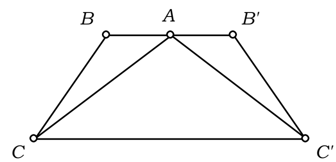
tenemos que ΔABC es un triángulo equilátero, $AL \cong BM \cong CN$. Probar que $\Delta A'B'C'$ es un triángulo equilátero.

3.46. En la figura:



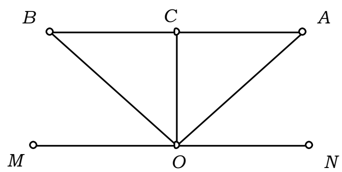
ΔABC es un triángulo arbitrario y AA', BB' y CC' son segmentos congruentes entre sí con una misma dirección. Probar que $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

3.47. En la figura:



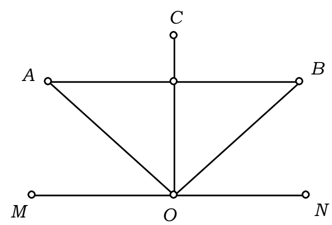
tenemos que $AC \cong AC'$, $\angle CBA \cong \angle AB'C'$ y $\angle C'CB \cong \angle B'C'C$. Probar que $\Delta ABC \cong \Delta AB'C'$.

3.48. En la figura:



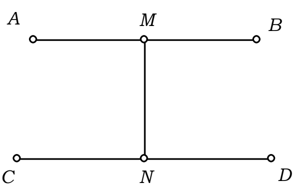
supongamos que $\Delta OCB \cong \Delta OCA$. Probar que $\angle NOA \cong \angle BOM$ si y solo si $\overleftrightarrow{MN} \perp \overleftrightarrow{OC}$.

3.49. En la figura:



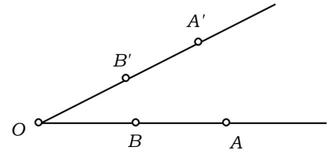
si $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{MN}$, $MN \perp OC$ y $\angle AOM \cong \angle NOB$, probar que $OA \cong OB$.

3.50. En la figura:



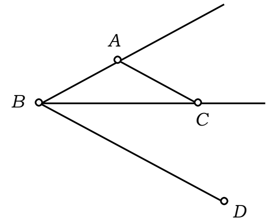
tenemos que $AB \parallel CD$, M y N son los puntos medios de AB y CD, respectivamente, y $MN \perp CD$. Probar que $\angle CBN \cong \angle NAD$.

3.51. En la figura:



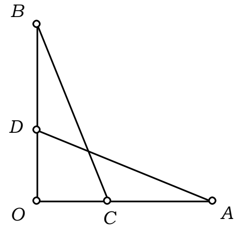
tenemos un ángulo $\angle AOA'$ con $OA \cong OA'$ y puntos $B \in \overrightarrow{OA}$ y $B' \in \overrightarrow{OA'}$ tales que $OB \cong OB'$. Probar que $\Delta B'OA$ y $\Delta BA'O$.

3.52. En la figura:



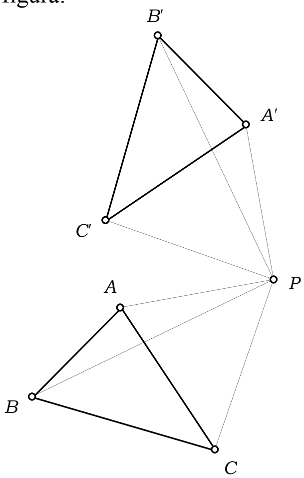
$\overrightarrow{BC}$ es la bisectriz del ángulo $\angle DBA$ y $BD \parallel AC$. Probar que ΔABC es un triángulo isósceles.

3.53. En la figura:



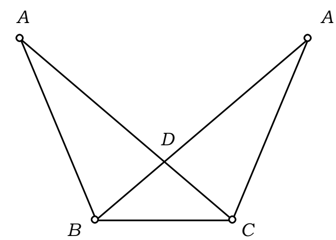
$\angle AOB$ es un ángulo recto, $OA \cong OB$ y $OC \cong OD$.
Probar que $AD \cong BC$.

3.54. En la figura:



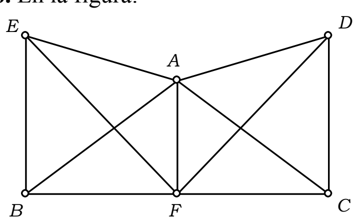
tenemos que ΔABC es un triángulo y P un punto arbitrario. Si $AP \cong A'P$, $BP \cong B'P$, $CP \cong C'P$, $AP \perp A'P$, $BP \perp B'P$ y $CP \perp C'P$, probar que $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

3.55. Considerar la siguiente figura:



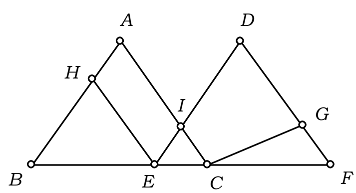
a. Si $AC \cong A'B$, probar que $AB \cong A'C$ si y solo si $\angle ACB \cong \angle CBA'$.
b. Si $\angle ABC \cong \angle A'CB$, probar que $AB \cong A'C$ si y solo si $AC \cong A'B$.
c. Si $AB \cong A'C$ y $\angle CBA \cong \angle A'CB$, probar que $\Delta ABD \cong \Delta A'CD$.

3.56. En la figura:



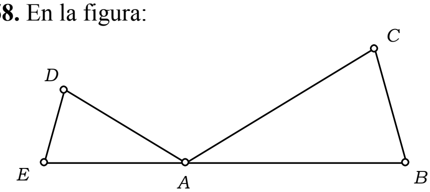
tenemos que $AB \cong AC$, $EA \cong EB$, $DA \cong DC$, $FD \cong FE$, $DC \perp BC$ y $EB \perp BC$. Probar que F es el punto medio BC y $AE \cong AD$.

3.57. En la figura:



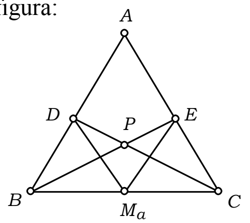
tenemos que $BE \cong CF$, $AC \cong DE$, $AB \cong DF$ y $AH \cong GF$. Probar que $HB \cong DG$ y $AI \cong DI$.

3.58. En la figura:



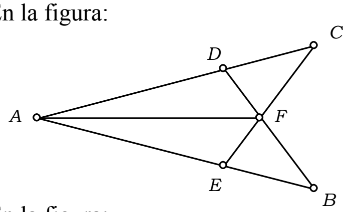
si $AE \cong AD$, $AB \cong AC$ y $\angle DAE \cong \angle BAC$, probar que $BD \cong EC$.

3.59. En la figura:



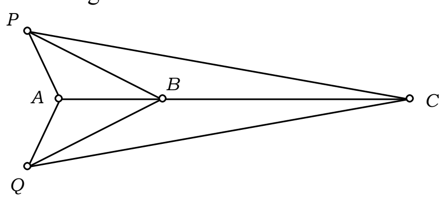
a. Si $AD \cong AE$ y $DB \cong EC$, probar que $\angle CBE \cong \angle DCB$.
b. Si $\angle B \cong \angle C$, M_a es el punto medio de BC y $\angle DM_aB \cong \angle EM_aC$, probar que $BE \cong CD$.

3.60. En la figura:



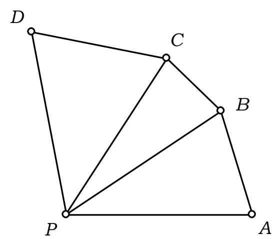
a. Si $AE \cong AD$ y $EB \cong DC$, probar que $\angle BAF \cong \angle FAC$.
b. Si $\angle BAF \cong \angle FAC$ y $AE \cong AD$, probar que $FC \cong FB$.

3.61. En la figura:



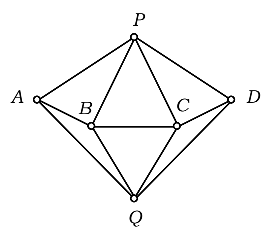
si $PA \cong QA$ y $\angle CAP \cong \angle QAC$, probar que $\angle CQB \cong \angle BPC$.

3.62. En la figura:



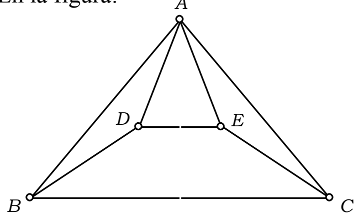
si $\angle BAP \cong \angle PBA$, $\angle CBP \cong \angle PCB$ y $\angle DCP \cong \angle PDC$, probar que $AP \cong DP$.

3.63. En la figura:



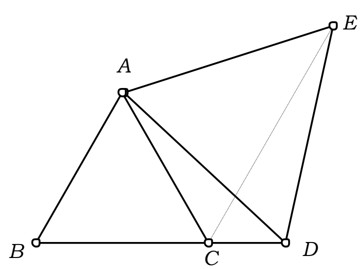
tenemos que $QB \cong QC$, $\angle PCB \cong \angle CBP$, $\angle CPD \cong \angle APB$ y los ángulos $\angle DCP$ y $\angle PBA$ son rectos. Probar que $AQ \cong DQ$.

3.64. En la figura:



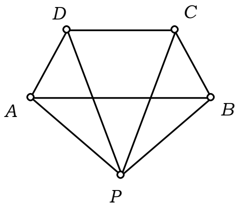
si $BD \cong CE$, $\angle CBD \cong \angle ECB$ y $\angle DBA \cong \angle ACE$, probar que $\angle EDA \cong \angle AED$.

3.65. En la figura:



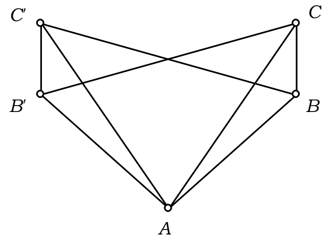
supongamos que los triángulos ΔABC y ΔEAD son equiláteros. Probar que $\Delta ABD \cong \Delta ACE$.

3.66. En la figura:



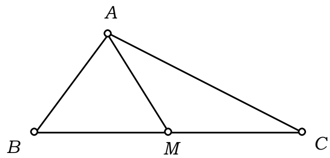
a. Si $PA \cong PB$, $PC \cong PD$ y $\angle DPA \cong \angle BPC$, probar que $\angle BAD \cong \angle CBA$.
b. Si $AD \cong BC$, $\angle PAB \cong \angle ABP$ y $\angle PDC \cong \angle DCP$, probar que $\angle DPA \cong \angle BPC$.

3.67. En la figura:



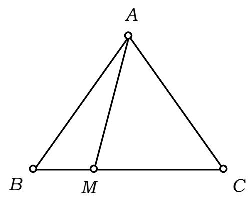
si $AB \cong AB'$, $BC \cong B'C'$ y $AC \cong AC'$, probar que $BC' \cong B'C$.

3.68. En la figura:



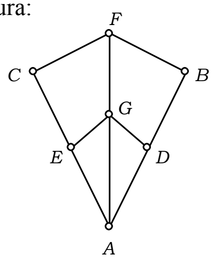
tenemos que M es el punto medio de BC, y AB y AC no son congruentes. Probar que AM no es perpendicular a BC.

3.69. En la figura:



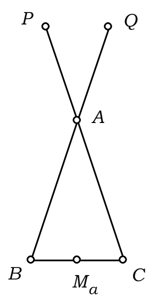
si $AB \cong AC$ y M no es el punto medio de BC, probar que $\overrightarrow{AM}$ no puede ser la bisectriz del ángulo $\angle A$.

3.70. En la figura:



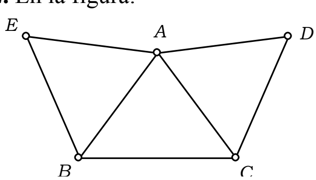
si $\angle FBA$ y $\angle ACF$ son ángulos rectos, $\angle BAF \cong \angle FAC$ y $BD \cong CE$, probar que $EG \cong DG$.

3.71. En la figura:



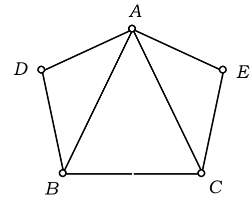
si ΔABC es un triángulo isósceles, M_a es el punto medio del lado BC y $PA \cong QA$, probar que M_a, P y Q son los vértices de un triángulo isósceles.

3.72. En la figura:



tenemos que ΔABC es un triángulo isósceles con $AB \cong AC$ y ΔEBA y ΔDAC son triángulos equiláteros. Probar que $EC \cong BD$.

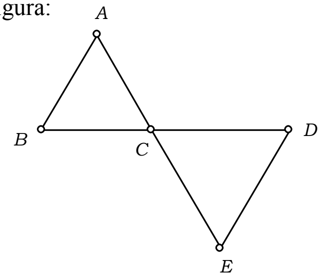
3.73. En la figura:



tenemos que ΔABC es un triángulo isósceles con $AB \cong AC$, y ΔDBA y ΔEAC son triángulos congruentes. Probar las siguientes congruencias:

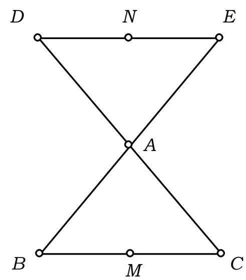
a. $\Delta EBC \cong \Delta DBC$.
b. $\Delta ADC \cong \Delta ABE$.

3.74. En la figura:



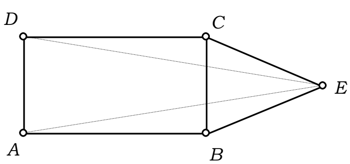
tenemos que ΔABC y ΔEDC son triángulos equiláteros. Probar que $AD \cong BE$.

3.75. En la figura:



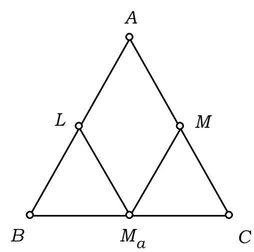
si $BA \cong AE$, $CA \cong AD$, M es el punto medio de BC y N es el punto medio de DE, probar que M, A y N son colineales.

3.76. En la figura:



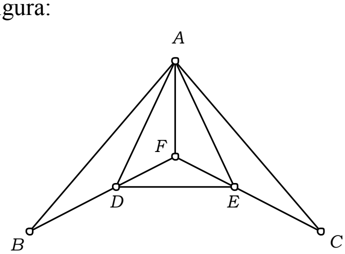
tenemos que ΔECB es un triángulo isósceles con $EC \cong EB$, $DC \cong AB$, $DA \perp AB$ y $CB \perp AB$. Probar que $EA \cong ED$.

3.77. En la figura:



tenemos que M_a es el punto medio de BC, $M_a L \cong M_a M$ y $\angle C M_a L \cong \angle M M_a B$. Probar que ΔABC es un triángulo isósceles.

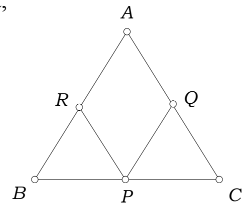
3.78. En la figura:



$AB \cong AC$, $BF \cong FC$ y $\angle BAD \cong \angle EAC$.

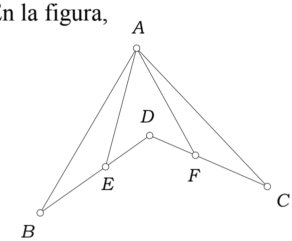
Probar que $\overleftrightarrow{DE} \perp \overleftrightarrow{AF}$.

3.79. En la figura,



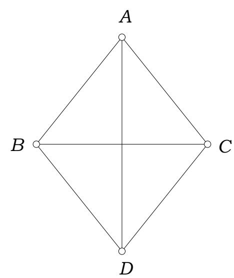
si $PQ \parallel AB$, $PR \parallel AC$ y $\angle RPB \cong \angle CPQ$, probar que $\angle B \cong \angle C$.

3.80. En la figura,



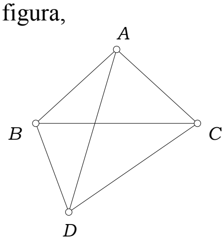
si $AB \cong AC$, $BE \cong CF$ y $ED \cong FD$, probar que $\angle BAE \cong \angle FAC$.

3.81. En la figura,



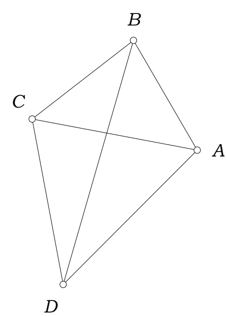
tenemos que $AB \cong AC$ y $DB \cong DC$. Probar que $BC \perp AD$.

3.82. En la figura,



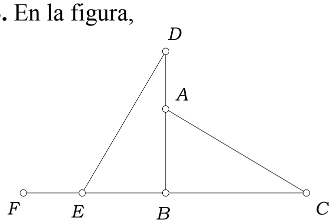
si $AB \cong AC$ y DB y DC no son congruentes, probar que $\overrightarrow{AD}$ no puede ser la bisectriz del ángulo $\angle A$.

3.83. En la figura,



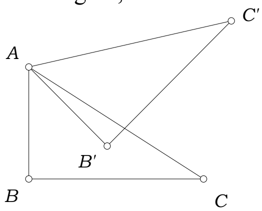
tenemos que $CA \cong CD$. Probar que AB y DB no pueden ser congruentes.

3.84. En la figura,



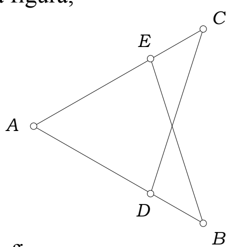
si $AB \cong BE$, $AB \perp EC$ y $\angle DEF \cong \angle CAD$, probar que $\Delta ABC \cong \Delta EBD$.

3.85. En la figura,



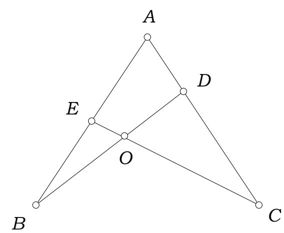
si $AB \perp BC$, $AB' \perp B'C'$, $AB \cong AB'$ y $\angle BAB' \cong \angle CAC'$, probar que $\angle ACB \cong \angle AC'B'$.

3.86. En la figura,



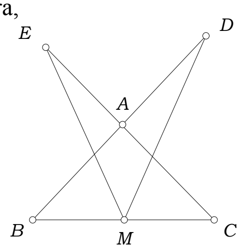
si $AB \cong AC$ y $AD \cong AE$, probar que $\angle ACD \cong \angle EBA$.

3.87. En la figura,



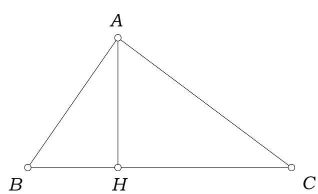
tenemos que $AB \cong AC$ y AE y AD no son congruentes. Probar que $\angle DBA$ y $\angle ACE$ no son congruentes.

3.88. En la figura,



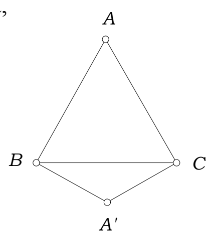
tenemos que M es el punto medio de BC, $AB \cong AC$ y $\angle CMD \cong \angle EMB$. Probar que $BD \cong CE$.

3.89. En la figura,



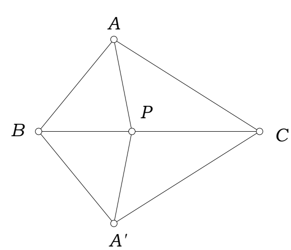
tenemos que AB y AC no son congruentes y $AH \perp BC$. Probar que BH y HC no pueden ser congruentes.

3.90. En la figura,



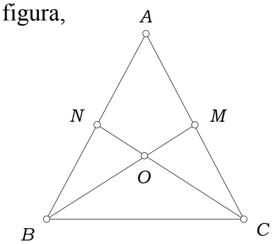
tenemos que $AB \cong AC$, $A'B \perp BA$ y $A'C \perp CA$. Probar que $\Delta A'BC$ es un triángulo isósceles.

3.91. En la figura,



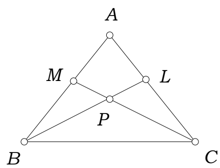
tenemos que $AB \cong A'B$ y $AC \cong A'C$.' Probar que $AP \cong A'P$.

3.92. En la figura,



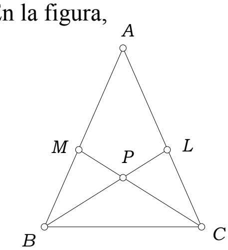
supongamos que los segmentos BM y CN se intersecan en el punto O, $AB \cong AC$ y $BN \cong CM$. Probar que $\Delta ONB \cong \Delta OMC$.

3.93. En la figura,



si $AB \cong AC$ y $AM \cong AL$, probar que $\overrightarrow{AP}$ es la bisectriz del ángulo $\angle A$.

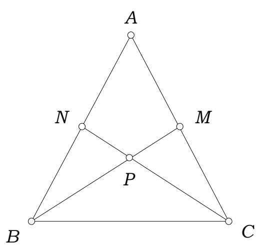
3.94. En la figura,



probar que ΔABC es un triángulo isósceles en cada uno de los siguientes casos:

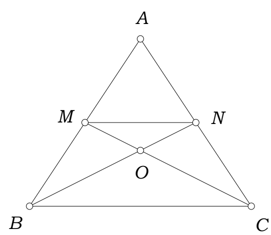
a. $PB \cong PC$ y $PL \cong PM$.
b. $BM \cong CL$ y $BL \cong CM$.

3.95. En la figura,



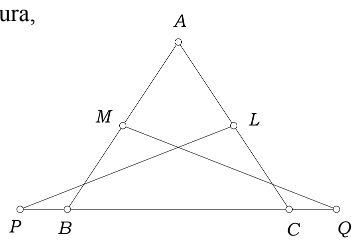
si ΔABC es un triángulo isósceles con $AB \cong AC$ y $\angle CBM \cong \angle NCB$, probar que $\overleftrightarrow{AP} \perp \overleftrightarrow{BC}$.

3.96. En la figura,



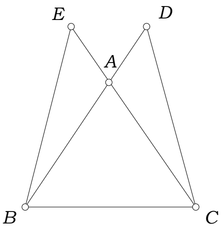
ΔABC es un triángulo isósceles con $AB \cong AC$. Probar que $OB \cong OC$ si y solo si $AM \cong AN$ y $OM \cong ON$.

3.97. En la figura,



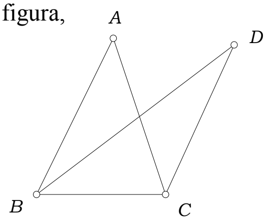
tenemos que $AB \cong AC$, $MQ \perp AB$, $LP \perp AC$ y $PB \cong CQ$. Probar que $AM \cong AL$.

3.98. En la figura,



tenemos que ΔABC es un triángulo isósceles con $AB \cong AC$ y $AD \cong AE$. Probar que $DC \cong EB$.

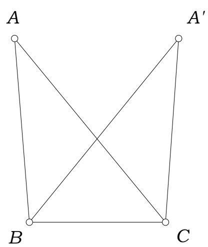
3.99. En la figura,



si $AC \cong DC$, probar que AB y DB no pueden ser congruentes.

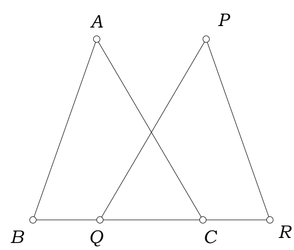
3.100. Sea $\angle AOB$ un ángulo no degenerado tal que $OA \cong OB$. Si P es cualquier punto de la bisectriz de $\angle AOB$, probar que $\Delta OAP \cong \Delta OBP$.

3.101. En la figura,



tenemos que $\angle CBA' \cong \angle ACB$ y $\angle A'BA \cong \angle A'CA$. Probar que $AB \cong A'C$.

3.102. En la figura,

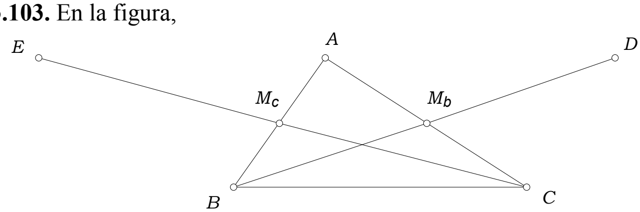


tenemos que $AB \cong PR$.

a. Si $\angle CBA \cong \angle PRQ$, probar que $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ si y solo si $BQ \cong CR$.

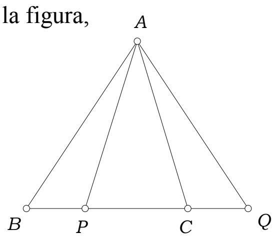
b. Si $AC \cong PQ$, probar que $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ si y solo si $BQ \cong CR$.

3.103. En la figura,



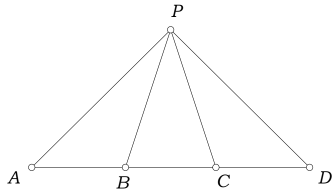
tenemos que M_b y M_c son los puntos medios de AC y AB, respectivamente, $BM_b \cong M_bD$ y $EM_c \cong M_cC$. Probar que $AE \cong AD$.

3.104. En la figura,



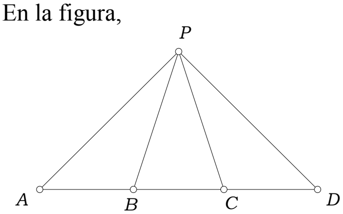
tenemos que $AB \cong AQ$. Probar que $\Delta ABC \cong \Delta APQ$ si y solo si $\angle BAP \cong \angle CAQ$.

3.105. En la figura,



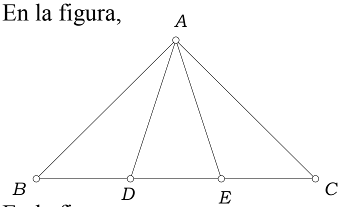
supongamos que $PA \cong PD$ y $AB \cong CD$. Probar que $\angle APC \cong \angle BPD$, $PB \cong PC$ y la bisectriz de $\angle BPC$ corta al segmento AD en su punto medio.

3.106. En la figura,



si ΔPAD es un triángulo isósceles con $PA \cong PD$, probar que el triángulo ΔPBC es isósceles si y solo si $AB \cong CD$.

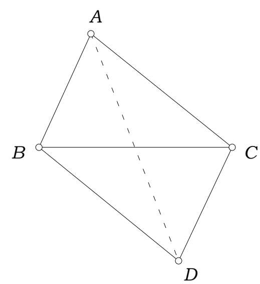
3.107. En la figura,



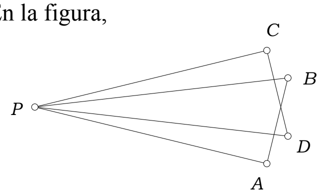
tenemos que $AB \cong AC$ y $AD \cong AE$. Si $\angle BAE \cong \angle DAC$, probar que $\Delta ABD \cong \Delta AEC$.

3.108. En la figura,

tenemos dos triángulos ΔABC y ΔDBC. Si $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{DA}$ son las bisectrices de los ángulos $\angle BAC$ y $\angle CDB$, respectivamente. Probar que $\Delta ABC \cong \Delta DBC$.

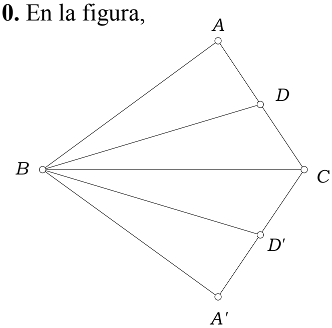


3.109. En la figura,



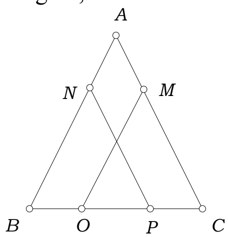
tenemos que $PA \cong PC$, $AB \perp AP$, $CD \perp PC$ y $\angle APD \cong \angle BPC$. Probar que $AB \cong CD$.

3.110. En la figura,



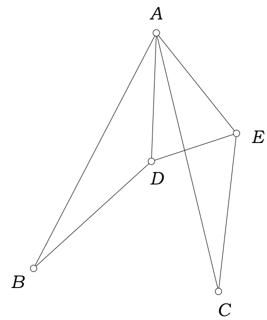
tenemos que $AB \cong A'B$, $\angle DBA \cong \angle A'BD'$ y $\angle CBD \cong \angle D'BC$. Probar que $AD \cong A'D'$.

3.111. En la figura,



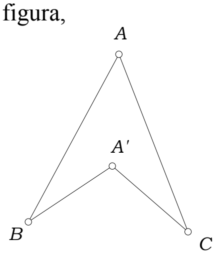
supongamos que ΔABC es un triángulo isósceles con $AB \cong AC$. Si $AC \parallel NP$, $AB \parallel MO$ y $BO \cong PC$, probar que $\Delta NBP \cong \Delta MOC$.

3.112. En la figura,



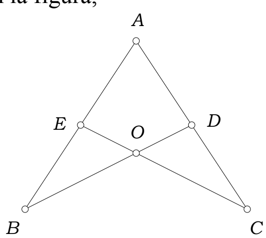
tenemos que $AB \cong AC$, $AD \cong AE$ y $\angle BAC \cong \angle DAE$. Probar que $BD \cong CE$.

3.113. En la figura,



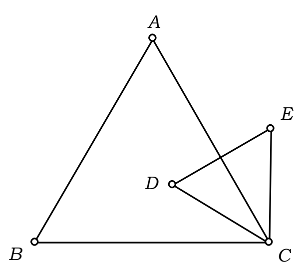
si $AB \cong AC$ y $A'B \cong A'C$, probar que $\angle A'BA \cong \angle ACA'$.

3.114. En la figura,



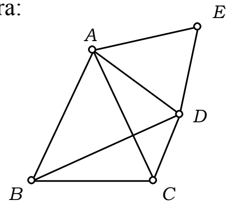
probar que $\Delta OEB \cong \Delta OCD$ si y solo si $\Delta ABD \cong \Delta ACE$.

3.115. En la figura:



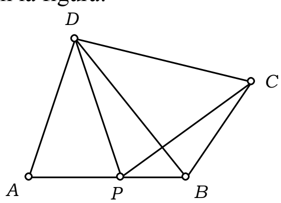
los triángulos ΔABC y ΔDCE son equiláteros. Probar que $\Delta ACE \cong \Delta BCD$.

3.116. En la figura:



$AB \cong AC$, $AD \cong AE$ y $\angle BAC \cong \angle DAE$.
Probar que $BD \cong CE$.

3.117. En la figura:

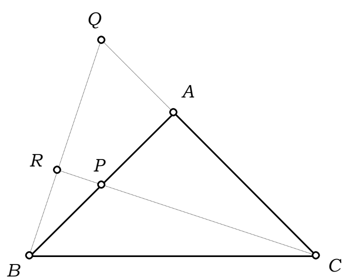


a. Si $DA \cong DP$, $\angle ADP \cong \angle BDC$ y $\angle PAD \cong \angle CPD$, probar que $\Delta DAB \cong \Delta DPC$.

b. Si $\angle PAD \cong \angle DPA \cong \angle CPD$ y $BA \cong PC$, probar que $\angle DCP \cong \angle DBP$.

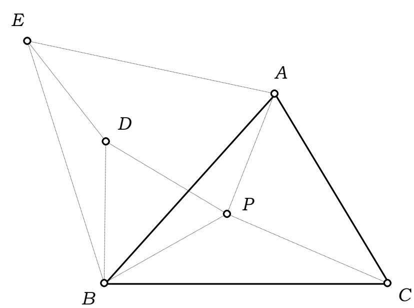
c. Si $DA \cong DP$, $\angle ADP \cong \angle BDC$ y $\angle PAD \cong \angle CPD$, probar que ΔDBC.

3.118[i-3]. En la figura:



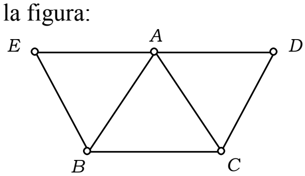
ΔABC es un triángulo rectángulo isósceles con $AB \cong AC$, y $AP \cong AQ$ y R es el punto de intersección de QB y $\overleftrightarrow{PC}$. Probar que $\Delta APC \cong \Delta AQB$.

3.119[i-3]. En la figura:



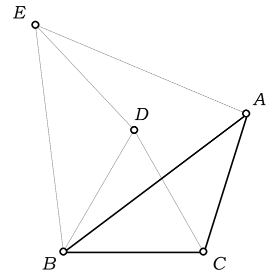
$P \in int(\Delta ABC)$, $|PA| = 2.08$, $|PB| = 2.27$, $|PC| = 2.82$ y ΔDPB y ΔEBA son triángulos equiláteros. Hallar la longitud del segmento DE.

3.120. En la figura:



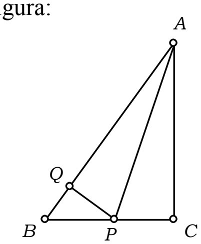
tenemos que A es el punto medio de ED, $CD \cong BE$ y $\angle BEA \cong \angle ADC$. Probar $\angle CBA \cong \angle ACB$.

3.121. En la figura:



tenemos un triángulo ΔABC arbitrario y dos triángulos equiláteros ΔDBC y ΔEBA. Probar que los triángulos ΔABC y ΔEBD son congruentes.

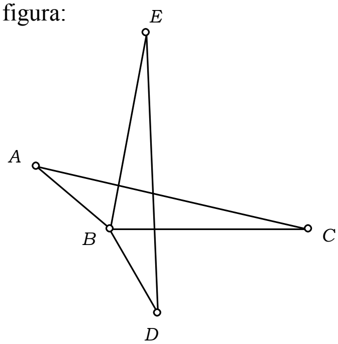
3.122. En la figura:



$\angle C$ es un ángulo recto, $AB \perp QP$ y $AQ \cong AC$.

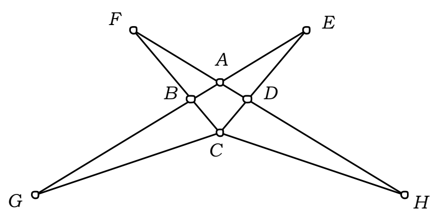
Probar que $\overrightarrow{AP}$ es la bisectriz del ángulo $\angle A$.

3.123. En la figura:



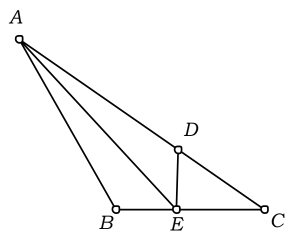
si $AB \cong BD$, $BC \cong BE$ y $AC \cong DE$, probar que $\angle DBC \cong \angle EBA$.

3.124. En la figura:



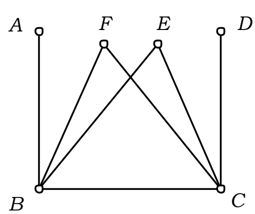
si $\Delta GCE \cong \Delta HCF$, probar que $\Delta GCB \cong \Delta HCD$, $\Delta FBA \cong \Delta EDA$ y $\Delta FCD \cong \Delta ECB$.

3.125. En la figura:



tenemos que $AB \cong AD$ y $\overrightarrow{AE}$ es la bisectriz del ángulo $\angle A$. Probar que $BE \cong ED$.

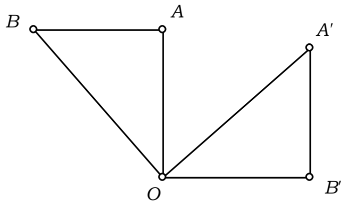
3.126. En la figura:



tenemos que $AB \perp BC$, $DC \perp BC$, $FB \cong EC$ y

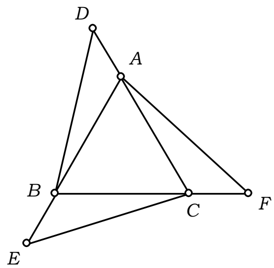
$\angle FBA \cong \angle DCE$. Probar que $\angle BFC \cong \angle BEC$.

3.127. En la figura:



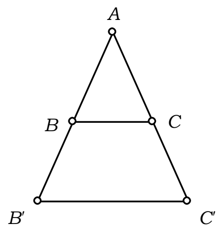
tenemos que $AO \cong OA'$, $OB \cong OB'$, $OA \perp OB'$ y $OA' \perp OB$. Probar que $\Delta ABO \cong \Delta A'B'O$.

3.128. En la figura:



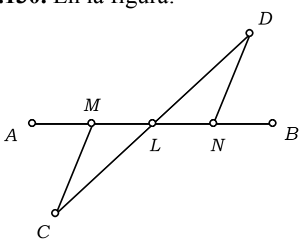
tenemos que ΔABC es un triángulo equilátero y los lados AB, BC y AC se han prolongado hasta los puntos E, F y D, respectivamente. Si $\angle ABD \cong \angle BCE \cong \angle CAF$, probar que $\Delta ADB \cong \Delta BEC \cong \Delta CFA$.

3.129. En la figura:



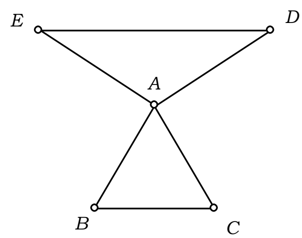
si ΔABC y $\Delta A'B'C'$ son dos triángulos isósceles con $AB \cong AC$ y $AB' \cong A'C'$, probar que $\overleftrightarrow{B'C'} \parallel \overleftrightarrow{BC}$.

3.130. En la figura:



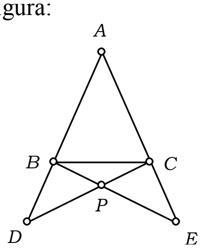
tenemos que L, M y N son los puntos medios de AB, AL y LB, respectivamente. Si $MC \cong ND$ y $m(\angle LCM) + m(\angle LDN) < 180$, probar que L es el punto medio de CD.

3.131. En la figura:



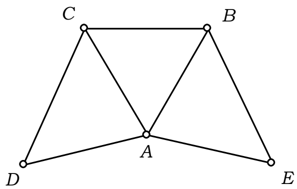
tenemos dos triángulos isósceles ΔABC y ΔADE tales que $AB \cong AC$ y $AD \cong AE$. Probar que $\angle BAD \cong \angle EAC$ si y solo si $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{ED}$.

3.132. En la figura:



tenemos que ΔABC es un triángulo isósceles con $AB \cong AC$ y P es el punto de intersección de BE y CD. Si el punto P está en la bisectriz del ángulo $\angle A$, probar que $\Delta PBD \cong \Delta PEC$.

3.133. En la figura:



tenemos que ΔABC es un triángulo equilátero.

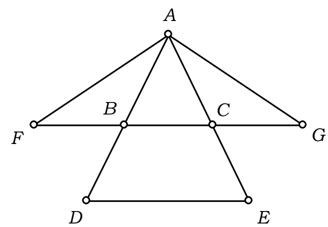
a. Si $CD \cong BE$, $\angle ADC \cong \angle BEA$ y $m(\angle DAE) < 120$, probar que $AD \cong AE$.

b. Si $CD \cong BE$, $DB \cong CE$ y $\angle ADB \cong \angle CEA$, probar que $AD \cong AE$.

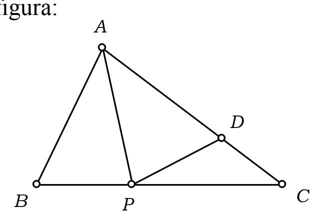
c. Si $CD \cong BE$ y $\angle DCA \cong \angle ABE$, probar que $\angle BAD \cong \angle EAC$.

3.134. En la figura:

si $\angle BFA \cong \angle AGC$, $\angle CBA \cong \angle ACB$ y $\angle EDA \cong \angle AED$, probar que $FD \cong GE$.



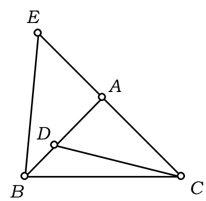
3.135. En la figura:



si $AB \cong AD$ y $\angle BAP \cong \angle PAD$, probar que $\Delta ABP \cong \Delta APD$.

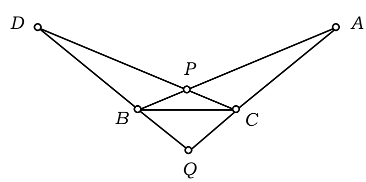
3.136. En la figura:

tenemos que $AB \perp CE$, ΔABC es un triángulo isósceles y $AE \cong DA$. Probar que $\Delta ADC \cong \Delta EBA$.

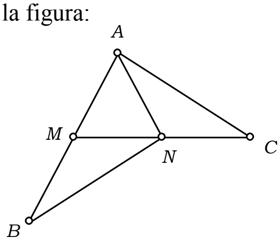


3.137. En la figura:

tenemos que $\Delta ABC \cong \Delta DBC$. Si las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{DC}$ se cortan en el punto P, y $\overleftrightarrow{BD}$ y $\overleftrightarrow{AC}$ se cortan en el punto Q, probar que $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{PQ}$.



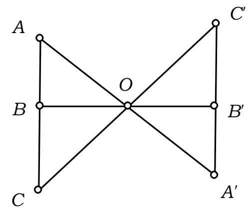
3.138. En la figura:



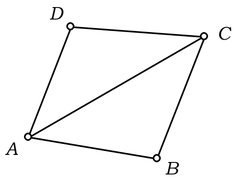
si M es el punto medio de AB, N el punto medio de MC y $AM \cong AN$, probar que $AC \cong BN$.

3.139. En la figura:

si $OA \cong OA'$, $OC \cong OC'$ y $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{BB'}$, probar que $AB \cong A'B'$ y $BC \cong B'C'$.



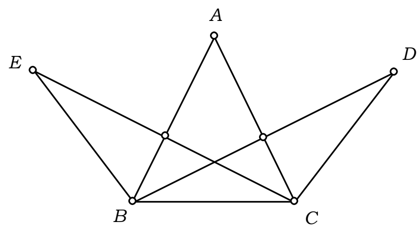
3.140. En la figura:



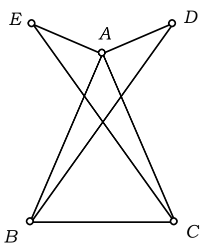
si $\angle BAC \cong \angle CAD$ y $BA \cong BC$, probar que $AD \parallel BC$.

3.141. En la figura:

si $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{CA}$ son las bisectrices de los ángulos $\angle CBE$ y $\angle DCB$, respectivamente, $BD \perp AC$ y $CE \perp AB$, probar que $BE \cong CD$.



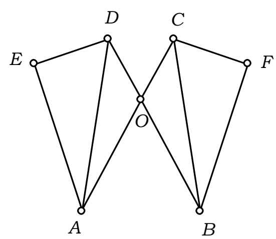
3.142. En la figura:



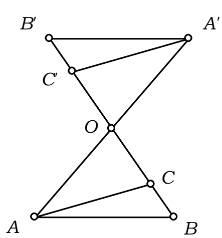
si $AB \cong AC$, $AD \cong AE$, $AD \perp AC$ y $AE \perp AB$, probar que $\Delta AEC \cong \Delta ADB$.

3.143. En la figura:

tenemos que $OA \cong OB$, $OC \cong OD$, $\angle FBC \cong \angle DAE$ y $\angle BCF \cong \angle EDA$. Probar que $ED \cong FC$.



3.144. En la figura:

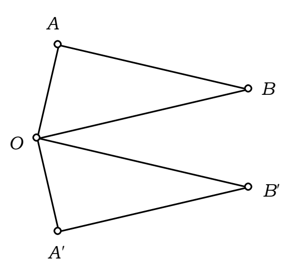


a. Si $OB \cong OB'$, $\angle OB'A' \cong \angle OBA$ y $\angle C'A'O \cong \angle CAO$, probar que $OC \cong OC'$.

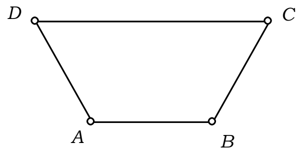
b. Si AA' y BB' se bisecan en el punto O y $\angle B'A'C' \cong \angle BAC$, probar que $AC \cong A'C'$.

3.145. En la figura:

si $AB \perp OA$, $OB' \perp OA$, $A'B' \perp OA'$, $OB \perp OA'$ y $OA \cong OA'$, probar que $OB \cong OB'$.



3.146. En la figura:



si $\angle BAD \cong \angle CBA$ y $AD \cong BC$, probar que $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$.

3.147. Si ΔABC es un triángulo isósceles con $b = c$, $a = 5x + 30$, $b = 10x + 40$ y $c = 2x + 120$, encontrar las longitudes de los lados del triángulo ΔABC.

3.148. Sean ΔABC un triángulo, y D y E los puntos que trisecan su lado BC. Probar que las semirrectas $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{AE}$ no pueden trisecar al ángulo $\angle A$.

3.149. Probar que dos rectas son secantes si y solo si cada semiplano determinado por una de ellas interseca a cada semiplano determinado por la otra.

3.150. Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos. Si $AB \parallel A'B'$, $AB \cong A'B'$, $AC \parallel A'C'$ y $AC \cong A'C'$, probar que $BC \parallel B'C'$ y $BC \cong B'C'$.

3.151 (Axioma de Desargues). Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos tales que los segmentos AA', BB' y CC' no son congruentes entre sí. Si $\overleftrightarrow{AA'} \parallel \overleftrightarrow{BB'}$, $\overleftrightarrow{BB'} \parallel \overleftrightarrow{CC'}$, $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{A'B'}$, $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{A'C'}$, probar que $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{B'C'}$.

3.152. Si $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$, enlistar todas las posibles ternas de puntos no colineales del conjunto $\{A, B, C, D\}$.

3.153. ¿Son un lápiz y su sombra proyectada sobre una superficie siempre paralelos?

3.154. ¿Es posible dividir al plano en cinco regiones distintas con un cierto número de rectas no paralelas entre sí?

3.155. Supongamos que m y n son dos rectas paralelas y l una recta. Probar $l \parallel m$ si y solo si $l \parallel n$.

3.156. Sean l, m y n tres rectas. Determinar el valor de # entre $\parallel$ y $\perp$ para que los siguientes enunciados sean verdaderos:

a. Si $m \parallel n$ y $n \parallel l$, entonces $m \# l$.
b. Si $m \parallel n$ y $n \perp l$, entonces $m \# l$.
c. Si $m \perp n$ y $n \parallel l$, entonces $m \# l$.
d. Si $m \perp n$ y $n \perp l$, entonces $m \# l$.

3.157. Sean m, m', l y l' cuatro rectas tales que $l \parallel l'$ y $m \parallel m'$. Probar las siguientes afirmaciones:

a. $l \perp m$ si y solo si $l' \perp m'$.
b. $l \parallel m$ si y solo si $l' \parallel m'$.

3.158. Sean m, m', l y l' cuatro rectas tales que $l \perp l'$ y $m \perp m'$. Probar las siguientes afirmaciones:

a. Si $l \parallel m$, entonces $l \perp m'$, $m \perp l'$ y $l' \parallel m'$.
b. Si $l \perp m$, entonces $l \parallel m'$, $m \parallel l'$, y $l' \perp m'$.
c. Si l y m son secantes, entonces l' y m' son también secantes.

3.159. En la figura:

	l_1	l_2	l_3
m_1	$\parallel$		$\perp$
l_3			$=$
m_2	$\parallel$	$\perp$	

completar los cuadrados poniendo $\parallel$, $\perp$ o $=$.

3.160. Sean l y l' dos rectas secantes y m una recta.

a. Si $l \parallel m$, probar que m corta a l' y que los puntos de intersección de l y l', y de m y l' son diferentes.
b. Si $l \perp m$, ¿es cierto que m corta a l'?

3.161. Probar que dos rectas secantes no pueden ser paralelas a una misma recta.
3.162. Sean l y m dos rectas paralelas y $O \notin l \cup m$. Probar que para cada punto $A \in l$ existe un punto $f(A) \in m$ tal que O, A y $f(A)$ son colineales. Probar que la función f es una biyección entre los puntos de l y de m.
3.163. Sean m y l dos rectas secantes y $O \notin m \cup l$. ¿Es cierto que para cada punto $A \in m$ existe un punto $f(A) \in l$ tal que O, A y $f(B)$ son colineales?
3.164. Sean m y l dos rectas paralelas, $P \in m$ y $\mathbf{A} = \{A : A \notin m\}$. Si $A, B \in \mathbf{A}$ definimos $A \sim B$ si $A = B$ o si los tres puntos A, B y P son colineales.
a. Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia.
b. Probar que para cada $A \in \mathbf{A}$ existe $f(A) \in l$ tal que $A \sim f(A)$.
c. Probar que $f : \mathbf{A} \to l$ es una función suprayectiva y determinar el conjunto $f^{-1}(B)$ para cada $B \in l$.
3.165. Probar que entre cualesquiera dos rectas del plano existe una biyección ente sus puntos.
3.166. Sean l y m dos rectas paralelas, $A \in l$, $B \in m$ y M el punto medio de AB. Si la recta n pasa por el punto M y corta a l en el punto C, probar que n corta a m en un punto D tal que M es el punto medio de CD.
3.167[a-137]. Dada una cantidad finita de rectas no todas concurrentes y cada par de ellas se interseca, probar que hay un punto en el plano que contiene exactamente dos de las rectas dadas.
3.168. Probar que una recta paralela a la bisectriz de dos ángulos opuestos por el vértice, corta a los lados de los ángulos en puntos que son equidistantes al vértice común de ambos ángulos.
3.169. Si dos ángulos tienen sus lados en rectas paralelas y uno de ellos es degenerado, probar que el otro también es degenerado.
3.170. Sean $\angle AOB$ y $\angle A'O'B'$ dos ángulos congruentes. Si uno de los ángulos está contenido en el interior del otro y $\overrightarrow{OA} \parallel \overrightarrow{OA'}$, probar que $\overrightarrow{OB} \parallel \overrightarrow{OB'}$.
3.171. Probar que existe un triángulo rectángulo isósceles.
3.172. Si $\angle AOB$ es un ángulo tal que $\overrightarrow{OA} \parallel l$ y $\overrightarrow{OB} \parallel l$, probar que $\angle AOB$ tiene que ser un ángulo degenerado.
3.173. Sean $\angle AOB$ y $\angle A'O'B'$ dos ángulos congruentes. Si $int(\angle AOB) \cap int(\angle A'O'B') \neq \varnothing$ y $\overrightarrow{OA} \parallel \overrightarrow{OA'}$, probar que $\overrightarrow{OB} \parallel \overrightarrow{OB'}$.
3.174. Si $int(\angle AOB) \subseteq int(\angle CPD)$, ¿es cierto que los ángulos $\angle AOB$ y $\angle CPD$ tienen sus lados paralelos?
3.175. Sea ΔABC un triángulo. Si D es el punto de intersección de la recta paralela a BC que pasa por A y la recta paralela a AC que pasa por B, probar que C y D están en diferentes semiplanos determinados por la recta $\overleftrightarrow{AB}$.
3.176. Sean ΔABC un triángulo, M_c el punto medio de AB y l una recta que pasa por el vértice A que es paralela a BC. Si D es el punto de intersección de l y la recta $\overleftrightarrow{M_cC}$, probar que $BD \parallel AC$.
3.177. Tenemos que cuatro segmentos AB, CD, AE y CF tales que $AB \cong CD$, $AB \parallel CD$, $AE \cong CF$ y $AE \parallel CF$. Dar una condición necesaria y suficiente para que $BE \cong DF$.
3.178. Si tres semirrectas con un mismo vértice son cortadas por una recta, probar que dichas semirrectas yacen en un mismo semiplano determinado por una recta que pasa por su vértice.
3.179. Sean l una recta y A, B y C tres puntos distintos. Si $\overrightarrow{AB} \perp l$, $A \in l$ y $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AB}$, probar que $\overrightarrow{AC} \subseteq l$.
3.180. ¿Es posible que tres rectas sean mutuamente perpendiculares?
3.181. Probar que dos semirrectas son colineales si y solo si existe una recta perpendicular a ambas semirrectas.
3.182. Dados tres puntos en el plano, probar que existen dos rectas perpendiculares tales que cada una de ellas contiene al menos uno de los puntos dados.
3.183. Dados dos ángulos $\angle\alpha$ y $\angle\beta$, decimos que $\angle\alpha \sim \angle\beta$ si se cumple una de las siguientes dos condiciones:
i. Cada uno de los lados de $\angle\alpha$ es perpendicular a un lado del ángulo $\angle\beta$.
ii. Cada uno de los lados de $\angle\alpha$ es paralelo a un lado del ángulo $\angle\beta$.
a. ¿Es $\sim$ una relación de equivalencia?

b. Si $m(\angle\alpha) = 40$ y $\angle\alpha \sim \angle\beta$, ¿cuáles son las posibles medidas del ángulo $\angle\beta$?

3.184. ¿Si dos ángulos son suplementarios, deben dos de sus lados ser paralelos?

3.185. ¿Si dos ángulos son complementarios, deben dos de sus lados ser perpendiculares?

3.186. Si dos ángulos tienen sus lados correspondientes paralelos, probar que sus bisectrices o son paralelas o son perpendiculares.

3.187. Probar que uno de los ángulos formados por dos rectas dadas que se cortan o es congruente o es suplementario a uno de los ángulos que forman otras dos rectas paralelas a las dadas.

3.188. Dada una cantidad finita de rectas paralelas entre sí, probar que hay una de ellas tal que las otras están contenidas en un mismo semiplano determinado por dicha recta.

3.189. Si dos rectas paralelas son cortadas por una recta transversal de tal forma que dos ángulos internos del mismo lado de la transversal cumplen que uno de ellos mide 30 más que el otro, encontrar la medida de todos los ángulos internos.

3.190. Si dos rectas son intersecadas por una recta transversal y dos ángulos alternos internos son congruentes, probar que los otros dos ángulos alternos internos también son congruentes.

3.191. Si dos rectas son intersecadas por una recta transversal y dos ángulos correspondientes son congruentes, probar que los demás ángulos correspondientes también son congruentes.

3.192. Sean m y n dos rectas cortadas por una recta transversal l. Si $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ son dos ángulos internos formados por dichas rectas tales que sus interiores estén en un mismo semiplano determinado por l y $m(\angle\beta) - m(\angle\alpha) = 20$, probar que $m \parallel n$ si y solo si $m(\angle\alpha) = \frac{4}{5}\, m(\angle\beta)$.

3.193. Consideremos los conjuntos $P = \{A, B, C\}$ y $L = \{\{A, B\}, \{B, C\}, \{C, A\}\}$. Probar que P y L cumplen con el Axioma de las Rectas Paralelas, pero no con el siguiente enunciado:

Para toda recta l y para todo punto P fuera de ella existe una recta m tal que $m \cap l = \varnothing$ y $P \in m$.

3.194. Consideremos los conjuntos $P = \{A, B, C, D, E\}$ y $L = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{B, E\}, \{C, D\}, \{C, E\}, \{D, E\}, \{A, E\}\}$. Probar que P y L no cumplen con el Axioma de las Rectas Paralelas, pero sí con el siguiente enunciado:

Para toda recta l y para todo punto P fuera de ella existe una recta m tal que $m \cap l = \varnothing$ y $P \in m$.

3.195. Sin suponer el Axioma de las Rectas Paralelas, ¿es el plano una unión de segmentos disjuntos entre sí?

3.196. Sean A y B cualesquiera dos puntos en el plano. Dar una correspondencia biunívoca entre las rectas que pasan por el punto A y las rectas que pasan por el punto B, ¿es necesario el Axioma de las Rectas Paralelas para establecer dicha correspondencia?

3.197. Sean l y m dos rectas paralelas, $A, B \in l$ y $C, D \in m$ tales que A precede a B. Probar que $AD \cap BC \neq \varnothing$ si y solo si C precede a D, ¿es cierto el resultado si las rectas no son paralelas?

3.198. Sean m y n dos rectas diferentes y P un punto fuera de ambas. Probar que existe una recta l tal que $P \in l$ y l corta a m y n, ¿es cierto este resultado si no suponemos el Axioma de las Rectas Paralelas?

3.199. Sean $\angle AOB$ un ángulo no degenerado y $P \in int(\angle ABC)$.

a. Probar que existen puntos $A' \in \overrightarrow{OA}$ y $B' \in \overrightarrow{OB}$ tales que $P \in A'B'$.

b. Probar que existen puntos $A' \in \overrightarrow{OA}$ y $B' \in \overrightarrow{OB}$ tales que $P \in int(\Delta B'OA')$.

c. ¿Son ciertas estas dos afirmaciones sin suponer el Axioma de las Rectas paralelas?

3.200. Sea $\angle AOB$ un ángulo no degenerado. Probar que $P \in int(\angle ABC)$ si y solo si toda recta que pasa por P corta al ángulo $\angle AOB$, ¿es cierto este resultado si no suponemos el Axioma de las Rectas Paralelas?

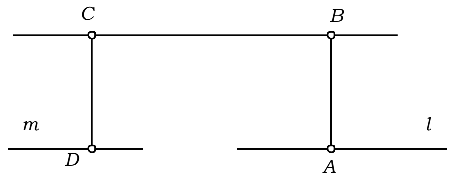
3.201. Sean l una recta y $A \notin l$. Probar que las siguientes condiciones son equivalentes:

a. Por el punto A pasa a lo más una recta paralela a l.

b. Si m y n son dos rectas que pasan por el punto A y n corta a l de tal forma que la suma de las medidas de dos ángulos internos cuyos interiores yacen en un mismo semiplano determinado por la recta n es menor que 180, entonces m también corta a la recta l.

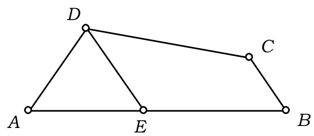
3.202. Dadas k rectas, en donde $k > 1$ es un número entero positivo, probar que existe una recta que corta a cada una de las rectas dadas.

3.203. En la figura:



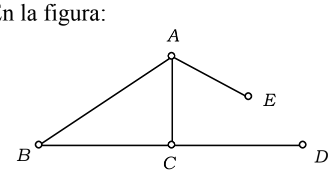
tenemos que $l \perp \overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{CD} \perp m$. Si $AB \cong CD$, probar que $l = m$.

3.204. En la figura:



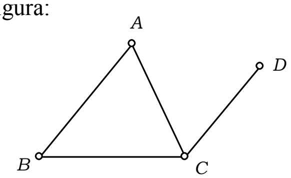
tenemos que $\angle EAD \cong \angle CBE$. Probar que $DA \cong DE$ si y solo si $ED \parallel BC$.

3.205. En la figura:



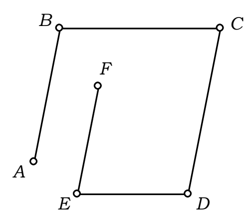
tenemos que $\angle ACB$ es un ángulo recto y $\overrightarrow{AC}$ es la bisectriz del ángulo $\angle BAE$. Probar que $\overrightarrow{AE}$ corta a la recta $\overleftrightarrow{CD}$.

3.206. En la figura:



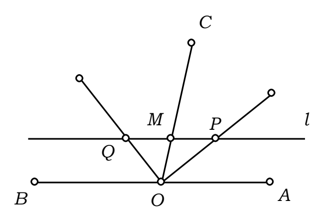
tenemos que $BA \cong BC$ y $\overrightarrow{CA}$ es la bisectriz del ángulo $\angle DCB$. Probar que $AB \parallel CD$.

3.207. En la figura:



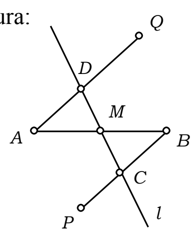
tenemos $AB \parallel EF$, $EF \parallel DC$ y $ED \parallel BC$. Si $m(\angle ABC) = 101$, encontrar $m(\angle DEF)$.

3.208. En la figura:



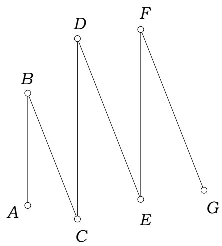
$\angle AOB$ es un ángulo llano, $l \parallel \overleftrightarrow{BA}$, y $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$ son las bisectrices de los ángulos $\angle AOC$ y $\angle COB$, respectivamente. Probar que $MP \cong MQ$.

3.209. En la figura:



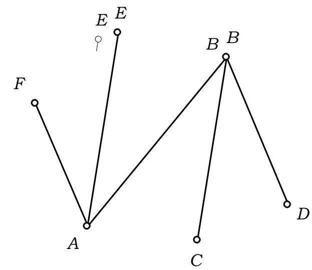
tenemos dos ángulos congruentes $\angle BAQ \cong \angle PBA$, M es el punto medio del segmento AB y l una recta que corta a AQ y a BP en los puntos C y D, respectivamente. Probar que $\Delta CBM \cong \Delta DAM$.

3.210. En la figura,



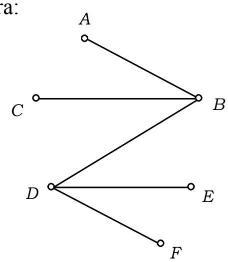
si $AB \parallel CD$, $CD \parallel EF$, $BC \parallel DE$ y $DE \parallel FG$, probar que $\angle ABC \cong \angle EFG$.

3.211. En la figura:



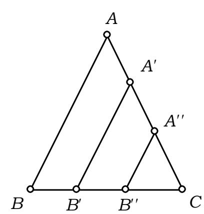
si $\angle EAF \cong \angle CBD$ y $\angle BAE \cong \angle ABC$, probar que $AF \parallel BD$.

3.212. En la figura:



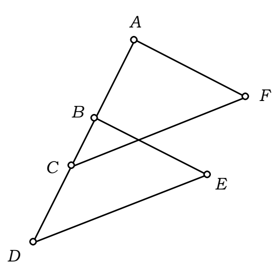
si $AB \perp BD$, $DF \perp BD$ y $\angle ABC \cong \angle FDE$, probar que $CB \parallel DE$.

3.213. En la figura:



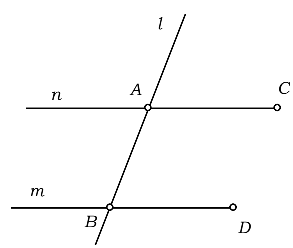
si $AB \cong AC$, $A'B' \cong A'C$ y $A''B'' \cong A''C$, probar que AB, $A'B'$ y $A''B''$ son paralelos entre sí.

3.214. En la figura:



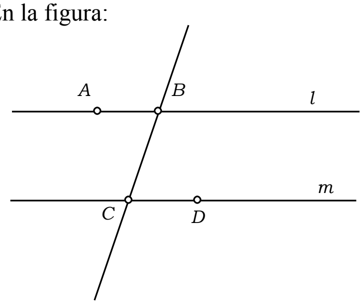
si $AF \cong BE$, $AB \cong CD$, $AD \perp AF$ y $AD \perp BE$, probar que $CF \parallel DE$.

3.215. En la figura:



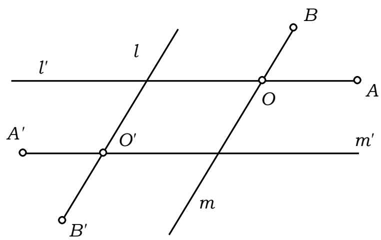
tenemos que l es una recta transversal a las rectas m y n. Si las bisectrices de los ángulos $\angle BAC$ y $\angle DBA$ son perpendiculares, probar que $m \parallel n$.

3.216. En la figura:



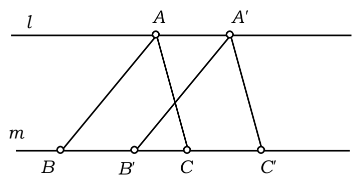
si $l \parallel m$, $m(\angle ABC) = 2x + 30$ y $m(\angle DCB) = x + 45$, encontrar la medida del ángulo $\angle ABC$.

3.217. En la figura:



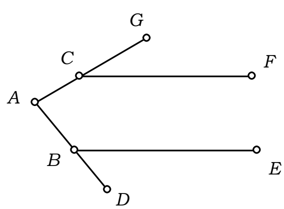
si $l \parallel m$ y $l' \parallel m'$, probar que $\angle AOB \cong \angle A'O'B'$.

3.218. En la figura:



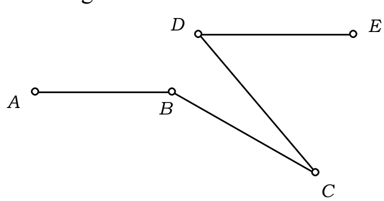
si $l \parallel m$, $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{A'B'}$ y $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{A'C'}$, probar que $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

3.219. En la figura:



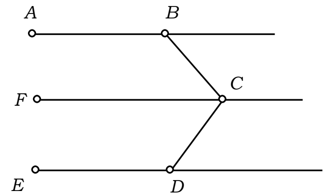
tenemos dos rectas paralelas $\overleftrightarrow{BE}$ y $\overleftrightarrow{CF}$, $m(\angle DBE) = 50$ y $m(\angle FCG) = 30$. Calcular la medida del ángulo $\angle BAC$.

3.220. En la figura:



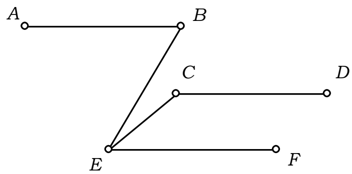
tenemos dos rectas paralelas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{DE}$, $m(\angle CDE) = 50$ y $m(\angle DCB) = 30$. Calcular la medida del ángulo $\angle ABC$.

3.221. En la figura:



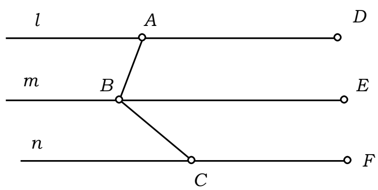
si $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{FC}$ y $\overleftrightarrow{FC} \parallel \overleftrightarrow{ED}$, probar la identidad $m(\angle ABC) + m(\angle BCF) + m(\angle FCD) + m(\angle CDE) = 360$.

3.222. En la figura:



tenemos que $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{EF}$. Si $m(\angle ABE) = 60 = 3m(\angle CEB)$, calcular la medida del ángulo $\angle ECD$.

3.223. En la figura:



tenemos tres rectas l, m y n paralelas entre sí. Si $m(\angle BAD) = 110$, $m(\angle FCB) = 140$, $m(\angle CBE) = x - y$ y $m(\angle EBA) = x + y$, encontrar el valor numérico de x y y.

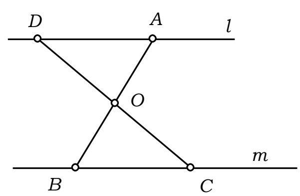
3.224. En la figura:

supongamos que $l \parallel m$. Probar que los siguientes enunciados son equivalentes:

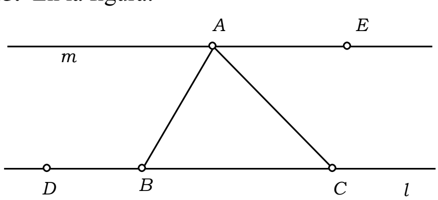
a. O es el punto medio de AB.

b. $DA \cong BC$.

c. O es el punto medio de DC.

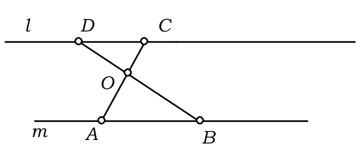


3.225. En la figura:



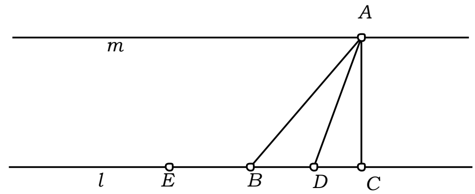
si l y m son dos rectas paralelas, $m(\angle ABD) = 120$ y $m(\angle BAC) - m(\angle CAE) = 40$, encontrar las medidas de los ángulos del triángulo ΔABC.

3.226. En la figura:



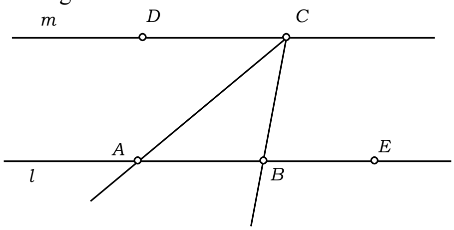
sean l y m dos rectas. Probar que $l \parallel m$ si y solo si $(m(\angle BAO) - m(\angle DCO))(m(\angle OBA) - m(\angle ODC)) = 0$. Si $(m(\angle BAO) - m(\angle ODC))(m(\angle OBA) - m(\angle DCO)) = 0$, ¿deben ser las rectas l y m paralelas?

3.227. En la figura:



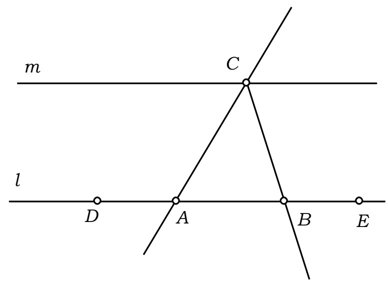
si l y m son dos rectas paralelas, $\overrightarrow{AD}$ es la bisectriz del ángulo $\angle BAC$, $m(\angle BAD) = 20$ y $m(\angle ABE) = 130$, probar que ΔABC es un triángulo rectángulo.

3.228. En la figura:



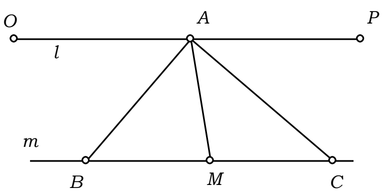
si l y m son dos rectas paralelas, $\overrightarrow{CA}$ es la bisectriz del ángulo $\angle DCB$ y $m(\angle DCA) = 40$, encontrar $m(\angle EBC)$.

3.229. En la figura:



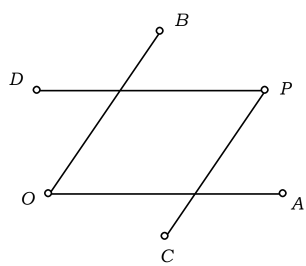
si l y m son dos rectas paralelas, $m(\angle CAD) = 121$ y $m(\angle ACB) = 49$, encontrar $m(\angle EBC)$.

3.230. En la figura:



si l y m son dos rectas paralelas, $\overrightarrow{AB}$ es la bisectriz del ángulo $\angle OAM$, y $\overrightarrow{AC}$ es la bisectriz del ángulo $\angle MAP$, probar que M es el punto medio de BC y $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AC}$.

3.231. En la figura:



si $\overleftrightarrow{OB} \parallel \overleftrightarrow{CP}$ y $\overleftrightarrow{OA} \parallel \overleftrightarrow{PD}$, probar que $\angle AOB \cong \angle DPC$.

3.232. Sean AB un segmento y P un punto.

a. Probar que existe un punto Q tal que $AB \cong PQ$.

b. Si $P \notin \overleftrightarrow{AB}$, probar que existe un punto Q tal que $AB \cong PQ$ y $AP \cong BQ$.

3.233. Dadas k rectas en el plano, en donde $k > 1$ es un número natural, tales que cualesquiera tres de ellas no son concurrentes, ¿cuáles son los posibles números de puntos de intersección entre dichas rectas?

3.234. Doblar una hoja de papel para que se marque una recta sobre ella. Haciendo un segundo doblez, marcar una recta que sea perpendicular a la primera y que pase por un punto dado.

3.235. Se tiene una recta marcada sobre una hoja de papel con dobleces de la misma. Mediante dobleces marcar sobre la misma hoja una recta paralela a la dada.

3.236. Sobre una hoja de papel se tienen marcados una recta y un punto fuera de ella. Con dobleces de dicha hoja de papel, marcar sobre ella la recta paralela a la dada que pase por el punto dado.

3.237. Probar que hay una cantidad infinita de direcciones en el plano.

3.238. Si se tienen i rectas en una cierta dirección y otras j rectas en otra cierta dirección, en donde i y j son números enteros positivos, ¿cuántos puntos de intersección hay entre las i rectas y las j rectas?
3.239. Dada una dirección, probar que por cada punto del plano hay una recta que pasa por él y pertenece a la dirección dada.
3.240. Sean l una recta, D una dirección que no contenga a l, AB un segmento y M el punto medio de AB. Sean $f(A)$, $f(M)$ y $f(B)$ las proyecciones de A, M y B sobre la recta l en la dirección D, respectivamente.
a. Probar que si $f(A)f(B)$ es un segmento, entonces $f(M)$ es su punto medio.
b. Sean $m \in \mathsf{D}$ y P el punto de intersección de l y m. Si $f(A)f(B)$ es un segmento, probar que

$$|Pf(M)| = \frac{|Pf(A)|+|Pf(B)|}{2}.$$

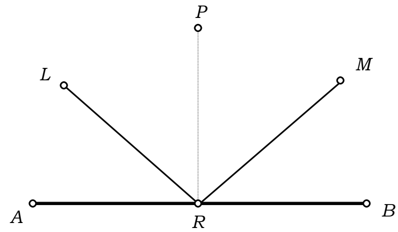
3.241. Sean l una recta y D una dirección que no contenga a l. Para cada $m \in \mathsf{D}$, sea $f(m)$ el punto de intersección de l y m. Probar que la función f: $\mathsf{D} \to l$ así definida es biyectiva.
3.242. Sean l y m dos rectas secantes. Definimos f: *Plano* $\to$ $l \times m$ por $f(P) = (A,B)$, en donde A es la proyección del punto P sobre la recta l en la dirección de m, y B es la proyección del punto P sobre la recta m en la dirección de l. Probar que f es una función inyectiva.
3.243. Sean l y m dos rectas arbitrarias y P un punto en el plano. Si A y B son las proyecciones de P sobre las rectas l y m en la dirección D, respectivamente, probar que A, B y P son colineales.
3.244. Sean l una recta y D una dirección que no contenga a l. Probar que la proyección de un segmento sobre l en la dirección D es un punto de l o un segmento de l. Probar la afirmación correspondiente para una recta y una semirrecta.
3.245. Sean l y m dos rectas y P un punto fuera de ambas. Supongamos que A y B son las proyecciones del punto P sobre l y m en las direcciones D y D’, respectivamente. Si A, B y P son colineales, probar que $\mathsf{D} = \mathsf{D}$’.
3.246. Sean l y m dos rectas y D una dirección distinta a las direcciones de dichas rectas. Para cada $P \in l$, sea $f(P)$ la proyección de P sobre m en la dirección D. Consideremos esta función f: $l \to m$.
a. Probar que $\overleftrightarrow{Pf(P)} \in \mathsf{D}$, para toda $P \in l$. b. Probar que f es biyectiva.
c. Si P, Q y $R \in l$ y R está entre P y Q, probar que $f(R)$ está entre $f(P)$ y $f(Q)$.
d. Sea g: $m \to l$ la función definida por: $g(Q)$ es la proyección de Q sobre l en la dirección D, para cada $Q \in m$. Probar que las composiciones $g \bullet f$ y $f \bullet g$ son las identidades en l y m, respectivamente.
3.247. Sean l y m dos rectas y D y D’ dos direcciones tales que $m \notin \mathsf{D}$ y $l \notin \mathsf{D}$’. Para cada $P \in l$, sea $f(P)$ la proyección de P sobre m en la dirección D y, para cada $Q \in m$, sea $g(Q)$ la proyección de Q sobre l en la dirección D’. Consideremos las funciones f: $l \to m$ y g: $m \to l$.
a. Si existe un punto $P \in l$ tal que $P \neq f(P)$ y $g(f(P)) = P$, probar que $\mathsf{D} = \mathsf{D}$’.
b. Supongamos que $l \parallel m$. Probar que para todo par de puntos P, $Q \in l$, se cumple la congruencia

$$\Delta Pf(P)g(f(P)) \cong \Delta Qf(Q)g(f(Q)).$$

3.248. Tenemos una cantidad finita de puntos en el plano tales que ninguna terna de ellos es colineal, ¿es posible encontrar rectas paralelas tales que cada una de ellas contenga uno y solo uno de los puntos dados?
3.249[i-4]. Tenemos $3k$ puntos en el plano tales que ninguna terna es colineal, en donde $k > 1$ es un número natural, ¿es posible con estos puntos formar k triángulos que sean disjuntos entre sí?
3.250[i-4]. Tenemos $2k$ puntos en el plano, en donde k es un número natural positivo, ¿es posible encontrar una recta tal que cada semiplano determinado por la misma contenga exactamente k de los puntos dados?
3.251. Tenemos $2k$ puntos y un punto fijo en el plano diferente de los anteriores, en donde k es un número natural positivo, ¿es posible encontrar una recta que pase por el punto fijo tal que cada semiplano determinado por la misma contenga exactamente k de los puntos dados?
3.252. Tenemos k puntos en el plano, en donde $k > 1$ es un número natural, e i y j números naturales positivos tales que $i + j = k$, ¿es posible encontrar un triángulo de tal forma que su interior contenga i puntos de los dados y su exterior contenga los j restantes?
3.253. Tenemos $2k$ puntos y un punto fijo en el plano diferente de los anteriores, en donde k es un número natural positivo, ¿es posible encontrar un triángulo, de tal forma que su interior contenga k puntos de los dados, su exterior contenga los k restantes y el punto fijo sea un punto del triángulo?

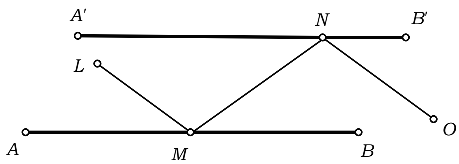
3.254. Un hombre perdió un mapa que marcaba el lugar de un tesoro escondido. Lo único que recuerda es que está situado a 100 pasos hacia el norte de un árbol y a 60 pasos de un segundo árbol, ¿es posible que el hombre encuentre el tesoro con esta información?

3.255. Supongamos que un rayo de luz se emite desde un punto L sobre un espejo AB y se refleja en el punto R a lo largo de $\overrightarrow{RM}$. Sea $\overleftrightarrow{PR}$ la recta perpendicular a AB en el punto R. Sabemos por la física que el *ángulo de incidencia* $\angle PRL$ y el *ángulo de reflexión* $\angle MRP$ del rayo son congruentes.

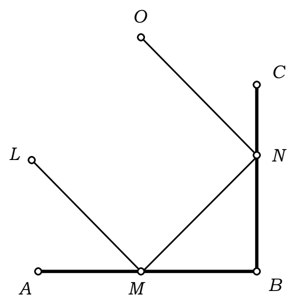


a. Supongamos que un rayo de luz se dirige desde un punto L a un espejo AB y su reflejo se dirige a un segundo espejo $A'B'$. Si $LMNO$ es la trayectoria del rayo, probar que $LM \parallel NO$.

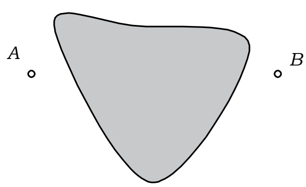
3.256. Usando el segundo criterio de congruencia para triángulos (3.2.7), mostrar que se puede calcular la altura de un árbol.



b. Supongamos que AB y BC son dos espejos colocados uno sobre el otro de manera perpendicular. Si $LMNO$ es la trayectoria de un rayo de luz, probar que $LM \parallel NO$.

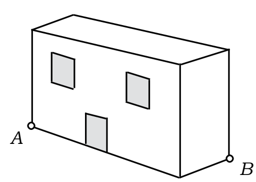


3.257. En la figura



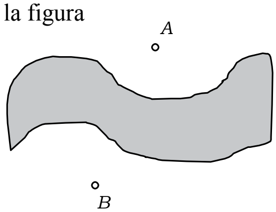
se quiere medir la distancia entre dos puntos que están en lados opuestos de un lago. Dar un método usando triángulos congruentes para calcular dicha distancia.

3.258. En la figura:



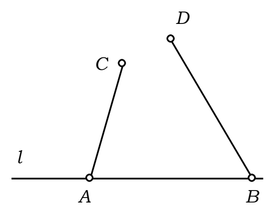
mostrar como se puede medir la longitud que hay entre las esquinas A y B del edificio.

3.259. En la figura

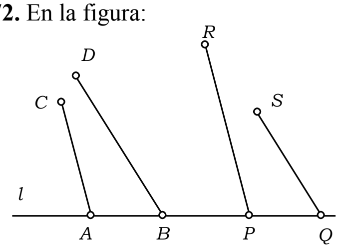


mediante los criterios de congruencia para triángulos, mostrar que se puede calcular la distancia entre dos puntos A y B separados por un río.

3.260. Trazar la recta que determinan dos puntos accesibles separados por un obstáculo inaccesible.
3.261. Mediante triángulos congruentes, determinar la altura de un árbol cuya base es inaccesible.
3.262. Determinar la distancia entre dos puntos accesibles y un punto inaccesible, pero visible.
3.263. Dar un método usando triángulos congruentes para encontrar la distancia entre dos puntos inaccesibles, pero visibles.
3.264. Encontrar la distancia mínima de un punto inaccesible, pero visible a una recta accesible.
3.265. Encontrar la distancia entre un barco y un punto sobre la playa.
3.266. Trazar una recta paralela a una recta accesible que pase por un punto inaccesible, pero visible.
3.267. Tazar una recta perpendicular a un segmento accesible que pase por un punto inaccesible.
3.268. Dos rectas accesibles l y l' se cortan en un punto inaccesible A. Encontrar la distancia entre el punto A y un punto accesible P.
3.269. Dos rectas accesibles l y l' se cortan en un punto inaccesible A. Trazar la recta que pasa por A y un punto accesible P.
3.270. Dar un método para encontrar la distancia entre dos puntos inaccesibles e invisibles, cada uno de los cuales esta dado por la intersección de dos rectas accesibles.
3.271. En la figura:



l es una recta, $A, B \in l$, y $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BD}$ son dos semirrectas.
Probar que $\overrightarrow{AC} \cap \overrightarrow{BD} \neq \varnothing$ si y solo si
$$m(\angle BAC) + m(\angle DBA) < 180.$$
3.272. En la figura:



tenemos una recta l y puntos $A,\ B,\ C, D \in l$ que satisfacen $AB \cong PQ$. Supongamos que $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{QS}$ son cuatro semirrectas tales que $\angle BAC \cong \angle QPR$ y $\angle DBA \cong \angle SQP$. Si las semirrectas $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BD}$ se cortan, probar que $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{QS}$ también se cortan.

3.273. Sean $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ dos semirrectas paralelas. Si A precede a B, probar que C precede a D.
3.274[l-239, p. 102 – 103]. Se tienen dos conjuntos, los elementos de uno de ellos son llamados abejas y los elementos del otro son llamados enjambres. Consideremos los siguientes axiomas:
A_1: Cada enjambre es un conjunto de abejas.
A_2: Dos enjambres distintos tienen una y solo una abeja en común.
A_3: Cada abeja pertenece a dos y solamente a dos enjambres.
A_4: Hay exactamente cuatro enjambres.
Probar los siguientes enunciados:
a. Hay exactamente seis abejas.
b. Hay exactamente tres abejas en cada enjambre.
c. Por cada abeja existe exactamente otra abeja que no pertenece al enjambre que pertenece la primera.
3.275[l-239, p. 105]. Tenemos dos conjuntos P y L tales que los elementos de L son subconjuntos no vacíos de P. Se consideran los siguientes axiomas:
A_1: Si $A, B \in P$ son distintos, entonces existe una y solamente una $l \in L$ tal que $A, B \in l$.
A_2: Para cada a $l \in L$ existe una única a $m \in L$ tal que $l \cap m = \varnothing$.
A_3: $L \neq \varnothing$.

A_4 : Para cada a $l \in L$, $l \neq \emptyset$.

A_5 : Cada a $l \in L$ tiene solo una cantidad finita de puntos de P.

Probar las siguientes afirmaciones:

a. Cada a $l \in L$ tiene exactamente dos puntos.
b. Hay por lo menos cuatro puntos en P.
c. Hay por lo menos seis puntos en L.

3.276 [l-319, p. 67]. Supongamos que se cumplen los Axiomas de Incidencia, el Axioma de las Paralelas y el Corolario 3.7.5. Si en el plano existe una recta con exactamente k puntos, probar las siguientes afirmaciones:

a. Todas las rectas del plano contienen exactamente k puntos.
b. El plano contiene exactamente k^2 puntos.
c. El plano contiene exactamente $k(k + 1)$ rectas.
d. Por cada punto del plano pasan exactamente $k + 1$ rectas.

3.277. Considerar el Sistema Axiomático que consiste de los Axiomas de Incidencia I_0, I_1 y I_3 junto con los siguientes axiomas:

A_1: Cada recta contiene por lo menos tres puntos.

A_2 : Cualesquiera dos rectas tienen por lo menos un punto en común.

Probar cada una de las siguientes afirmaciones:

a. Existe al menos un punto en el plano.
b. Dos rectas distintas se cortan en uno y en solo un punto.
c. Por cada punto pasan por lo menos tres rectas distintas.
d. Si modificamos el Axioma A_1 por k puntos, ¿cuál sería la versión correspondiente al inciso c)?

Supongamos que hay una recta con exactamente k puntos:

e. Toda recta tiene exactamente k puntos.
f. Por cada punto pasan exactamente k rectas.
g. El plano contiene exactamente $k^2 - k + 1$ puntos.
h. El plano contiene exactamente $k^2 - k + 1$ rectas.

CAPÍTULO 4

TEOREMAS BÁSICOS DE LA GEOMETRÍA EUCLIDIANA

4.1. División de un segmento y un ángulo en dos partes iguales

En el Teorema 1.10.7, vimos que el punto medio de un segmento existe, pero la demostración que se dio de su existencia no fue nada geométrica y mucho menos constructiva. Teniendo a la mano los criterios de congruencia de triángulos, daremos a continuación una demostración geométrica de dicho resultado.

4.1.1. Teorema. Todo segmento tiene un punto medio.

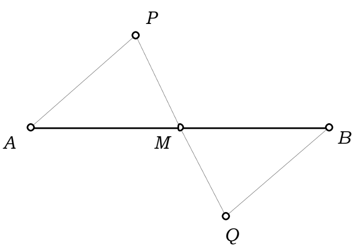


Figura 4.1

Prueba: Sea AB un segmento. Fuera de la recta que contiene al segmento AB fijamos un punto P y, basándonos en la construcción del Lema 3.2.11, fijamos un punto Q en el semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{AB}$ que no contiene al punto P, de tal modo que $\angle BAP \cong \angle ABQ$ y $AP \cong BQ$. Sea M el punto de intersección del segmento PQ y el segmento AB. Sabemos que $\angle PMA \cong \angle QMB$ por ser opuestos por el vértice (2.10.2). Del cuarto criterio de congruencia de triángulos (3.5.1), hallamos que $\Delta PAM \cong \Delta QBM$. De donde se sigue que $AM \cong MB$, es decir, M es el punto medio de AB. ♣

En cuanto a la bisectriz de un ángulo no degenerado, sabemos que existe y es única (Teorema 2.12.2), pero la manera que se vio no fue constructiva. A continuación, damos una prueba geométrica de la existencia de la bisectriz de cualquier ángulo no degenerado.

4.1.2. Teorema. Todo ángulo no degenerado tiene una bisectriz.

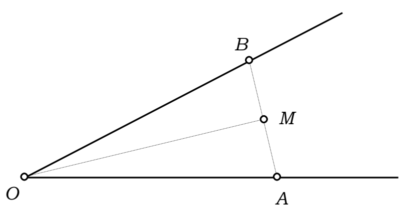
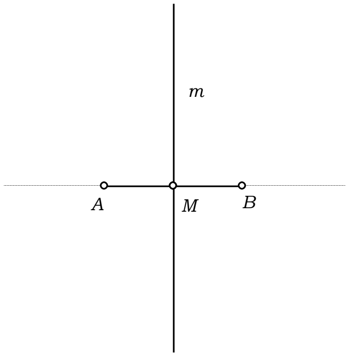


Figura 4.2

Prueba: Sea $\angle AOB$ un ángulo no degenerado. Según el Axioma CS_2, podemos suponer, sin perder generalidad, que $OA \cong OB$. Sea M el punto medio del segmento AB. De acuerdo con el Teorema 2.2.5, hallamos que $M \in int(\angle AOB)$. Notemos que en los triángulos ΔMOA y ΔMOB se cumple que $MB \cong MA$, $OA \cong OB$ y OM es un lado común a ambos triángulos. Según el criterio LLL (3.2.12), los triángulos ΔOMA y ΔOMB son congruentes. De aquí, obtenemos que $\angle AOM \cong \angle MOB$. Así, hemos probado que la semirrecta $\overrightarrow{OM}$ resulta ser la bisectriz de ángulo $\angle AOB$. ♣

4.2. Mediatriz de un segmento

4.2.1. Definición.



A la recta que es perpendicular a un segmento y que pasa por su punto medio se le llama la *mediatriz* del segmento.

m es la mediatriz del segmento *AB*
Figura 4.3

La mediatriz de un segmento existe y es única de acuerdo con los Teoremas 4.1.1 y 3.7.4. Los puntos que yacen sobre la mediatriz de un segmento se pueden caracterizar mediante la siguiente propiedad.

4.2.2. Teorema de la Mediatriz. Sea AB un segmento. Entonces, un punto P está en la mediatriz de AB si y solo si $AP \cong BP$.

Prueba: Sean m la mediatriz del segmento AB, M el punto medio de AB y P un punto en el plano.

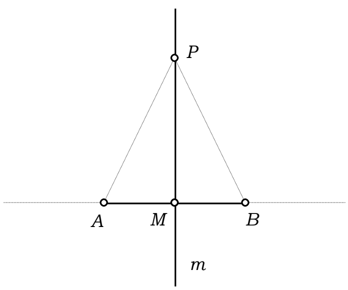


Figura 4.4

Necesidad. Supongamos que $P \in m$. Como $AM \cong MB$ y $\angle PMA \cong \angle BMP$, por ser ángulos rectos (2.6.2), con base en el criterio LAL (3.2.6), hallamos que $\Delta PAM \cong \Delta PBM$. En consecuencia, $AP \cong BP$.

Suficiencia. Supongamos que $AP \cong BP$. Ya que $AM \cong MB$ y PM es un lado común de los triángulos ΔPAM y ΔPBM, por el criterio LLL (3.2.12), obtenemos que $\Delta PAM \cong \Delta PBM$. Lo cual implica que $\angle PMA \cong \angle BMP$. Como estos dos ángulos son suplementarios, por el Teorema 2.7.11, $\angle PMA$ y $\angle BMP$ son ángulos rectos. Esto significa que $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{PM}$. De aquí, por unicidad, la recta $\overleftrightarrow{PM}$ resulta ser la mediatriz del segmento AB. Por ello, $P \in m$. ♣

En el capítulo correspondiente a construcciones con regla y compás, daremos un método geométrico para construir la mediatriz de un segmento dado.

4.3. Teoremas básicos sobre triángulos

En esta sección, daremos las propiedades geométricas básicas del triángulo. Dichas propiedades también constituyen los teoremas fundamentales de la Geometría Euclidiana. Para facilitar nuestra tarea, daremos a continuación una notación estándar para los puntos medios de los lados de un triángulo, la cual será usada a lo largo del libro.

En un triángulo ΔABC, los símbolos M_a, M_b y M_c denotarán los puntos medios de los lados BC, AC y AB, respectivamente.

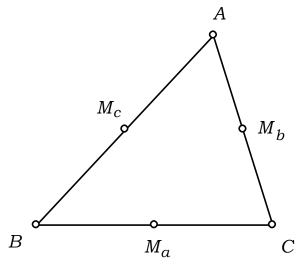


Figura 4.5

4.3.1. Teorema. En todo triángulo isósceles, la bisectriz del ángulo opuesto a la base corta a la misma en su punto medio y es perpendicular a ella.

Prueba: Sean ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$, y M_a el punto medio del lado BC. Como $AB \cong AC$, por el Teorema 4.2.2, A pertenece a la mediatriz de BC. Por ello, $\overleftrightarrow{AM_a}$ es la mediatriz de BC. De aquí hallamos que ΔABM_a y ΔACM_a son triángulos rectángulos que, de acuerdo con el Teorema 3.6.4, son congruentes. Por consiguiente, $\angle BAM_a \cong \angle M_aAC$, lo cual significa que $\overrightarrow{AM_a}$ es la bisectriz del ángulo $\angle A$. ♣

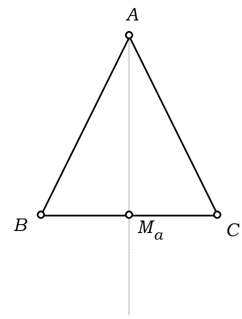


Figura 4.6

Como una consecuencia inmediata del Teorema 4.3.1, tenemos que en todo triángulo isósceles se cumple que la bisectriz del ángulo opuesto a la base coincide con la mediatriz de la misma.

En un triángulo arbitrario, cada uno de sus ángulos interiores tiene dos ángulos exteriores adyacentes que son congruentes por ser opuestos por el vértice (Teorema 2.10.2) y sus bisectrices forman una recta (Teorema 2.12.5). Cuando digamos la *bisectriz de un ángulo exterior* de un triángulo, nos referiremos, según convenga el caso, a la recta que contiene a las dos bisectrices de los dos ángulos exteriores adyacentes al ángulo interior en cuestión, o a la bisectriz que interseca a la recta que contiene al lado opuesto del triángulo.

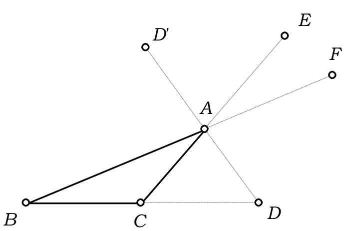


Figura 4.7

En el triángulo ΔABC de la figura 4.7, las semirrectas $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{AD'}$ son las bisectrices de los ángulos exteriores $\angle CAF$ y $\angle EAB$ adyacentes al ángulo $\angle A$, respectivamente. Ya que en este ejemplo la bisectriz $\overrightarrow{AD'}$ no interseca a la recta $\overleftrightarrow{BC}$, según lo convenido $\overrightarrow{AD}$ es la bisectriz del ángulo exterior adyacente a $\angle A$.

A continuación, daremos una condición necesaria y suficiente, en términos de la bisectriz exterior de un ángulo, para que un triángulo sea isósceles.

4.3.2. Teorema. En todo triángulo isósceles la bisectriz del ángulo exterior correspondiente al ángulo opuesto a la base es paralela a esta.

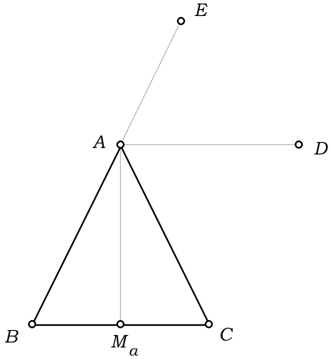


Figura 4.8

Prueba: Sean ΔABC un triángulo isósceles, M_a el punto medio de su base *BC,* y $\overrightarrow{AD}$ la bisectriz del ángulo exterior $\angle CAE$. Por el Teorema 4.3.1, hallamos que $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AM_a}$, y $\overrightarrow{AM_a}$ es la bisectriz de $\angle A$. Por ser $\overrightarrow{AM_a}$ y $\overrightarrow{AD}$ las bisectrices de los ángulos suplementarios adyacentes $\angle BAC$ y $\angle CAE$, respectivamente, con base en el Teorema 2.12.3, sabemos que $\angle M_a AD$ es un ángulo recto. Es decir, $\overrightarrow{AM_a} \perp \overrightarrow{AD}$. El Teorema 3.7.1 nos garantiza que $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{AD}$. ♣

4.3.3. Teorema. Si en un triángulo la bisectriz del ángulo exterior al ángulo opuesto a la base es paralela a la misma, entonces el triángulo es isósceles.

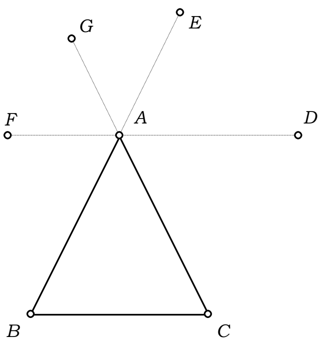


Figura 4.9

Prueba: Sea ΔABC un triángulo. Supongamos que la bisectriz $\overrightarrow{AD}$ del ángulo exterior $\angle CAE$ es paralela al lado *BC* del triángulo dado. De acuerdo con los Teoremas 2.10.2 y 3.4.6, hallamos que $\angle B \cong \angle DAE \cong \angle BAF$ y $\angle C \cong \angle GAF \cong \angle CAD$. Como $\overrightarrow{AD}$ es la bisectriz del ángulo $\angle CAE$, hallamos que $\angle CAD \cong \angle DAE$. De aquí se sigue que $\angle B \cong \angle C$. Del Teorema 3.2.9 concluimos que ΔABC es un triángulo isósceles. ♣

4.3.4. Teorema. La suma de las medidas de los tres ángulos interiores de un triángulo es 180.

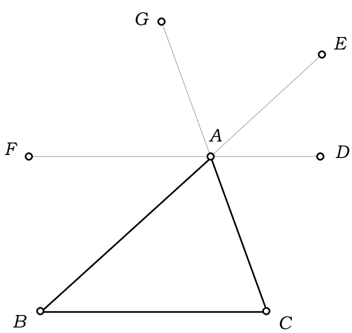


Figura 4.10

Prueba: Sea ΔABC un triángulo. Tracemos una recta $\overleftrightarrow{FD}$ paralela a la recta que contiene a *BC* y que pase por *A* (dicha recta existe por el Corolario 3.7.5). Tenemos que $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{AC}$ son transversales a las rectas paralelas $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{FD}$. Por el Teorema 2.10.2, sabemos que $\angle A \cong \angle EAG$ y, por el Teorema 3.4.6, $\angle B \cong \angle DAE$ y $\angle C \cong \angle GAF$. Como los ángulos $\angle DAE$, $\angle EAG$ y $\angle GAF$ son adyacentes, *E* y *G* están en un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{FD}$, y $\angle DAF$ es un ángulo llano, según el Teorema 2.5.8, encontramos que

$$m(\angle DAE) + m(\angle EAG) + m(\angle GAF) = 180.$$

Por consiguiente,

$$m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) = 180. \clubsuit$$

Del Teorema 4.3.4 vemos que todo triángulo tiene al menos dos ángulos agudos. Además, una condición necesaria y suficiente para que un triángulo sea rectángulo es que tenga dos ángulos complementarios.

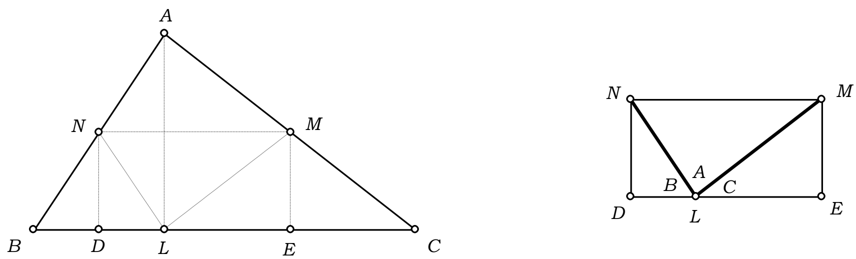


Figura 4.11

Para convencernos de que la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es igual a 180, podemos tomar un triángulo de papel y aplicarle algunos dobleces: primero lo doblamos según AL y lo abrimos, volvemos a doblarlo de modo que los vértices B y C coincidan con el punto L; finalmente, lo doblamos de modo que el vértice A también coincida con L. Podemos entonces ver que los ángulos $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$ están colocados uno a continuación de él otro formando un ángulo llano.

4.3.5. Corolario. Un triángulo es equilátero si y solo si la medida de cada uno de sus ángulos es igual a 60.

4.3.6. Corolario. Si dos ángulos de un triángulo son congruentes a sus correspondientes ángulos de otro triángulo, entonces el tercer ángulo del primer triángulo es congruente con el tercer ángulo del segundo.

Prueba: Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos tales que $\angle A \cong \angle A'$ y $\angle B \cong \angle B'$. Según el Teorema 4.3.4,

$$m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) = 180 = m(\angle A') + m(\angle B') + m(\angle C')$$
$$m(\angle C) = m(\angle C')$$
$$\angle C \cong \angle C'. \clubsuit$$

El siguiente resultado nos dice cuándo tres ángulos no degenerados son congruentes a los ángulos de un triángulo.

4.3.7. Teorema. Si $\angle\alpha$, $\angle\beta$ y $\angle\gamma$ son tres ángulos no degenerados tales que $m(\angle\alpha) + m(\angle\beta) + m(\angle\gamma) = 180$, entonces existe un triángulo tal que sus ángulos son congruentes a $\angle\alpha$, $\angle\beta$ y $\angle\gamma$.

Prueba: Fijemos un segmento arbitrario AB. Por el Axioma CA_2, es posible construir dos ángulos $\angle BAD$ y $\angle EBA$, de tal manera que uno de sus lados esté sobre la recta $\overleftrightarrow{AB}$, los lados restantes estén en un mismo semiplano determinado por la misma recta $\overleftrightarrow{AB}$, $\angle BAD \cong \angle\alpha$ y $\angle EBA \cong \angle\beta$ (ver a la figura 4.12). Como

$$m(\angle BAD) + m(\angle EBA) = m(\angle\alpha) + m(\angle\beta) < m(\angle\alpha) + m(\angle\beta) + m(\angle\gamma) = 180,$$

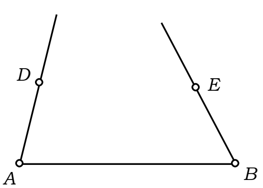


Figura 4.12

por el Teorema 3.4.9, las semirrectas $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BE}$ se intersecan en el semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{AB}$ que contiene a los interiores de los ángulos $\angle BAD$ y $\angle EBA$. Sea C dicho punto de intersección. En el triángulo ΔABC, por el Teorema 4.3.4, sabemos que $m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) = 180$. Como $\angle A = \angle BAD \cong \angle\alpha$ y $\angle B = \angle EBA \cong \angle\beta$, hallamos que $m(\angle C) = m(\angle\gamma)$. De aquí y del Teorema 2.5.7, concluimos que $\angle C \cong \angle\gamma$. $\clubsuit$

No es difícil ver que hay una cantidad infinita de triángulos que satisfacen la conclusión del Teorema 4.3.7 (ver la segunda sección del Capítulo 6). Usaremos la notación $\Delta(\angle\alpha,\angle\beta,\angle\gamma)$ para referirnos a uno de los triángulo cuyos ángulos interiores son congruentes con $\angle\alpha$, $\angle\beta$ y $\angle\gamma$. Convenimos que en la notación $\Delta(\angle\alpha,\angle\beta,\angle\gamma)$ se debe cumplir la igualdad $m(\angle\alpha) + m(\angle\beta) + m(\angle\gamma) = 180$ y que los ángulos no sean degenerados. También convenimos en que si $\Delta(\angle\alpha,\angle\beta,\angle\gamma)$ representa al triángulo ΔABC, entonces $\angle A = \angle\alpha$, $\angle B = \angle\beta$ y $\angle C = \angle\gamma$. Por ejemplo, $\Delta(\angle 45,\angle 45,\angle 90)$ denota un triángulo rectángulo cuyos ángulos $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$ tienen medidas 45, 45 y 90, respectivamente.

4.3.8. Teorema. La medida de un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores del mismo triángulo opuestos a dicho ángulo.

Prueba: Consideremos el triángulo ΔABC. Como $\angle CAA'$ y $\angle A'AA''$ son dos ángulos suplementarios adyacentes y $\angle A \cong \angle A'AA''$ (ver Teorema 2.10.2), por el Teorema 4.3.4, se cumplen las identidades

$$m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) = 180 =$$
$$m(\angle CAA') + m(\angle A'AA'') = m(\angle CAA') + m(\angle A).$$

Por ello,

$$m(\angle B) + m(\angle C) = m(\angle CAA'),$$

tal como se deseaba. ♣

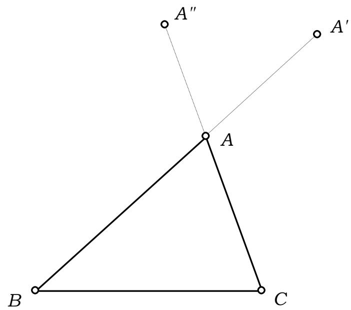


Figura 4.13

4.3.9. Teorema. La suma de las medidas de los ángulos exteriores de un triángulo es igual a 360.

Prueba: Sea ΔABC un triángulo. Sean $\angle\alpha$, $\angle\beta$ y $\angle\gamma$ los ángulos exteriores de ΔABC adyacentes a $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$, respectivamente. De acuerdo con el Teorema 4.3.7, sabemos que

$$m(\angle\alpha) = m(\angle B) + m(\angle C)\,,\ m(\angle\beta) = m(\angle A) + m(\angle C) \text{ y } m(\angle\gamma) = m(\angle A) + m(\angle B).$$

Estas identidades y el Teorema 4.3.4 nos garantizan las identidades

$$m(\angle\alpha) + m(\angle\beta) + m(\angle\gamma) = m(\angle B) + m(\angle C) + m(\angle A) + m(\angle C) + m(\angle A) + m(\angle B) = 180 + 180 = 360. ♣$$

Del Teorema anterior podemos ver que todo triángulo tiene al menos dos ángulos exteriores obtusos.

4.3.10. Teorema del Segmento Medio. El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y su longitud es igual a la mitad de la longitud de dicho lado.

Prueba: Sea ΔABC un triángulo. Supongamos que M_b es el punto medio de AC. Es posible trazar, por el Corolario 3.7.5, una recta paralela a BC que pase por el punto M_b y corte al lado AB en el punto N. Basta probar que N es el punto medio del segmento AB. Para esto, tracemos una recta paralela al lado AB que pase por el punto M_b y corte al lado BC en el punto L.

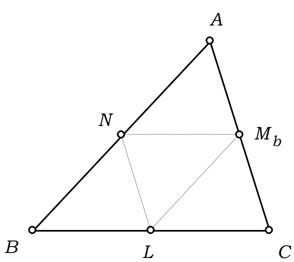


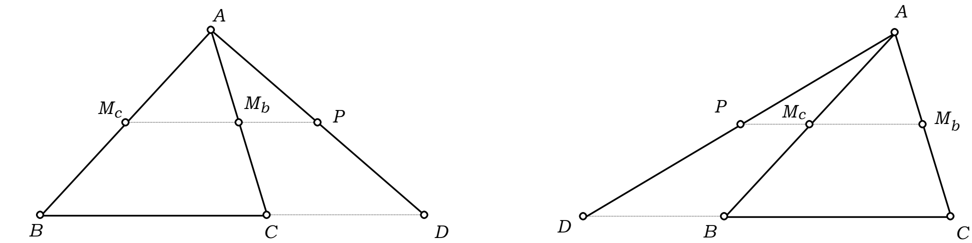
Figura 4.14

Resumiendo, las suposiciones importantes son $AM_b \cong M_bC$, $NM_b \parallel BC$ y $M_bL \parallel AB$. Por el Teorema 3.4.6, hallamos que $\angle B \cong \angle CLM_b \cong \angle M_bNA$ y $\angle C \cong \angle AM_bN$. Estas congruencias y el Teorema 4.3.4 nos conducen a la congruencia $\angle A \cong \angle LM_bC$. Aplicando ahora el criterio ALA (3.2.7), obtenemos que los triángulos ΔANM_b y ΔM_bLC son congruentes. En lo particular, $NA \cong M_bL$. Según el Teorema 3.4.10, $BN \cong M_bL$. Con esto, vemos que N es el punto medio del segmento AB. Por la unicidad del punto medio queda demostrado que el segmento NM_b que une los puntos medios de los lados AB y AC es paralelo a BC. De la misma manera, se prueba que L es el punto medio del lado BC y $BL \cong NM_b$. Por consiguiente,

$$|NM_b| = |BL| = \frac{1}{2}|BC|. ♣$$

4.3.11. Teorema. Sean ΔABC un triángulo y $D \in \overleftrightarrow{BC}$. Entonces, $\overleftrightarrow{M_cM_b}$ corta a AD en su punto medio.

Prueba: Primero ilustraremos las tres posibles ubicaciones del punto D sobre la recta $\overleftrightarrow{BC}$ con respecto al segmento BC:



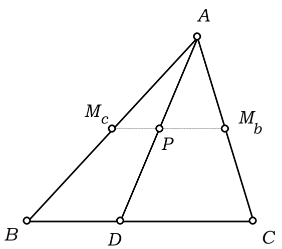


Figura 4.15

Solo daremos la prueba para el caso cuando $D \in BC$. Sea P el punto medio del segmento AD. Por el Teorema 4.3.10, sabemos que $M_cP \parallel BC$, $M_c\,M_b \parallel BC$ y $M_bP \parallel BC$. Por el Axioma de las Rectas Paralelas, debemos de tener que

$$\overleftrightarrow{M_cM_b} = \overleftrightarrow{M_cP} = \overleftrightarrow{M_bP}.$$

Por ello, $M_c\,M_b$ corta a AD en el punto P, él cual resulta ser el punto medio de AD. ♣

4.3.12. Definición. A una recta que pasa por los puntos medios de dos lados de un triángulo se le llama <u>*recta media*</u> del triángulo.

Claramente, todo triángulo ΔABC tiene tres rectas medias que son $\overleftrightarrow{M_aM_b}$, $\overleftrightarrow{M_bM_c}$ y $\overleftrightarrow{M_cM_a}$.

4.3.13. Teorema [a-70]. Sean ΔOAB y ΔPAB dos triángulos con un lado común, a saber AB, y M, N, R y S los puntos medios de los lados BP, AP, BO y AO, respectivamente. Entonces, $SR \cong NM$ y $\overleftrightarrow{NM} \parallel \overleftrightarrow{SR}$.

Prueba: Consideremos la siguiente figura que describe nuestras hipótesis:

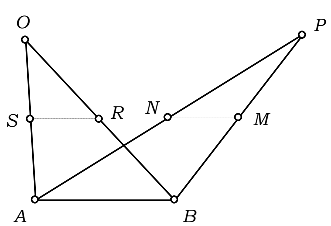


Figura 4.16

Del Teorema del Segmento Medio (4.3.10) se sigue que $|NM| = \dfrac{1}{2}|AB| = |SR|$ y también que $NM \parallel AB$ y $SR \parallel AB$. Por consiguiente, con base en el Teorema 3.4.3, $NM \parallel SR$. ♣

4.4. Desigualdades geométricas

Nuestra primera desigualdad geométrica es una aplicación directa del Teorema 4.3.8.

4.4.1. Teorema. En todo triángulo, un ángulo interior es menor que cualquiera de los dos ángulos exteriores del mismo triángulo opuestos a dicho ángulo.

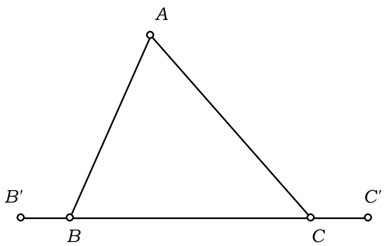


Figura 4.17

Prueba: Por el Teorema 4.3.8, sabemos que $m(\angle ABB') = m(\angle A) + m(\angle C)$ y $m(\angle C'CA) = m(\angle A) + m(\angle B)$. De donde hallamos que

$$m(\angle A) < m(\angle ABB') \text{ y } m(\angle A) < m(\angle C'CA).$$

De acuerdo con el Teorema 2.9.4, hallamos que

$$\angle A < \angle ABB' \text{ y } \angle A < \angle C'CA. \clubsuit$$

4.4.2. Teorema. Si un lado de un triángulo es más corto que un segundo lado del mismo triángulo, entonces el ángulo opuesto al primer lado es más pequeño que el ángulo opuesto al segundo lado.

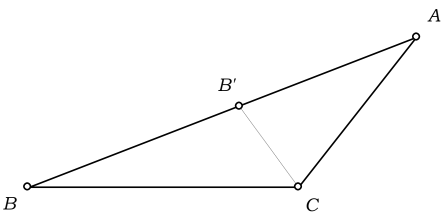


Figura 4.18

Prueba: Sea ΔABC un triángulo tal que, sin perder generalidad, $AC < AB$. Tomemos un punto $B' \in AB$, de modo que $AB' \cong AC$. Vemos que el triángulo $\Delta AB'C$ es isósceles. De acuerdo con el Teorema 3.2.9, $\angle CB'A \cong \angle ACB'$. Ya que $\angle CB'A$ es un ángulo exterior de $\Delta B'BC$ y opuesto al ángulo interior $\angle B$, por el Teorema 4.4.1, hallamos que

$$\angle B < \angle CB'A \cong \angle ACB' < \angle C. \clubsuit$$

4.4.3. Teorema. Si un ángulo de un triángulo es más pequeño que un segundo ángulo del mismo triángulo, entonces el lado opuesto al primer ángulo es más corto que el lado opuesto al segundo ángulo.

Prueba: Sea ΔABC un triángulo en el cual $\angle A < \angle C$. La suposición $AB < BC$ y el teorema anterior nos conducen a la desigualdad $\angle C < \angle A$, la cual no es posible. Ahora, si $AB \cong BC$, por el Teorema 3.2.9, entonces hallamos la contradicción $\angle C \cong \angle A$. Por lo tanto, $BC < AB$. ♣

Tres resultados importantes que se obtienen directamente de los Teoremas 4.4.2 y 4.4.3 son los siguientes:

4.4.4. Corolario. En un triángulo ΔABC, se cumple que $\angle A > \angle B > \angle C$ si y solo si $a > b > c$.

4.4.5. Corolario. El lado opuesto a un ángulo no agudo de un triángulo es el lado más grande del mismo.

4.4.6. Corolario. En todo triángulo rectángulo, un cateto es más pequeño que la hipotenusa.

Aunque el siguiente teorema es consecuencia inmediata del corolario anterior y el Teorema 4.4.2, daremos una demostración alternativa.

4.4.7. Teorema. En un triángulo rectángulo, los ángulos opuestos a los catetos son agudos.

Prueba: Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$. De acuerdo con el Teorema 4.3.4,

$$m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) = 180$$
$$90 + m(\angle B) + m(\angle C) = 180$$
$$m(\angle B) + m(\angle C) = 90.$$

Por consiguiente, $m(\angle B) < 90$ y $m(\angle C) < 90$. Es decir, los ángulos $\angle B$ y $\angle C$ son agudos. ♣

El siguiente criterio de congruencia de triángulos de la forma *LLA* aparece en el artículo [a-85] y en el trabajo de D. B. Hirschhorn [a-67] es llamado Criterio *LLA*, pues el segundo lado que se considera es menor que el primero (este resultado también aparece en [a-32]).

4.4.8. Teorema (*LLA*). Si dos lados y el ángulo opuesto al lado más grande de ellos de un triángulo son congruentes a dos lados y al ángulo opuesto al lado más grande de estos de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

Prueba. Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos tales que $\angle A = \angle A'$, $b = b'$, $a = a'$ y $a > b$. Del Teorema 4.4.2 sabemos que $\angle A > \angle B$. Por consiguiente,

$$m(\angle B) + m(\angle B') < m(\angle A) + m(\angle B') = m(\angle A') + m(\angle B') < 180,$$

esta desigualdad se obtiene de los Teoremas 2.9.4 y 4.3.4. Esto nos asegura que los ángulos $\angle B$ y $\angle B'$ no son suplementarios. Según el Teorema 3.2.13, concluimos que $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$. ♣

4.4.9. Teorema de la Desigualdad del Triángulo. La suma de las longitudes de dos lados de un triángulo es mayor que la longitud del tercer lado.

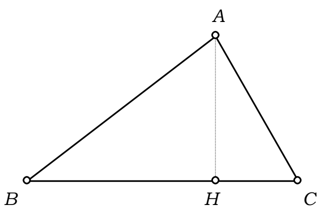


Figura 4.19

Prueba: Sea ΔABC un triángulo. Sin perder generalidad supongamos que $\angle A$ es el ángulo mayor. En virtud del Teorema 4.4.3, el lado BC es él de mayor longitud. Primero probaremos que $|BC| < |AB| + |AC|$. Para esto tracemos una recta perpendicular a BC que pase por el vértice A y corte al lado BC en el punto H (esto es posible por el Teorema 3.7.3). Según el Corolario 4.4.5, $|BH| < |AB|$ y $|HC| < |AC|$. Sumando, hallamos que

$$|BC| = |BH| + |HC| < |AB| + |AC|.$$

Esto demuestra la primera parte. Aplicando el hecho de que BC es el lado de mayor longitud, obtenemos las desigualdades restantes

$$|AC| \leq |BC| < |BC| + |AB| \text{ y } |AB| \leq |BC| < |BC| + |AC|.$$ ♣

El recíproco del teorema que acabamos de probar también se cumple, pero su demostración la veremos más adelante en el Capítulo 8 (8.3.17). Una consecuencia de la Desigualdad del Triángulo es que tres puntos A, B y C son colineales si y solo si la longitud del segmento mayor de los segmentos AB, AC y BC es igual a la suma de las longitudes de los otros dos segmentos.

4.4.10. Corolario. En todo triángulo se cumple que la longitud de un lado es mayor que el valor absoluto de la diferencia de las longitudes de los otros dos.

Prueba: Sea ΔABC un triángulo. De acuerdo con la Desigualdad del Triángulo (4.4.8), sabemos que $b < a + c$ y $c < a + b$; lo cual implica que $b - c < a$ y $c - b < a$. Por tanto, $|b - c| < a$. Con el mismo argumento se establecen las desigualdades $|a - c| < b$ y $|a - b| < c$. ♣

4.4.11. Definición. Sean l una recta y P un punto fuera de ella. La *proyección del punto* P sobre la recta l es el punto de intersección de la perpendicular a l que pasa por P y la recta l. En la figura 4.20, el punto Q es la proyección del punto P sobre la recta l. Si $P \in l$, entonces convenimos que él mismo P sea su *proyección* sobre l.

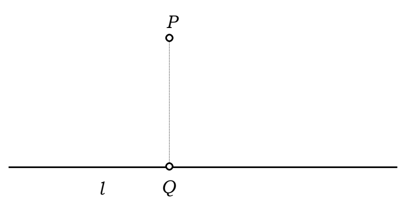
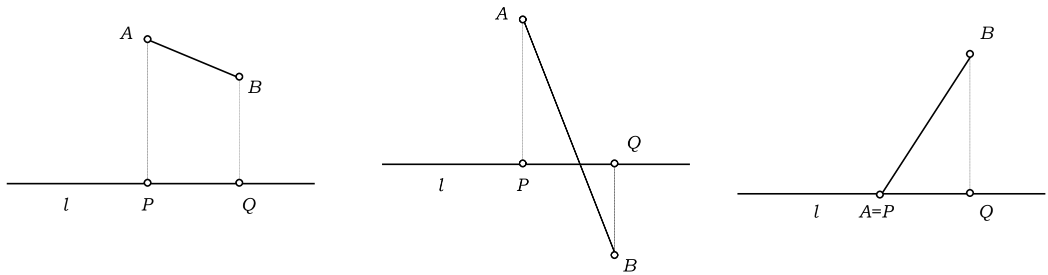


Figura 4.20

Veamos que la proyección de un punto sobre una recta que no lo contenga siempre existe:

Sean l una recta y $P \notin l$. Por el Teorema 3.7.3, existe una única recta m perpendicular a l que pasa por P. Por definición, al punto de intersección de m y l se le llama la proyección de P sobre l. La proyección de un punto sobre una recta también se obtiene de la definición general de proyección que se dio en 3.9.2, siendo la dirección el conjunto de rectas perpendiculares a la recta dada. Convenimos en que el adjetivo *proyección* siempre hará referencia a la proyección perpendicular sobre una recta.

Las proyecciones de los puntos de un segmento sobre una recta fija cuando estos no son perpendiculares forman un segmento sobre la recta fija al cual se le conoce como la *proyección del segmento* sobre dicha recta. Cuando hablemos de la proyección de un segmento sobre una recta entenderemos que ambos no son perpendiculares, de otro modo la proyección del segmento sería un punto sobre la recta. No es difícil ver que la proyección de un segmento sobre una recta es el segmento comprendido entre las proyecciones de los puntos extremos del segmento sobre la recta.



El segmento PQ es la proyección del segmento AB sobre la recta l.

Figura 4.21

4.4.12. Teorema. El segmento más pequeño que une a un punto de una recta y a un punto dado fuera de ella es el determinado por dicho punto dado y la proyección de este sobre la recta.

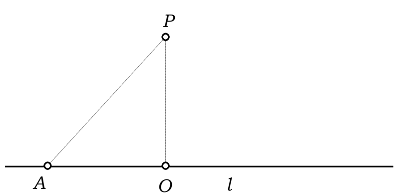


Figura 4.22

Prueba: Sean l una recta y P un punto fuera de ella. Sea O la proyección de P sobre l y fijemos $A \in l - \{O\}$. Como ΔPAO es un triángulo rectángulo con hipotenusa PA, el Corolario 4.4.6 nos asegura que $PO < PA$, tal como se deseaba. ♣

4.4.13. Teorema. Sean l y m dos rectas perpendiculares que se cortan en el punto O, $A, B \in l$ y $P \in m - \{O\}$.
1. Si $OA \cong OB$, entonces $PA \cong PB$ y O está entre A y B.
2. Si $PA \cong PB$, entonces $OA \cong OB$ y O está entre A y B.
3. $OA < OB$ si y solo si $PA < PB$.
4. $OA < OB$ si y solo si $\angle PAO > \angle PBO$.
5. $PA < PB$ si y solo si $\angle OPA < \angle OPB$.

Prueba: 1. Supongamos que $OA \cong OB$. De aquí tenemos que O es el punto medio del segmento AB y, por ello, O está entre A y B. Por el tercer criterio de congruencia de triángulos rectángulos (3.6.4), $\Delta OAP \cong \Delta OBP$. Por ello, encontramos que $PA \cong PB$.

2. Supongamos que $PA \cong PB$. Según el cuarto criterio de congruencia de triángulos rectángulos (3.6.5), tenemos que $\Delta POA \cong \Delta POB$. Por consiguiente, hallamos que $OA \cong OB$ y, por tanto, O está entre A y B.

3. Necesidad. Nuestra suposición es $OA < OB$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que A y B pertenecen a un mismo semiplano determinado por la recta m. Aplicando el Teorema 4.4.1 a los triángulos ΔPAB y ΔPOA, nos encontramos con las desigualdades $\angle PAO > \angle PBO$ y $\angle BAP > \angle AOP$, este último ángulo es recto. Por lo cual, con base en el Teorema 4.4.7, $\angle PBO < \angle PAO < \angle AOP < \angle BAP$. Por el Teorema 4.4.3, concluimos que $PB > PA$.

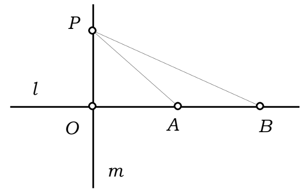


Figura 4.23

Suficiencia. Supongamos que $PB > PA$. Del primer inciso, podemos observar que OA y OB no pueden ser congruentes. Si $OB < OA$, por la necesidad de la tercera cláusula, tendríamos que $PB < PA$, lo cual sería una contradicción. Por lo tanto, $OA < OB$.

4. En esta parte podemos suponer que O está entre A y B, de otro modo ubicamos un punto $A' \in l$ tal que $A'O \cong OA$ y O esté entre A' y B. Convenida esta equivalencia, se sigue directamente del tercer inciso y de los Teoremas 4.4.2 y 4.4.3.

5. Si $PA < PB$, por los incisos tercero y cuarto, obtenemos que $\angle PAO > \angle PBO$. Pero sabemos, por el Teorema 4.3.4 aplicado a los triángulos rectángulos ΔPOA y ΔPOB, que

$$m(\angle PAO) + m(\angle OPA) = m(\angle PBO) + m(\angle OPB).$$

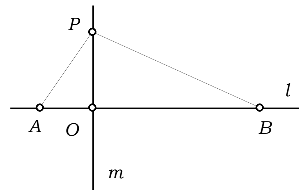


Figura 4.24

Por lo cual, $m(\angle OPA) < m(\angle OPB)$. En otros términos, $\angle OPA < \angle OPB$.

Suficiencia. Supongamos que $\angle OPA < \angle OPB$. De la identidad $m(\angle PAO) + m(\angle OPA) = m(\angle PBO) + m(\angle OPB)$ se deduce que $\angle PAO > \angle PBO$, y de las cláusulas tercera y cuarta, concluimos que $PA < PB$. ♣

4.4.14. Teorema. En todo triángulo ΔABC se cumple que $BD < BC$ o $BD < BA$, para cualquier punto $D \in AC - \{A, C\}$.

Prueba: Sea H la proyección del vértice B sobre la recta $\overleftrightarrow{AC}$. Si $H = D$, no hay nada que probar por el Teorema 4.4.12. Supongamos pues que $H \neq D$. No perdemos generalidad al suponer que el ángulo $\angle C$ no sea obtuso, de otra forma hacemos referencia al ángulo $\angle A$. Primero consideremos el caso en que el ángulo $\angle C$ no sea recto.

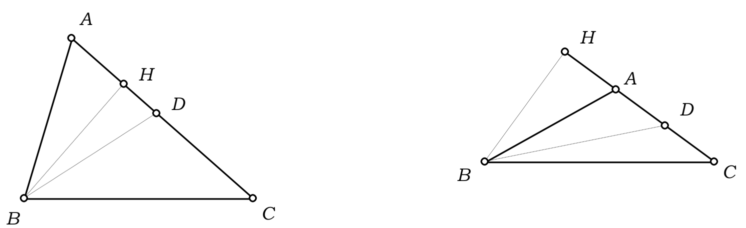


Figura 4.25

Si H está entre A y C, entonces $HD < HC$ o $HD < HA$. Lo cual implica, por el Teorema 4.4.13, que $BD < BC$ o $BD < BA$. Ahora, si H no está entre A y C, entonces $HD < HC$ y, por lo tanto, $BD < BC$ (Teorema 4.4.13).

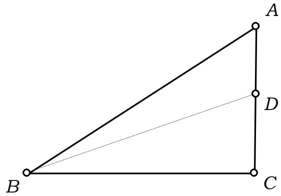


Figura 4.26

Supongamos que $\angle C$ es un ángulo recto. En este caso, se tiene que $H = C$. La desigualdad $BD < BA$ se sigue del Teorema 4.4.13. ♣

4.4.15. Primer Criterio de Incongruencia de Triángulos. Si dos lados de un triángulo son congruentes a sus correspondientes dos lados de un segundo triángulo, y el ángulo comprendido del primer triángulo es mayor que el ángulo comprendido del segundo triángulo, entonces el tercer lado del primer triángulo es mayor que el tercer lado del segundo triángulo.

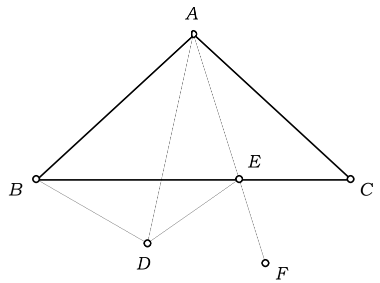


Figura 4.27

Prueba: Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos tales que $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C$ y $\angle A' < \angle A$. Tomemos un punto $D \in int(\angle A)$ tal que $\angle BAD \cong \angle A'$ y $AD \cong A'C'$. Sea E el punto de intersección de la bisectriz $\overrightarrow{AF}$ del ángulo $\angle DAC$ y el segmento BC. Por el primer criterio de congruencia (3.2.6), hallamos que $\Delta A'B'C' \cong \Delta ABD$ y $\Delta ADE \cong \Delta ACE$. Como una consecuencia de esto, tenemos que $DE \cong EC$. De acuerdo con la Desigualdad del Triángulo (4.4.9),

$$|B'C'| = |BD| < |BE| + |DE| = |BE| + |EC| = |BC|.$$

$$B'C' < BC. \clubsuit$$

El siguiente resultado es una consecuencia directa del Teorema 4.4.13 y el primer criterio de congruencia de triángulos (3.2.6).

4.4.16. Segundo Criterio de Incongruencia de Triángulos. Si dos lados de un triángulo son congruentes respectivamente a dos lados de un segundo triángulo, y el tercer lado del primer triángulo es mayor que el tercer lado del segundo triángulo, entonces el ángulo comprendido entre los dos lados del primer triángulo es mayor que el ángulo comprendido entre los dos lados del segundo triángulo.

Prueba: Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos tales que $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$ y $BC > B'C'$. Los ángulos comprendidos en cuestión son $\angle A$ y $\angle A'$. Si $\angle A \cong \angle A'$, por el criterio LAL (3.2.6), tendríamos que los triángulos serian congruentes, lo cual es imposible. Si $\angle A < \angle A'$, entonces, por el Teorema 4.4.15, $BC < B'C'$, lo cual es imposible. Por lo tanto, $\angle A > \angle A'$. ♣

Un tercer criterio de incongruencia de triángulos se enuncia en el Problema 4.232.

4.4.17. Teorema. Sean ΔABC un triángulo y $P \in int(\Delta ABC)$. Se cumple entonces la desigualdad

$$\frac{a+b+c}{2} < |PA| + |PB| + |PC| < a + b + c.$$

Prueba: De la Desigualdad del Triángulo (4.4.9), sabemos que

$$a < |PB| + |PC|, b < |PA| + |PC| \text{ y } c < |PA| + |PB|.$$

Por lo cual, $a + b + c < 2|PA| +2|PB| + 2|PC|$. De donde se obtiene la desigualdad

$$\frac{a+b+c}{2} < |PA| + |PB| + |PC|.$$

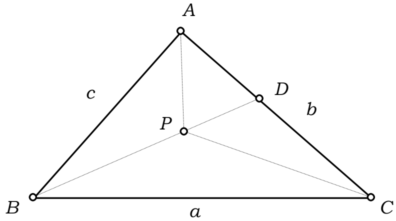


Figura 4.28

Para la segunda desigualdad prolongamos BP hasta cortar AC en el punto D. Por el Teorema 4.4.14, $BD < BC$ o $BD < AB$. Sin perder generalidad, supongamos que $BD < BC$. Tenemos entonces, según el Teorema 4.4.9, que $|PC| < |PD| + |DC|$ y, por consiguiente,

$$|PB| + |PC| < |PB| + |PD| + |DC| = |BD| + |DC| < |BC| + |DC|.$$

Aplicando de nueva cuenta el Teorema 4.4.14, hallamos que

$$AP < AD \text{ o } AP < AB.$$

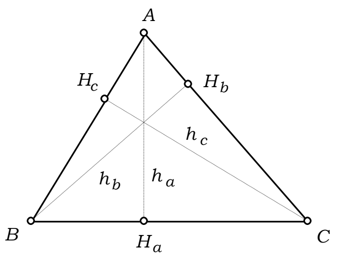
Ambos casos implican que

$$|PA| + |PB| + |PC| < |BC| + |AC| + |AB| = a + b + c. \clubsuit$$

4.5. Alturas de un triángulo

4.5.1. Definición. Una *altura* de un triángulo es el segmento que une un vértice del triángulo con su proyección sobre la recta que contiene al lado opuesto.

En cualquier triángulo ΔABC, H_a, H_b y H_c denotarán las proyecciones de los vértices A, B y C sobre las rectas $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{AB}$, respectivamente. A estas proyecciones se les llaman los *pies de las alturas* del triángulo. Con esta notación, las alturas del triángulo ΔABC resultan ser los segmentos $h_a = AH_a$, $h_b = BH_b$ y $h_c = CH_c$. Sin temor a una confusión, h_a, h_b y h_c también harán referencia a las longitudes $|AH_a|$, $|BH_b|$ y $|CH_c|$, respectivamente.



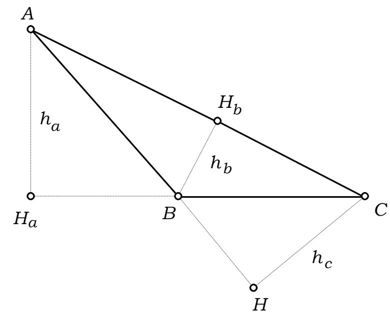
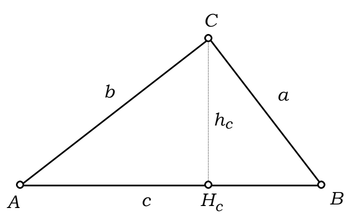
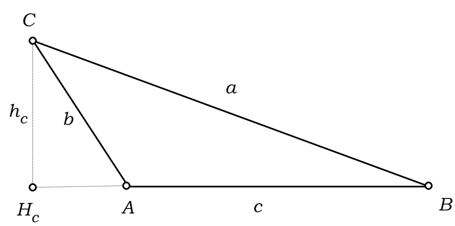


Figura 4.29

4.5.2 Teorema. Dos triángulos congruentes tienen sus correspondientes alturas congruentes.

Prueba: Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos congruentes. Basta con probar que $h_c \cong h_{c'}$.





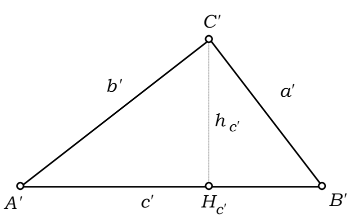


Figura 4.30

Consideremos los triángulos ΔAH_cC y $\Delta A'H_{c'}C'$. En ellos se cumple que $\angle A \cong \angle A'$ y $\angle CH_cA \cong \angle C'H_{c'}A'$, pues estos ángulos son rectos (2.6.2). Como $AC \cong A'C'$, obtenemos que $\Delta AH_cC \cong \Delta A'H_{c'}C'$ (esto es por el criterio de congruencia 3.6.3). Por consiguiente, $h_c \cong h_{c'}$. ♣

4.5.3. Teorema. En cualquier triángulo isósceles, la bisectriz del ángulo opuesto a la base coincide con la altura correspondiente.

Prueba: Sea ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$. De acuerdo con el Teorema 4.3.1, la bisectriz del ángulo $\angle A$ pasa por el punto M_a y es perpendicular a BC. Por ello, el punto M_a resulta ser la proyección del vértice A sobre BC. Por lo tanto, dicha bisectriz coincide con la altura correspondiente al vértice A. ♣

4.6. Otros teoremas básicos

4.6.1. Teorema. Sean m y n dos rectas cortadas por una recta transversal l. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $m \parallel n$.
2. Las bisectrices de un par de ángulos alternos internos son paralelas.
3. Las bisectrices de un par de ángulos alternos externos son paralelas.
4. Las bisectrices de un par de ángulos internos del mismo lado de la transversal l son perpendiculares.
5. Las bisectrices de un par de ángulos externos del mismo lado de la transversal l son perpendiculares.

Prueba: Solo probaremos la equivalencia de los dos primeros enunciados. El resto de las equivalencias se le dejan al lector para que las compruebe.

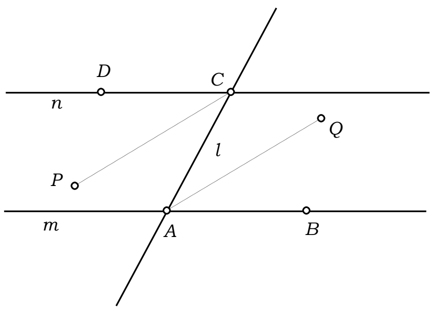


Figura 4.31

$1 \Rightarrow 2$. Supongamos que $m \parallel n$. Consideremos los ángulos alternos internos $\angle BAC$ y $\angle DCA$. Sean $\overrightarrow{AQ}$ y $\overrightarrow{CP}$ las bisectrices de $\angle BAC$ y $\angle DCA$, respectivamente. Según el Teorema 3.4.4, sabemos que $\angle BAC \cong \angle DCA$, y como $\angle BAQ \cong \angle QAC$ y $\angle DCP \cong \angle PCA$, por el Teorema de Sustracción de Ángulos (2.8.2), hallamos la congruencia $\angle QAC \cong \angle PCA$. Observamos que las rectas $\overleftrightarrow{AQ}$ y $\overleftrightarrow{CP}$ son cortadas por la recta transversal l cuyos ángulos alternos internos $\angle QAC$ y $\angle PCA$ son congruentes. De acuerdo con el Teorema 3.4.4, concluimos que $\overleftrightarrow{AQ} \parallel \overleftrightarrow{CP}$, tal como se esperaba.

$2 \Rightarrow 1$. Basaremos nuestros argumentos en la figura 4.31. Supongamos que $\overrightarrow{AQ}$ y $\overrightarrow{CP}$ son las bisectrices de los ángulos alternos internos $\angle BAC$ y $\angle DCA$, respectivamente, y que $\overleftrightarrow{AQ} \parallel \overleftrightarrow{CP}$. Del Teorema 3.4.4, vemos que $\angle QAC \cong \angle PCA$. Por consiguiente, $\angle BAQ \cong \angle QAC \cong \angle PCA \cong \angle DCP$. Aplicando el Teorema de Adición de Ángulos (2.8.1), obtenemos que los ángulos $\angle BAC$ y $\angle DCA$ son congruentes. Del Teorema 3.4.4, deducimos que $m \parallel n$. ♣

4.6.2. Teorema. Se tienen dos ángulos cuyos lados correspondientes son perpendiculares.

1. Si ambos son agudos u obtusos, entonces son congruentes.
2. Si uno de ellos es recto, entonces también lo es él otro.
3. Si uno de ellos es agudo y él otro obtuso, entonces son suplementarios.

Prueba: Sean $\angle AOB$ y $\angle A'O'B'$ dos ángulos tales que $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{O'A'}$ y $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{O'B'}$. Primero analizaremos el caso cuando $\angle AOB$ sea recto, es decir, $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$. Por el Teorema 3.7.1, $\overleftrightarrow{OA} \parallel \overleftrightarrow{O'B'}$ y $\overleftrightarrow{OB} \parallel \overleftrightarrow{O'A'}$. Según el Teorema 3.7.6, el ángulo $\angle A'O'B'$ resulta también ser recto. Supongamos ahora que ninguno de los ángulos es recto. Sobre la perpendicular a $\overrightarrow{OA}$ que pasa por O y sobre el semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{OA}$ que contiene al punto B fijamos un punto A'', de tal modo que $\angle AOA''$ sea un ángulo recto, sobre la perpendicular a $\overrightarrow{OB}$ que pasa por O y sobre el semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{OB}$ que no contiene al punto A fijamos un punto B'', de tal manera que el ángulo $\angle BOB''$ sea recto:

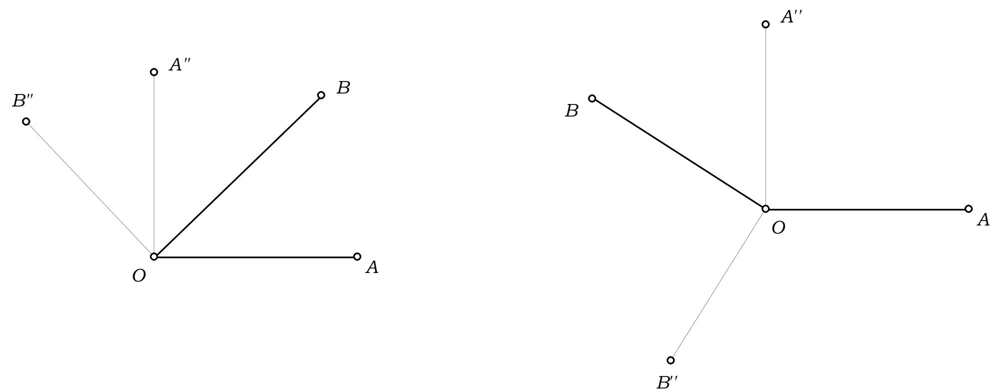


Figura 4.32

Probaremos que $\angle AOB \cong \angle A''OB''$. En efecto, primero supongamos que $\angle AOB$ es agudo. Entonces,

$$m(\angle AOA'') = m(\angle AOB) + m(\angle BOA'') = m(\angle BOB'') = m(\angle BOA'') + m(\angle A''OB'')$$
$$m(\angle AOB) = m(\angle A''OB'').$$

De acuerdo con el Teorema 2.5.7, $\angle AOB \cong \angle A''OB''$. Supongamos que $\angle AOB$ es obtuso. Tenemos entonces que

$$m(\angle AOB) = m(\angle AOA'') + m(\angle A''OB) = m(\angle BOB'') + m(\angle A''OB) = m(\angle A''OB'').$$

Según el Teorema 2.5.7, $\angle AOB \cong \angle A''OB''$. Sabemos, por el Teorema 3.7.1, que $\overleftrightarrow{OA''} \parallel \overleftrightarrow{O'A'}$ y $\overleftrightarrow{OB''} \parallel \overleftrightarrow{O'B'}$. De acuerdo con el Teorema 3.7.6 aplicado a los ángulos $\angle A'O'B'$ y $\angle A''OB''$ concluimos, que si $\angle A'O'B'$ y $\angle A''OB''$ son agudos u obtusos, entonces son ambos congruentes, y si uno de ellos es agudo y él otro obtuso, entonces son suplementarios. Como $\angle AOB$ y $\angle A''OB''$ son congruentes, la conclusión se sigue directamente de las afirmaciones anteriores. ♣

4.7. Distancia

4.7.1. Definición. La *distancia* entre cualesquiera dos puntos diferentes A y B es el número real positivo $d(A,B) = |AB|$. Si $A = B$, definimos $d(A,B) = 0$.

El Teorema 4.4.12 nos sugiere considerar el segmento de menor longitud que une a una recta y a un punto fuera de ella de la siguiente manera:

4.7.2. Definición. La distancia de un punto P a una recta l que no lo contenga es el número real positivo $d(P,l) = d(P,Q)$, en donde Q es la proyección de P sobre l. Definimos $d(P,l) = 0$ si $P \in l$. Si $P_1,\ldots, P_k$ son puntos y l una recta, decimos que los puntos *equidistan* de l (o que l *equidista* de los puntos) si $d(P_1,l) =\ldots= d(P_k,l)$. Si $l_1,\ldots, l_k$ son rectas y P un punto, decimos que el punto P *equidista* de las rectas $l_1,\ldots, l_k$ (o que las rectas *equidistan* del punto) si $d(P,l_1) =\ldots= d(P,l_k)$. Si $P_1,\ldots, P_k$ son puntos, entonces decimos que un punto P equidista de los puntos $P_1,\ldots, P_k$ si $d(P_1,P) =\ldots= d(P_k,P)$. La distancia entre un punto P y una semirrecta $\overrightarrow{AB}$ se define cómo $d(P,\overleftrightarrow{AB})$.

4.7.3. Teorema Sean A y B dos puntos cualesquiera en el plano.
1. $d(A,B) = 0$ si y solo si $A = B$.
2. $d(A,B) = d(B,A)$.
3. $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$, para cualquier punto C.

Prueba: El primer inciso es consecuencia directa de la definición y del hecho de que un segmento tiene longitud positiva (Axioma AM). La segunda parte se sigue de la igualdad $AB = BA$. El tercer inciso es una aplicación directa de la Desigualdad del Triángulo (4.4.9), en caso de que no sean colineales, y en el caso en que sean colineales usamos el Teorema 1.8.2. ♣

El inciso 3 del Teorema 4.7.3 quiere decir de manera intuitiva que el camino más corto entre cualesquiera dos puntos es el segmento que los une.

4.7.4. Teorema. Si l es una recta y $P \notin l$, entonces $d(P,l) \leq d(P,Q)$ para todo punto $Q \in l$.

Prueba: Por definición, $d(P,l) = |PO|$ en donde O es la proyección de P sobre l. Si Q es cualquier otro punto de la recta l diferente de O, por el Teorema 4.4.12, sabemos que $PO < PQ$. Por consiguiente,

$$d(P,l) = |PO| < d(P,Q) = |PQ|. \clubsuit$$

Procedamos ahora a definir la distancia entre cualesquiera dos rectas paralelas.

4.7.5. Definición. La *distancia* entre cualesquiera dos rectas paralelas l y m es el número real positivo $d(l,m) = |AB|$, en donde $A \in l$, $B \in m$ y $AB \perp l$. Definimos $d(l,m) = 0$ si $l = m$.

Veamos que la distancia entre cualesquiera dos rectas paralelas está bien definida:

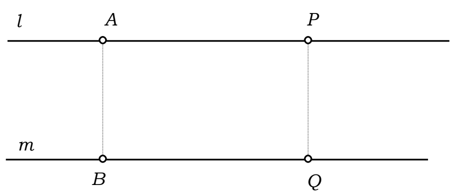


Figura 4.33

Por definición, $d(l,m) = |AB|$, en donde $m \parallel l$, $A \in l$, $B\in m$ y $AB \perp l$. Por el Teorema 3.7.2, sabemos que $AB \perp m$. Sean $P \in l$ y $Q \in m$ tales que $PQ \perp l$. Por el Problema 3.158, se tiene que $AB \parallel PQ$. Como $l \parallel m$, por el Teorema 3.4.10, $AB \cong PQ$. Por lo tanto, $d(l,m) = |AB| = |PQ|$.

Resumiendo, si queremos encontrar la distancia entre cualesquiera dos rectas paralelas l y m, basta encontrar dos puntos cualesquiera $A \in l$ y $B \in m$ tales que $\overleftrightarrow{AB} \perp l$. Uno también puede observar que si l y m son dos rectas paralelas, entonces $d(P,m) = d(l,m)$ para cualquier punto $P \in l$.

4.7.6. Teorema. Sean l una recta y P y Q dos puntos cualesquiera situados en diferentes semiplanos determinados por la recta l. Entonces $d(P,l) = d(Q,l)$ si y solo si l pasa por el punto medio del segmento PQ .

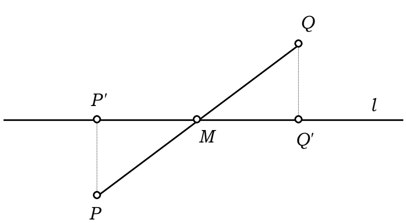


Figura 4.34

Prueba: Necesidad. Supongamos que $d(P,l) = d(Q,l)$. Sean P' y Q' las proyecciones de P y Q sobre la recta l, y M el punto de intersección de las rectas l y $\overleftrightarrow{PQ}$. Por definición, $d(P,l) = |PP'| = |QQ'| = d(Q,l)$. De acuerdo con el criterio de congruencia 3.6.2, los triángulos rectángulos $\Delta MQ'Q$ y $\Delta MP'P$ son congruentes. Lo cual nos garantiza que $PM \cong MQ$. Por ello, M es el punto medio de PQ.

Suficiencia. Si el punto medio M del segmento PQ pertenece a l, por el criterio 3.6.3, tenemos entonces que $\Delta MQ'Q \cong \Delta MP'P$. Por consiguiente, $d(P,l) = |PP'| = |QQ'| = d(Q,l)$. ♣

4.7.7. Teorema. Sean l una recta y P y Q dos puntos cualesquiera pertenecientes a un mismo semiplano determinado por l. Entonces, $d(P,l) = d(Q,l)$ si y solo si $\overleftrightarrow{PQ} \parallel l$.

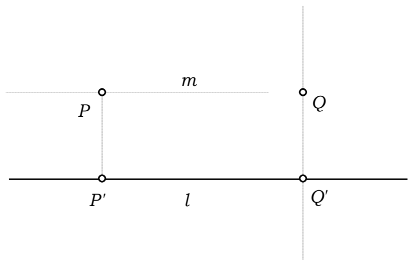


Figura 4.35

Prueba: De nuestras suposiciones vemos que $P, Q \notin l$. Necesidad. Sean P' y Q' las proyecciones de P y Q sobre la recta l. Por hipótesis, $d(P,l) = |PP'| = |QQ'| = d(Q,l)$. Entonces, por el Teorema 1.8.1, se cumple que $PP' \cong QQ'$. De acuerdo con el Teorema 3.7.1, hallamos que $PP' \parallel QQ'$. Tracemos una recta m paralela a l que pase por el punto P y corte a la recta $\overleftrightarrow{QQ'}$ en el punto R. De acuerdo con el Teorema 3.4.10, $PP' \cong RQ'$, y como $PP' \cong QQ'$, se obtiene que $RQ' \cong QQ'$, pero para que esto no contradiga el Axioma CS_2 debemos tener que $Q = R$. Por consiguiente, $m = \overleftrightarrow{PQ} \parallel l$.

Suficiencia. Supongamos que $\overleftrightarrow{PQ} \parallel l$. De acuerdo el Teorema 3.7.1, sabemos que $PP' \parallel QQ'$. Según el Teorema 3.4.10, obtenemos que

$$d(P,l) = |PP'| = |QQ'| = d(Q,l). \ \clubsuit$$

A continuación, reformulamos el Teorema de la Mediatriz (4.2.2) en términos de distancias.

4.7.8. Teorema. Un punto está en la mediatriz de un segmento si y solo si equidista de los puntos extremos de dicho segmento.

Para la bisectriz de un ángulo no degenerado, tenemos el siguiente enunciado en términos de distancias:

4.7.9. Teorema de la Bisectriz. Sean $\angle AOB$ un ángulo no degenerado y $P \in int(\angle AOB)$. Entonces, P pertenece a la bisectriz del ángulo $\angle AOB$ si y solo si $d(P,\overrightarrow{OA}) = d(P,\overrightarrow{OB})$.

Prueba: Necesidad. Supongamos $P \in \overrightarrow{OC}$, en donde $\overrightarrow{OC}$ es la bisectriz de $\angle AOB$, y sean M y N las proyecciones de P sobre las semirrectas $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$, respectivamente.

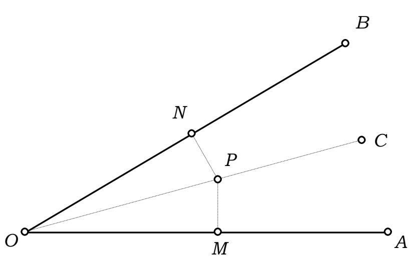


Figura 4.36

Los triángulos rectángulos ΔPOM y ΔPON tienen dos pares de ángulos congruentes, a saber $\angle MOP \cong \angle PON$ y $\angle PMO \cong \angle ONP$, y un lado común OP. De acuerdo con el segundo criterio de congruencia para triángulos rectángulos (3.6.3), hallamos que $\Delta POM \cong \Delta PON$. En consecuencia, tenemos que $|PM| = |PN|$. Por lo tanto,

$$d(P,\overrightarrow{OA}) = |PM| = |PN| = d(P,\overrightarrow{OB}).$$

Suficiencia. Supongamos que

$$d(P,\overrightarrow{OA}) = |PM| = |PN| = d(P,\overrightarrow{OB}).$$

Sabemos que los triángulos ΔPOM y ΔPON son rectángulos con ángulos rectos $\angle PMO$ y $\angle ONP$, respectivamente, comparten su hipotenusa y tienen dos catetos congruentes. Por el cuarto criterio de congruencia para triángulos rectángulos (3.6.5), hallamos que $\Delta POM \cong$

ΔPON. De aquí se sigue la congruencia $\angle MOP \cong \angle PON$. Lo cual nos garantiza que la semirrecta $\overrightarrow{OP}$ es la bisectriz del ángulo $\angle AOB$. ♣

4.7.10. Teorema. Sean $\angle AOB$ un ángulo no degenerado, $\overrightarrow{OC}$ su bisectriz y $P \in int(\angle AOB)$.

1. $P \in int(\angle AOC)$ si y solo si $d(P,\overleftrightarrow{OA}) < d(P,\overleftrightarrow{OB})$.
2. $P \in int(\angle COB)$ si y solo si $d(P,\overleftrightarrow{OA}) > d(P,\overleftrightarrow{OB})$.

Prueba: Es suficiente con probar la equivalencia del primer inciso.

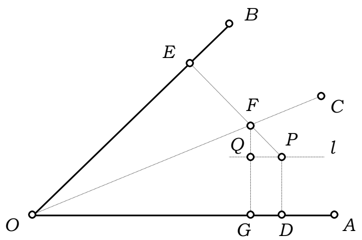


Figura 4.37

Necesidad. Supongamos que $P \in int(\angle AOC)$. Sean D y E las proyecciones de P sobre las rectas $\overleftrightarrow{OA}$ y $\overleftrightarrow{OB}$, respectivamente. Tenemos que el segmento PE corta a la bisectriz $\overrightarrow{OC}$ en el punto F (esto es por el Teorema 1.4.5). Tenemos entonces que

$$d(P,\overleftrightarrow{OA}) = |PD| \text{ y } |PE| = d(P,\overleftrightarrow{OB}) > |FE|.$$

Si G es la proyección de F sobre la recta $\overleftrightarrow{OA}$, por el Teorema 4.7.9, hallamos que $|FE| = |FG|$. Sea l la recta paralela a $\overleftrightarrow{OA}$ que pasa por el punto P y corta al segmento FG en el punto Q. Como $PQ \parallel GD$ y $PD \parallel QG$, por el Teorema 3.4.10, encontramos que $PD \cong GQ$. De acuerdo con el Axioma AM, concluimos que $d(P,\overleftrightarrow{OA}) = |PD| = |GQ| < |FG| = |FE| < d(P,\overleftrightarrow{OB})$.

Suficiencia. Si $d(P,\overleftrightarrow{OA}) < d(P,\overleftrightarrow{OB})$, por el Teorema 4.7.9, sabemos entonces que $P \notin \overrightarrow{OC}$. Por ello, $P \in int(\angle AOC) \cup int(\angle COB)$. Si $P \in int(\angle COB)$, aplicando la necesidad de este primer inciso, obtendríamos que $d(P,\overleftrightarrow{OB}) < d(P,\overleftrightarrow{OA})$, lo cual sería una contradicción. Por lo tanto, $P \in int(\angle AOC)$. ♣

A continuación, analizaremos la posición de un punto del plano con respecto a dos rectas paralelas:

4.7.11. Teorema. Sean m y l dos rectas paralelas y P un punto fuera de ellas.

1. El punto P y l están en diferentes semiplanos determinados por m si y solo si $d(l,m) < d(P,l)$ y $d(P,m) < d(P,l)$.

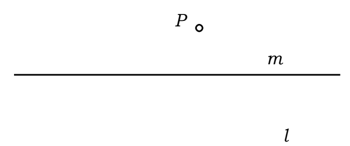


Figura 4.38

2. El punto P está en el semiplano determinado por m que contiene a l y en el semiplano determinado por l que contiene a m, si y solo si $d(l,m) > d(P,l)$ y $d(l,m) > d(P,m)$.

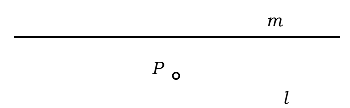


Figura 4.39

3. El punto P y m están en diferentes semiplanos determinados por l si y solo si $d(l,m) < d(P,m)$ y $d(P,l) < d(P,m)$.

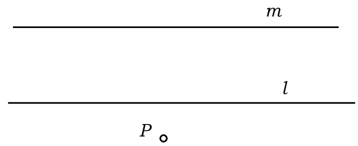


Figura 4.40

Prueba: Probaremos solamente la primera equivalencia. Sea n la recta que pasa por P y que es perpendicular a m. El Teorema 3.7.2 nos dice que n es también perpendicular a l. Sean A y B los puntos de intersección de n con l y m, respectivamente.

Necesidad. Nuestra hipótesis nos dice que P está en el semiplano determinado por m que no contiene a l. Por otra parte, sabemos, por definición, que $d(l,m) = |AB|$, $d(P,l) = |PA|$ y $d(P,m) = |PB|$. Como B que es el punto de intersección de n y m, y B yace entre P y A, por el Teorema 1.9.4, deducimos que $|AB| < |PA|$ y $|PB| < |PA|$. Por lo tanto, $d(l,m) = |AB| < d(P,l) = |PA|$ y $d(P,m) = |PB| < d(P,l) = |PA|$.

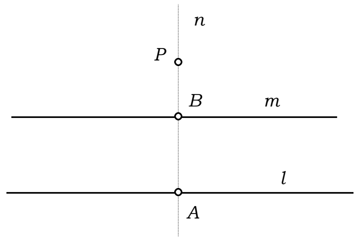
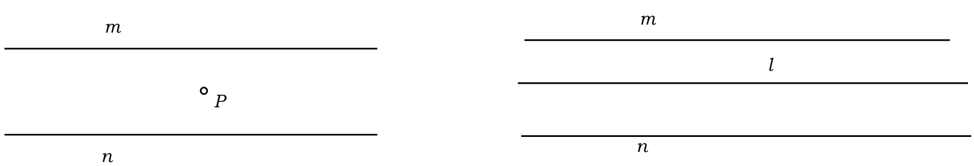


Figura 4.41

Suficiencia. Supongamos que $d(l,m) < d(P,l)$ y $d(P,m) < d(P,l)$. Supongamos que P y l están en un mismo semiplano determinado por la recta m. Entonces, B no puede estar entre A y P. Si P está en el semiplano determinado por l que contiene a m, entonces P está entre A y B. De acuerdo con el Teorema 1.9.4, $d(l,m) = |AB| > |PA| = d(P,l)$, lo cual contradice nuestra suposición. Ahora, si P y m están en diferentes semiplanos determinados por l, tenemos entonces que A está entre P y B y, por consiguiente, $d(P,m) = |PB| > d(P,l) = |PA|$, pero esto es también imposible. Por lo tanto, P y l están en diferentes semiplanos determinados por m. ♣

Este último teorema nos dice, en términos de distancias, la ubicación de un punto con respecto a dos rectas paralelas.

4.7.12. Definición. Sean m y n dos rectas paralelas. Decimos que un punto P *está entre las rectas* m y n si se cumplen las desigualdades $d(m,n) > d(P,m)$ y $d(m,n) > d(P,n)$. Con esta terminología, diremos que una recta l *está entre cualesquiera dos rectas paralelas* m y n si $d(m,n) > d(P,m)$ y $d(m,n) > d(P,n)$, para todo punto $P \in l$.



P está entre m y n $\qquad$ l está entre m y n

Figura 4.42

La prueba del siguiente teorema se deja al lector (Problema 4.335).

4.7.13. Teorema. Si una recta está entre cualesquiera dos rectas paralelas, entonces dicha recta es paralela a cualquiera de las dos rectas paralelas.

4.7.14. Teorema. Sean l una recta y $r > 0$ un número real. Entonces existen dos únicas rectas m y n paralelas a l tales que $d(l,m) = d(l,n) = r$.

Prueba: Tracemos una recta t perpendicular a l en el punto O. En base al Corolario 1.10.6, podemos encontrar dos puntos cualesquiera A y B sobre t tales que O es el punto medio de AB y $|OA| = r = |OB|$. Tracemos las rectas m y n paralelas a l que pasan por los puntos A y B, respectivamente (dichas rectas existen por el Corolario 3. 7. 5). Por definición tenemos que

$$d(l,m) = |OA| = r = |OB| = d(l,n) .$$

Esto prueba la existencia de las rectas que se piden. Veamos ahora la unicidad de m y n. Para esto, escogemos un punto P en el plano tal que $d(P,l) = r$. Sea O' la proyección del punto P sobre la recta l.

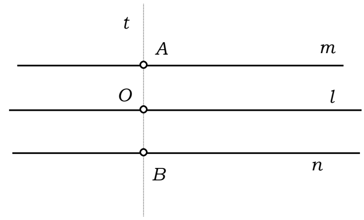


Figura 4.43

Como $\overleftrightarrow{PO'} \perp l$ y $\overleftrightarrow{AO} \perp l$, por el Teorema 3.7.1, $\overleftrightarrow{PO'} \parallel \overleftrightarrow{AO}$. Como también se tiene que $|PO'| = |AO| = r$, por el Teorema 4.7.7, $\overleftrightarrow{PA} \parallel l$. Por el Axioma de las Rectas paralelas $\overleftrightarrow{PA} = m$. Con esto queda establecida la unicidad de las rectas m y n. ♣

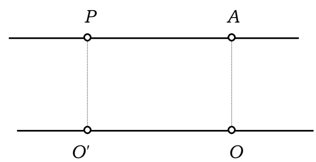


Figura 4.44

4.8. Simetría

4.8.1. Definición. Dos puntos cualesquiera P y P' se dicen que son *simétricos* con respecto a un punto M si M es el punto medio del segmento PP'. Al punto M se le llama el *centro de simetría*. Decimos que P es el *punto simétrico* de P' con respecto a M, y viceversa.

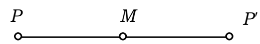


Figura 4.45

Dado un punto P y un centro de simetría M, el punto simétrico de P con respecto a M es el punto $P' \in \overleftrightarrow{PM}$ tal que M es el punto medio de PP' (él cual existe por el Axioma CS_2).

4.8.2. Definición. Decimos que cualesquiera dos puntos P y P' son *simétricos con respecto a una recta* l si la recta l resulta ser la mediatriz del segmento PP'. A la recta l se le llama el *eje de simetría*. Se dice que el punto P es el *punto simétrico* del punto P' con respecto a la recta l, y viceversa. Si $P \in l$, entonces convenimos que él mismo es su punto simétrico con respecto a la recta l.

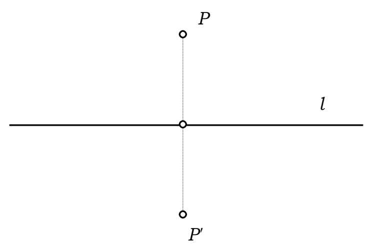


Figura 4.46

Veamos cómo encontrar el punto simétrico de un punto dado con respecto a una recta dada:

Sean l una recta y P un punto fuera de l. De acuerdo con el Teorema 3.7.3, existe una única recta m que pasa por P y es perpendicular a l en el punto Q. Por el Axioma CS_2, podemos encontrar, de manera única, un punto $P' \in m$, de tal forma que $PQ \cong QP$'. Lo cual significa que Q es el punto medio del segmento PP'. Por ello, l es la mediatriz del segmento PP'. Así que P' resulta ser el punto simétrico de P con respecto a la recta l.

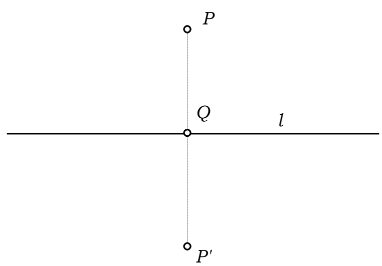


Figura 4.47

4.8.3. Teorema. Sean P y M dos puntos cualesquiera en el plano. Si P' es el punto simétrico de P con respecto a un punto M, entonces P' es el punto simétrico de P con respecto a la recta perpendicular a $\overleftrightarrow{PM}$ en el punto M.

Prueba: Por definición, M es el punto medio del segmento PP'. Por lo cual, $P' \in \overleftrightarrow{PM}$. Sea l la recta perpendicular a $\overleftrightarrow{PM}$ en el punto M. Por definición, l es la mediatriz del segmento PP'. Por ello, P' es el punto simétrico de P con respecto a la recta l. ♣

4.8.4. Teorema. Sean l una recta y $P \notin l$. Si P' es el punto simétrico de P con respecto a l, y Q es la proyección de P sobre l, entonces P' es el punto simétrico de P con respecto Q.

Prueba: Como l es la mediatriz del segmento PP', se tiene que Q es el punto medio del segmento PP'. Por definición, hallamos que P' es el punto simétrico de P con respecto a Q. ♣

4.8.5. Teorema. Los puntos simétricos con respecto a una recta de los puntos de un segmento forman un segmento congruente al segmento dado.

Prueba: Sean AB un segmento y l una recta. Sean A' el punto simétrico de A con respecto a l, y B' el punto simétrico de B con respecto a l. Probaremos que $A'B'$ es el segmento deseado y $AB \cong A'B'$. Consideremos cada uno de los cuatro posibles casos:

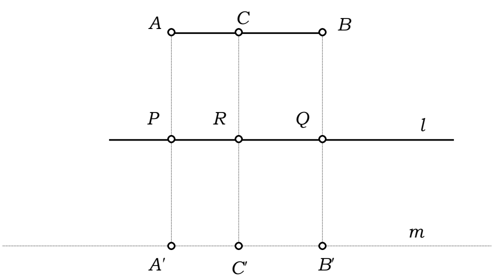


Figura 4.48

Caso I. $AB \parallel l$. Sean P la proyección de A sobre l, y Q la proyección de B sobre l. Tomemos un punto arbitrario $C \in AB$ y sea C' el punto simétrico de C con respecto a l. Sea R la proyección de C sobre l. Según el Teorema 3.7.1, $AA' \parallel CC'$ y $CC' \parallel BB'$, y por el Teorema 3.4.10, $AA' \cong CC' \cong BB'$. De aquí se sigue que $A'P \cong C'R \cong B'Q$. De acuerdo con el Teorema 4.7.7, $\overleftrightarrow{A'C'} \parallel l$ y $\overleftrightarrow{C'B'} \parallel l$. Por consiguiente, A', C' y B' son colineales y $C' \in A'B'$. Análogamente, podemos probar que cada punto simétrico con respecto a la recta l de cada punto del segmento $A'B'$ yace en el segmento AB. La congruencia $AB \cong A'B'$ se sigue del Teorema 3.4.10.

Caso II. Las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y l se cortan en un punto O, y $AB \cap l = \varnothing$.

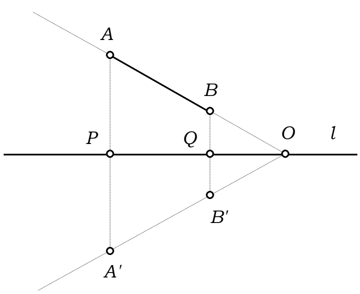


Figura 4.49

Sean P y Q las proyecciones de A y B sobre l, respectivamente. Por definición, sabemos que P y Q son los puntos medios de los segmentos AA' y BB', respectivamente. Consideremos los triángulos rectángulos ΔAPO y $\Delta A'PO$. Ambos tienen un cateto en común, y $AP \cong A'P$. Según el tercer criterio de congruencia para triángulos rectángulos (3.6.4), $\Delta APO \cong \Delta A'PO$. De igual manera, podemos probar que $\Delta BQO \cong \Delta B'QO$. De aquí obtenemos que $\angle AOP = \angle BOP \cong \angle POB' = \angle POA'$. Por el Axioma CA_2, hallamos que A', B' y O tienen que ser colineales. Tomemos un punto $C \in AB$ y sea C' el punto simétrico de C con respecto a l. Con un argumento similar al anterior, podemos probar que A', C' y O son colineales. Por lo cual, A', C' y B' son también colineales y no es difícil ver que $C' \in A'B'$. De manera similar, se establece que los puntos simétricos con respecto a la recta l de los puntos del segmento $A'B'$ yacen sobre el segmento AB. Por otra parte, sabemos que $AO \cong A'O$ y $BO \cong B'O$. Como una consecuencia del Teorema 1.7.1, hallamos que $AB \cong A'B'$.

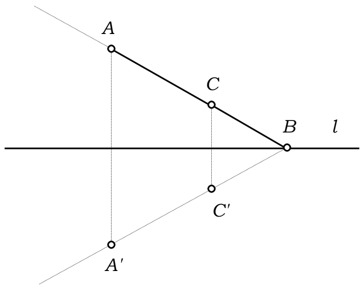


Figura 4.50

Caso III. $\emptyset \neq AB \cap l \subseteq \{A, B\}$. Sin perder generalidad, podemos suponer que $AB \cap l = \{B\}$. Por definición, sabemos que B es su propio punto simétrico con respecto a la recta l. Es decir, $B = B'$. Si $C \in AB$ y C' es el punto simétrico de C con respecto a l, con un argumento similar al usado en el caso anterior, es posible probar que A', C' y B son consecutivos y $AB \cong A'B'$.

Caso IV. l y $AB - \{A, B\}$ se intersecan en el punto O. Según el tercer caso, los puntos simétricos de los puntos del segmento AO están en el segmento $A'O$, y viceversa. Lo mismo pasa con los puntos de los segmentos OB y OB'. Concluimos así que los puntos simétricos de los puntos de AB yacen en $A'B'$, y viceversa. Además, tenemos que $OA \cong OA'$ y $OB \cong OB'$. Del Axioma CS_3, concluimos que $AB \cong A'B'$. ♣

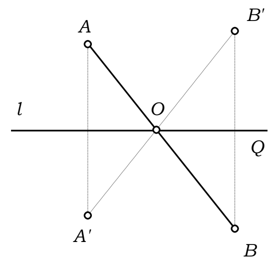


Figura 4.51

4.8.6. Definición. Dos conjuntos de puntos del plano ***M*** y ***N*** se llaman *simétricos* con respecto a una recta fija (respectivamente, a un punto fijo) si cada punto de ***M*** es el punto simétrico de un punto de ***N*** con respecto a la recta fija (respectivamente, al punto fijo), y viceversa. Decimos que un conjunto no vacío del plano tiene un *eje de simetría* si existe una recta que parte al conjunto en dos subconjuntos simétricos. A dicha recta se le llama *eje de simetría* del conjunto. Decimos que un punto es el *centro de simetría* de un conjunto no vacío del plano si cada punto del conjunto es el punto simétrico de un punto del mismo conjunto con respecto al punto dado.

Veamos a continuación algunos ejemplos que ilustran los conceptos anteriores.

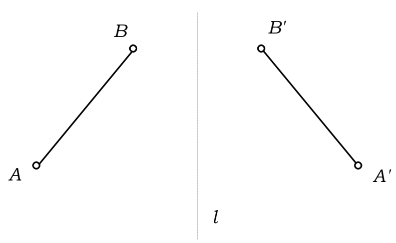


Figura 4.52
Los segmentos AB y $A'B'$ son simétricos con respecto a la recta l

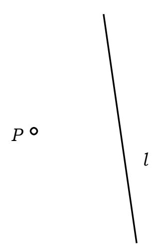


Figura 4.53
El conjunto formado por el punto P y la recta l no son simétricos con respecto a ninguna recta.

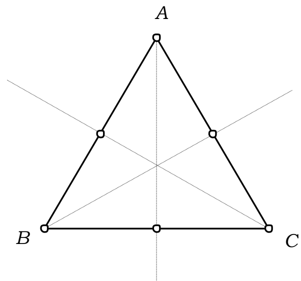


Figura 4.54
Las mediatrices de los lados de un triángulo equilátero ΔABC son sus ejes de simetría.

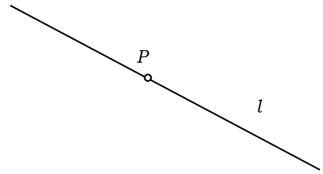


Figura 4.55
Cualquier punto de una recta es un centro de simetría de la misma.

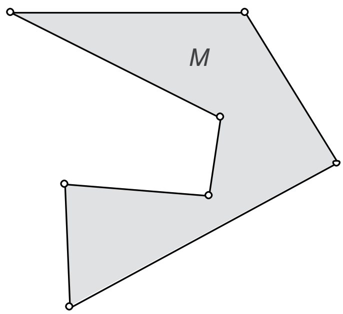


Figura 4.56
El conjunto M no tiene eje de simetría y tampoco centro de simetría.

4.8.7. Teorema. Los puntos simétricos con respecto a una recta fija (o a un punto fijo) de los puntos de una recta forman una recta.

Prueba: Primero consideraremos el caso cuando se tenga un eje de simetría. Fijamos una recta l y sea m una recta diferente de l. Sea L el conjunto de puntos simétricos de m con respecto a la recta l.

Caso I. $l \parallel m$. Sean $P \in m$ y P' el punto simétrico de P con respecto a l. Por definición, $P' \in$ L. Sea m' la recta paralela a l que pasa por el punto P'. Veremos que $m' =$ L. En efecto, tomemos un punto $Q' \in m'$ y sea Q su punto simétrico con respecto a l. De acuerdo con el Teorema 4.7.7, hallamos que $d(P,l) = d(P',l) = d(Q',l) = d(Q,l)$. Por el mismo Teorema 4.7.7, se obtiene que $\overleftrightarrow{PQ} \parallel l$. Por consiguiente, $Q \in m$ y por ello $Q' \in$ L. Tomemos ahora un punto $Q' \in$ L. Por definición, Q' es el punto simétrico de un punto $Q \in m$ con respecto a l. Entonces, $d(Q,l) = d(Q',l)$ y además $d(P,l) = d(P',l)$. Ya que $P, Q \in m$, por el Teorema 4.7.7, $d(P,l) = d(Q,l)$. Por lo tanto, $d(P',l) = d(Q',l)$. Claramente P' y Q' yacen en un mismo semiplano determinado por l. De acuerdo con el Teorema 4.7.7, $\overleftrightarrow{P'Q'} \parallel l$. Por el Axioma de las Rectas Paralelas, hallamos que $\overleftrightarrow{P'Q'} = m'$ y, como consecuencia, $Q' \in m'$.

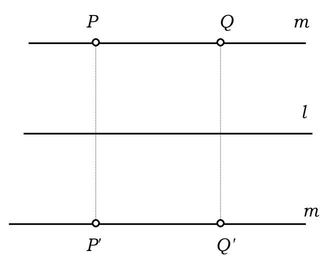


Figura 4.57

Caso II. Supongamos que O es el punto de intersección de l y m. Sean $P \in m - \{O\}$ y P' su punto simétrico con respecto a l. Pongamos $n = \overleftrightarrow{P'O}$ y denotemos por L al conjunto de puntos simétricos de puntos de la recta m con respecto a l. Tomemos un punto arbitrario $Q \in n - \{O\}$. Sean R y S las proyecciones de los puntos P y Q sobre l, y Q' el punto de intersección de las rectas m y $\overleftrightarrow{QS}$. Sabemos que $\overleftrightarrow{OR}$ es la mediatriz del segmento PP' y por ello $\Delta OPP'$ es un triángulo isósceles con $OP \cong OP'$. Como R es el punto medio de PP', del Teorema 4.3.1, hallamos que $\overrightarrow{OR}$ resulta ser la bisectriz del ángulo $\angle POP'$. De donde hallamos que $\angle ROP' \cong \angle POR$. Por el Teorema 2.10.2, $\angle SOQ \cong \angle ROP'$ y $\angle Q'OS \cong \angle POR$. Por ello, $\angle SOQ \cong \angle Q'OS$. Según el criterio 3.6.2, los triángulos rectángulos $\Delta OQ'S$ y ΔOQS son congruentes. En consecuencia, $SQ \cong SQ'$. Esto demuestra que l es la mediatriz del segmento QQ' y entonces Q' es el punto simétrico de Q con respecto a l. Por lo tanto, $Q \in$ L. Esto demuestra que $n \subseteq$ L. Para probar la otra contención, fijemos un punto $Q \in$ L. Sin perder generalidad, supongamos que P y Q pertenecen a un mismo semiplano determinado por la recta l. Sea $Q' \in m$ el punto simétrico de Q con respecto a l. De acuerdo con el primer criterio de congruencia (3.2.6), sabemos que $\Delta OQ'S \cong \Delta OQS$. De donde hallamos que $\angle Q'OS \cong \angle SOQ$. De acuerdo con el Teorema 2.10.2, obtenemos que $\angle POR \cong \angle Q'OS$. Por otra parte, sabemos que se cumple la congruencia $\angle POR \cong \angle ROP'$. Por consiguiente, $\angle ROP' \cong \angle SOQ$ y al aplicar el Problema 2.66, obtenemos que los puntos P', O y Q son colineales. Esto prueba que $Q \in n$.

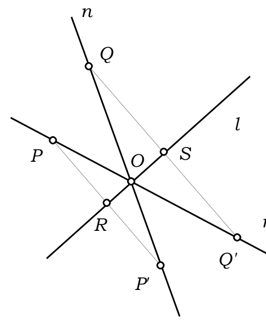


Figura 4.58

Analicemos ahora el caso cuando el centro de referencia sea un punto, digamos O. Fijemos una recta l en el plano y un punto $P \in l$. Sea P' el punto simétrico de P con respecto a O. Consideremos dos posibles casos:

Caso I. $O \notin l$. Tracemos una recta m paralela a l y que pase por el punto P'. Sea L el conjunto de todos los puntos simétricos de puntos de la recta l con respecto al punto O. Tomemos un punto $Q \in m$ y sea Q' el punto de intersección de l y $\overleftrightarrow{QO}$. En base al Teorema 2.10.2, sabemos que $\angle POQ' \cong \angle P'OQ$. Por el Teorema 3.4.4, tenemos que $\angle QP'O \cong \angle Q'PO$. Ya que $P'O \cong OP$, por el criterio 3.2.7, hallamos que $\Delta OP'Q \cong \Delta OPQ'$. Por ello, $OQ \cong OQ'$, lo cual quiere decir que $Q \in$ L. Inversamente, tomemos un punto $Q \in$ L y sea Q' el punto simétrico de Q con respecto a O. Entonces, por definición, sabemos que $OQ \cong OQ'$ y $OP \cong OP'$. Según el criterio 3.2.6, $\Delta OPQ' \cong \Delta OPQ$. De aquí se sigue que $\angle QP'O \cong \angle Q'PO$. Por el Teorema 3.4.4, $\overleftrightarrow{P'Q} \parallel l$. El Axioma de la Rectas paralelas nos asegura que $Q \in m = \overleftrightarrow{P'Q}$. Así queda demostrada la igualdad $m =$ L.

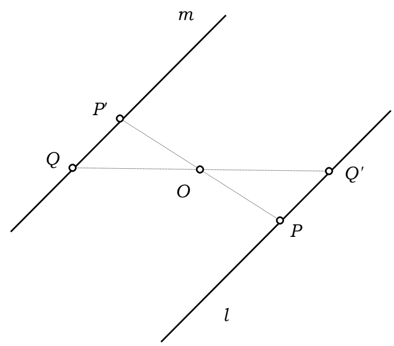


Figura 4.59

Caso II. $O \in l$. En este caso probaremos que el conjunto de puntos simétricos de puntos de l es ella misma. En efecto, tomemos un punto $P \in l$. Sea P' el punto simétrico de P con respecto al punto O. Ya que P, O y P' son colineales y $O, P \in l$, se sigue que $P' \in l$. Inversamente, sea P un punto del plano que es punto simétrico de un punto $P' \in l$ con respecto al punto O. Como P, O y P' son colineales por definición, y $O, P' \in l$, se sigue que $P \in l$. ♣

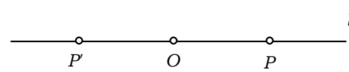
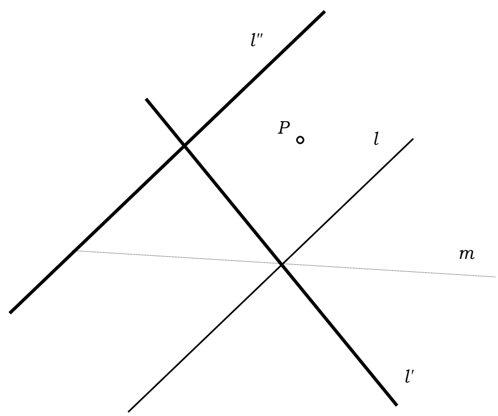


Figura 4.60

El teorema anterior justifica la siguiente definición.

4.8.8. Definición. Si l es una recta, entonces a la recta que consiste de los puntos simétricos de l con respecto a una recta fija (respectivamente, a un punto fijo), se le llama la *recta simétrica* de l con respecto a la recta fija (respectivamente, al punto fijo).



l’ es la recta simétrica de l con respecto a la recta m y l’’ es la recta simétrica de l con respecto al punto P

Figura 4.61

Problemas

4.1. Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ tres subconjuntos no vacíos del plano ajenos entre sí tales que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ resulta ser todo el plano. Si para cada $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$ se tiene que $AB \cap \mathcal{C} \neq \varnothing$, entonces decimos que el conjunto $\mathcal{C}$ *separa* al plano.
  a. Probar que todo ángulo no degenerado separa al plano.
  b. Probar que todo triángulo separa al plano.
  c. Probar que toda recta separa al plano.
  d. ¿Puede separar un segmento al plano?

4.2. ¿Es posible establecer una correspondencia biunívoca entre los puntos de dos triángulos arbitrarios ΔABC y $\Delta A'B'C'$, de tal forma que al vértice A le corresponda el vértice A', al vértice B le corresponda el vértice B' y al vértice C le corresponda el vértice C'?

4.3[El problema del millón de rectas, rompecabezas ruso, a-137]. Damos un millón de rectas tales que ningún par de ellas son paralelas y en cada punto de intersección de dos de ellas pasan al menos tres rectas de las dadas, ¿cuántos puntos de intersección hay?

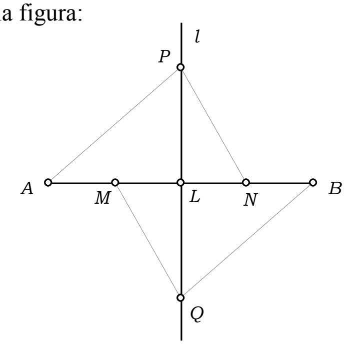
4.4[a-137]. Damos un millón de puntos en el plano tales que cada recta que una dos de estos puntos contiene al menos tres de dichos puntos, ¿cuántas rectas hay?

4.5[a-16]. Cada punto del plano se le ha asignado un solo color entre el blanco y el negro.
  a. Probar que existe un triángulo isósceles cuyos vértices tienen el mismo color.
  b. Probar que existe un triángulo equilátero cuyos vértices tienen el mismo color.

4.6. Se tiene un segmento marcado sobre una hoja de papel. Mediante dobleces de la misma hoja, marcar la mediatriz de dicho segmento.

4.7. Sea m la mediatriz del segmento AB. Si P, $Q \in m$, probar que $\Delta APQ \cong \Delta BPQ$.

4.8. En la figura:



l es la mediatriz del segmento AB, M y N son los puntos medios de los segmentos AL y LB, respectivamente. Si $PA \cong QB$, probar que $PN \cong QM$.

4.9. Sean AB un segmento y m su mediatriz. Para un punto M diferente de A y B, probar los siguientes enunciados:
  a. $AM < BM$ si y solo si M y A pertenecen a uno de los semiplanos determinados por m.
  b. $AM > BM$ si y solo si M y B pertenecen a uno de los semiplanos determinados por m.
  c. $AM = BM$ si y solo si $M \in m$.

En el artículo [a-71], L. Hoehn ofrece demostraciones alternativas del Teorema 4.4.2 y del Primer Teorema de Incongruencia de Triángulo (4.4.15) usando el primer inciso de este problema.

4.10. Sean A, B y C tres puntos no colineales. Dibujar el conjunto de puntos M que satisfagan las condiciones de cada uno de los siguientes enunciados:
  a. El conjunto de puntos M tales que $MA < MB$ y $MA < MC$.
  b. El conjunto de puntos M tales que $MB < MA$ y $MA < MC$.
  c. El conjunto de puntos M tales que $MA < MB$ y $MC < MA$

d. El conjunto de puntos M tales que $MA < MB$ y $MA \cong MC$.
e. El conjunto de puntos M tales que $MB < MA$ y $MB < MC$.

4.11. Sean AB y CD dos segmentos con la misma mediatriz m. Probar que las mediatrices de AC y BD, y m son concurrentes.

4.12. Supongamos que $AB \cong CD$ y que las mediatrices de los segmentos AC y BD se cortan en un punto O. Probar que $\Delta OCD \cong \Delta OAB$.

4.13. Sean AB y CD dos segmentos no paralelos. Encontrar un punto P en el plano, de tal manera que los triángulos ΔPAB y ΔPCD sean isósceles.

4.14. ¿Es posible encontrar cuatro puntos en el plano, de tal forma que cualesquiera tres de ellos sean los vértices de un triángulo equilátero?

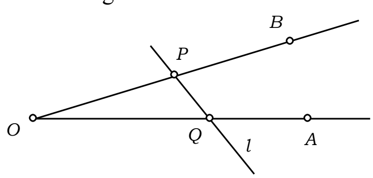
4.15. Colocar cuatro puntos en el plano tal que entre dos de ellos solamente haya dos distancias posibles.

4.16 [I-72]. Sea S un conjunto no vacío de puntos del plano tal que cualquier recta que conecte a dos puntos de S pasa a través de un tercer punto del mismo conjunto. Probar que si todos los puntos de S no son colineales, entonces S es infinito.

4.17. Si dos ángulos no degenerados tienen sus lados paralelos, probar que sus bisectrices son paralelas, o bien, perpendiculares.

4.18. Si dos ángulos no degenerados tienen sus lados respectivamente perpendiculares, probar que sus bisectrices son paralelas o perpendiculares.

4.19. En la figura:



sean $\angle AOB$ un ángulo no degenerado y l una recta que corta a los lados del ángulo en los puntos P y Q. Probar que las bisectrices de los ángulos $\angle AQP$ y $\angle QPB$ se cortan en la bisectriz del ángulo $\angle AOB$.

4.20. Sean A, B y C tres puntos no colineales y tracemos rectas que unan a cada par de estos puntos. Consideremos los ángulos que se forman cuyos vértices yacen en los puntos dados.

a. ¿Cuántos ángulos agudos y cuántos ángulos obtusos se forman por lo menos?
b. Si uno de estos ángulos es recto, probar que se forman exactamente 4 ángulos agudos y 4 ángulos obtusos.
c. Si se forman al menos 5 ángulos agudos, probar que ninguno de los ángulos que se forman puede ser recto.

4.21. Sean $\angle AOB$ y $\angle A'O'B'$ dos ángulos no degenerados tales que $OA \cong O'A'$ y $OB \cong O'B'$. Probar que $AB < A'B'$ si y solo si $\angle AOB < \angle A'O'B'$.

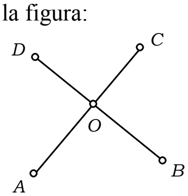
4.22. Sean $\angle AOB$ y $\angle BOC$ dos ángulos suplementarios adyacentes. Trazamos la recta paralela a AC que pasa por B y que corta a las bisectrices de los ángulos $\angle AOB$ y $\angle BOC$ en los puntos M y N, respectivamente.

a. Probar que B es el punto medio de MN.
b. Probar que el triángulo ΔMON es rectángulo.

4.23. Sean $\angle AOB$ un ángulo no degenerado tal que $OA \cong OB$, y l y m las rectas perpendiculares a $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ en los puntos A y B, respectivamente. Si l y m se cortan en el punto P, probar que $\overrightarrow{OP}$ es la bisectriz del ángulo $\angle AOB$.

4.24. Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos. Si $AB < BC$, $\angle A \cong \angle A'$, $AB \cong A'B'$ y $BC \cong B'C'$, probar que $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

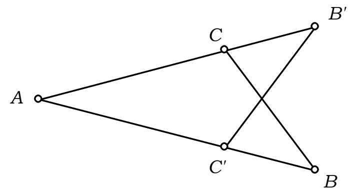
4.25. En la figura:



tenemos que $OA \cong OB$ y $OC \cong OD$. Si $\overleftrightarrow{CB}$ y $\overleftrightarrow{DA}$ se cortan en el punto P, probar que $\overrightarrow{OP}$ es la bisectriz del ángulo $\angle APB$.

4.26. En la figura:

si $AC \cong AC'$ y $AB \cong AB'$, probar que la bisectriz del ángulo $\angle A$ pasa por el punto de intersección de BC y $B'C'$.



4.27. Sean l una recta y P y Q dos puntos en el plano. Si P' y $Q' \in l$ son las proyecciones de P y Q sobre l, respectivamente, probar que $|P'Q'| \leq |PQ|$.

4.28. Sean $\angle AOB$ y $\angle BOC$ dos ángulos adyacentes de medida 60. Si $P \in int(\angle AOB)$, y L, M y N son las proyecciones de P sobre las rectas $\overleftrightarrow{OA}$, $\overleftrightarrow{OB}$ y $\overleftrightarrow{OC}$, respectivamente, probar que $|PN| = |PL| + |PM|$.

4.29. Sean l y m dos rectas paralelas y $P \notin l \cup m$. Si A y B son las proyecciones del punto P sobre las rectas l y m, respectivamente, probar que los puntos A, P y B son colineales.

4.30. Sea $\angle AOB$ un ángulo no degenerado. Probar que $\angle AOB$ es agudo si y solo si la proyección del punto A sobre la recta $\overleftrightarrow{OB}$ yace sobre la semirrecta $\overrightarrow{OB}$.

4.31[a-71]. Sean $\angle AOB$ un ángulo no degenerado, $\overrightarrow{OC}$ su bisectriz y $P \in int(\angle\alpha)$. Si P y A están en un mismo semiplano determinado por $\overleftrightarrow{OC}$, probar que $\angle AOP < \angle POB$ y $d(P, \overleftrightarrow{OA}) < d(P, \overleftrightarrow{OB})$.

4.32. Dado un segmento, probar que en cada uno de los semiplanos que determina la recta que contiene al segmento dado se puede construir uno y solo un triángulo equilátero cuya base sea el segmento dado.

4.33. Si ΔABC es un triángulo cuyos ángulos son agudos, probar que $180 - 2\angle A$, $180 - 2\angle B$ y $180 - 2\angle C$ son los ángulos de un triángulo.

4.34. Si ΔABC es un triángulo, probar que $\dfrac{180 - \angle A}{2}$, $\dfrac{180 - \angle B}{2}$ y $\dfrac{180 - \angle C}{2}$ son los ángulos de un triángulo.

4.35. Si ΔABC es un triángulo cuyos ángulos $\angle A$ y $\angle B$ son agudos, probar que $90 - \angle A$, $90 - \angle B$ y $180 - \angle C$ son los ángulos de un triángulo.

4.36. Si ΔABC es un triángulo, probar que $\dfrac{\angle A}{2}$, $\dfrac{\angle B}{2}$ y $\dfrac{180 + \angle C}{2}$ son los ángulos de un triángulo.

4.37. Sean $\angle\alpha$, $\angle\beta$ y $\angle\gamma$ tres ángulos no degenerados. Probar que $\angle\alpha$, $\angle\beta$ y $\angle\gamma$ son los tres ángulos exteriores de un triángulo si y solo si $m(\angle\alpha) + m(\angle\beta) + m(\angle\gamma) = 360$.

4.38. ¿Cuál es la medida de un ángulo exterior de un triángulo equilátero?

4.39. Probar que si las medidas de tres ángulos exteriores correspondientes a diferentes vértices de un triángulo son iguales, entonces el triángulo es equilátero.

4.40. ¿Existe un triángulo cuyos ángulos exteriores midan 100, 120 y 130?

4.41. Probar que la diferencia de las medidas de dos ángulos exteriores de un triángulo es igual a la diferencia de las medidas de los ángulos interiores adyacentes a dichos ángulos.

4.42. Calcular la suma de las medidas de los tres ángulos exteriores y de los tres ángulos interiores de un triángulo.

4.43. Probar que la suma de las medidas de los tres ángulos exteriores de un triángulo es mayor que la suma de las medidas de los tres ángulos interiores del mismo triángulo.

4.44. En un triángulo cuyos ángulos son agudos, probar que la suma de las medidas de los ángulos complementarios de dos de sus ángulos es igual a la medida del tercer ángulo.

4.45. Si la medida de uno de los ángulos exteriores de un triángulo es igual a la mitad de la suma de las medidas de los otros dos ángulos exteriores, probar que uno de los ángulos del triángulo mide 60.

4.46. ¿Puede un triángulo tener dos ángulos interiores congruentes a dos ángulos exteriores de otro triángulo?

4.47. Si ΔABC es un triángulo tal que $\dfrac{m(\angle A)}{1} = \dfrac{m(\angle B)}{2} = \dfrac{m(\angle C)}{3}$, encontrar las medidas de sus ángulos.

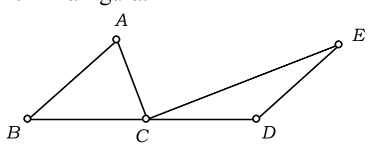
4.48. Si en un triángulo ΔABC se cumple que $m(\angle B) + m(\angle C) = 120$ y $m(\angle A) - m(\angle C) = 50$, calcular la medida de cada uno de los ángulos del triángulo.

4.49. Si en un triángulo uno de sus ángulos mide 38 y la diferencia de las medidas de los otros dos ángulos es igual a 20, dar las medidas de los tres ángulos del triángulo.
4.50. En el triángulo ΔABC, se tiene que $m(\angle C) = 100$, y el ángulo exterior del triángulo de vértice B es 5 veces el ángulo $\angle A$. Calcular las medidas de los ángulos $\angle A$ y $\angle B$.
4.51. Sea ΔABC un triángulo tal que la medida del ángulo exterior adyacente al ángulo $\angle A$ es 4 veces la medida del ángulo exterior adyacente a $\angle C$, y la medida del ángulo exterior adyacente a $\angle B$ es igual a 5 veces la medida del ángulo exterior adyacente a $\angle C$. Calcular la medida de cada uno de los ángulos del triángulo ΔABC.
4.52. Si cierto triángulo isósceles tiene un ángulo que mide 30 veces más que cualquiera de los otros dos ángulos, encontrar las medidas de los ángulos de dicho triángulo.
4.53. Probar que un triángulo es rectángulo si y solo si un par de sus ángulos son complementarios.
4.54. Probar que un triángulo es rectángulo si y solo si la medida de uno de sus ángulos es igual a la suma de las medidas de los otros dos.
4.55. Si la medida de un ángulo exterior de un triángulo rectángulo es 135, calcular la medida de los dos ángulos agudos del triángulo.
4.56. Si las medidas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo están en la relación $\frac{4}{5}$, calcular las medidas de dichos ángulos.
4.57. Si en el triángulo ΔABC se cumple que $\frac{m(\angle B)}{m(\angle C)} = \frac{1}{2}$ y $m(\angle A) + 2m(\angle B) = 160$, encontrar las medidas de los ángulos del triángulo.
4.58. Si en el triángulo ΔABC se cumple que $\frac{m(\angle A)}{m(\angle B)} = \frac{3}{2}$ y $\frac{m(\angle B)}{m(\angle C)} = \frac{1}{3}$, calcular la medida de cada uno de los ángulos del triángulo ΔABC.
4.59. Si en el triángulo ΔABC se cumplen las identidades $\frac{m(\angle A)}{m(\angle B)} = \frac{1}{2}$ y $\frac{m(\angle B)}{m(\angle C)} = \frac{2}{3}$, probar que ΔABC es un triángulo rectángulo.
4.60. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle C$. Si $\frac{m(\angle A)}{m(\angle B)} = \frac{m(\angle B)}{m(\angle C)}$, encontrar las medidas de los ángulos agudos del triángulo.
4.61. Sea ΔABC un triángulo. Probar que $\frac{m(\angle A)}{m(\angle B)} = \frac{m(\angle B)}{m(\angle C)}$ si y solo si

$$m(\angle A) = s^2 \frac{180}{1+s+s^2},\ m(\angle B) = s\frac{180}{1+s+s^2} \ \text{ y } \ m(\angle C) = \frac{180}{1+s+s^2},$$

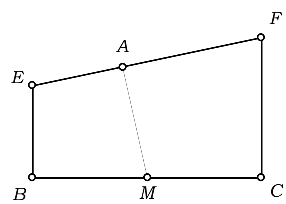
para algún número real positivo s.
4.62. Si en un triángulo el ángulo más pequeño es $\frac{3}{4}$ el ángulo mediano y el ángulo mediano es $\frac{4}{5}$ el ángulo más grande. Calcular las medidas de cada uno de los ángulos del triángulo.
4.63. Sea ΔABC un triángulo en el cual $\angle A$ y $\angle B$ son complementarios y $m(\angle C) - m(\angle A) = 60$. Calcular la medida de cada uno de los ángulos del triángulo.
4.64. Sea ΔABC un triángulo isósceles tal que $AB \cong AC$, $m(\angle A) = 2x + 70y$, $m(\angle B) = 3x + 10y$ y $m(\angle C) = 5x + 10y$ ¿Para qué valores de y el ángulo $\angle A$ es obtuso?
4.65. Si en un triángulo ΔABC se tiene que $m(\angle A) = 5x + 10$, $m(\angle B) = 2x + 40$ y $m(\angle C) = 4x + 20$, probar que ΔABC es un triángulo equilátero.
4.66. Encontrar las medidas de los ángulos de un triángulo sabiendo que dos de sus ángulos exteriores miden 120 y 130.
4.67. Sea ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$. Si $m(\angle B) = 80x + 10$ y $m(\angle C) = 10x + 80$, encontrar la medida del ángulo $\angle A$.

4.68. Si las medidas de los ángulos exteriores de un triángulo son $2x + 10$, $3x + 40$ y $5x + 10$, en donde x es un número real positivo, encontrar las medidas de los ángulos del triángulo.
4.69. Si ΔABC, $\Delta A'B'C'$ y $\Delta A''B''C''$ son tres triángulos tales que $m(\angle A) = 2x$, $m(\angle B) = 2y$, $m(\angle C) = 2z$, $m(\angle A') = x$, $m(\angle B') = 2y$, $m(\angle C') = 3z$, $m(\angle A'') = 4x$, $m(\angle B'') = y$ y $m(\angle C'') = z$, encontrar las medidas de los ángulos de cada uno de los tres triángulos.
4.70. Si ΔABC es un triángulo equilátero y $D \in \overleftrightarrow{AB}$ cumple que B es el punto medio del segmento BD, encontrar las medidas de los ángulos del triángulo ΔADC.
4.71. Si ΔABC es un triángulo tal que $m(\angle B) = 64$, $m(\angle C) = 38$ y $D \in BC$ satisface que $AD \cong DC$, encontrar $m(\angle BAD)$, $m(\angle ADB)$ y $m(\angle CDA)$.
4.72. Sea ΔABC un triángulo cuyos ángulos son todos agudos. Si $3m(\angle A) = m(\angle B)$, probar que $20 \leq m(\angle A) < 30$, $60 \leq m(\angle B) < 90$ y $60 \leq m(\angle C) < 90$.
4.73. Probar que un triángulo isósceles con un ángulo de medida 60 tiene que ser equilátero.
4.74. Sea ΔABC un triángulo tal que $a = 2c$ y $m(\angle B) = 60$. Calcular las medidas de los ángulos restantes del triángulo.
4.75. Sean ΔABC un triángulo y $D \in \overleftrightarrow{AB}$ tal que A está entre B y D, y $AC \cong AD$. Expresar las medidas de los ángulos del triángulo ΔACD en función de las medidas de los ángulos del triángulo original.
4.76. Si ΔABC y $\Delta A'B'C'$ son dos triángulos tales que $AB \cong A'B'$, $m(\angle A) = m(\angle A) = 25$, $m(\angle C) = 95$ y $m(\angle B') = 60$, probar que los dos triángulos tienen que ser congruentes.
4.77. En la figura:



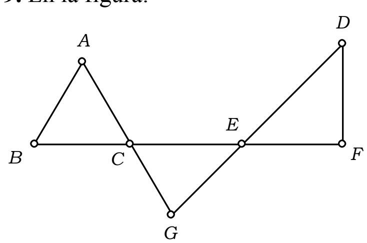
tenemos que los ángulos $\angle CBA$ y $\angle EDC$ son suplementarios, $BA \cong BC$ y $DC \cong DE$. Probar que el ángulo $\angle ECA$ es recto.

4.78. En la figura:



tenemos que $BE \perp BC$, $CF \perp BC$, $EA \cong EB$ y $FA \cong FC$. Si M es el punto medio de BC, probar que $AM \perp EF$.

4.79. En la figura:



tenemos que ΔABC es un triángulo equilátero y ΔDEF es un triángulo rectángulo isósceles con ángulo recto $\angle F$. Calcular la medida de cada uno de los ángulos del triángulo ΔGEC.

4.80. Sea ΔABC un triángulo rectángulo isósceles con $AB \cong AC$. Si $D \in BC$ satisface que $AB \cong BD$, calcular la medida del ángulo $\angle CDA$.
4.81. Sea ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$ y $m(\angle A) = 20$. Si $D \in AB$ y $E \in AC$ satisfacen que $DB \cong BM_a \cong CE$, calcular la medida del ángulo $\angle EM_aD$.
4.82. Sea ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$. Si $D \in BC$ y $E \in AC$ satisfacen que $m(\angle BAD) = 30$ y $AD \cong AE$, calcular la medida del ángulo $\angle CDE$.
4.83. Sea ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$. Probar que $a \leq b$ si y solo si $m(\angle A) \leq 60$.

4.84. Sean ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$. Fijamos un punto $P \in BC$ y extendemos AC hasta un punto E tal que $CP \cong CE$. Si F es el punto de intersección de AB y $\overleftrightarrow{EP}$, probar que $m(\angle EFA) = 3m(\angle AEF)$.

4.85. Si ΔABC, $\Delta A'BC$ y $\Delta A''BC$ son tres triángulos isósceles diferentes con la misma base BC, probar que los puntos A, A' y A'' tienen que ser colineales.

4.86. Sean ΔABC un triángulo y M un punto. Sean P, Q y R las proyecciones del punto M sobre las rectas $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{AB}$, respectivamente, ¿pueden ser los puntos P, Q y R colineales?

4.87. Sea ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$. Si P es la proyección de M_c sobre BC, probar que

$$|BC| = 4|BP|.$$

4.88. Sea ΔABC un triángulo. Si M y N son las proyecciones de M_a sobre las rectas $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{AB}$, respectivamente, probar que $M_aM \cong M_aN$ si y solo si $AC \cong AB$.

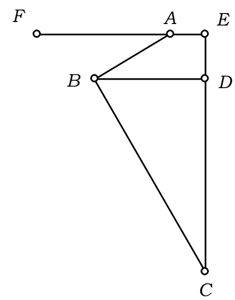
4.89. Sea ΔABC un triángulo. Si $E \in AB$ y $D \in AC$, ¿pueden los segmentos BD y CE bisecarse ente sí?

4.90. Sean ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$, $D \in AB$ y $E \in BC$ tales que $DE \parallel AC$. Probar que $\overrightarrow{AE}$ es la bisectriz del ángulo $\angle A$ si y solo si D es el punto medio de AB.

4.91. Sean ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$ y $D \in AB$ y $E \in AC$. Si $m(\angle A) = 50$, $m(\angle CBE) = 40$ y $m(\angle ACD) = 25$, calcular la medida del ángulo $\angle AED$.

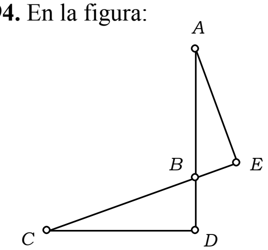
4.92. Sean ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$, $X \in AB$ y $Y \in AC$. Probar que $AX \cong AY$ si y solo si $XB \cong YC$.

4.93. En la figura:



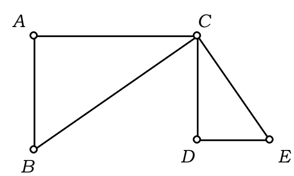
tenemos que los ángulos $\angle AED$, $\angle EDB$ y $\angle CBA$ son rectos. Si $m(\angle DCB) = 30$, probar que $\angle DCB \cong \angle BAF$.

4.94. En la figura:



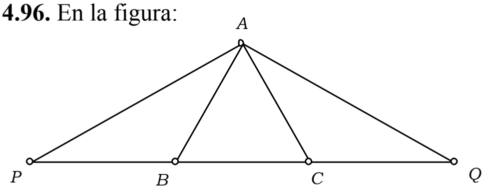
si los ángulos $\angle D$ y $\angle E$ son rectos y $4m(\angle A) = 180 - m(\angle C)$, calcular la medida del ángulo $\angle C$.

4.95. En la figura:



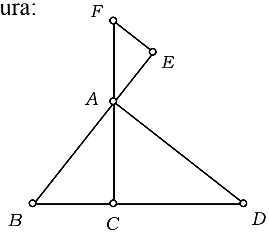
si $\angle EDC$ y $\angle BAC$ son rectos y $\angle BCE \cong \angle ACD$, probar que $\angle CBA \cong \angle CED$.

4.96. En la figura:



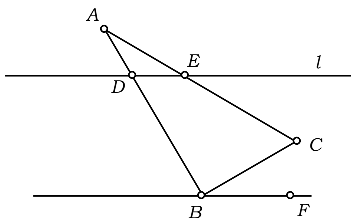
si ΔABC es un triángulo isósceles con $AB \cong AC$, $AQ \perp AB$ y $AP \perp AC$, probar que ΔAPQ es también un triángulo isósceles y que $m(\angle QPA) = m(\angle AQP) = 90 - m(\angle B) = 90 - m(\angle C)$.

4.97. En la figura:



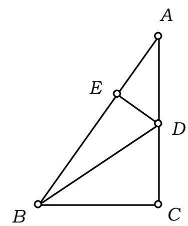
tenemos que $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{DA}$, $\overleftrightarrow{FC} \perp \overleftrightarrow{BD}$ y $\overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{EF}$. Probar que los ángulos $\angle ADC$ y $\angle AFE$ son complementarios.

4.98. En la figura:



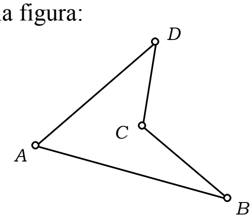
tenemos un triángulo rectángulo ΔABC tal que $m(\angle B) = 90$ y $m(\angle A) = 30$. El triángulo se ha inclinado un ángulo de medida 30 ($m(\angle FBC) = 30$) y l es una recta paralela a la recta $\overleftrightarrow{BF}$. Calcular la medida del ángulo $\angle DEC$.

4.99. En la figura:



los ángulos $\angle ACB$ y $\angle DEA$ son rectos. Si $m(\angle A) = 40$ y $m(\angle EDB) = 80$, encontrar la medida del ángulo $\angle CBD$.

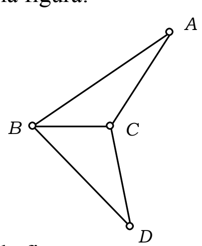
4.100. En la figura:



a. Probar que $m(\angle BCD) = m(\angle BAD) + m(\angle CBA) + m(\angle ADC)$.

b. Probar que el ángulo formado por las bisectrices de los ángulos $\angle BAD$ y $\angle BCD$ tiene media igual a $\dfrac{m(\angle B) + m(\angle D)}{2}$.

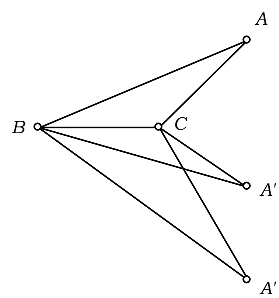
4.101. En la figura:



probar que $\angle BAC \cong \angle CDB$ si y solo si

$$m(\angle CBA) + m(\angle ACB) = m(\angle DBC) + m(\angle BCD).$$

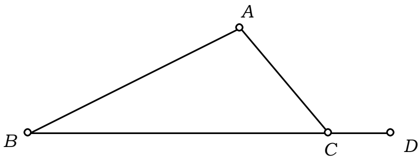
4.102. En la figura:



tenemos que los ángulos de vértices A' y A'' son congruentes. Probar que A, A' y A'' son colineales si y solo si

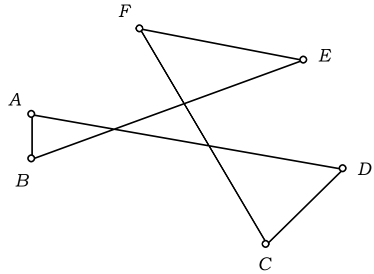
$m(\angle AA'C) + m(\angle BA'A'') = m(\angle A''BC) + m(\angle BCA'')$.

4.103. En la figura:



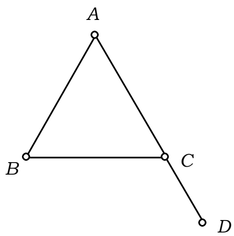
si $m(\angle DCA) = 130$ y $m(\angle A) = 4m(\angle B)$, calcular las medidas de los ángulos del triángulo ΔABC.

4.104. En la figura:



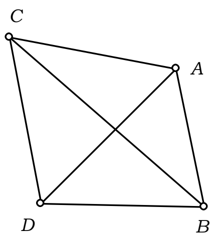
calcular la suma de las medidas de los ángulos cuyos vértices son A, B, C, D, E y F.

4.105. En la figura:



tenemos que ΔABC es un triángulo isósceles con $AB \cong AC$. Probar que $\angle ADB < \angle DBA$.

4.106. En la figura:



tenemos que $CA \cong CD$ y BA y BD no son congruentes. Probar que AD y CB no pueden ser perpendiculares.

4.107. Sea ΔABC un triángulo tal que $AB > AC$. Si $D \in AB$ y $E \in AC$ satisfacen que $AD \cong AE$, probar que los segmentos DE y BC no pueden ser paralelos.

4.108. Sean ΔABC un triángulo y P, $Q \in AB$ tales que $AP \cong PQ \cong QB$. Por los puntos P y Q trazamos rectas paralelas a BC que corten a AC en los puntos R y S, respectivamente. Probar que $|PR| + |QS| = |BC|$.

4.109. Probar que los puntos medios de los lados de un triángulo isósceles son los vértices de un triángulo isósceles.

4.110. Probar que los puntos medios de los lados de un triángulo equilátero son los vértices de un triángulo equilátero.

4.111. Sean ΔABC un triángulo equilátero y $L \in BC$, $M \in AC$ y $N \in AB$ tales que $BL \cong CM \cong AN$. Si P, Q y R son los puntos de intersección de AL y BM, BM y CN, y CN y AL, respectivamente, probar que ΔPQR es también un triángulo equilátero.

4.112. Sea ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$. Si $P \in int(\Delta ABC)$ satisface que $\angle PAB < \angle PAC$, probar que $\angle PBA < \angle PCA$.

4.113. Sea ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$. Si $P \in int(\Delta ABC)$ satisface que $\angle ABP \cong \angle PCA$, probar que $\overrightarrow{AP}$ es la bisectriz del ángulo $\angle A$; ¿es cierta la misma afirmación si $P \in ext(\Delta ABC)$?

4.114. Sean ΔABC un triángulo equilátero y $P \in int(\Delta ABC)$. Si $PB > PC$, probar que $\angle PBA > \angle ACP$.

4.115. Sea ΔABC un triángulo equilátero. Si $P \in \overrightarrow{BC} - BC$, probar que $AB < AP < BP$.

4.116. Sean ΔABC un triángulo equilátero y $P \in AB$. Probar que $\angle ACP > \angle PCB$ si y solo si $AP > PB$.

4.117. Sea ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$. Probar que $PC > PB$ para todo punto $P \in AB - \{A, B\}$.

4.118. Sea ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$. Si $P \in \overleftrightarrow{BC} - BC$, probar que $\angle BPA < \angle C$.

4.119. Sean ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$ y $D \in BC$. Probar que $BD > DC$ si y solo si $\angle BAD > \angle DAC$.

4.120. Sea ΔABC un triángulo. Probar que $\angle ACB > \angle PCB$, para todo punto $P \in AB - \{A, B\}$.

4.121. Sea ΔABC un triángulo tal que $AB < AC$. Si $P \in AC$ satisface que $AB \cong AP$, probar que $\angle PBA > \angle C$.

4.122. Sea ΔABC un triángulo tal que $AB > AC$. Si $P \in AB$ y $Q \in AC$ satisfacen que $BP \cong CQ$, probar que $BQ > CP$.

4.123. Sean ΔABC un triángulo isósceles tal que $AB \cong AC$, y D y E puntos que trisecan a BC. Probar las siguientes afirmaciones:

a. ΔADE es también un triángulo isósceles.

b. $M_b E \cong M_c D$.

4.124. Sea ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$. Si $|BM_a| = x + 2y$, $|M_a C| = 4x$, $b = 10$ y $c = 2x + 2y$, encontrar las longitudes de los lados del triángulo.

4.125. Si ΔABC es un triángulo en el cual $m(\angle A) = 80$, $m(\angle B) = 50$ y $|AB| = 8x + 3$ y $|AC| = 4x + 19$, calcular las longitudes de los lados AB y AC.

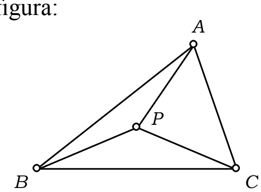
4.126. Sean ΔABC y $P \in int(\Delta ABC)$. Sean D, E y F los puntos de intersección de AB y $\overrightarrow{CP}$, de AC y $\overrightarrow{BP}$, y de BC y $\overrightarrow{AP}$, respectivamente. Probar las siguientes afirmaciones:

a. Si $\angle A$ es un ángulo obtuso, entonces $|BE| + |CD| > |BD| + |DE| + |EC|$.

b. Si $PA \cong PB$ y $PE \cong PE$, entonces ΔABC es un triángulo isósceles.

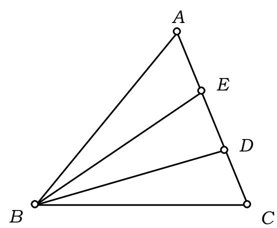
c. Si $\angle PBC \cong \angle PAC$ y $\angle PBA \cong \angle PAB$, entonces ΔABC es un triángulo isósceles.

4.127. En la figura:



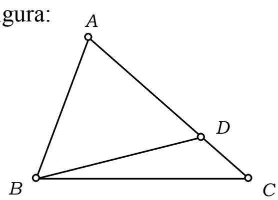
si $AB > AC$ y $PB \cong PC$, ¿cuál de los ángulos $\angle PBA$ y $\angle ACP$ es el más grande?

4.128. En la figura:



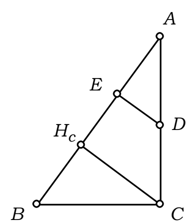
¿cuáles de los ángulos $\angle BDC$, $\angle BED$ y $\angle EBA$ es el más grande y el más pequeño?

4.129. En la figura:



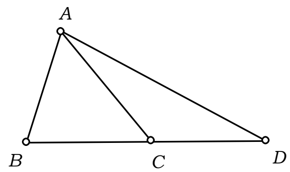
si $AB \cong AD$, comparar los ángulos $\angle CBD$ y $\angle BDC$.

4.130. En la figura:



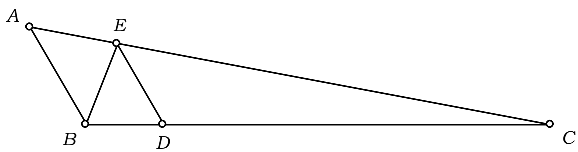
tenemos que ΔABC es un triángulo rectángulo en $\angle C$, $AD \cong BC$ y $AB \perp ED$. Probar que $\Delta H_c BC \cong \Delta EDA$.

4.131. En la figura:



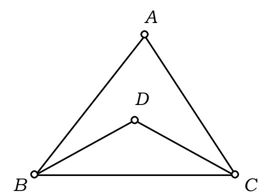
si $CD \cong AB$, probar que $AD > BC$.

4.132. En la figura:



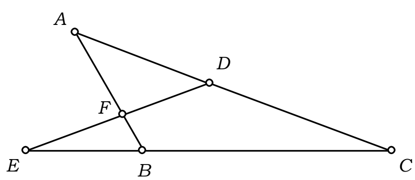
tenemos que $AB \parallel DE$, $m(\angle BAC) = 50$, $m(\angle BEC) = 100$ y $m(\angle CDE) = 120$. Probar que $AE \cong BE$.

4.133. En la figura:



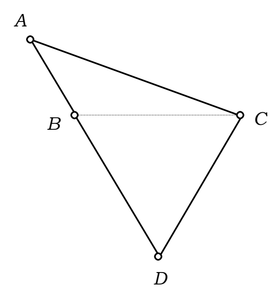
si ΔABC es un triángulo y $D \in int(\Delta ABC)$, probar que $m(\angle BDC) = m(\angle A) + m(\angle DBA) + m(\angle ACD)$.

4.134. En la figura:



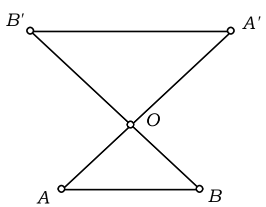
si ΔDEC es un triángulo isósceles con $DE \cong DC$, $m(\angle CBA) = 120$ y $m(\angle EDC) = 7m(\angle DCE)$, probar que ΔFDA es un triángulo isósceles y encontrar la medida de cada uno de sus ángulos.

4.135. En la figura:



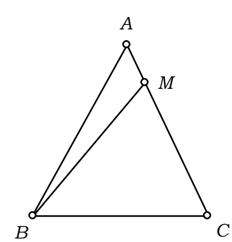
tenemos que $m(\angle BAC) = 40$, $m(\angle ACB) = 20$ y $m(\angle CBA) = 120$. Si $BC \cong BD$, calcular las medidas de los ángulos del triángulo ΔADC.

4.136. En la figura:



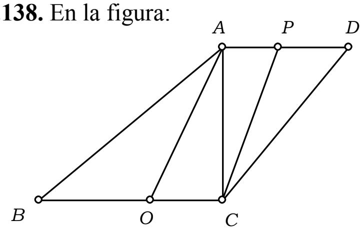
si ΔOAB y $\Delta OA'B'$ son dos triángulos isósceles con $OA \cong OB$ y $OA' \cong OB'$, probar que $AB \parallel B'A'$.

4.137. En la figura:



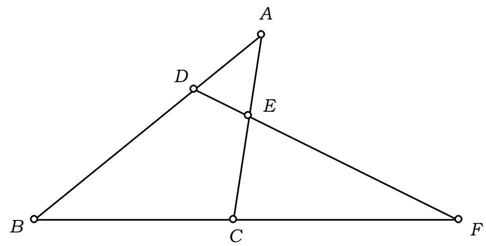
si $m(\angle BAC) = 54$, $m(\angle ACB) = 65$ y $m(\angle CBM) = 50$, probar que ΔBCM es un triángulo isósceles y dar las medidas de los ángulos del triángulo ΔABC.

4.138. En la figura:



si $AD \parallel BC$, $m(\angle CBA) = 40$, $m(\angle DCB) = 130$, $\overrightarrow{AO}$ es la bisectriz del ángulo $\angle BAC$, $\overrightarrow{CP}$ es la bisectriz del ángulo $\angle DCA$ y $m(\angle BAO) + m(\angle DCP) = 45$, probar ΔABC es un triángulo rectángulo.

4.139. En la figura:

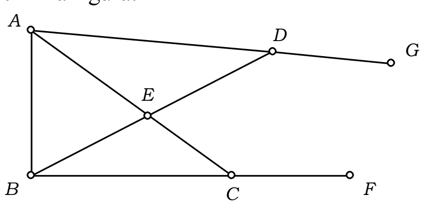


si $AD \cong AE$, $m(\angle FCE) = 80$ y $m(\angle CBA) = 50$, calcular la medida del ángulo $\angle EFC$.

4.140. Sea ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$. Prolongamos BC en ambos sentidos hasta dos puntos D y E, de tal forma que $BD \cong CE$. Probar que ΔADE es un triángulo isósceles.

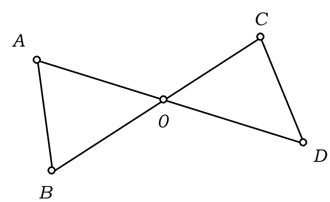
4.141. Prolongamos los lados AB y AC de un triángulo ΔABC hasta dos puntos D y E, respectivamente, tales que $AB \cong AD$ y $AC \cong AE$. Probar que $BC \parallel DE$.

4.142. En la figura:



tenemos que $AB \cong AE \cong ED$, $\angle CBA$ es recto y $m(\angle FCE) = 130$. Calcular la medida del ángulo $\angle EDG$.

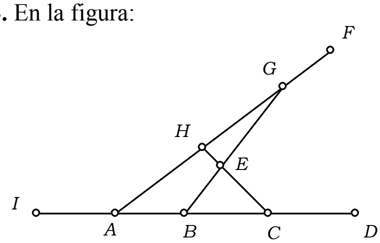
4.143. Consideremos la siguiente figura:



a. Supongamos que $AO \cong OB$ y $OC \cong CD$. Si $m(\angle CDO) = 50$, calcular las medidas de los ángulos cuyos vértices son los puntos A, B, C y D.

b. Si $m(\angle OBA) + m(\angle AOB) + m(\angle CDO) + m(\angle OCD) = 200$, calcular la medida del ángulo $\angle OBA$.

4.144. En la figura:



calcular la suma de las medidas de los ángulos $\angle HAI$, $\angle HEB$, $\angle DCE$ y $\angle EGF$.

4.145. Sean ΔABC un triángulo, y M y N los puntos medios de BM_a y M_aC, respectivamente. Probar que $M_bN \cong M_cM$.

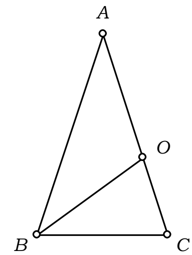
4.146. Sea ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$. Si $D \in AC$ es arbitrario, probar que

$$\left| |M_aB| - |M_aD| \right| < \left| |AB| - |AD| \right|.$$

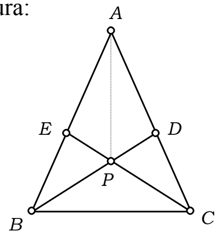
4.147. Sea ΔABC un triángulo. Probar que $AB \cong AC$ si y solo si $BM_b \cong CM_c$.

4.148. En la figura:

supongamos que ΔABC es un triángulo isósceles con $AB \cong AC$, y $\overrightarrow{BO}$ es la bisectriz del ángulo $\angle B$. Probar que $m(\angle A) = 36$ si y solo si los triángulos ΔOAB y ΔBCO son isósceles.

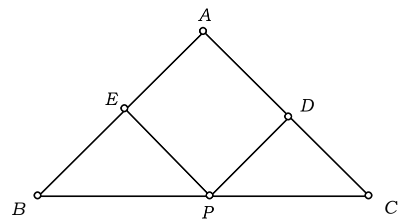


4.149. En la figura:



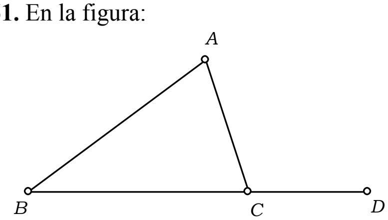
si $\angle CBD \cong \angle ECB$ y $\angle APE \cong \angle DPA$, probar que ΔABC es un triángulo isósceles.

4.150. En la figura:



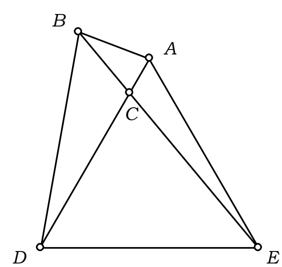
tenemos que $AB \cong AC$ y D y E son las proyecciones de P sobre AC y AB, respectivamente. Probar que $PE \perp PD$ si y solo si $\angle A$ es un ángulo recto.

4.151. En la figura:



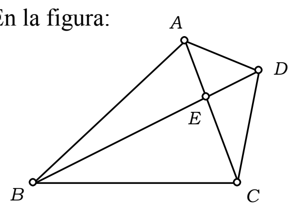
si $m(\angle B) = x$, $m(\angle C) = 2x$ y $m(\angle DCA) = 3x$, encontrar las medidas de los ángulos del triángulo ΔABC.

4.152. En la figura:



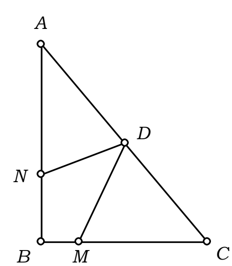
si ΔADE es un triángulo equilátero, $m(\angle AEC) = 10$ y $m(\angle ADB) = 20$, encontrar las medidas de los ángulos del triángulo ΔABC.

4.153. En la figura:



si $EA \cong ED$ y $AB > DC$, probar que EB y EC no pueden ser congruentes.

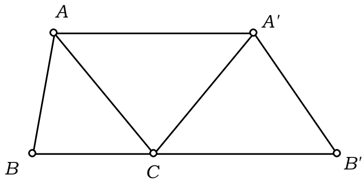
4.154. En la figura:



$\angle B$ es un ángulo recto, $AD \cong AN$ y $CD \cong CM$. Probar que

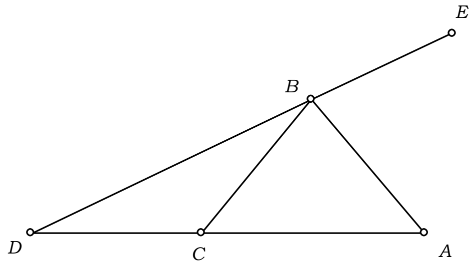
$m(\angle ADN) = 45 + \dfrac{m(\angle C)}{2}$ y $m(\angle MDC) = 45 + \dfrac{m(\angle A)}{2}$.

4.155. En la figura:



supongamos que $AC \cong A'B'$, $AA' \parallel BB'$, $m(\angle B) - m(\angle A) = 30$ y $m(\angle A') - m(\angle B') = 20$. Encontrar las medidas de los ángulos de los triángulos ΔABC y $\Delta A'CB'$.

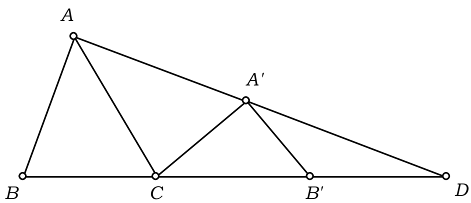
4.156. En la figura:



si $E \in \overrightarrow{DB}$, $BA \cong BC \cong DC$, probar que $m(\angle ABE) = 3m(\angle CDB)$.

4.157. Si el ángulo desigual de un triángulo isósceles es un suplementario del ángulo desigual de otro triángulo isósceles, probar que los ángulos congruentes de uno de los triángulos son complementarios de los ángulos congruentes del otro triángulo.

4.158. En la figura:

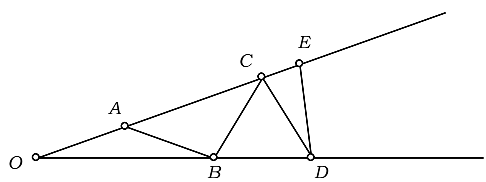


tenemos que A, A' y D son puntos colineales, $m(\angle CBA) = 70$, $m(\angle ACB) = 60$, $m(\angle B'CA') = 40$ y $m(\angle A'B'C) = 50$.

a. Probar que $\Delta CAA'$ es isósceles con $CA \cong CA'$ si y solo si $m(\angle ADB) = 10$.

b. Probar que $\Delta CAA'$ es isósceles con $AA' \cong AC$ si y solo si $m(\angle ADB) = 40$.

4.159. En la figura:

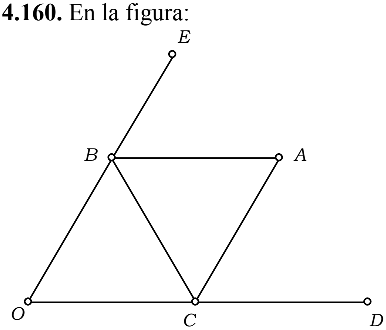


sabemos que $AO \cong AB \cong BC \cong CD \cong DE$.

a. Si $m(\angle OED) = 80$, calcular la medida del ángulo $\angle BOA$.

b. Si $m(\angle BOA) = 30$, calcular la medida del ángulo $\angle OED$.

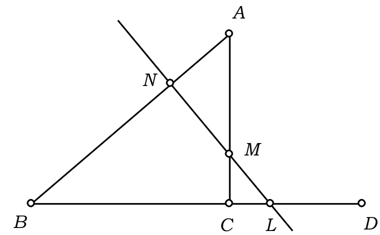
4.160. En la figura:



a. Si $E \in \overrightarrow{OB}$, $AC \parallel OE$, $m(\angle DOE) = 60$, $\overrightarrow{BA}$ es la bisectriz de $\angle CBE$, y $\overrightarrow{CA}$ es la bisectriz de $\angle DCB$, encontrar las medidas de los ángulos del triángulo ΔABC.

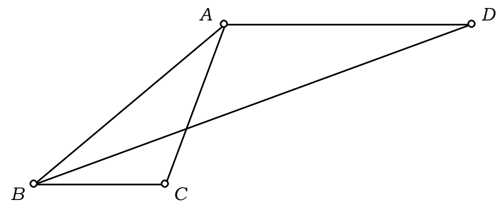
b. Si $E \in \overrightarrow{OB}$, $m(\angle DOE) = 50$, $\overrightarrow{BA}$ es la bisectriz de $\angle CBE$, y $\overrightarrow{CA}$ es la bisectriz de $\angle DCB$, probar que $AB \parallel OD$ si y solo si $m(\angle BCO) = 50$.

4.161. En la figura:



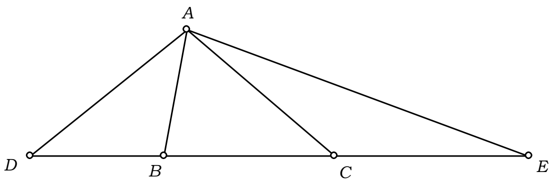
si L, M y N son colineales, $m(\angle DLM) = 130$, $m(\angle MNA) = 90$ y $m(\angle CML) = 40$, encontrar las medidas de los ángulos del triángulo ΔABC.

4.162. En la figura:



en el triángulo ΔABC se tiene que $m(\angle A) = 30$, $m(\angle B) = 40$, $AD \parallel BC$ y $AD \cong AB$. Calcular la medida del ángulo $\angle ADB$.

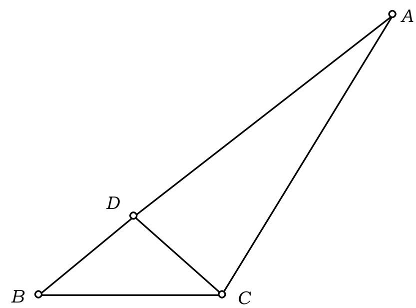
4.163. Consideremos la siguiente figura:



a. Si $m(\angle BAC) = 60$, $m(\angle CBA) = 80$, $AB \cong BD$ y $AC \cong CE$, calcular las medidas de los ángulos del triángulo ΔADE.

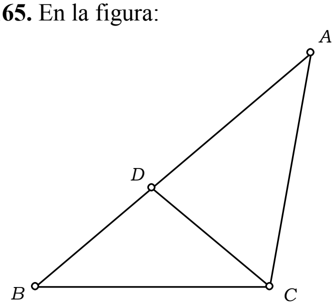
b. Si $\angle BAC$ es un ángulo recto, $AB \cong BD$ y $AC \cong CE$, calcular la medida del ángulo $\angle DAE$.

4.164. En la figura:



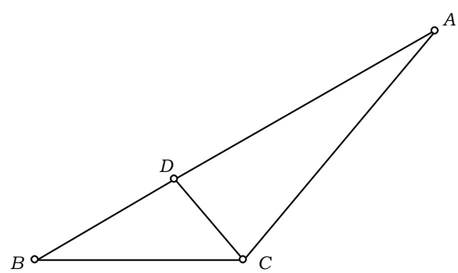
supongamos que en el triángulo ΔABC se cumple que $m(\angle A) = 20$, $m(\angle B) = 40$ y $BD \cong DC$. Encontrar la medida de cada uno de los ángulos de los triángulos ΔDBC y ΔADC.

4.165. En la figura:



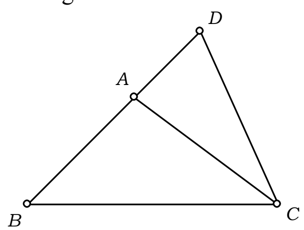
supongamos que $BD \cong DC$, $m(\angle ACD) = 60$ y $m(\angle BDC) = 2m(\angle A) + 20$. Encontrar las medidas de todos los ángulos del triángulo ΔABC.

4.166. En la figura:



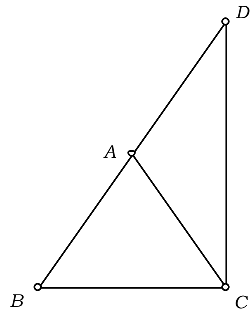
si $m(\angle A) = 20$, $m(\angle B) = 30$ y $AD \cong AC$, encontrar las medidas de los ángulos del triángulo ΔDBC.

4.167. En la figura:



probar que $AD < AC$ si y solo si $m(\angle DCA) < \frac{m(\angle BAC)}{2}$.

4.168. En la figura:

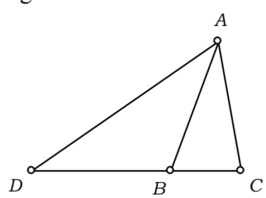


si $AB \cong AC \cong AD$, probar que el triángulo ΔDBC tiene un ángulo cuya medida es igual a la suma de las medidas de los otros dos ángulos.

4.169. Sean A, B y C tres puntos no colineales y A', B' y C' tres puntos en el plano tales que $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$ y $AC \cong A'C'$. Probar que A', B' y C' no pueden ser colineales.

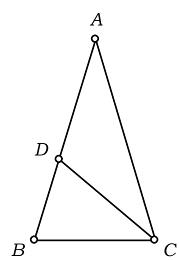
4.170. Sean A, B y C tres puntos no colineales y A', B' y C' tres puntos consecutivos. Si $AB \cong A'B'$ y $BC \cong B'C'$, probar que AC y $A'C'$ no pueden ser congruentes.

4.171. En la figura:



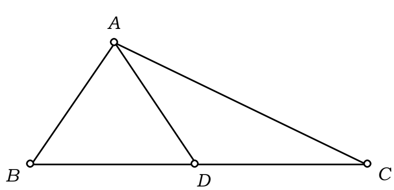
en el triángulo ΔABC se cumple que $m(\angle A) = 30$ y $m(\angle C) = 80$. Si $DB \cong AB$, calcular las medidas de los ángulos $\angle B$, $\angle DAC$ y $\angle CDA$.

4.172. En la figura:



tenemos que ΔABC es un triángulo isósceles con $AB \cong AC$. Si $AD \cong DC \cong BC$, calcular las medidas de los ángulos del triángulo original.

4.173. En la figura:



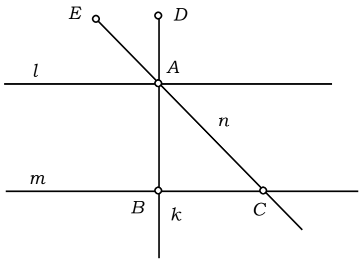
tenemos un triángulo ΔABC. En cada caso, calcular las medidas de los ángulos del triángulo original.

a. $AB \cong AD \cong DC$ y $m(\angle C) = 30$.

b. $BD \cong AD \cong DC$ y $m(\angle B) = 70$.

4.174. Demostrar cada una de las equivalencias restantes del Teorema 4.6.1.

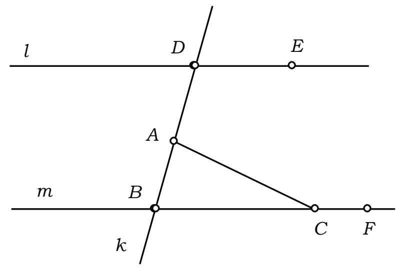
4.175. En la figura:



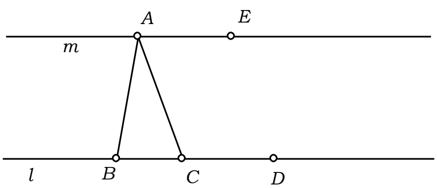
sean k, l, m y n cuatro rectas tales que $l \parallel m$, $k \perp l$ y $k \perp m$. Si $\angle ACB \cong \angle DAE$, encontrar las medidas de los ángulos del triángulo ΔABC.

4.176. En la figura:

si l y m son rectas paralelas, k una recta transversal a l y m, $m(\angle BDE) = 105$ y $m(\angle FCA) = 154$, encontrar las medidas de los ángulos del triángulo ΔABC.

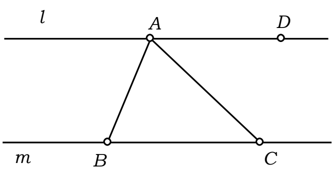


4.177. En la figura:



si l y m son dos rectas paralelas, $m(\angle DCA) - m(\angle CAE) = 40$ y $m(\angle CBA) - m(\angle BAC) = 50$, encontrar las medidas de los ángulos del triángulo ΔABC.

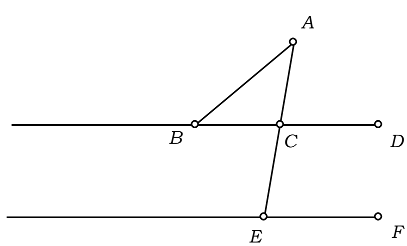
4.178. En la figura:



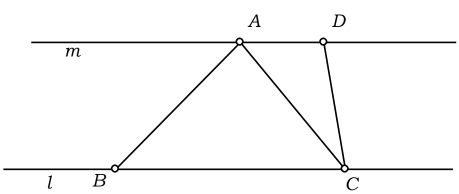
si $l \parallel m$, $m(\angle CAD) = 43$ y $m(\angle BAC) = 69$, encontrar las medidas de los ángulos del triángulo ΔABC.

4.179. En la figura:

$\overleftrightarrow{BD} \parallel \overleftrightarrow{EF}$, $m(\angle CBA) = 40$ y $m(\angle FEA) = 80$, calcular la medida del ángulo $\angle BAC$.

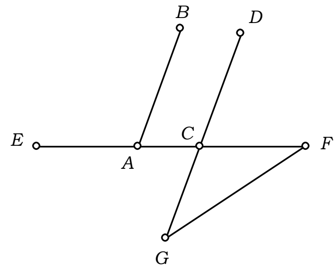


4.180. En la figura:



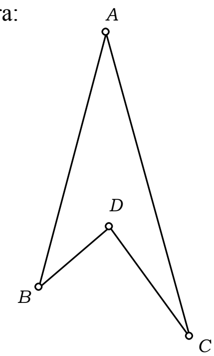
supongamos que $l \parallel m$, $m(\angle ADC) = 2m(\angle ACB)$, $2m(\angle DCA) = m(\angle CBA)$ y $m(\angle CBA) + m(\angle ADC) = 160$. Encontrar las medidas de los ángulos del triángulo ΔABC.

4.181. En la figura:



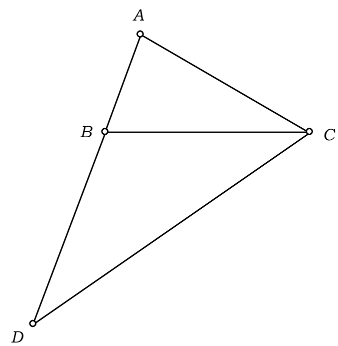
tenemos que $m(\angle BAE) = 110$ y $m(\angle FGC) = 50$.
Probar que $AB \parallel CD$ si y solo si $m(\angle CFG) = 20$.

4.182. En la figura:



si ΔABC es un triángulo, $D \in int(\Delta ABC)$, $m(\angle A) = 30$, $m(\angle DBA) = 35$ y $m(\angle BDC) = 85$, encontrar $m(\angle ACD)$.

4.183. En la figura:



tenemos que en el triángulo ΔABC se cumple que $m(\angle A) = 80$, $m(\angle C) = 30$ y $BC \cong BD$. Calcular la medida de cada uno de los ángulos del triángulo ΔBDC.

4.184. Fijamos un punto P en el plano. Dado un punto cualquiera A, definimos $f(A)$ como el punto medio del segmento AP si $A \neq P$, y $f(P) = P$.
a. Probar que la función f es biyectiva.
Dados dos puntos A y B, definimos $[AB] = |f(A)f(B)|$.
b. Probar que $[AB] = \frac{|AB|}{2}$, para cualquier pareja de puntos A y B.
c. ¿Cuáles incisos del Axioma AM satisface esta función [ ]?

4.185[M. S. Klamkin. Math. Magazine 27, May (1954), 287]. Si los lados a, b y c de un triángulo satisfacen que $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$, probar que el triángulo debe ser equilátero (ver el libro [l-307]).

4.186. Sea ΔABC un triángulo. Si $|M_c M_b| = 2x + 20$ y $a = 6x + 30$, encontrar el valor numérico de a.

4.187[a-84]. Probar que en todo triángulo $\Delta(a,b,c)$ se cumplen las siguientes desigualdades:

$$b + c - a < \frac{2bc}{a}, \qquad a + c - b < \frac{2ac}{b} \qquad \text{y} \qquad a + b - c < \frac{2ab}{c}.$$

4.188 (Inter. Math., Tournament of Towns, Junior A-level, 2002). Probar que en todo triángulo $\Delta(a,b,c)$ se cumple la desigualdad $c^3 < a^3 + 3abc + b^3$.

4.189. ¿Puede existir un triángulo cuyos lados tengan longitudes 1.1, 1.01 y 1.001?

4.190. Si a, b y c son las longitudes de los lados de un triángulo, ¿son $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ y $\frac{1}{c}$ las longitudes de los lados de algún triángulo?

4.191. ¿Puede existir un triángulo cuyos lados tengan longitudes 4, $2p$ y p, para algún número real positivo p?
4.192. ¿Puede existir un triángulo cuyos lados tengan longitudes k, $2k$ y $3k$, en donde k es un número entero positivo?
4.193. Encontrar un triángulo rectángulo cuyos lados sean tres números enteros consecutivos, ¿cuántos triángulos de este tipo puedes encontrar?
4.194. Probar que el conjunto $\{(a,b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : a < b < 1$, y a, b y 1 son las longitudes de los lados de un triángulo$\}$ es el interior de un triángulo en $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.
4.195. Si ΔABC es un triángulo, probar que $|AP| < \dfrac{|AB|+|BC|+|AC|}{2}$, para todo punto $P \in BC$.
4.196. Si $2x$, $x + 4$ y 16 son las longitudes de los lados de un triángulo, ¿entre qué valores se encuentra x?
4.197. Si en un triángulo ΔABC se cumple que $b = 63$ y $c = 30$, probar que $33 < a < 93$.
4.198. Sea ΔABC un triángulo tal que $\angle C < \angle A < \angle B$, $b = 22$ y $c = 20$, ¿es posible que a sea un número entero positivo?
4.199. Si en un triángulo ΔABC se cumple que $|AB| = 5$, $|AC| = 6$ y $\angle C < \angle A < \angle B$, probar que $5 < |BC| < 6$.
4.200. Si a, b y c son las longitudes de los lados de un triángulo, probar que $b^2\ x^2\ - 2abx\ + b + c + a(1 - a)$ es un número real positivo para cualquier valor que tome la variable x.
4.201. Sea ΔABC un triángulo. Probar que si $\angle A$ se incrementa, entonces a también se incrementa.
4.202. Si en un triángulo uno de sus ángulos exteriores es agudo, ¿cuál es el lado mayor del triángulo?
4.203. Si en un triángulo un lado es menor que otro, probar que el ángulo opuesto al primer lado es agudo.
4.204. Sea ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$. Probar que $DC < AD < AC$, para todo punto $D \in BC - \{B, C\}$.
4.205. Sea ΔABC un triángulo. Probar que $AB \cong AC$ si y solo si $AB > AD$, para todo punto $D \in BC - \{B,C\}$.
4.206. Consideremos el triángulo $\Delta(\angle 40,\angle 70,\angle 70)$. Fijamos un punto $D \in AC$ tal que $AD \cong BD$. Comparar los segmentos BC y DC.
4.207. Si BC es el lado más grande de un triángulo ΔABC, probar que $m(\angle A) > 60$.
4.208. Sea ΔABC un triángulo tal que $AC < AB$. Comparar los ángulos $\angle BAH_a$ y $\angle H_aAC$.
4.209. Sean ΔABC un triángulo y DE un segmento. Si $DE \subseteq int(\Delta ABC)$, probar que DE es menor que uno de los lados del triángulo.
4.210. En todo triángulo ΔABC, probar que se cumple la desigualdad $|AB| + |AC| > 2|AM_a|$.
4.211. Sea ΔABC un triángulo. Si $m(\angle A) = 8x + 2$, $m(\angle B) = 7x + 3$ y $m(\angle C) = 5x + 5$, en donde x es un número real positivo, ¿cuál de los lados del triángulo es el más grande?
4.212. Sea ΔABC un triángulo tal que $m(\angle C) = 60 \leq m(\angle B)$, ¿cuál lado del triángulo ΔABC es el de menor longitud?
4.213. En cierto triángulo ΔABC se cumple que $m(\angle A) = 80$. Probar que uno de los otros dos ángulos del triángulo tiene medida mayor o igual a 50.
4.214. En cierto triángulo ΔABC se cumple que $m(\angle A) = 60$ y $BC > AB$. Decir cuáles de los ángulos del triángulo es el menor y el mayor.
4.215. Si en el triángulo ΔABC se cumple que $m(\angle A) = 40$ y $BC > AC$, probar que el ángulo $\angle C$ es obtuso.
4.216. Si en el triángulo ΔABC se cumple que $m(\angle B) = 50$ y $BC > AC$, probar que el ángulo $\angle C$ es agudo.
4.217. En el triángulo ΔABC, tenemos que $m(\angle A) = 57$ y $m(\angle A) = 61$. Si P es el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos $\angle B$ y $\angle C$, ¿cuál de los segmentos BP o CP es mayor?
4.218. ¿Puede existir un triángulo $\Delta(\angle\alpha,\angle\beta,\angle\gamma)$ tal que

$$\angle\alpha < \angle\beta < \angle\gamma < 90 \text{ y } 90 - m(\angle\gamma) = m(\angle\gamma) - m(\angle\beta) = m(\angle\beta) - m(\angle\alpha)?$$

4.219. Sea ΔABC un triángulo con $AB > AC$. Prolongamos AB hasta un punto D tal que $AD \cong AC$, y también prolongamos AC hasta un punto E que cumpla $AE \cong AB$. Sea O el punto de intersección de BC y ED.

a. Probar que la semirrecta $\overrightarrow{OA}$ es la bisectriz del ángulo $\angle DOC$.

b. Probar que la recta $\overleftrightarrow{OA}$ es la mediatriz de BE.

4.220. Sean ΔABC un triángulo y $P \in int(\Delta ABC)$. Probar las siguientes afirmaciones:
a. $\angle A < \angle BPC$, $\angle B < \angle CPA$ y $\angle C < \angle APB$.
b. $m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) = 2[m(\angle APB) + m(\angle BPC) + m(\angle CPA)]$.
c. Si P es equidistante de A, B y C, entonces $m(\angle BPC) = 2m(\angle A)$, $m(\angle CPA) = 2m(\angle B)$ y $m(\angle APB) = 2m(\angle C)$.
d. Si $m(\angle BPC) = 2m(\angle A)$, $m(\angle CPA) =2m(\angle B)$ y $m(\angle APB)= 2m(\angle C)$, entonces P es equidistante de A, B y C.

4.221. Si ΔABC es un triángulo equilátero y $P \in AB$, probar que $AP < CP < AC$.

4.222. Si ΔABC es un triángulo isósceles con $AB \cong AC$ y $P \in BC$, probar que $AB > AP$.

4.223. Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos isósceles tales que $AB \cong AC \cong A'B' \cong A'C'$. Probar que $BC < B'C'$ si y solo si $\angle A < \angle A'$.

4.224. Sea ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$. Si una recta que pasa por M_a corta a $\overleftrightarrow{AB}$ y a AC en los puntos P y Q, respectivamente, probar que $M_a Q < P M_a$.

4.225. ¿Es posible que en un triángulo sus tres alturas coincidan con sus tres lados?

4.226. Si en un triángulo uno de sus lados coincide con una de sus alturas, ¿qué tipo de triángulo es?

4.227. ¿Es posible que en un triángulo uno de sus lados sea congruente con una de sus alturas?

4.228. Dos triángulos equiláteros son congruentes si y solo si una de las alturas de uno es congruente con una altura del otro.

4.229. Si la base y la altura correspondiente de un triángulo isósceles son respectivamente congruentes a la base y a la altura correspondiente de otro triángulo isósceles, probar que ambos triángulos son congruentes.

4.230. Si un lado diferente de la base y de la altura correspondiente a la misma de un triángulo isósceles son respectivamente congruentes a un lado diferente de la base y a la altura correspondiente a la base de otro triángulo isósceles, probar que los triángulos tienen que ser congruentes.

4.231. Si la base y una altura correspondiente a un lado diferente de la base de un triángulo isósceles son respectivamente congruentes a la base y a la altura correspondiente a un lado diferente de la base de otro triángulo isósceles, probar que los triángulos son congruentes.

4.232 [a-71]. Tercer Criterio de Incongruencia de Triángulos. Un lado de un triàngulo y su ángulo opuesto de un triángulo son respectivamente congruentes a un lado y su ángulo opuesto de un segundo triángulo. Si un segundo par de ángulos correspondientes de ambos triángulos no son congruentes, probar que el lado opuesto al ángulo menor de dichos ángulos es menor que el lado opuesto al ángulo mayor de dichos ángulos.

4.233. Sea ΔABC un triángulo con todos sus ángulos agudos. Encontrar un punto $E \in BC$ tal que:
a. Si $P \in BE - \{B, E\}$, entonces la proyección del vértice C sobre la recta $\overleftrightarrow{AP}$ está en el interior del triángulo ΔABC.
b. Si $P \in EC - \{E, C\}$, entonces la proyección del vértice C sobre la recta $\overleftrightarrow{AP}$ está en el exterior del triángulo ΔABC.

4.234. Sea ΔABC un triángulo isósceles inscrito en un triángulo $\Delta A'B'C'$. Demostrar que si cada lado del triángulo ΔABC es perpendicular a un lado del triángulo $\Delta A'B'C'$, entonces $\Delta A'B'C'$ es también un triángulo isósceles.

4.235. Sea ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$. Prolongamos el lado BC hasta un punto D, de tal forma que $AC \cong CD$.
a. Probar que $m(\angle C) = 2m(\angle ADB)$.
b. Probar que la bisectriz del ángulo $\angle C$ es paralela a AD.
c. Probar que el ángulo exterior del triángulo ΔABD adyacente a $\angle A$ tiene medida igual a tres veces la medida del ángulo $\angle ADC$.

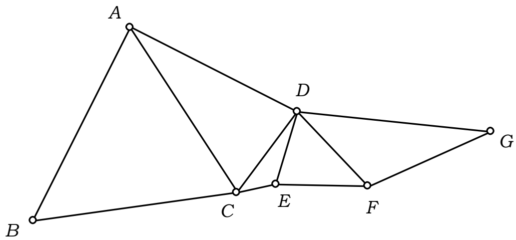
4.236. Sea ΔABC un triángulo tal que $m(\angle C) = 60$ y $a = 2b$. Probar que ΔABC es un triángulo rectángulo.

4.237. Sea $\angle AOC$ un ángulo de medida 60 tal que $|OC| =3|OA|$. Si $B \in \overrightarrow{OA}$ satisface la identidad $|OB| = 2|OA|$, probar que ΔCAB es un triángulo isósceles.

4.238. Sea ΔABC un triángulo isósceles tal que $AB \cong AC$. Si $m(\angle A) = 20$, probar que $2a < b < 3a$.

4.239. Sean ΔABC un triángulo con $AB > AC$, y $P \in int(\Delta ABC)$ tal que $PB \cong PC$. Si Q es el punto de intersección de $\overrightarrow{AP}$ y BC, comparar los segmentos BQ y QC.

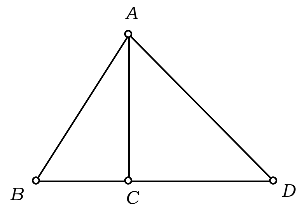
4.240. En la figura:



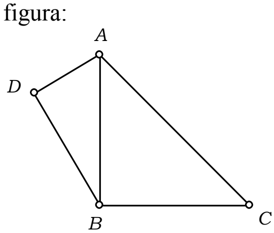
si $m(\angle BAC) = 60$, $m(\angle CBA) = 55$, $m(\angle CAD) = 30$, $m(\angle DCA) = 50$, $m(\angle CDE) = 21$, $m(\angle ECD) = 41$, $m(\angle EDF) = 60$, $m(\angle FED) = 75$, $m(\angle FDG) = 40$ y $m(\angle GFD) = 110$, encontrar el segmento más pequeño y el segmento más grande.

4.241. En la figura:

si $m(\angle BAC) = 32$, $m(\angle ABC) = 58$ y $m(\angle ADC) = 45$, ordenar de manera creciente a los segmentos AB, AC, BC, CD y AD de acuerdo a su tamaño.

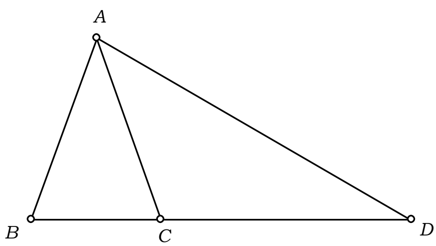


4.242. En la figura:



$\angle CBA$ es un ángulo recto, $m(\angle ACB) = 45$, $m(\angle ABD) = 30$ y $m(\angle DAB) = 60$. Entre los segmentos BC, CA, AD, DB y AB, decir cuál es el menor y cuál es el mayor.

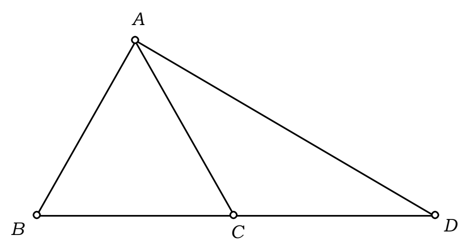
4.243. En la figura:



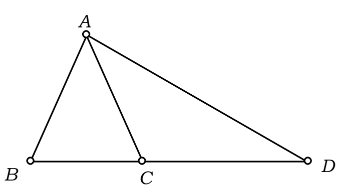
si ΔABC es un triángulo isósceles con $AB \cong AC$, $m(\angle ACB) = 70$ y $m(\angle ADC) = 30$, ordenar de manera creciente los segmentos AB, BC, CD y AD de acuerdo a su tamaño.

4.244. En la figura:

si ΔABC es un triángulo isósceles con $AB \cong AC$, $m(\angle CBA) = 60$ y $m(\angle CAD) = 30$, ordenar de manera creciente a los segmentos AB, BC, CD y AD de acuerdo a su tamaño.



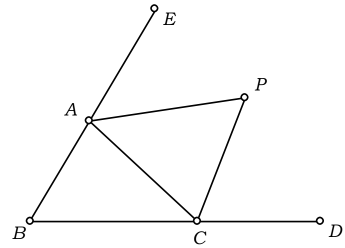
4.245. En la figura:



si ΔABC es un triángulo isósceles con $AB \cong AC$, $m(\angle BAC) = 48$ y $m(\angle CAD) = 36$, ordenar de manera creciente a los segmentos AB, BC, CD y AD de acuerdo a su tamaño.

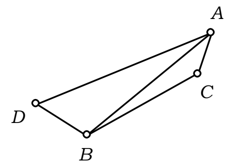
4.246. En la figura:

si $BC > BA$, $\overrightarrow{CP}$ es la bisectriz del ángulo $\angle DCA$ y $\overrightarrow{AP}$ es la bisectriz del ángulo $\angle CAE$, probar que $AP > CP$.

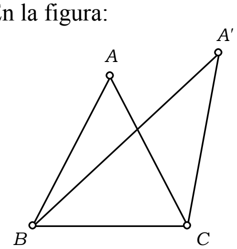


4.247. En la figura:

si $\angle ABD$ y $\angle ACB$ son ángulos obtusos, $|AD| = 30$ y $|BC| = 20$, ¿entre qué valores se encuentra la longitud del segmento AB?



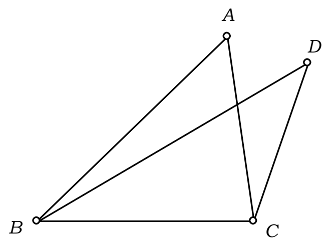
4.248. En la figura:



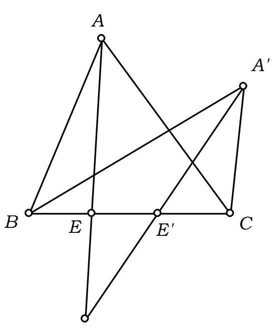
tenemos que $AB \cong AC$. Probar que $A'B > A'C$.

4.249. En la figura:

si $\angle ACB > \angle CBA$, probar que $BD > DC$.



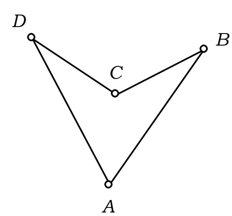
4.250. En la figura:



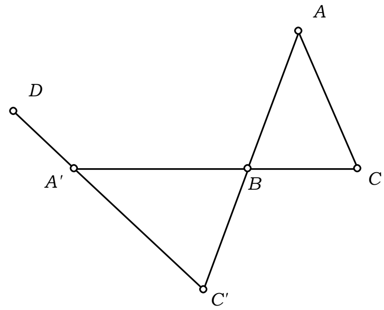
tenemos que $AD \cong A'D$ y $m(\angle AEB) + m(\angle A'E'B) < 180$. Comparar los segmentos AE y $A'E'$.

4.251. En la figura:

tenemos que $AD \cong AB$ y $CD \cong CB$. Probar que $AD > DC$.

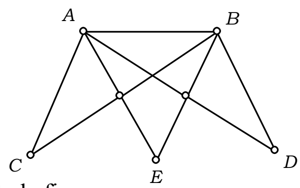


4.252. En la figura:



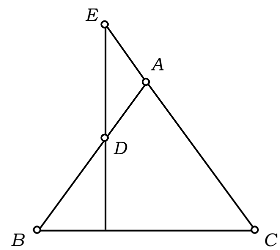
si $\angle ACB \cong \angle BC'A'$, probar que los ángulos $\angle BAC$ y $\angle BA'D$ son suplementarios.

4.253. En la figura:



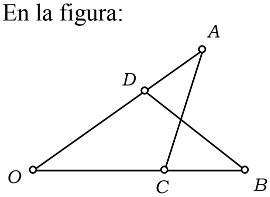
si $\overleftrightarrow{AE}$ y $\overleftrightarrow{BE}$ son las mediatrices de los segmentos BC y AD, respectivamente, probar que $AC \cong BD$.

4.254. En la figura:



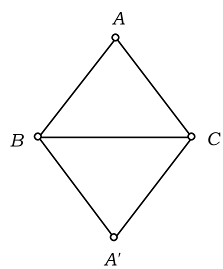
tenemos que ΔABC es un triángulo isósceles con $AB \cong AC$. Si $AD \cong AE$, probar que $\overleftrightarrow{DE} \perp \overleftrightarrow{BC}$.

4.255. En la figura:



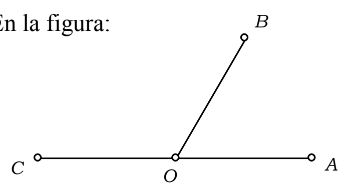
si $\angle ODB \cong \angle ACO$, probar que $\angle OAC \cong \angle DBO$.

4.256. En la figura:



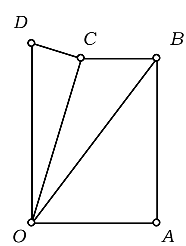
tenemos que $AB \cong AC$ y $A'B \cong A'C$. Probar que AA' biseca a BC.

4.257. En la figura:



si $OA \cong OB \cong OC$ y $m(\angle AOB) = 60$, calcular la medida del ángulo $\angle CBA$.

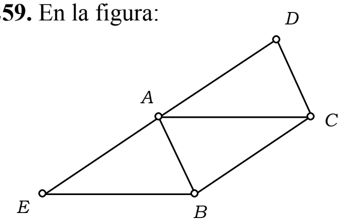
4.258. En la figura:



tenemos que los ángulos $\angle BAO$, $\angle CBA$, $\angle DCO$ y $\angle AOD$ son todos rectos. Probar que

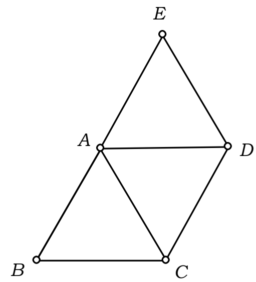
$$m(\angle ODC) = m(\angle AOB) + m(\angle CBO).$$

4.259. En la figura:



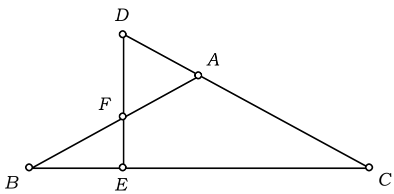
$AE \cong AD \cong BC$, $BE \cong AC$, y $AB \cong DC$.
Probar que E, A y D son colineales.

4.260. En la figura:



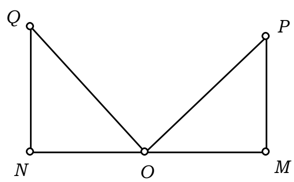
si los triángulos ΔABC, ΔDAC y ΔEAD son equiláteros, probar que los puntos B, A y E son colineales y que $\overleftrightarrow{BE} \parallel \overleftrightarrow{CD}$.

4.261. En la figura:



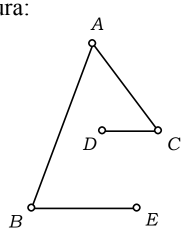
si $AB \cong AC$ y $DE \perp BC$, probar que $AD \cong AF$.

4.262. En la figura:



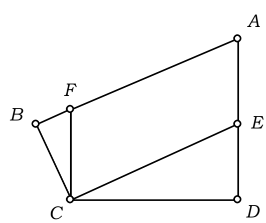
tenemos que $OP \cong OQ$, $\angle POQ$ es un ángulo recto, M y N son las proyecciones de P y Q sobre la recta $\overleftrightarrow{MN}$, respectivamente, y O, M y N son colineales.
Probar que $PM \cong NO$.

4.263. En la figura:



si $m(\angle BAC) + m(\angle EBA) + m(\angle ACD) = 180$, probar que $BE \parallel DC$.

4.264. En la figura:



tenemos que $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{FC} \perp \overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{CE}$, y $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{BA}$.
Probar que

$m(\angle FCB) + m(\angle ECF) + m(\angle DCE) + m(\angle BAD) = 180$.

4.265. Sean $\angle AOB$ y $\angle BOC$ dos ángulos adyacentes. Si $OA \cong OB \cong OC$, $m(\angle AOB) = 120$ y $m(\angle BOC) = 130$, calcular la medida de cada uno de los ángulos del triángulo ΔABC.

4.266. Sean $\angle AOB$ un ángulo no degenerado y P un punto sobre su bisectriz. Si la mediatriz del segmento OP corta $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ en los puntos A' y B', respectivamente, probar que $PA' \parallel OB$ y $PB' \parallel OA$.

4.267. Sean l una recta, $P \notin l$ y $Q \in l$ la proyección de P sobre l. Si $A, B \in l - \{Q\}$ y A está entre Q y B, probar que $\angle BAP$ es un ángulo obtuso.

4.268. Sean l una recta y $P \notin l$ un punto.

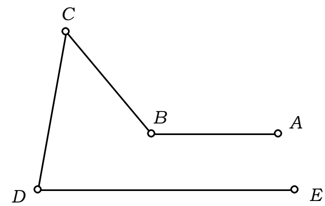
a. ¿Es posible encontrar tres puntos $A, B, C \in l$, de tal forma que $PA \cong PB \cong PC$?

b. Si $A, B, C \in l$ y $|PA| = |PB| = |PC|$, probar que $A = B$, $A = C$ o $B = C$.

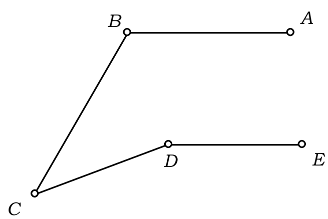
4.269. Sean l una recta y $A, B \notin l$ equidistantes de l. Probar que $l \parallel AB$ o que l pasa por el punto medio de AB.

4.270. En la figura:

tenemos que $DE \parallel BA$, $m(\angle DCB) = 50$ y $m(\angle EDC) = 80$.
Calcular la medida del ángulo $\angle ABC$.

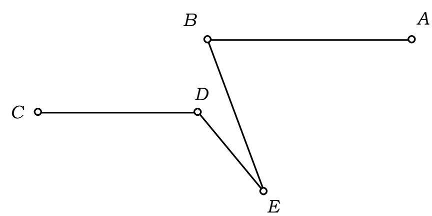


4.271. En la figura:



tenemos que $DE \parallel BA$, $m(\angle CBA) = 120$ y $m(\angle CDE) = 160$.
Calcular la medida del ángulo $\angle DCB$.

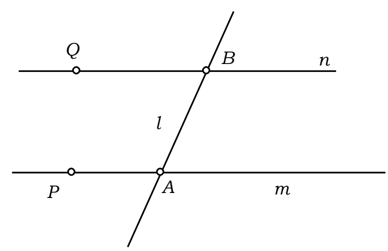
4.272. En la figura:



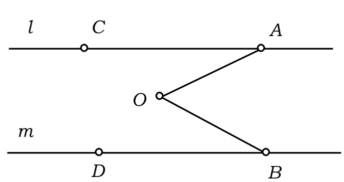
tenemos que $CD \parallel BA$, $m(\angle CDE) = 130$ y $m(\angle EBA) = 70$.
Calcular la medida del ángulo $\angle BED$.

4.273. En la figura:

sean m y n dos rectas paralelas cortadas por la recta transversal l. Si la bisectriz del ángulo $\angle BAP$ corta a la recta n en el punto C y la bisectriz de ángulo $\angle QBA$ corta a la recta m en el punto D, probar que ΔABC y ΔABD son triángulos isósceles y que $AC \perp BD$.

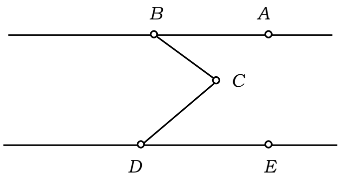


4.274. En la figura:



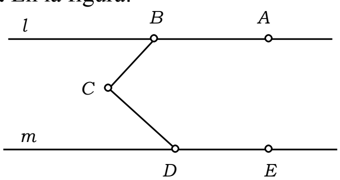
probar que $l \parallel m$ si y solo si $m(\angle BOA) = m(\angle CAO) + m(\angle OBD)$.

4.275. En la figura:



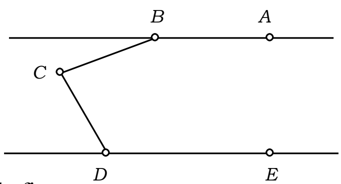
si $m(\angle CBA) = 36$ y $m(\angle EDC) = 40$, probar que $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DE}$ si y solo si $m(\angle BCD) = 76$.

4.276. En la figura:



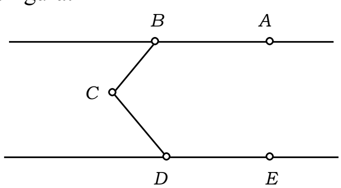
probar que $l \parallel m$ si y solo si se cumple la identidad $m(\angle CBA) + m(\angle DCB) + m(\angle EDC) = 360$.

4.277. En la figura:



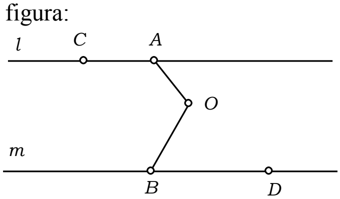
si $m(\angle CBA) = 160$ y $m(\angle EDC) = 120$, probar que $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DE}$ si y solo si $m(\angle DCB) = 80$.

4.278. En la figura:



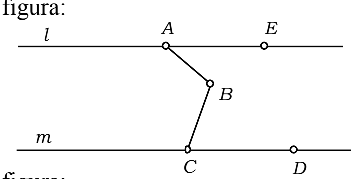
si $m(\angle CBA) = 130$ y $m(\angle DCB) = 100$, probar que $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DE}$ si y solo si $\angle CBA \cong \angle EDC$.

4.279. En la figura:



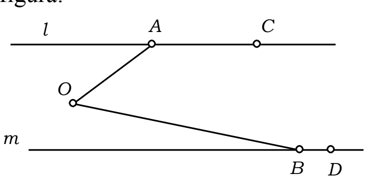
si $l \parallel m$, $m(\angle CAO) = 129$ y $m(\angle DBO) = 61$, encontrar la medida del ángulo $\angle AOB$.

4.280. En la figura:



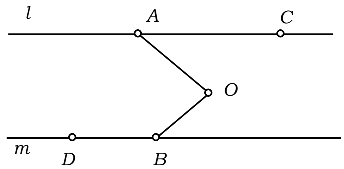
si $l \parallel m$, $m(\angle BAE) = 40$ y $m(\angle DCB) = 71$, encontrar la medida del ángulo $\angle ABC$.

4.281. En la figura:



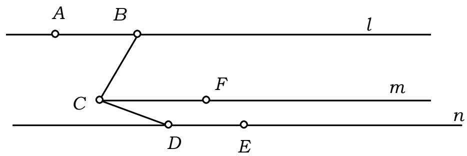
si $l \parallel m$, $m(\angle OAC) = 143$ y $m(\angle DBO) = 169$, encontrar la medida del ángulo $\angle BOA$.

4.282. En la figura:



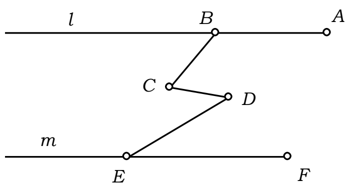
si $l \parallel m$, $m(\angle OAC) = 40$ y $m(\angle AOB) = 80$, encontrar la medida del ángulo $\angle OBD$.

4.283. En la figura:



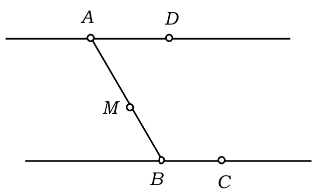
si $l \parallel m$, $m \parallel n$, $m(\angle FCB) = 60$ y $m(\angle DCF) = 20$, dar las medidas de los ángulos $\angle EDC$ y $\angle ABC$.

4.284. En la figura:



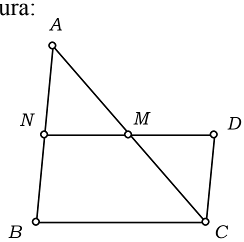
$l \parallel m$, $m(\angle CBA) = 130$, $m(\angle CDE) = 40$ y $m(\angle FED) = 30$. Encontrar la medida del ángulo $\angle DCB$.

4.285. En la figura:



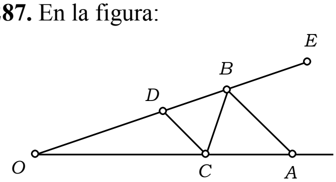
si $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$, $AM \cong AD$ y $BM \cong BC$, probar que el ángulo $\angle CMD$ es recto.

4.286. En la figura:



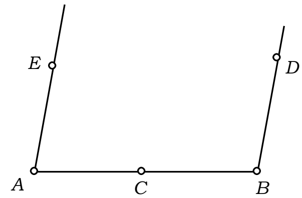
si M y N son los puntos medios de AC y AB, respectivamente, los puntos N, M y D son colineales, y $AB \parallel DC$, probar que $NM \cong MD$.

4.287. En la figura:



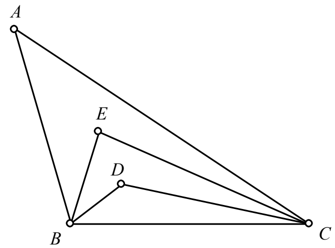
si $DC \parallel BA$ y $\overrightarrow{BA}$ es la bisectriz del ángulo $\angle CBE$, probar que ΔBDC es un triángulo isósceles.

4.288. En la figura:



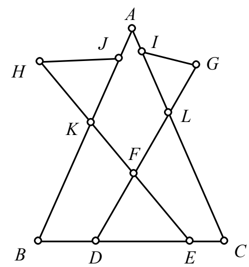
supongamos que $\overleftrightarrow{AE} \parallel \overleftrightarrow{BD}$ y $AC \cong AE$. Probar que $\angle DCE$ es un ángulo recto si y solo si $CB \cong BD$.

4.289. En la figura:



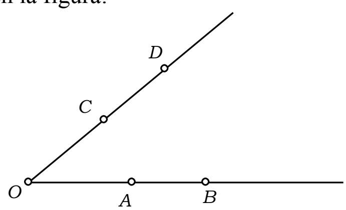
sabemos que $m(\angle A) = 15$, CE y CD trisecan al ángulo $\angle C$, y BE y BD trisecan al ángulo $\angle B$. Calcular la diferencia de las medidas de los ángulos $\angle BEC$ y $\angle BDC$.

4.290. En la figura:



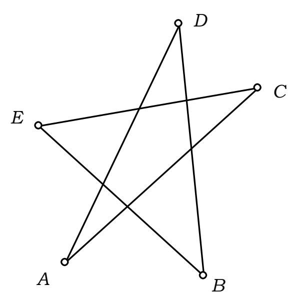
sabemos que $HK \cong HJ$, $GL \cong GI$, $m(\angle EDF) = 60$, $m(\angle FED) = 50$ y $\angle DFE \cong \angle IGL \cong \angle KHJ$. Hallar la medida del ángulo $\angle BAC$.

4.291. En la figura:



si $AB \cong CD$ y $AD \cong CB$, probar que $OA \cong OC$.

4.292. En la figura:

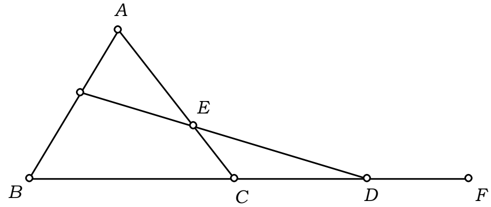


sean A, B, C, D y E los vértices de una estrella de 5 picos y $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$ y $\angle E$ los ángulos $\angle CAD$, $\angle DBE$, $\angle ECA$, $\angle ADB$ y $\angle BEC$, respectivamente. Probar que

$$m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) + m(\angle D) + m(\angle E) = 180.$$

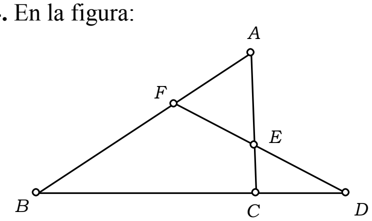
En el artículo [a-96], el autor ofrece varias soluciones a este problema.

4.293. En la figura:



expresar la medida del ángulo $\angle CED$ en función de las medidas de los ángulos $\angle CBA$, $\angle BAC$ y $\angle FDE$.

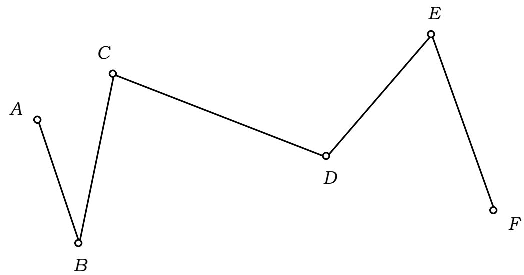
4.294. En la figura:



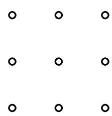
si $AE \cong AF$, expresar la medida del ángulo $\angle EDC$ en función de las medidas de los ángulos $\angle CBA$ y $\angle ACB$.

4.295. En la figura:

$AB \parallel EF$, $m(\angle CBA) = 30$, $m(\angle BCD) = 80$ y $m(\angle DEF) = 60$. Calcular la medida del ángulo $\angle EDC$.



4.296. En la figura:



se tienen nueve puntos, ¿cuántos ángulos agudos y obtusos se pueden formar uniendo tres de los nueve puntos que se tienen?

4.297. Sea ΔABC un triángulo no rectángulo. Probar que no es posible encontrar un punto $D \in \overleftrightarrow{BC}$ tal que $AC \cong AD$ y $BD \cong BC$.

4.298. Dada una recta l, probar que existe una función biyectiva que preserva la distancia entre los puntos de los dos semiplanos determinados por l.

4.299. Sean l y m dos rectas secantes. Si existe un punto $M \in m$ que sea equidistante a l y a una de las bisectrices de los cuatro ángulos que forman las rectas l y m, encontrar la medida de cada uno de los cuatro ángulos formados por l y m.

4.300. ¿Existe una recta equidistante a tres puntos no colineales dados? Analizar también el caso cuando los puntos sean colineales.

4.301. ¿Cuántos puntos hay que sean equidistantes a tres rectas concurrentes?

4.302. Sean l una recta, y A y B dos puntos fuera de ella. Si A' es la proyección de A sobre l y B' es la proyección de B sobre l, probar que $|A'B'| \leq |AB|$.

4.303. Sean l y l' dos rectas. Definimos una función $p_{l,l'} : l \to l'$ como $p_{l,l'}(A)$ = la proyección de A sobre l' si $A \notin l'$, y $p_{l,l'}(A) = A$ si $A \in l'$. A la función $p_{l,l'}$ se le llama la *función proyección de l sobre l'*.

a. Probar que $p_{l,l'}$ es una función biyectiva.

b. Probar que $p_{l',l} \circ p_{l,l'}$ es la identidad en l si y solo si $l \parallel l'$.

4.304. Sean l, m y n tres rectas paralelas entre sí y t una recta transversal a ellas. Si $d(l,m) = d(l,n)$ y la recta t corta a l, m y n en los puntos M, A y B, respectivamente, probar que M es el punto medio de AB.

4.305. Sean l y m dos rectas paralelas, $A \in l$ y $B \in m$. Probar que M es el punto medio de AB si y solo si $d(M,l) = d(M,m)$.

4.306. Dados tres puntos colineales A, B y C, ¿es posible encontrar un punto P en el plano tal que $d(P,A) = d(P,B) = d(P,C)$?

4.307. Sean A y B dos puntos y l una recta. Si $d(A,l) = d(B,l)$, probar que $AB \parallel l$ o que l pasa por el punto medio del segmento AB.

4.308. Dados una recta l y dos puntos A y B fuera de ella, ¿es posible encontrar un punto $P \in l$ tal que $d(A,P) = d(B,P)$?

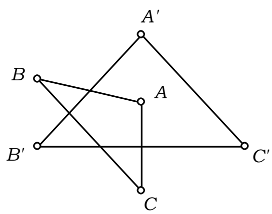
4.309. Sean l una recta y A y B dos puntos fuera de ella. Encontrar un punto $O \in l$ tal que $d(A,O) + d(B,O) \leq d(A,P) + d(B,P)$, para todo punto $P \in l$.
4.310. Sean ΔABC y ΔDBC dos triángulos tales que A y D están en un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{BC}$ y AD no es paralela a $\overleftrightarrow{BC}$. Si P, Q, R y S son los puntos medios de AB, AC, DB y DC, respectivamente, probar que los segmentos PS y QR se bisecan el uno al otro.
4.311. Si AB y CD se bisecan y AD y CE se bisecan, probar que $ED \cong BD$.
4.312[a-49]. Sean A y B dos puntos arbitrarios en el plano.

a. Definimos $A*B$ = punto $C \in \overrightarrow{AB}$ tal que $|AB| = |BC|$. Probar que $A*(B*C) = (A*B)*(A*C)$.
b. Definimos $A\bullet B$ = punto medio del segmento AB. Probar que $A\bullet(B\bullet C) = (A\bullet B)\bullet(A\bullet C)$.

4.313. Sean AB un segmento y M su punto medio. Si trazamos una recta l que pase por M, y A' y B' son las proyecciones de A y B sobre dicha recta, respectivamente, probar que $\Delta MAA' \cong \Delta MBB'$.
4.314. Sean AB un segmento y M su punto medio. Por los puntos A, M y B, trazamos tres rectas l, m, y n perpendiculares a $\overleftrightarrow{AB}$, respectivamente. Ubicamos un punto $N \in m$ de modo que $MN \cong AM$. Por N trazamos una recta paralela a AB que corte a las rectas n y l en los puntos C y D, respectivamente.

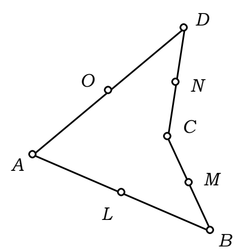
a. Probar que $|AD| + |BC| = |AB|$.
b. Probar que $\angle CMD$ es un ángulo recto.

4.315. En la figura:



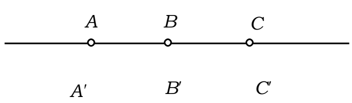
si los segmentos AB y $A'B'$ se bisecan y AC y $B'C'$ también, probar que $BC \cong A'C'$.

4.316. En la figura:



si L, M, N y O son los puntos medios de AB, BC, CD y DA, respectivamente, probar que $LM \parallel NO$, $MN \parallel LO$, $LM \cong NO$ y $MN \cong LO$.

4.317. Sea ΔABC un triángulo. Pongamos $M_0 = B$, $N_0 = C$, $M_1 = M_c$ y $N_1 = M_b$. Si $k > 1$ es un número natural, entonces M_k es el punto medio de AM_{k-1} y N_k es el punto medio de AN_{k-1}. Calcular la longitud del segmento $M_k N_k$ en función de $a = |BC|$.
4.318. En la figura:



si $AC \parallel A'C'$, $AB \cong A'B'$ y $BC \cong B'C'$, probar que los puntos medios de AA', BB' y CC' son colineales.

4.319[I-311]. Tenemos cinco puntos fijos en el plano. Entre las rectas que unen estos puntos no hay paralelas, concurrentes y perpendiculares. Por cada punto tracemos las rectas perpendiculares a las rectas que determinan cada par de los 4 puntos restantes. ¿Cuál es el número máximo de puntos de intersección de estas rectas perpendiculares entre sí, sin considerar los cinco puntos dados?

4.320[I-311]. Tenemos k rectas, en donde k es un número entero positivo, entre las cuales no hay ningún par de paralelas y ninguna terna concurrente: ¿en cuántas regiones dividen estas rectas al plano?

4.321[I-311]. Tenemos cinco rectas, entre las cuales no hay ningún par de paralelas y ninguna terna concurrente.

a. ¿Cuántos puntos de intersección tienen dichas rectas?
b. ¿Cuántos triángulos se forman con dichas rectas?

4.322[I-311]. Tenemos i rectas que pasan por un punto A y j rectas que pasan por un punto B, en donde $2 < i, j$ son números enteros, tales que ninguna de ellas pasa por los puntos A y B, y ningún par de ellas son paralelas. ¿Cuántos puntos de intersección tienen dichas rectas?

4.323[I-311]. Tenemos dos rectas paralelas. En una de ellas se han tomado i puntos, y en la otra j puntos, en donde $2 < i, j$ son números enteros.

a. ¿Cuántos triángulos se pueden formar con dichos puntos?
b. Consideramos las rectas que unen los puntos dados de una de las rectas con los puntos dados de la segunda. Supongamos que cada terna de estas rectas no es concurrente. Probar que hay $\frac{1}{2}ij(i-1)(j-1)$ puntos de intersección de dichas rectas sin considerar los $i + j$ puntos dados.

4.324[I-311]. Tenemos tres rectas paralelas. En una de ellas se han tomado i puntos, en la segunda j puntos y en la tercera k puntos, en donde $2 < i, j, k$ son números enteros, de tal forma que ninguna terna de dichos puntos está en una recta transversal a las rectas paralelas: ¿cuántos triángulos se pueden formar con dichos puntos?

4.325[I-311]. Tenemos i rectas paralelas y j rectas no paralelas entre sí con direcciones distintas a las rectas paralelas, y ninguna de dichas rectas pasa por el punto de intersección de otras dos de las mismas, ¿en cuántas regiones queda dividido el plano por todas las $i + j$ rectas?

4.326[I-202]. Dado un triángulo ΔABC, probar que $P \in int(\Delta ABC)$ si y solo si la recta $\overleftrightarrow{AP}$ corta a la recta $\overleftrightarrow{BC}$ en un punto D tal que $P \in AD$ y $D \in BC$.

4.327. Dados tres puntos no colineales A, B y C, probar que toda recta del plano es cortada por al menos dos de las rectas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{BC}$. Generalizar el resultado para cuatro puntos no colineales de tres en tres.

4.328(Baccalauréat Bordeaux). Sean $\angle AOB$ y $\angle BOC$ dos ángulos adyacentes de medida 60. Probar que

$$d(P,\overleftrightarrow{OA}) + d(P,\overleftrightarrow{OB}) = d(P,\overleftrightarrow{OC}), \text{ para todo punto } P \in int(\angle AOB).$$

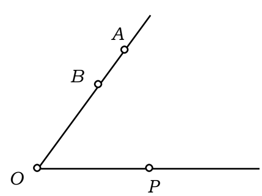
Analizar los casos cuando $P \in int(\angle BOC)$ y cuando P no pertenezca a ninguno de los interiores de los ángulos.

4.329. Sean AB un segmento y m su mediatriz. Si $P \in m - AB$ y l es una recta arbitraria que pasa por el punto A, probar que:

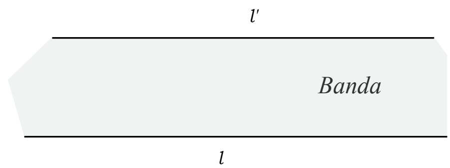
a. $d(P,l) \leq d(P,B)$ y
b. $d(P,l) = d(P,B)$ si y solo si $PA \perp l$.

4.330. En la figura:

probar que $d(A,O) - d(B,O) > d(A,P) - d(B,P)$.



4.331. Definición. Sean l y l' dos rectas paralelas. La <u>banda</u> determinada por las rectas l y l' es el conjunto formado por la intersección del semiplano determinado por l que contiene a l' y del semiplano determinado por l' que contiene a l.



a. Probar que la banda determinada por l y l' es el conjunto de puntos P del plano tal que $P \notin l \cup l'$ y existen dos puntos $A \in l$ y $A' \in l'$ con la propiedad de que $P \in AA'$.

b. Sean $A, B \in l$, y $A', B' \in l'$. Si una recta paralela a l corta al segmento AA', probar que dicha recta también corta al segmento BB'.

c. Probar que si una recta corta a uno de los bordes de una banda, entonces dicha recta interseca a la banda.

4.332. Definición. La *anchura* de una banda con bordes l y l' es el número $d(l,l')$.

a. Si una banda está contenida en otra, probar que sus bordes son paralelos.

b. Si una banda está contenida en una segunda banda, probar que la anchura de la primera es menor que la anchura de la segunda.

4.333. Con k rectas paralelas entre sí, en donde $k > 2$ es un número entero, ¿cuántas bandas distintas se pueden formar?

4.334. Definición. Un conjunto de puntos en el plano se llama *acotado* si por cada dirección existe una banda que lo contiene y los bordes de la banda están en dicha dirección. La *dirección de una banda* es la dirección a la cual pertenecen sus bordes. Probar las siguientes afirmaciones:

a. Todo conjunto finito de puntos es acotado.
b. Todo conjunto que está contenido en la intersección de dos bandas de direcciones distintas es acotado.
c. Todo conjunto acotado está contenido en la intersección de dos bandas de distinta dirección.
d. Todo triángulo es un conjunto acotado.
e. Todo conjunto acotado está contenido en el interior de un triángulo.
f. Todo conjunto contenido en el interior de un triángulo es acotado.
g. Una semirrecta, un ángulo y un semiplano no pueden ser conjuntos acotados.
h. La unión de una cantidad finita de conjuntos acotados es acotada.
i. ¿Es la unión de una cantidad infinita de conjuntos acotados acotada?

4.335. Probar que una recta l está entre dos rectas paralelas m y n si y solo si las tres rectas son paralelas entre sí y las rectas m y n están en distintos semiplanos determinados por l.

4.336. Sean l, m y n tres rectas paralelas entre sí. Probar que la recta l está entre las rectas m y n si y solo si l está en el semiplano determinado por m que contiene a n y en el semiplano determinado por n que contiene a m.

4.337. Probar que una recta l está entre las rectas paralelas m y n si y solo si l está entre A y B, para cualquier par de puntos $A \in m$ y $B \in n$.

4.338. Dadas tres rectas paralelas entre sí, probar que una de ellas está entre las otras dos.

4.339. Dadas k rectas paralelas entre sí, probar que solo dos de estas rectas contienen entre ellas a las restantes, en donde $k > 2$ es un número natural.

4.340. ¿Es posible que la recta simétrica con respecto a un punto fijo sobre una recta dada coincida con la recta simétrica de la misma recta dada con respecto a una recta fija?

4.341. Sean A y B dos puntos fuera de una recta l. Si A' y B' son los puntos simétricos de A y B con respecto a l, probar que AB' y $A'B$ se intersecan en un punto de l si y solo si A y B pertenecen a un mismo semiplano determinado por l.

4.342. Sean l y m dos rectas que se cortan en un punto O, y P un punto fuera de ambas rectas. Si P' y P'' son los puntos simétricos de P con respecto a l y m, respectivamente, probar que $d(P,O) = d(P',O) = d(P'',O)$.

4.343. Sean l y l' dos rectas que se cortan en el punto O; $M \notin l \cup l'$, A y A', las proyecciones de M sobre l y l', respectivamente; y B y B' los puntos simétricos de M con respeto a l y l', respectivamente. Probar que $AA' \parallel BB'$ y que O yace sobre la mediatriz de BB'.

4.344. Sean *l* y *m* dos rectas y *P* un punto fuera de ellas. Sean P_1 el punto simétrico de *P* con respecto a *l* y P_2 el punto simétrico de P_1 con respecto a *m*. Así continuamos inductivamente definiendo a P_{2k-1} como el punto simétrico de P_{2k-2} con respecto a *l* y a P_{2k} como el punto simétrico de P_{2k-1} con respecto a la recta *m*, ¿es posible que $P_i = P_j$ para algún par de índices distintos *i* y *j*?

4.345. Sean *l* una recta y $P, Q \notin l$. Trazar dos rectas *m* y *n* que pasen por los puntos *P* y *Q*, respectivamente, de tal forma que cada punto de *m* sean el punto simétrico de un punto de *n* con respecto a *l*.

4.346[I-25]. Sean $\angle AOB$ un ángulo agudo no nulo y $P \in int(\angle AOB)$. Si *P*' es el punto simétrico de *P* con respecto a la recta $\overleftrightarrow{OA}$, y *P*'' es el punto simétrico de *P* con respecto a la recta $\overleftrightarrow{OB}$, calcular

$$\frac{m(\angle AOB)}{m(\angle P'OP'')}.$$

4.347. Sea ΔABC un triángulo. Si *A*' es el punto simétrico de *A* con respecto al punto M_a, y *B*' es el punto simétrico de *B* con respecto al vértice *A*, probar que los puntos *A*', M_b y *B*' son colineales.

4.348. Si cada uno de los lados de un ángulo es simétrico con un lado de otro ángulo, con respecto a un mismo eje de simetría, probar que ambos ángulos son congruentes.

4.349. Probar que dos rectas paralelas son simétricas con respecto al punto medio de un segmento que une un punto de una de las rectas con un punto de la otra.

4.350. Si dos rectas paralelas son simétricas con respecto a un mismo centro de simetría, probar que dicho centro es el punto medio de un segmento que une un punto de una de las rectas con un punto de la otra.

4.351. Sean *l* y *m* dos rectas secantes, $A \in l$, $B \in m$, y *M* el punto medio de *AB*. Probar que la recta simétrica de *l* con respecto al punto *M* pasa por *B*, y que la recta simétrica de *m* con respecto al punto *M* pasa por *A*.

4.352. Sean ΔABC un triángulo y *l* una recta en el exterior del triángulo. Si *A*', *B*' y *C*' son los puntos simétricos de *A*, *B* y *C* con respecto a *l*, respectivamente, probar que $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

4.353. Si *O* y *O*' son centros de simetría de un conjunto en el plano y *O*'' es el punto simétrico de *O*' con respecto a *O*, probar que *O*'' es también un centro de simetría de dicho conjunto.

4.354. Probar que un triángulo es isósceles si y solo si podemos trazar una recta que pase por uno de sus vértices de tal forma que los puntos del triángulo que estén en uno de los semiplanos determinados por la recta sean los puntos simétricos de los puntos del triángulo que yacen en el otro semiplano con respecto a la misma recta.

4.355. ¿Puede un triángulo tener un eje de simetría?

4.356. ¿Puede un triángulo tener dos ejes de simetría?

4.357. ¿Puede un triángulo tener un centro de simetría?

4.358. Probar que si un triángulo tiene un eje de simetría, entonces dicho eje debe pasar por uno de sus vértices.

4.359. Sean ΔABC un triángulo y *M* un punto fuera de él. Sean *P*, *Q* y *R* los puntos simétricos de *M* con respecto a las rectas $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{AB}$, respectivamente, ¿pueden ser los puntos *P*, *Q* y *R* colineales?

4.360. Sea ΔABC un triángulo. Probar la equivalencia de los siguientes enunciados:

a. $\angle B \cong \angle C$.

b. El punto simétrico de cada punto del segmento *AB* con respecto a la recta $\overleftrightarrow{AM_a}$ yace en *AC*.

c. *B* es el punto simétrico de *C* con respecto a la recta $\overleftrightarrow{AM_a}$.

4.361. Sean ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$; *P* y *Q* las proyecciones de M_a sobre las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{AC}$, respectivamente; y *P*' y *Q*' los puntos simétricos de M_a con respecto a las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{AC}$, respectivamente.

Probar las siguientes afirmaciones:

a. $BC \parallel QP$ y $BC \parallel Q'P'$.

b. $\Delta M_a P' Q'$ es un triángulo rectángulo.

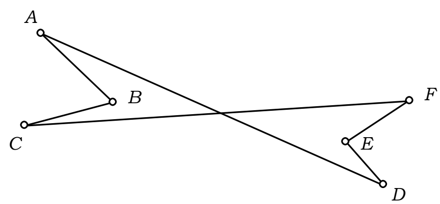
c. Los puntos *P*', *A* y *Q*' son colineales.

4.362. Una función f del plano en el plano se dice que es una *isometría* si es biyectiva y $d(A,B) = d(f(A), f(B))$ para cada par de puntos A y B. Probar las siguientes afirmaciones para cualquier isometría f:

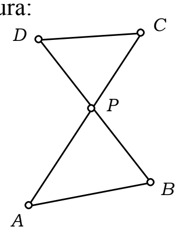
a. Si A, B y C son colineales, entonces $f(A)$, $f(B)$ y $f(C)$ también son colineales.
b. Si $C \in AB$, entonces $f(C) \in f(A)f(B)$.
c. Si $C \in l$, entonces $f(C) \in f[l] = \{ f(A) : A \in l \}$.
d. Si l es una recta, entonces $f[l]$ es también una recta.
e. Si $C \in \overrightarrow{AB}$, entonces $f(C) \in \overrightarrow{f(A)f(B)}$.
f. $\angle AOB \cong \angle f(A)f(O)f(B)$.
g. $AB \cong f(A)f(B)$.
h. $\Delta ABC \cong \Delta f(A)f(B)f(C)$.

4.363. Probar que la simetría con respecto a un punto fijo es una isometría del plano.
4.364. Probar que la simetría con respecto a una recta fija es una isometría del plano.
4.365. Probar que si una isometría del plano deja fijos a dos puntos, entonces la isometría deja fijos a todos los puntos de la recta que pasa por los mismos.
4.366. Probar que si una isometría del plano deja fijos a tres puntos no colineales, entonces la isometría deja fijos a todos los puntos del plano.
4.367. Pueden existir tres puntos A, B y C en el plano de tal forma que $|AB| + |BC| < |AC|$.
4.368. En la figura:

probar que $|AD| + |CF| > |AB| + |BC| + |DE| + |EF|$.



4.369. En la figura:



probar que $|AC| + |BD| > |AB| + |DC|$.

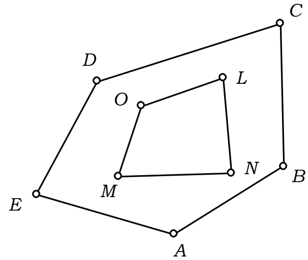
Este resultado se puede interpretar de la siguiente manera:

La suma de las longitudes de dos segmentos que se cortan en un punto diferente de sus extremos es mayor que la suma de las longitudes de los segmentos que unen sus puntos extremos.

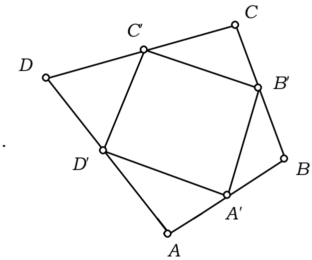
4.370. Sean ΔABC un triángulo con $AB > AC$ y $M \in BC$. Trazamos rectas paralelas a los lados AC y AB que pasen por el punto M y corten a AB y AC en los puntos P y Q, respectivamente. Probar que

$$|AC| < |MP| + |MQ| < |AB|.$$

4.371. Sea ΔABC un triángulo, ¿es cierto que $|ED| + |DF| < |AB| + |AC|$ para cualquier elección de puntos $E, F \in BC - \{B, C\}$ y $D \in int(\Delta ABC)$?
4.372. En la figura



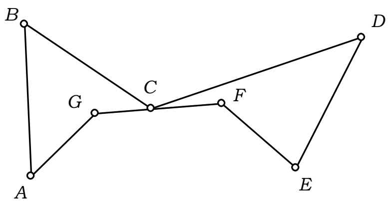
probar que
$|AB| + |BC| + |CD| + |DE| + |EA| > |MN| + |NL| + |LO| + |OM|$.



4.373. En la figura:

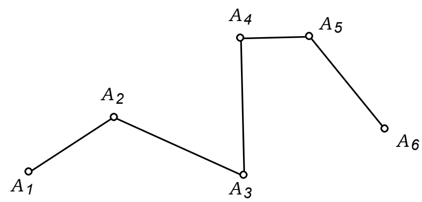
probar que $|A'B'| + |B'C'| + |C'D'| + |D'A'| < |AB| + |BC| + |CD| + |DA|$. 220

4.374. En la figura:



tenemos que $C \in GF$. Probar que
$|AG| + |GF| + |FE| < |AB| + |BC| + |CD| + |DE|$.

4.375. Definición. Una *línea quebrada* es una unión finita de segmentos tales que dos de ellos solo se pueden cortar en sus puntos extremos, un punto extremo de cada segmento es a lo más el punto extremo de otro de los segmentos y cada par de segmentos con un punto extremo en común no son colineales.



Probar que si $A_1 A_2 ... A_k$ es una línea quebrada, en donde $k > 2$ es un número entero, entonces

$$|A_1 A_k| < |A_1 A_2| + |A_2 A_3| + ... + |A_{k-1} A_k|.$$

El libro [l-260] contiene una clara clasificación de las líneas quebradas y algunas de sus propiedades básicas.

4.376. ¿Pueden cuatro puntos en el plano, de los cuales ninguna terna es colineal, determinar una línea quebrada tal que ninguna recta la corte en más de dos puntos?

4.377. Sean ΔABC un triángulo y $k > 2$ un número natural.

a. Si $P, Q \in ext(\Delta ABC)$, probar que hay una línea quebrada $A_1 A_2 ... A_k$ que no corta a ninguno de los lados del triángulo ΔABC tal que $A_1 = P$ y $A_k = Q$.

b. Si $P, Q \in int(\Delta ABC)$, probar que hay una línea quebrada $A_1 A_2 ... A_k$ contenida en el interior del triángulo dado, que no corta a ninguno de los lados del triángulo ΔABC y que $A_1 = P$, y $A_k = Q$.

c. Si $P \in int(\Delta ABC)$ y $Q \in ext(\Delta ABC)$, probar que toda línea quebrada que empieza en el punto P y acaba en el punto Q debe cortar a uno de los lados del triángulo ΔABC.

4.378. Si $A_1, ..., A_k$ son cualesquiera k puntos en el plano, en donde $k > 2$ es un número natural, probar que

$$|A_1 A_k| < \sum_{i=1}^{k-1} |A_i A_{i+1}|.$$

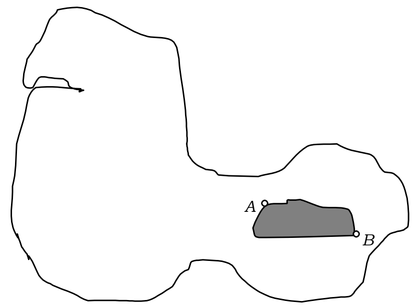
4.379[l-307]. Tenemos k puntos en el plano entre los cuales no hay tres sobre una misma recta, en donde $k > 2$ es un número natural: ¿cuántas líneas quebradas de i segmentos con vértices entre los puntos dados hay?

4.380. Decir cómo se mide un ángulo de un triángulo cuyo vértice es inaccesible, pero visible.

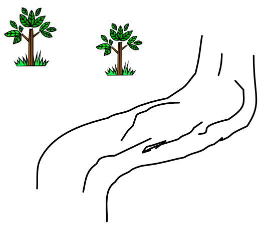
4.381. Para que un yate navegue en línea recta, se fijan dos puntos en la dirección deseada y se mantiene la dirección hacia el punto medio de los dos puntos fijados y a la misma distancia de dichos puntos. Explicar por qué el yate navega en línea recta bajo estas condiciones.

4.382[a-70].

En una pequeña isla se tienen dos ciudades A y B separadas por un lago (ver la figura de la derecha). Utilizando el Teorema 4.3.13, dar un método para calcular la distancia entre las dos ciudades sin salirse de la isla.



4.383.



Si un tesoro se encuentra en la ribera de un río a la misma distancia de dos árboles, ¿cómo se localizaría al tesoro?

CAPÍTULO 5

CUADRILÁTEROS

5.1. Cuadriláteros

5.1.1. Definición. Un *cuadrilátero* es la unión de cuatro segmentos AB, BC, CD y DA tales que dos de ellos se pueden intersecar solamente en sus puntos extremos, y cada par de dichos segmentos con un punto extremo en común no son colineales.

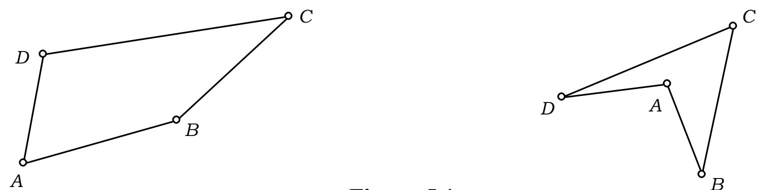


Figura 5.1

A los segmentos AB, BC, CD y DA se les llaman *lados* del cuadrilátero y decimos que los puntos A, B, C y D son los *vértices* del mismo. Los *ángulos interiores* de un cuadrilátero son los ángulos determinados por sus lados que se intersecan. Un cuadrilátero cuyos lados son AB, BC, CD y DA tiene cuatro ángulos interiores que se denotarán por $\angle A = \angle BAD$, $\angle B = \angle CBA$, $\angle C = \angle DCB$ y $\angle D = \angle ADC$. Los *ángulos exteriores* de un cuadrilátero son los ángulos suplementarios adyacentes a sus ángulos interiores. Dos vértices de un cuadrilátero se llaman *adyacentes* si son los puntos extremos de uno de sus lados, y dos vértices que no son adyacentes se llaman *opuestos*. Dos ángulos interiores de un cuadrilátero se llaman *adyacentes* si comparten un lado del mismo, y si dos ángulos interiores de un cuadrilátero no comparten un lado, entonces decimos que son *opuestos*. Dos lados de un cuadrilátero se llaman *adyacentes* si comparten un punto extremo y dos de sus lados que no sean adyacentes se llaman *opuestos*. Un ángulo interior y un lado de un cuadrilátero se llaman *adyacentes* si el lado está en uno de los lados del ángulo, y se llaman *opuestos* si el lado no está contenido en ninguno de los lados de dicho ángulo. Un segmento que une dos vértices opuestos de un cuadrilátero se llama *diagonal*. Es claro que todo cuadrilátero tiene dos diagonales. Una *altura* del cuadrilátero es el segmento que une a uno de sus vértices con la proyección del mismo sobre uno de los lados que no lo contiene. Cada cuadrilátero tiene ocho alturas tal y como lo muestra la siguiente figura:

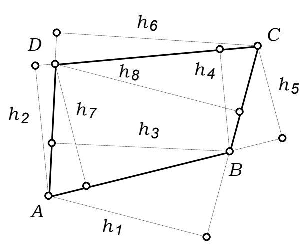


Figura 5.2

h_1 es la altura del vértice A con respecto al lado BC, h_2 es la altura del vértice A con respecto al lado DC, h_3 es la altura del vértice B con respecto al lado DA, h_4 es la altura del vértice B con respecto al lado DC, h_5 es la altura del vértice C con respecto al lado AB, h_6 es la altura del vértice C con respecto al lado DA, h_7 es la altura del vértice D con respecto al lado AB y h_8 es la altura del vértice D con respecto al lado BC.

Por brevedad, convenimos en que los ángulos interiores de un cuadrilátero serán llamados simplemente *ángulos del cuadrilátero*. Cabe mencionar que dos ángulos exteriores adyacentes a un mismo ángulo interior de un cuadrilátero son congruentes por ser opuestos por el vértice (Teorema 2.10.2). Es por ello que se hará referencia a solo uno de estos dos ángulos según convenga el caso.

Un cuadrilátero con vértices A, B, C y D se denotará por el símbolo $\square ABCD$, enunciando, por lo general, los vértices en dirección contraria a las manecillas del reloj. De esta forma, $\square ABCD$, $\square BCDA$, $\square CDAB$ y $\square DABC$ denotan al mismo cuadrilátero. El orden en que se enuncian los vértices de un cuadrilátero es muy importante. pues nos dice la forma como están conectados sus lados. Por ejemplo, el símbolo $\square ABCD$ nos dice que AB, BC, CD y DA son los lados del cuadrilátero. Según lo acordado, si $\square ABCD$ es un cuadrilátero, entonces

A y B, B y C, C y D, y D y A son los cuatro pares de vértices adyacentes;
A y C, y B y D son los dos pares de vértices opuestos;
AB y BC, BC y CD, CD y DA, y DA y AB son los cuatro pares de lados adyacentes;
AB y DC, y BC y DA son los dos pares de lados opuestos;
$\angle A$ y $\angle B$, $\angle B$ y $\angle C$, $\angle C$ y $\angle D$, y $\angle D$ y $\angle A$ son los cuatro pares de ángulos adyacentes;
$\angle A$ y $\angle C$ y $\angle B$ y $\angle D$ son los dos pares de ángulos opuestos; y
AC y BD son las dos diagonales.

Si $\square ABCD$ es un cuadrilátero, entonces las longitudes de sus lados serán denotadas por

$$a = |AB|,\ b = |BC|,\ c = |CD| \text{ y } d = |DA|,$$

y las longitudes de sus diagonales por

$$e = |AC| \text{ y } f = |BD|.$$

Algunas veces, un cuadrilátero será denotado por

$$\square\,(a,b,c,d).$$

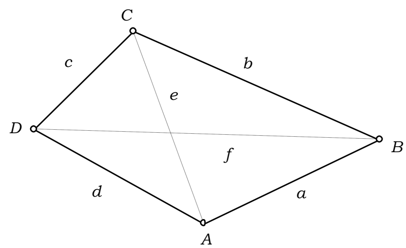


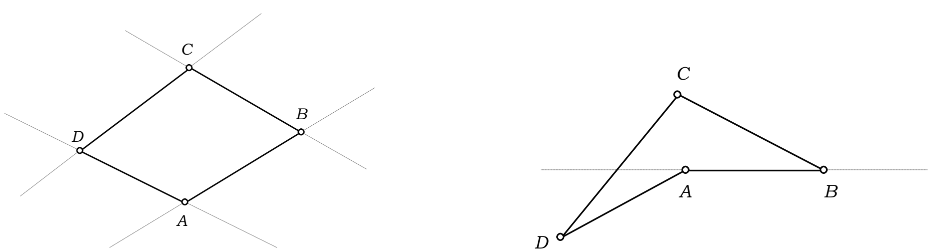
Figura 5.3

En el cuadrilátero de la derecha en la figura 5.1, podemos observar que el ángulo interior $\angle A = \angle BAD$ no es realmente lo que se entiende por el adjetivo interior. Es por esto que en este libro consideraremos solamente aquellos cuadriláteros en donde sus ángulos interiores sean verdaderamente interiores. Dichos cuadriláteros son los que a continuación describimos:

5.1.2. Definición. Un cuadrilátero se llama *convexo* si para cada recta que contenga a dos de sus vértices adyacentes, los otros dos vértices yacen en un mismo semiplano determinado por dicha recta.

En símbolos, el cuadrilátero $\square ABCD$ es convexo si y solo si se cumplen las identidades

$$\overleftrightarrow{AB} \cap CD = \overleftrightarrow{BC} \cap AD = \overleftrightarrow{CD} \cap AB = \overleftrightarrow{AD} \cap BC = \varnothing.$$



convexo no convexo

Figura 5.4

Los cuadriláteros convexos se pueden caracterizar de la siguiente manera:

5.1.3. Teorema. Para un cuadrilátero $\square ABCD$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\square ABCD$ es convexo.
2. $AC \cap BD \neq \varnothing$.

Prueba: $1 \Rightarrow 2$. Por ser $\square ABCD$ un cuadrilátero, sabemos que $C, D \notin \overleftrightarrow{AB}$, y por suposición, vemos que C y D están en un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{AB}$. De manera similar, obtenemos que los puntos B y C yacen en un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{AD}$. Todo lo anterior implica que $C \in int(\angle BAD)$. Observemos que $C \notin \overleftrightarrow{AB} \cup \overleftrightarrow{AD} \cup BD$. Si $C \in int(\Delta ABD)$, por el Teorema 1.6.3, tendríamos que $\overleftrightarrow{CD} \cap AB \neq \varnothing$, lo cual sería una contradicción. Por ello, tenemos que $C \notin int(\Delta ABD)$. Es decir, los puntos A y C están en diferentes semiplanos determinados por la recta $\overleftrightarrow{BD}$. Por ello y el Teorema 2.2.6, concluimos que AC tiene que intersecar a BD.

$2 \Rightarrow 1$. Sea $P \in AC \cap BD$: Ya que $\square ABCD$ un cuadrilátero, $P \notin \{A, B, C, D\}$. Supongamos que $\overleftrightarrow{AB} \cap CD \neq \varnothing$. Como $P, C, D \notin \overleftrightarrow{AB}$, por el Axioma de Pasch, tenemos que $\overleftrightarrow{AB} \cap PC \neq \varnothing$, o bien, $\overleftrightarrow{AB} \cap DP \neq \varnothing$, pero esto no es posible porque los puntos A, B y C no son colineales y tampoco los puntos A, B y D. Esto demuestra que $\overleftrightarrow{AB} \cap CD = \varnothing$. Mediante argumentos completamente similares podemos establecer las identidades

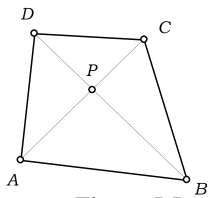


Figura 5.5

$$\overleftrightarrow{BC} \cap AD = \overleftrightarrow{CD} \cap AB = \overleftrightarrow{AD} \cap BC = \varnothing. \clubsuit$$

Al punto de intersección de las diagonales de un cuadrilátero convexo, el cual existe por el Teorema 5.1.3, se le llama *centro* del cuadrilátero. En la mayoría de los casos, cuando hagamos referencia a dicho centro, se le denotará con la letra O.

Como hicimos con los ángulos y con los triángulos, se puede también hablar del interior de un cuadrilátero. Pero para un cuadrilátero que no sea convexo, la descripción de su interior es difícil y no goza de propiedades similares a la del interior de un triángulo. Por esta razón, nos limitaremos a considerar solamente el interior de los cuadriláteros convexos.

5.1.4. Definición. El interior del cuadrilátero convexo $\square ABCD$, que será denotado por $int(\square ABCD)$, es la intersección de los siguientes semiplanos:

a. El semiplano determinado por $\overleftrightarrow{AB}$ que contiene a D y C;

b. el semiplano determinado por $\overleftrightarrow{BC}$ que contiene a D y A;

c. el semiplano determinado por $\overleftrightarrow{DC}$ que contiene a A y B; y

d. el semiplano determinado por $\overleftrightarrow{AD}$ que contiene a B y C.

El exterior del cuadrilátero $\square ABCD$, denotado por $ext(\square ABCD)$, es el conjunto de puntos del plano que no pertenecen ni al cuadrilátero, ni al interior del mismo.

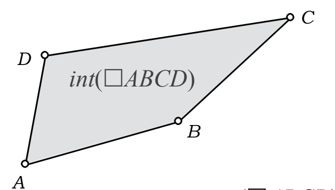


Figura 5.6

5.1.5. Teorema: Si $\square ABCD$ es un cuadrilátero convexo cualquiera, entonces

$$\varnothing \neq int(\square ABCD) = int(\angle BAD) \cap int(\angle DCB) = int(\angle CBA) \cap int(\angle ADC).$$

Prueba: Por definición, sabemos que $int(\angle BAD)$ es la intersección del semiplano determinado por $\overleftrightarrow{AD}$ que contiene a B y el semiplano determinado por $\overleftrightarrow{AB}$ que contiene a D (estos semiplanos son los mencionados en los incisos d) y a) de la Definición 5.1.4, respectivamente) y $int(\angle DCB)$ es la intersección del semiplano determinado por $\overleftrightarrow{BC}$ que contiene a D y el semiplano determinado por $\overleftrightarrow{DC}$ que contiene a B (estos semiplanos son los mencionados en los incisos b) y c) de la Definición 5.1.4, respectivamente). De aquí se sigue que $int(\angle BAD) \cap int(\angle DCB)$ es igual a la intersección de los cuatro semiplanos dados en la Definición 5.1.4. Por lo tanto, $int(\square ABCD) = int(\angle BAD) \cap int(\angle DCB)$. Con un argumento muy similar, se demuestra que $int(\angle CBA)$ es la intersección del semiplano determinado por $\overleftrightarrow{BC}$ que contiene a A y el semiplano determinado por $\overleftrightarrow{AB}$ que contiene a C (estos semiplanos son los mencionados en los incisos b) y a), respectivamente) y $int(\angle ADC)$ es la intersección del semiplano determinado por $\overleftrightarrow{AD}$ que contiene a C y el semiplano determinado por $\overleftrightarrow{DC}$ que contiene a A (estos semiplanos son los mencionados en los incisos d) y c), respectivamente). Por lo consiguiente, $int(\square ABCD) = int(\angle CBA) \cap int(\angle ADC)$. Veamos ahora que el interior del cuadrilátero $\square ABCD$ es no vacío. Sea O el punto de intersección de las diagonales AC y BD del cuadrilátero $\square ABCD$. Como D y C están en un mismo semiplano determinado por $\overleftrightarrow{AB}$, por el Lema 1.5.3, $O \in AC - \{A\}$ está también contenido en dicho semiplano. Por ello, O pertenece al semiplano determinado por $\overleftrightarrow{AB}$ que contiene a D y C. De la misma manera probamos que O pertenece al semiplano determinado por $\overleftrightarrow{BC}$ que contiene a D y A; O pertenece al semiplano determinado por $\overleftrightarrow{DC}$ que contiene a A y B; y O pertenece al semiplano determinado por $\overleftrightarrow{AD}$ que contiene a B y C. Por consiguiente, $O \in int(\square ABCD)$. ♣

5.1.6. Teorema. Si $\square ABCD$ es un cuadrilátero convexo, entonces

$$int(\square ABCD) - \{O\} = int(\Delta ABC) \cup int(\Delta BCD) \cup int(\Delta DAB) \cup int(\Delta DAC),$$

en donde O es el punto de intersección de sus diagonales AC y BD.

Prueba: Claramente

$$O \notin int(\Delta ABC) \cup int(\Delta BCD) \cup int(\Delta DAB) \cup int(\Delta DAC).$$

Por definición, sabemos que $int(\Delta ABC)$ es la intersección del semiplano determinado por $\overleftrightarrow{AB}$ que contiene a C (este es el semiplano del inciso a)), del semiplano determinado por $\overleftrightarrow{BC}$ que contiene a A (este es el semiplano del inciso b)) y del semiplano determinado por $\overleftrightarrow{AC}$ que contiene a B. Por otra parte, sabemos que los vértices A y B están en un mismo semiplano determinado por $\overleftrightarrow{DC}$. Según el Problema 1.236, se tiene que $int(\Delta ABC)$ está también contenido en dicho semiplano (este es el semiplano del inciso c)). Con este mismo argumento, hallamos que $int(\Delta ABC)$ está contenido en el semiplano determinado por $\overleftrightarrow{AD}$ que contiene a B y C (este es el semiplano del inciso d)). Así queda establecida la contención $int(\Delta ABC) \subseteq int(\square ABCD) - \{O\}$. Con un argumento muy similar aplicado a cada uno del los triángulos restantes, se establece que

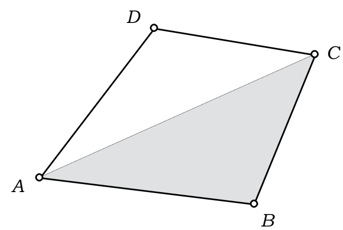


Figura 5.7

$$int(\Delta BCD) \cup int(\Delta DAB) \cup int(\Delta DAC) \subseteq int(\square ABCD) - \{O\}.$$

Por lo cual,

$$int(\Delta ABC) \cup int(\Delta BCD) \cup int(\Delta DAB) \cup int(\Delta DAC) \subseteq int(\square ABCD) - \{O\}.$$

Para probar la otra contención, fijemos un punto $P \in int(\square ABCD) - \{O\}$. Podemos suponer, sin perder generalidad, que $P \notin \overleftrightarrow{AC}$ y que P y D están en un mismo semiplano determinado por $\overleftrightarrow{AC}$. Probaremos que $P \in int(\Delta DAC)$. En efecto, como $P \in int(\square ABCD)$, tenemos entonces que P está en el semiplano determinado por $\overleftrightarrow{DC}$ que contiene a A, y en el semiplano determinado por $\overleftrightarrow{AD}$ que contiene a C. De aquí podemos ver que $P \in int(\Delta DAC)$. Con esto queda demostrada la contención

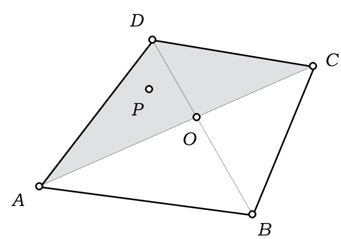
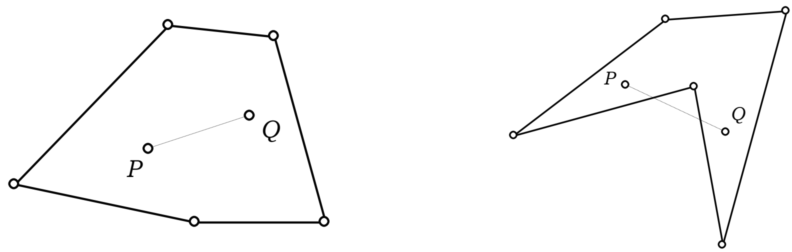


Figura 5.8

$$int(\square ABCD) - \{O\} \subseteq int(\Delta ABC) \cup int(\Delta BCD) \cup int(\Delta DAB) \cup int(\Delta DAC). ♣$$

A continuación, enunciamos uno de los conceptos más importantes de la Geometría Euclidiana.

5.1.7. Definición. Un conjunto X formado por puntos del plano se llama *convexo* si para cada par de puntos P, $Q \in X$, tenemos que $PQ \subseteq X$.



conjunto convexo conjunto no convexo

Figura 5.9

Todo el plano y el conjunto vacío son ejemplos de conjuntos conexos. Las rectas y los segmentos también son conjuntos convexos. Veremos un poquito más adelante que nuestros cuadriláteros convexos son efectivamente subconjuntos convexos del plano.

5.1.8. Teorema. La intersección de una familia de conjuntos convexos es convexa.

Prueba: Sea $\{ X_i : i \in I \}$ una familia de conjuntos convexos. Fijamos dos puntos P, $Q \in \cap\{ X_i : i \in I \}$. Por definición, sabemos que $PQ \subseteq X_i$ para cada $i \in I$. Es decir,

$$PQ \subseteq \cap\{ X_i : i \in I \}.$$

Por lo tanto, la intersección $\cap\{ X_i : i \in I \}$ es un conjunto convexo. ♣

El Lema 1.5.2 tiene la siguiente reformulación:

5.1.9. Teorema. Los semiplanos son conjuntos convexos.

Como el interior de un ángulo no degenerado es la intersección de dos semiplanos, tenemos el siguiente corolario:

5.1.10. Corolario. El interior de un ángulo no degenerado es un conjunto convexo.

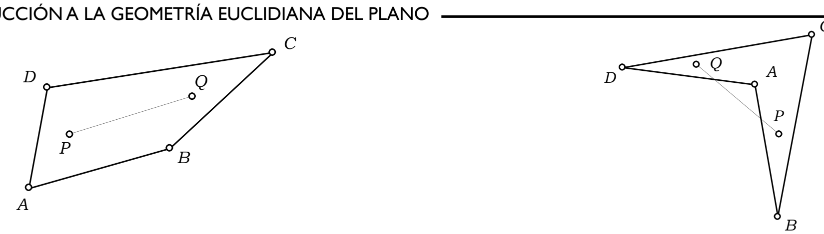
El siguiente corolario justifica el adjetivo *convexo* aplicado a un cuadrilátero.

5.1.11. Corolario. El interior de un cuadrilátero convexo es un conjunto convexo del plano.

Prueba: Por definición, sabemos que el interior de un cuadrilátero convexo es la intersección de cuatro semiplanos que por el Teorema 5.1.9 son conjuntos convexos del plano. La conclusión se sigue del Teorema 5.1.8.

♣

El recíproco del corolario anterior también se cumple y su demostración se deja como un ejercicio al lector (Problema 5.9).



Cuadrilátero convexo   Cuadrilátero no convexo

Figura 5.10

En la figura 5.10, se dan dos cuadriláteros, uno de los cuales es convexo y el otro no. En contraste con los triángulos, tenemos lo siguiente:

5.1.12. Teorema. El interior de todo triángulo es un conjunto convexo.

Prueba: Sea ΔABC un triángulo. De acuerdo con el Teorema 2.2.12, $int(\Delta ABC) = int(\angle BAC) \cap int(\angle CBA)$. Puesto que estos dos últimos conjuntos son convexos (Corolario 5.1.10), por el Teorema 5.1.8, concluimos que $int(\Delta ABC)$ es un conjunto convexo. ♣

Si nuestro cuadrilátero no es convexo, la definición de interior que dimos en 5.1.4 no tendría ningún sentido, pues en un cuadrilátero no convexo algunos de los semiplanos mencionados en los incisos a), b), c) y d) no existen. Esto se puede ver con más precisión en el siguiente ejemplo:

El interior del cuadrilátero $\square ABCD$ no es un conjunto convexo, por lo cual la región sombreada no se puede obtener mediante la intersección de semiplanos. En este ejemplo, los semiplanos de los incisos a) y d) de la Definición 5.1.4 no existen.

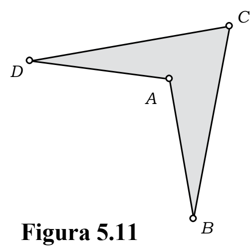


Figura 5.11

En este libro, restringiremos nuestra atención a los cuadriláteros convexos solamente y nos referiremos a ellos con el adjetivo *cuadrilátero* (= cuadrilátero convexo). De esta forma, convenimos en que todos los cuadriláteros que aparecerán en lo que resta del libro serán convexos. El lector tendrá toda la libertad de diferenciar aquellas propiedades geométricas que valen para cualquier cuadrilátero y aquellas propiedades que solo se cumplen para los convexos.

La relación entre los ángulos de un cuadrilátero no convexo está enunciada en el Problema 4.100, y para los cuadriláteros convexos tenemos lo siguiente (en similitud con los triángulos, según el Teorema 4.3.4):

5.1.13. Teorema. La suma de las medidas de los ángulos interiores de un cuadrilátero es igual a 360, y la suma de las medidas de los ángulos exteriores de un cuadrilátero es igual a 360.

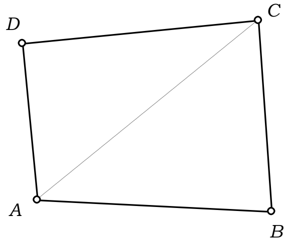


Figura 5.12

Prueba. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero. Consideremos los triángulos ΔABC y ΔACD. De acuerdo con el Teorema 4.3.4,

$$m(\angle BAC) + m(\angle CBA) + m(\angle ACB) = m(\angle CAD) + m(\angle ADC) + m(\angle DCA) = 180.$$

De donde se sigue que

$$m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) + m(\angle D) = m(\angle BAC) + m(\angle CAD) + m(\angle CBA) + m(\angle ACB) + m(\angle DCA) + m(\angle ADC) = 360.$$

Sean $\angle\alpha$, $\angle\beta$, $\angle\gamma$ y $\angle\varepsilon$ los ángulos exteriores de $\square ABCD$ cuyos vértices son A, B, C y D, respectivamente. Sabemos que

$$m(\angle A) + m(\angle\alpha) = m(\angle B) + m(\angle\beta) = m(\angle C) + m(\angle\gamma) = m(\angle D) + m(\angle\varepsilon) = 180.$$

Por consiguiente,

$$m(\angle A) + m(\angle\alpha) + m(\angle B) + m(\angle\beta) + m(\angle C) + m(\angle\gamma) + m(\angle D) + m(\angle\varepsilon) = 720$$
$$m(\angle\alpha) + m(\angle\beta) + m(\angle\gamma) + m(\angle\varepsilon) + 360 = 720$$
$$m(\angle\alpha) + m(\angle\beta) + m(\angle\gamma) + m(\angle\varepsilon) = 360. \clubsuit$$

En el Teorema 5.1.13, vimos que si cuatro ángulos no degenerados $\angle\alpha$, $\angle\beta$, $\angle\gamma$ y $\angle\varepsilon$ son los ángulos de un cuadrilátero, entonces se cumple la identidad

$$m(\angle\alpha) + m(\angle\beta) + m(\angle\gamma) + m(\angle\varepsilon) = 360.$$

Inversamente, si damos cuatro ángulos no degenerados $\angle\alpha$, $\angle\beta$, $\angle\gamma$ y $\angle\varepsilon$ cuyas medidas sumen 360, podemos encontrar una infinidad de cuadriláteros que tengan a dichos ángulos como sus ángulos interiores (ver Problema 11.242). Cualquiera de estos cuadriláteros será denotado por $\square$ $(\angle\alpha,\angle\beta,\angle\gamma,\angle\varepsilon)$. También podemos observar del Teorema 5.1.13 que si dos cuadriláteros tienen tres ángulos correspondientes congruentes, entonces los correspondientes ángulos restantes son congruentes.

Tenemos la versión para cuadriláteros de la Desigualdad del Triángulo (4.4.9):

5.1.14. Teorema. Si $\square ABCD$ es un cuadrilátero, entonces

$$a < b + c + d,\ b < a + c + d,\ c < a + b + d \text{ y } d < a + b + c.$$

Prueba: Pongamos $|AC| = e$. Aplicando la Desigualdad del Triángulo (4.4.9) a los triángulos ΔABC y ΔACD, hallamos que

$$a < b + e,\ e < c + d,\ b < a + e,\ e < a + b,\ c < d + e \text{ y } d < c + e.$$

Lo cual implica que

$$a < b + e < b + c + d,$$
$$b < a + e < a + c + d,$$
$$c < d + e < a + b + d \text{ y}$$
$$d < c + e < a + b + c. \clubsuit$$

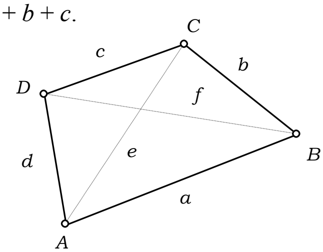


Figura 5.13

El recíproco del Teorema 5.1.14 también se cumple, pero daremos su prueba en el Capítulo 8 (8.3.18).

5.1.15. Definición. Un cuadrilátero se llama *trapezoide* si ningún par de sus lados son paralelos. Un *trapecio* es un cuadrilátero con uno y solo un par de lados opuestos paralelos. Un cuadrilátero es un *paralelogramo* si tiene sus lados opuestos paralelos. Un *rombo* es un paralelogramo con sus cuatro lados congruentes. A un paralelogramo con un ángulo recto se le llama *rectángulo*. Un rectángulo con sus cuatro lados congruentes se llama *cuadrado*.

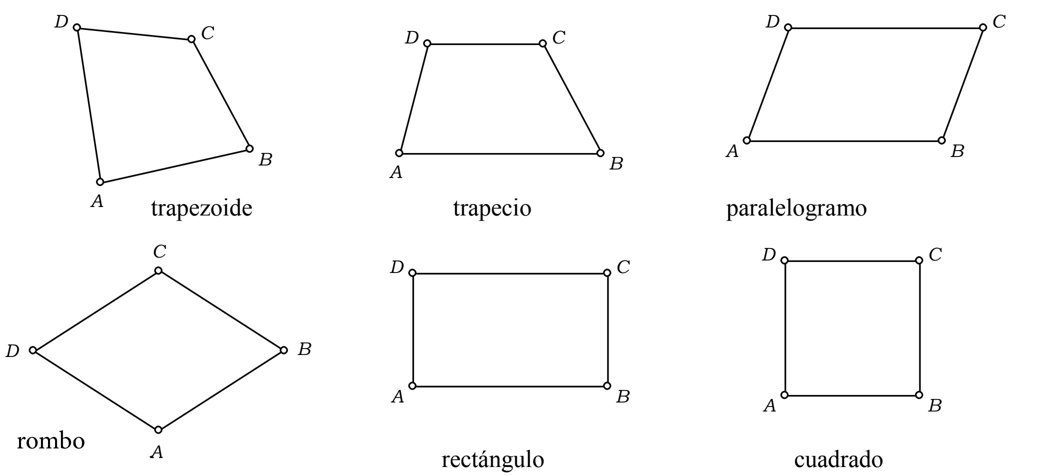


Figura 5.14

5.1.16. Teorema. Los cuatro ángulos de un rectángulo son rectos.

Figura 5.15

Prueba: Sea □*ABCD* un paralelogramo con $m(\angle A) = 90$. Sabemos que $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$ y $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{AD}$. Según el Teorema 3.4.8, $\angle A$ y $\angle B$, $\angle B$ y $\angle C$, y $\angle C$ y $\angle D$ son tres pares de ángulos suplementarios. Como $\angle A$ es recto, por los Teoremas 2.6.3 y 2.7.11, $\angle B$ es también un ángulo recto. Usando el mismo argumento, podemos probar que los ángulos $\angle C$ y $\angle D$ también son rectos. ♣

5.1.17. Corolario. Un rombo es un cuadrado si y solo si todos sus cuatro ángulos son rectos.

El siguiente teorema se la atribuye a P. Varignon (el lector que quiera saber sobre la historia de este resultado y de su autor puede consultar el artículo de P. N. Oliver [a-122]).

5.1.18. Teorema del Paralelogramo de Varignon. Los puntos medios de los lados de un cuadrilátero forman un paralelogramo cuyos lados tienen longitud igual a la mitad de la longitud de las diagonales del cuadrilátero.

Prueba: Sean □*ABCD* un cuadrilátero y *M*, *N*, *L* y *O* los puntos medios de los lados *AB*, *BC*, *CD* y *DA*, respectivamente.

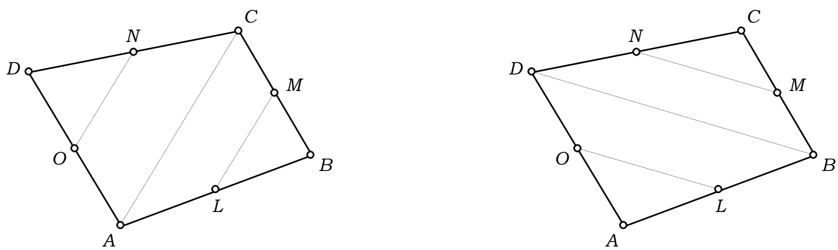


Figura 5.16

En los triángulos Δ*ABC* y Δ*ACD*, por el Teorema 4.3.10, se cumple que $LM \parallel AC$, y $ON \parallel AC$. Por lo cual, $LM \parallel ON$. De igual manera, haciendo referencia a los triángulos Δ*ABD* y Δ*BCD*, hallamos que $NM \parallel OL$. Esto prueba que □*LMNO* es un paralelogramo. Del mismo Teorema 4.3.10, hallamos que

$$|LM| = \frac{|AC|}{2},\ |ON| = \frac{|AC|}{2},\ |LO| = \frac{|BD|}{2} \text{ y } |MN| = \frac{|BD|}{2}. \clubsuit$$

5.1.19. Teorema. Sea □*ABCD* un cuadrilátero. Si *L*, *M*, *N*, *O*, *P* y *Q* son lo puntos medios de *AB*, *BC*, *CD*, *DA*, *AC* y *BD*, respectivamente, entonces □*LQNP* y □*MPOQ* son paralelogramos.

Prueba: Basta con considerar el cuadrilátero □*LQNP*. En los triángulos Δ*BDA* y Δ*CDA*, por el Teorema del Segmento Medio (4.3.10), sabemos que $QL \parallel DA$, y $NP \parallel DA$. Por ello, $QL \parallel NP$. Con un argumento similar aplicado a los triángulos Δ*ABC* y Δ*DBC*, hallamos que $PL \parallel NQ$. Por lo cual, tenemos que □*LPNQ* es un paralelogramo. De manera muy similar, se prueba que □*MPOQ* es un paralelogramo. ♣

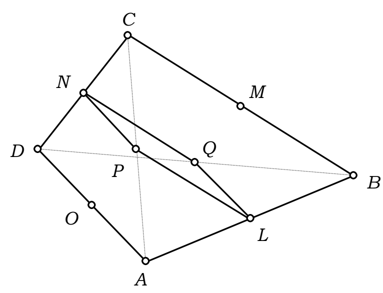
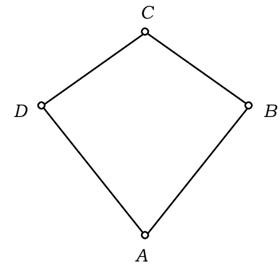


Figura 5.17

5.2. Papalotes

5.2.1. Definición. Un cuadrilátero se llama *papalote* si tiene dos pares de lados adyacentes congruentes cuyos vértices comunes sean opuestos.



$AB \cong DA$ y $BC \cong CD$

Figura 5.18

5.2.2. Teorema. Si $\square ABCD$ es un papalote con $AB \cong AD$, y $BC \cong CD$, entonces sus diagonales son perpendiculares.

Prueba: Basemos nuestros argumentos en la siguiente figura:

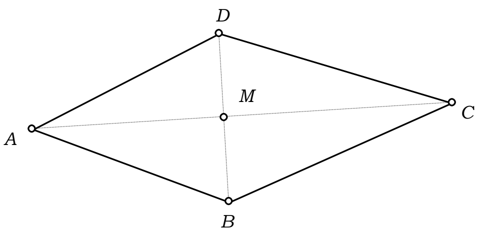


Figura 5.19

Tenemos que ΔABD y ΔCDB son triángulos isósceles con BD como lado común. Sea M el punto medio de BD. De acuerdo con el Teorema 4.3.1, $AM \perp BD$, y $MC \perp BD$. De aquí se sigue que los puntos A, M y C son colineales. Lo cual implica que M es el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero y $AC \perp BD$. ♣

El recíproco del teorema anterior no se cumple en general. Para testificar esto veamos la siguiente figura:

Tenemos que $\square ABCD$ es un cuadrilátero cuyas diagonales son perpendiculares y ninguno de sus lados es congruente con uno de los otros tres.

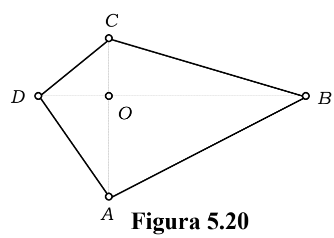


Figura 5.20

5.2.3. Teorema. Para un cuadrilátero $\square ABCD$, las siguientes condiciones son equivalentes.

1. $\square ABCD$ es un papalote con $AB \cong AD$ y $BC \cong DC$.
2. $AC \perp BD$ y AC corta a BD en su punto medio.

Prueba: 1 $\Rightarrow$ 2. Del Teorema 5.2.2 se sigue que $AC \perp BD$. Por hipótesis, sabemos que ΔABD y ΔCDB son triángulos isósceles. Entonces, por el Teorema 4.3.1, hallamos que AC y BD se cortan en su punto medio.

2 $\Rightarrow$ 1. Como $AC \perp BD$ y AC corta a BD en su punto medio, por el Teorema de la Mediatriz (4.2.2), los puntos A y C pertenecen a la mediatriz de BD. Por lo tanto, $AB \cong AD$ y $BC \cong DC$. ♣

5.3. Paralelogramos

Empezamos con enunciar algunas propiedades que caracterizan a los paralelogramos.

5.3.1. Teorema. Para un cuadrilátero $\square ABCD$, las siguientes condiciones son equivalentes:
1. $\square ABCD$ es un paralelogramo.
2. Los lados opuestos de $\square ABCD$ son congruentes.
3. Los ángulos opuestos de $\square ABCD$ son congruentes.
4. Cada par de ángulos adyacentes de $\square ABCD$ son suplementarios.
5. Las diagonales de $\square ABCD$ se cortan en su punto medio.

Prueba: La equivalencia $1 \Leftrightarrow 2$ es precisamente el Teorema 3.4.10.

$2 \Rightarrow 3$. Supongamos que se cumplen las congruencias $AB \cong DC$ y $AD \cong BC$. Según el tercer criterio de congruencia (3.2.12), hallamos que $\Delta CAB \cong \Delta ACD$. Por ello,

$\angle B = \angle CBA \cong \angle ADC = \angle D$, $\angle DCA \cong \angle BAC$ y $\angle CAD \cong \angle ACB$.

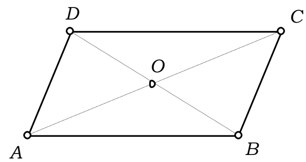


Figura 5.21

De acuerdo con el Teorema de Adición de Ángulos (2.8.1),

$$\angle A = \angle BAD = \angle BAC + \angle CAD \cong \angle DCA + \angle ACB = \angle DCB = \angle C.$$

$3 \Rightarrow 4$. Supongamos que $\angle A \cong \angle C$ y $\angle B \cong \angle D$. De aquí y por el Teorema 5.1.13, tenemos que

$$m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) + m(\angle D) = 2m(\angle A) + 2m(\angle B) = 2m(\angle C) + 2m(\angle D) = 2m(\angle A) + 2m(\angle D) = 2m(\angle C) + 2m(\angle B) = 360.$$

En consecuencia,

$$m(\angle A) + m(\angle B) = m(\angle C) + m(\angle D) = m(\angle A) + m(\angle D) = m(\angle C) + m(\angle B) = 180.$$

Por lo tanto, $\angle A$ y $\angle B$, $\angle C$ y $\angle D$, $\angle A$ y $\angle D$, y $\angle C$ y $\angle B$ son pares de ángulos suplementarios.

$4 \Rightarrow 1$. Aplicamos directamente el Teorema 3.4.7.

$1 \Rightarrow 5$. Sea O el punto de intersección de las diagonales AC y BD del paralelogramo $\square ABCD$. Por el Teorema 3.4.4, obtenemos que $\angle DBA \cong \angle BDC$ y $\angle BAC \cong \angle DCA$. Por la segunda cláusula, sabemos que $AB \cong DC$. De acuerdo con el criterio 3.2.7, hallamos que $\Delta OAB \cong \Delta OCD$. En particular, tenemos que $OA \cong OC$ y $OB \cong OD$, lo cual significa que O es el punto medio de ambos AC y BD.

$5 \Rightarrow 1$. Supongamos que $OA \cong OC$ y $OB \cong OD$. Sabemos que $\angle AOB \cong \angle COD$, por ser ángulos opuestos por el vértice O (2.10.2). De acuerdo con el criterio 3.2.6, vemos que $\Delta OAB \cong \Delta OCD$. De aquí se deduce la congruencia $\angle DBA \cong \angle BDC$, y como estos ángulos son alternos internos, por el Teorema 3.4.4, obtenemos que $AB \parallel CD$. De manera muy similar, se prueba que $AD \parallel BC$. Por lo tanto, $\square ABCD$ es un paralelogramo. ♣

En el siguiente ejemplo, veremos que en el tercer inciso del teorema anterior es necesario considerar los dos pares de ángulos opuestos.

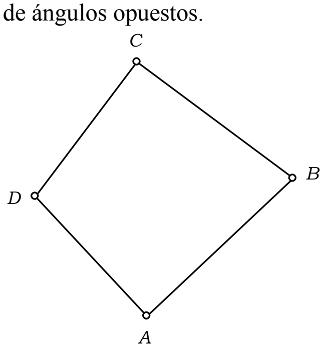


Figura 5.22

En la figura 5.22, tenemos un cuadrilátero con dos ángulos opuestos congruentes y que no es un paralelogramo.

En dicho cuadrilátero $\square ABCD$, se cumple que $\angle A$ y $\angle C$ son ángulos rectos, $m(\angle B) = 80$ y $m(\angle D) = 100$.

Jugando con los enunciados del Teorema 5.3.1, Ch. Toumasis [a-168] observó que en algunos casos es posible obtener caracterizaciones de paralelogramos y exhibió ejemplos mostrando que en algunos otros casos no es posible.

5.3.2. Teorema. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero. Consideremos los siguientes enunciados:

1. a. Un par de lados opuestos de $\square ABCD$ son congruentes y paralelos.
   b. Un par de lados opuestos de $\square ABCD$ son congruentes y el otro par de lados opuestos son paralelos.
2. Un par de lados opuestos de $\square ABCD$ son paralelos y un par de ángulos opuestos son congruentes.
3. Un par de lados opuestos de $\square ABCD$ son paralelos y sus diagonales se cortan en el punto medio de una de ellas.
4. Un par de lados opuestos de $\square ABCD$ son congruentes y un par de ángulos opuestos son congruentes.
5. Un par de lados opuestos de $\square ABCD$ son congruentes y sus diagonales se cortan en el punto medio de una de ellas.
6. a. Un par de ángulos opuestos de $\square ABCD$ son congruentes y la diagonal que une los vértices de estos ángulos corta a la otra diagonal en su punto medio.
   b. Un par de ángulos opuestos de $\square ABCD$ son congruentes y la diagonal que une los vértices de estos ángulos es bisecada por la otra diagonal.

Entonces, las condiciones 1.a, 2, 3, y 6.a garantizan que $\square ABCD$ es un paralelogramo y las condiciones 1.b, 4, 5 y 6.b no son suficientes para ello.

Prueba: 1.a. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero tal que $AB \parallel DC$ y $AB \cong DC$, y sea O el punto de intersección de sus diagonales. Según el Teorema 3.4.4, tenemos que $\angle DCO \cong \angle BAO$ y $\angle ODC \cong \angle OBA$. Pero como $AB \cong DC$, en virtud del segundo criterio de congruencia (3.2.7), $\Delta OAB \cong \Delta OCD$. De aquí hallamos que $OA \cong OC$ y $OB \cong OD$. Aplicando el quinto inciso del Teorema 5.2.1, concluimos que $\square ABCD$ es un paralelogramo.

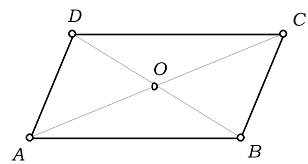


Figura 5.23

1. b. Esta afirmación es falsa, pues basta considerar un trapecio con sus dos lados no paralelos congruentes.

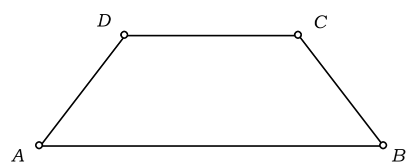


Figura 5.24

2. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero tal que $AB \parallel DC$ y $\angle B \cong \angle D$. Basemos nuestro razonamiento en la figura 5.23. Ya que $\angle DCA$ y $\angle BAC$ son alternos internos y $AB \parallel DC$, por el Teorema 3.4.4, $\angle DCA \cong \angle BAC$. De acuerdo con el Corolario 4.3.6, hallamos que $\angle CAD \cong \angle ACB$. Según el Teorema 2.8.1, $\angle A = \angle CAD + \angle BAC \cong \angle ACB + \angle DCA = \angle C$. Entonces, por el Teorema 5.3.1, concluimos que $\square ABCD$ es un paralelogramo.

3. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero tal que $AB \parallel DC$ y sea O el punto de intersección de las diagonales. Sin perder generalidad, supongamos que $AO \cong OC$. De acuerdo con los Teoremas 3.4.4 y 2.10.2, nos damos cuenta de que los triángulos ΔOAB y ΔOCD tienen sus ángulos correspondientes congruentes. Según el criterio 3.2.7, obtenemos que $\Delta OAB \cong \Delta OCD$. Por consiguiente, $AB \cong DC$. Nuestra conclusión se sigue del inciso 1.a.

4. Antes de dar un ejemplo, analizaremos las propiedades de un cuadrilátero que cumpla con las condiciones del cuarto inciso. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero tal que $AD \cong BC$ y $\angle A \cong \angle C$. Según el Teorema 3.2.13, se debe cumplir que $\Delta ABD \cong \Delta CDB$, o $\angle DBA$ y $\angle BDC$ son suplementarios. Si $\Delta ABD \cong \Delta CDB$, por el Teorema 5.3.1, tenemos entonces que $\square ABCD$ es un paralelogramo. Si $\square ABCD$ no es un paralelogramo, entonces $\angle DBA$ y $\angle BDC$ son suplementarios y, sin perder generalidad, el ángulo $\angle A$ resulta ser agudo. Estas observaciones nos permiten construir nuestro ejemplo:

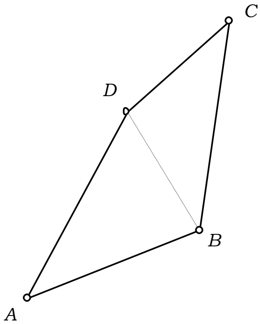


Figura 5.25

En este cuadrilátero se tiene que $AD \cong BC$, $m(\angle A) = m(\angle C) = 40$, $m(\angle DBA) = 80$ y $m(\angle BDC) = 100$.

5. Sean $\square ABCD$ un paralelogramo y O el punto de intersección de sus diagonales. Sobre DO tomemos un punto E tal que $AD \cong AE$. El cuadrilátero $\square ABCE$ no es un paralelogramo, ya que $OE < OB$, pero cumple que $AE \cong BC$ y sus diagonales se cortan en el punto medio de una de ellas.

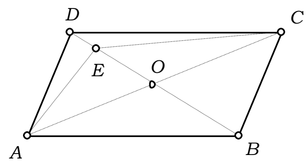


Figura 5.26

6.a. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero tal que $\angle A \cong \angle C$ y $DO \cong OB$. Supongamos que AO y OC no son congruentes. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $AO < OC$. Sea $E \in OC$ tal que $AO \cong OE$. Como las diagonales del cuadrilátero $\square ABED$ se cortan en su punto medio, el Teorema 5.3.1 nos asegura que $\square ABED$ es un paralelogramo y, como consecuencia de esto, $\angle A \cong \angle DEB$. Por otra parte, sabemos por el Teorema 4.4.1 que

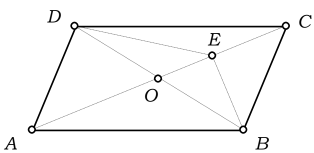


Figura 5.27

$$\angle DCA < \angle DEA \text{ y } \angle ACB < \angle AEB.$$

Según el Teorema 2.9.4 y el Axioma AT,

$$m(\angle DEB) = m(\angle DEA) + m(\angle AEB) > m(\angle DCA) + m(\angle ACB) = m(\angle DCB).$$

$$\angle A \cong \angle DEB > \angle DCB = \angle C,$$

pero esto contradice nuestra suposición. Por lo tanto, $\square ABCD$ es un paralelogramo.

6.b. Para dar el ejemplo consideremos un rombo $\square ABCD$:

Fijemos un punto $E \in OC - \{O,C\}$. En el cuadrilátero $\square ABED$ se cumple que $\angle EDA \cong \angle EBA$; sus diagonales EA y DB se cortan en el punto medio de DB y no es un paralelogramo. ♣

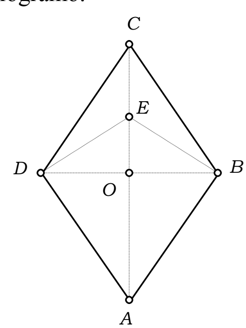


Figura 5.28

5.3.3. Teorema. Si $\square ABCD$ es un paralelogramo, entonces $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ y $\Delta ABD \cong \Delta CDB$.

Prueba: Es suficiente con probar la primera congruencia. De acuerdo con el Teorema 5.3.1, sabemos que $AB \cong CD$ y $BC \cong DA$. Según el tercer criterio de congruencia (3.2.12), hallamos que $\Delta ABC \cong \Delta CDA$. ♣

El siguiente resultado es una consecuencia directa de los Teoremas 3.4.10 y 3.7.1.

5.3.4. Teorema. En todo paralelogramo $\square ABCD$ se tiene que

$$h_1 \cong h_3 \cong h_6 \cong h_8 \text{ y } h_2 \cong h_4 \cong h_5 \cong h_7,$$

en donde h_1 es la altura del vértice A con respecto al lado BC, h_2 es la altura del vértice A con respecto al lado DC, h_3 es la altura del vértice B con respecto al lado DA, h_4 es la altura del vértice B con respecto al lado DC, h_5 es la altura del vértice C con respecto al lado AB, h_6 es la altura del vértice C con respecto al lado DA, h_7 es la altura del vértice D con respecto al lado AB y h_8 es la altura del vértice D con respecto al lado BC.

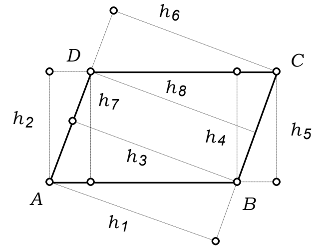


Figura 5.29

A continuación, presentamos una bonita caracterización de los paralelogramos ideada por H. Okumura [a-120].

5.3.5. Teorema (H. Okumura). Un cuadrilátero $\square ABCD$ es un paralelogramo si y solo si

$$\frac{m(\angle CAD)}{m(\angle BAC)} = \frac{m(\angle ACB)}{m(\angle DCA)} \text{ y } \frac{m(\angle DBA)}{m(\angle CBD)} = \frac{m(\angle BDC)}{m(\angle ADB)}.$$

Prueba: Necesidad. Sea $\square ABCD$ un paralelogramo. Puesto que $AB \parallel DC$ y $AD \parallel BC$, con base en el Teorema 3.4.4, se cumplen las congruencias $\angle CAD \cong \angle ACB$, $\angle BAC \cong \angle DCA$, $\angle DBA \cong \angle BDC$ y $\angle CBD \cong \angle ADB$. En consecuencia,

$$\frac{m(\angle CAD)}{m(\angle BAC)} = \frac{m(\angle ACB)}{m(\angle DCA)} \text{ y } \frac{m(\angle DBA)}{m(\angle CBD)} = \frac{m(\angle BDC)}{m(\angle ADB)}.$$

Suficiencia. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero tal que

$$\frac{m(\angle CAD)}{m(\angle BAC)} = \frac{m(\angle ACB)}{m(\angle DCA)} \text{ y } \frac{m(\angle DBA)}{m(\angle CBD)} = \frac{m(\angle BDC)}{m(\angle ADB)}.$$

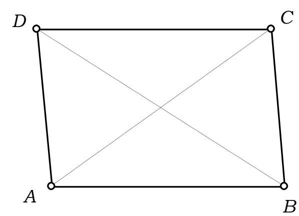


Figura 5.30

Pongamos $x = \dfrac{m(\angle CAD)}{m(\angle BAC)} = \dfrac{m(\angle ACB)}{m(\angle DCA)}$ y $y = \dfrac{m(\angle DBA)}{m(\angle CBD)} = \dfrac{m(\angle BDC)}{m(\angle ADB)}$. Entonces, tenemos que

$$m(\angle CAD) = xm(\angle BAC),\ m(\angle ACB) = xm(\angle DCA),\ m(\angle DBA) = ym(\angle CBD) \text{ y } m(\angle BDC) = ym(\angle ADB).$$

Del Teorema 4.3.4 podemos ver que

$$m(\angle ACB) + m(\angle CBD) = m(\angle ADB) + m(\angle CAD) \text{ y } m(\angle BDC) + m(\angle DCA) = m(\angle BAC) + m(\angle DBA).$$

Sustituyendo hallamos que

$$xm(\angle DCA) + m(\angle CBD) = m(\angle ADB) + xm(\angle BAC) \text{ y } ym(\angle ADB) + m(\angle DCA) = m(\angle BAC) + ym(\angle CBD).$$

Por consiguiente,

$$m(\angle CBD) - m(\angle ADB) = x(m(\angle BAC) - m(\angle DCA)) = xy(m(\angle ADB) - m(\angle CBD))$$

$$(1 + xy)(m(\angle CBD) - m(\angle ADB)) = 0.$$

Lo cual implica que $m(\angle CBD) = m(\angle ADB)$. Por esta identidad y la segunda de nuestra hipótesis, encontramos que $m(\angle DBA) = m(\angle BDC)$. El Teorema 2.5.7 nos asegura que $\angle CBD \cong \angle ADB$ y $\angle DBA \cong \angle BDC$. Por el Teorema 3.4.4, obtenemos que $AB \parallel DC$ y $AD \parallel BC$, lo cual significa que $\square ABCD$ es un paralelogramo. ♣

5.4. Rombos

5.4.1. Teorema. Sea $\square ABCD$ un paralelogramo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\square ABCD$ es un rombo.
2. Las diagonales de $\square ABCD$ son perpendiculares.
3. Una de las diagonales de $\square ABCD$ biseca a los ángulos cuyos vértices son los puntos extremos de la misma.

Prueba: $1 \Rightarrow 2$. Supongamos que $\square ABCD$ es un rombo.

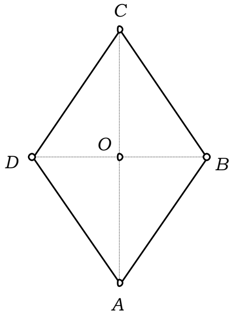


Figura 5.31

Por hipótesis, sabemos que $AB \cong BC \cong CD \cong DA$. Lo cual quiere decir que los triángulos ΔCDB, ΔDAB, ΔBCA y ΔDAC son isósceles. Por el criterio de congruencia *LLL* (3.2.12), hallamos que $\Delta BCA \cong \Delta DAC$. De donde se sigue que $\angle DCA \cong \angle ACB$. Es decir, $\overrightarrow{CA}$ es la bisectriz del ángulo $\angle DCB$ del triángulo isósceles ΔCDB. En virtud del Teorema 4.3.1, $\overrightarrow{CA}$ resulta ser perpendicular al segmento DB.

$2 \Rightarrow 3$. Del Teorema 5.3.1 sabemos que las diagonales AC y BD se cortan en su punto medio O. Por el tercer criterio de congruencia de triángulos rectángulos (3.6.4), hallamos $\Delta CDO \cong \Delta CBO \cong \Delta ADO \cong \Delta ABO$. En particular, tenemos que $\angle BDC \cong \angle ADB$ y $\angle CBD \cong \angle DBA$. Lo cual quiere decir que la diagonal DB biseca a los ángulos $\angle ADC = \angle D$ y $\angle CBA = \angle B$.

$3 \Rightarrow 1$.Supongamos que la diagonal DB biseca a los ángulos $\angle ADC$ y $\angle CBA$. Por nuestra hipótesis y el Teorema 5.3.1, sabemos que $\angle ADC = \angle D \cong \angle B = \angle CBA$, lo cual implica que $\angle BDC \cong \angle CBD$. Por ello, con base en el Teorema 3.2.9, ΔCDB es un triángulo isósceles. Así que, $CD \cong CB$. Por ser $\square ABCD$ un paralelogramo, del Teorema 5.3.1 vemos que $AB \cong CD$ y $CB \cong DA$. Por lo tanto, $AB \cong CB \cong CD \cong DA$. ♣

Podemos observar del teorema anterior que en un rombo sus diagonales son las bisectrices de sus ángulos.

5.4.2. Corolario. Un paralelogramo es un rombo si una de sus diagonales biseca a uno de sus ángulos.

Prueba: Sea $\square ABCD$ un paralelogramo tal que $\overrightarrow{AC}$ es la bisectriz del ángulo $\angle A$. Del Teorema 3.4.4, podemos deducir que $\overrightarrow{CA}$ es la bisectriz del ángulo $\angle C$. De acuerdo con el Teorema 5.4.1, concluimos que $\square ABCD$ es un rombo. ♣

Hay cuadriláteros que tienen sus diagonales perpendiculares y congruentes, pero no son paralelogramos:

En este ejemplo las diagonales son perpendiculares y congruentes, pero el cuadrilátero no es ni siquiera un paralelogramo. Con este ejemplo, mostramos que en el Teorema 5.4.1 (2) es necesario que el cuadrilátero en cuestión sea un paralelogramo.

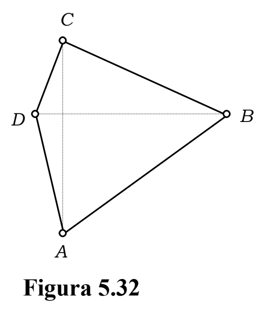


Figura 5.32

La caracterización de rombos que a continuación presentamos es de H. Okumura [a-120] y es muy similar a la que él mismo dio para los paralelogramos (Teorema 5.3.5).

5.4.3. Teorema(H. Okumura). Un cuadrilátero $\square ABCD$ es un rombo si y solo si

$$\frac{m(\angle CAD)}{m(\angle BAC)} = \frac{m(\angle ACB)}{m(\angle DCA)} = \frac{m(\angle DBA)}{m(\angle CBD)} = \frac{m(\angle BDC)}{m(\angle ADB)}.$$

Prueba: Necesidad. Supongamos que $\square ABCD$ un rombo. De acuerdo con el Teorema 5.3.5, sabemos que

$$\frac{m(\angle CAD)}{m(\angle BAC)} = \frac{m(\angle ACB)}{m(\angle DCA)} \text{ y } \frac{m(\angle DBA)}{m(\angle CBD)} = \frac{m(\angle BDC)}{m(\angle ADB)}.$$

El Teorema 5.4.1 nos asegura que las diagonales del rombo son las bisectrices de sus ángulos. En particular, tenemos que

$$\angle ACB \cong \angle DCA \text{ y } \angle DBA \cong \angle CBD,$$

y de aquí vemos que

$$\frac{m(\angle ACB)}{m(\angle DCA)} = \frac{m(\angle DBA)}{m(\angle CBD)} = 1.$$

Por lo tanto,

$$\frac{m(\angle CAD)}{m(\angle BAC)} = \frac{m(\angle ACB)}{m(\angle DCA)} = \frac{m(\angle DBA)}{m(\angle CBD)} = \frac{m(\angle BDC)}{m(\angle ADB)}.$$

Suficiencia. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero en el cual se cumple que

$$x = \frac{m(\angle CAD)}{m(\angle BAC)} = \frac{m(\angle ACB)}{m(\angle DCA)} = \frac{m(\angle DBA)}{m(\angle CBD)} = \frac{m(\angle BDC)}{m(\angle ADB)}.$$

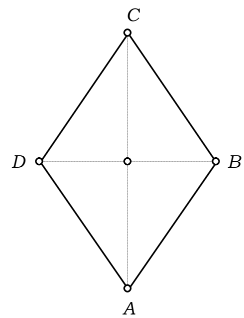


Figura 5.33

Del Teorema 5.3.5 sabemos que $\square ABCD$ tiene que ser un paralelogramo. Si $AB < BC$, por el Teorema 4.4.2 aplicado al triángulo ΔBCA, hallamos que $\angle ACB < \angle BAC \cong \angle DCA$ y entonces $x < 1$. Pero ya que $DC < BC$, según el Teorema 4.4.2, $\angle ADB \cong \angle CBD < \angle BDC \cong \angle DBA$ y como consecuencia de esto vemos que $x > 1$, lo cual es una contradicción. Por consiguiente, debemos tener que $BC \leq AB$. De manera similar, establecemos la desigualdad $AB \leq BC$. Por lo tanto, $AB \cong BC$. Así queda probado que $\square ABCD$ es un rombo. ♣

5.5. Rectángulos y cuadrados

5.5.1. Teorema. Un cuadrilátero es un rectángulo si y solo si sus cuatro ángulos son rectos.

Prueba: La necesidad del teorema se sigue de los Teoremas 5.3.1, 2.6.3 y 2.7.11.

Suficiencia. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero con todos sus ángulos rectos. Entonces, $\angle A$ y $\angle B$, y $\angle B$ y $\angle C$ son dos pares de ángulos suplementarios. De acuerdo con el Teorema 3.4.7, encontramos que $AD \parallel BC$ y $AB \parallel CD$. Lo cual significa que $\square ABCD$ es un paralelogramo y, por tanto, un rectángulo. ♣

Figura 5.34

5.5.2. Teorema. Un paralelogramo es un rectángulo si y solo si sus diagonales son congruentes.

Prueba: *Necesidad*. Supongamos que $\square ABCD$ es un rectángulo. Por el teorema anterior, sabemos que todos los ángulos de $\square ABCD$ son rectos. Por ello, ΔDAB y ΔCBA son triángulos rectángulos con ángulos rectos $\angle A$ y $\angle B$, respectivamente. Del Teorema 5.3.1, hallamos que $AD \cong BC$. Así, por el criterio 3.6.4, $\Delta DAB \cong \Delta CBA$. Por consiguiente, $AC \cong BD$.

Suficiencia. Sea $\square ABCD$ un paralelogramo en el cual $AC \cong BD$. Por el Teorema 5.3.1, tenemos que $AD \cong BC$. El criterio 3.2.12 nos asegura que $\Delta DAB \cong \Delta CBA$. Como una consecuencia de esto, $\angle A \cong \angle B$. Sabemos, por el Teorema 5.3.1, que $\angle A$ y $\angle B$ son suplementarios. Del Teorema 2.7.11 concluimos que los ángulos $\angle A$ y $\angle B$ son ambos rectos. Por lo tanto, $\square ABCD$ es un rectángulo. ♣

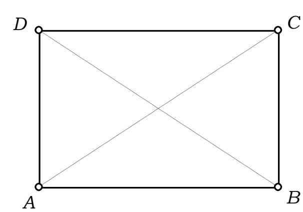


Figura 5.35

5.5.3. Corolario. Un paralelogramo es un cuadrado si sus diagonales son congruentes y una de ellas biseca a uno de los ángulos del paralelogramo.

Prueba: Sea $\square ABCD$ un paralelogramo que satisfaga todas las condiciones. De acuerdo con el Corolario 5.4.2, sabemos que $\square ABCD$ es un rombo. El Teorema 5.5.2 implica que $\square ABCD$ es un rectángulo y, por lo tanto, $\square ABCD$ es un cuadrado. ♣

5.5.4. Corolario. En todo rectángulo, el punto de intersección de sus diagonales equidista de sus cuatro vértices.

Prueba: Supongamos que $\square ABCD$ es un rectángulo. De acuerdo con el Teorema 5.3.1, las diagonales AC y BD se cortan en su punto medio O. Según el Teorema 5.5.2, $AC \cong BD$. Entonces, tenemos que

$$|AC| = 2|AO| = 2|BO| = |BD|$$
$$|AO| = |BO|.$$

De manera similar se establece la igualdad $|OC| = |OD|$. Como $AO \cong OC$, se sigue que

$$|AO| = |BD| = |OC| = |OD|. \text{ ♣}$$

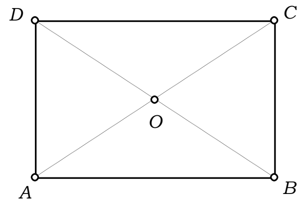


Figura 5.36

5.5.5. Teorema. Si las diagonales de un rectángulo son perpendiculares, entonces es un cuadrado.

Prueba: Sea $\square ABCD$ un rectángulo en el cual $AC \perp BD$. Sea O el punto de intersección de AC y BD. De acuerdo con el Corolario 5.5.4, tenemos que $OA \cong OB \cong OC \cong OD$. Consideremos los triángulos isósceles ΔOAB y ΔOBC. Como $AC \perp BD$, se sigue que $\angle AOB$ y $\angle BOC$ son ángulos rectos. Por ello, ΔOAB y ΔOBC son triángulos rectángulos cuyos catetos son congruentes. Del criterio 3.6.4 hallamos que $\Delta OAB \cong \Delta OBC$. De donde se sigue que $AB \cong BC$. Por lo tanto, $\square ABCD$ es un cuadrado. ♣

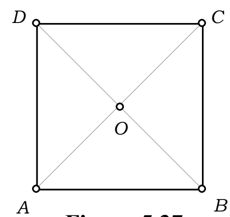


Figura 5.37

5.5.6. Teorema. Las bisectrices de los ángulos de un paralelogramo forman un rectángulo cuyas diagonales son paralelas a los lados del paralelogramo y la longitud de una de ellas es igual a la diferencia de las longitudes de dos lados adyacentes del mismo paralelogramo.

Prueba: Sea $\square ABCD$ un paralelogramo. Sean L el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos $\angle C$ y $\angle D$, M el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos $\angle C$ y $\angle B$, N el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos $\angle A$ y $\angle B$, y O el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos $\angle D$ y $\angle A$. Todas las posibles posiciones de los puntos L, M, N y O con respecto al paralelogramo son las siguientes:

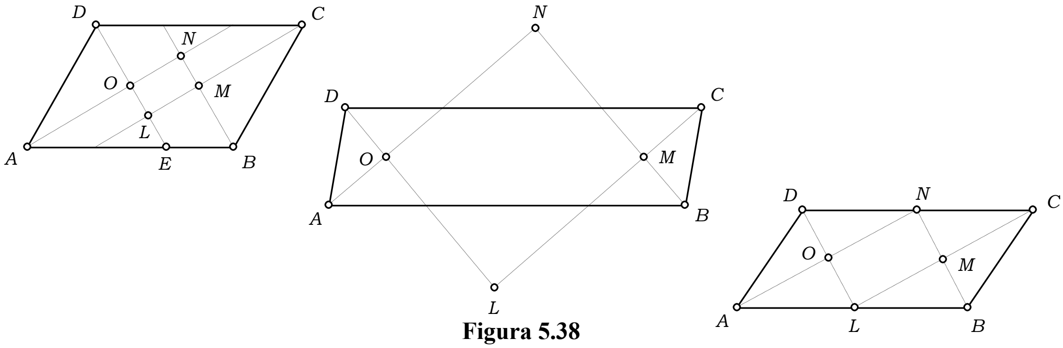


Figura 5.38

Sabemos, por el Teorema 5.3.1, que los ángulos adyacentes de $\square ABCD$ son suplementarios y sus ángulos opuestos son congruentes. Por consiguiente,

$$180 = m(\angle A) + m(\angle D) = m(\angle BAN) + m(\angle NAD) + m(\angle ADL) + m(\angle LDC) =$$
$$2m(\angle NAD) + 2m(\angle ADL) = 2m(\angle BAN) + 2m(\angle NBA)$$
$$m(\angle NAD) + m(\angle ADL) = m(\angle BAN) + m(\angle NBA) = 90.$$

Por lo cual, $\angle NAD$ y $\angle ADL$, y $\angle BAN$ y $\angle NBA$ son dos pares de ángulos complementarios. Del Teorema 4.3.4 deducimos que ΔODA y ΔNAB son triángulos rectángulos con ángulos rectos $\angle O$ y $\angle N$, respectivamente. Con un argumento similar se prueba que los ángulos $\angle M$ y $\angle L$ también son rectos. Así hemos probado que $\square LMNO$ es un rectángulo. Para establecer la segunda afirmación, bastará con considerar el caso cuando los puntos L, M, N y O estén en el interior del paralelogramo. Sea E el punto de intersección de la bisectriz del ángulo $\angle D$ y AB. De acuerdo con el Teorema 3.4.4, $\angle EDC \cong \angle DEA$ y, por consiguiente, $\angle DEA \cong \angle ADE$. Entonces, por el Teorema 3.2.9, el triángulo ΔAED es isósceles con $AD \cong AE$. Como $\angle DEA \cong \angle MBA$, por el Teorema 3.4.6, hallamos que $EO \parallel BM$. Por otra parte, sabemos que $BC \cong AE$, $\angle EAO \cong \angle MCB$ y $\angle OEA \cong \angle CBM$. Entonces, según el criterio 3.6.3, $\Delta OAE \cong \Delta MCB$. De aquí se obtiene que $EO \cong BM$. El Teorema 5.3.2 (1.a) nos garantiza que $\square EBMO$ es un paralelogramo y, por lo tanto, $OM \parallel AB$ y $OM \cong EB$ (5.3.1). Como resultado de todo esto, obtenemos que

$$|OM| = |EB| = |AB| - |AE| = |AB| - |AD|.$$

De la misma manera, se prueba que $LN \parallel BC$. ♣

También las bisectrices de los ángulos exteriores de un paralelogramo forman un cuadrado (Problema 5.179).

Es claro que las bisectrices de los ángulos de un cuadrado son concurrentes. Con base en esto formulamos el siguiente teorema.

5.5.7. Teorema. Las bisectrices de un rectángulo que no es un cuadrado forman un cuadrado cuyas diagonales son paralelas a los lados del rectángulo y la longitud de cada una de ellas es igual a la diferencia de las longitudes de dos lados adyacentes del rectángulo.

Prueba: Sea $\square LMNO$ el rectángulo formado por las bisectrices de un rectángulo $\square ABCD$ que no es un cuadrado. De acuerdo con el Teorema 5.5.6, sabemos que las diagonales de $\square LMNO$ son paralelas a los lados de $\square ABCD$, pero como este último es un rectángulo, se sigue que las diagonales de $\square LMNO$ son perpendiculares. Según el Teorema 5.5.5, concluimos que $\square LMNO$ es un cuadrado. ♣

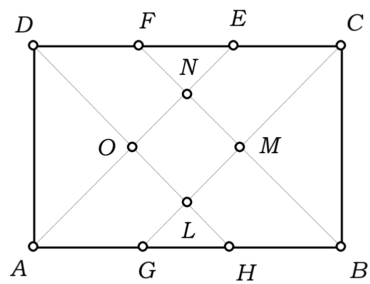


Figura 5.39

Sabemos que las bisectrices de los ángulos de un cuadrado coinciden con sus diagonales y, por tanto, se cortan en un solo punto. En el siguiente ejemplo, damos un cuadrilátero que no es un paralelogramo y en el cual las bisectrices de sus cuatro ángulos se intersecan en un solo punto.

El cuadrilátero $\square ABCD$ no es un paralelogramo, $\overrightarrow{AO}$ es la bisectriz del ángulo $\angle A$, $\overrightarrow{BO}$ es la bisectriz del ángulo $\angle B$, $\overrightarrow{CO}$ es la bisectriz del ángulo $\angle C$ y $\overrightarrow{DO}$ es la bisectriz del ángulo $\angle D$.

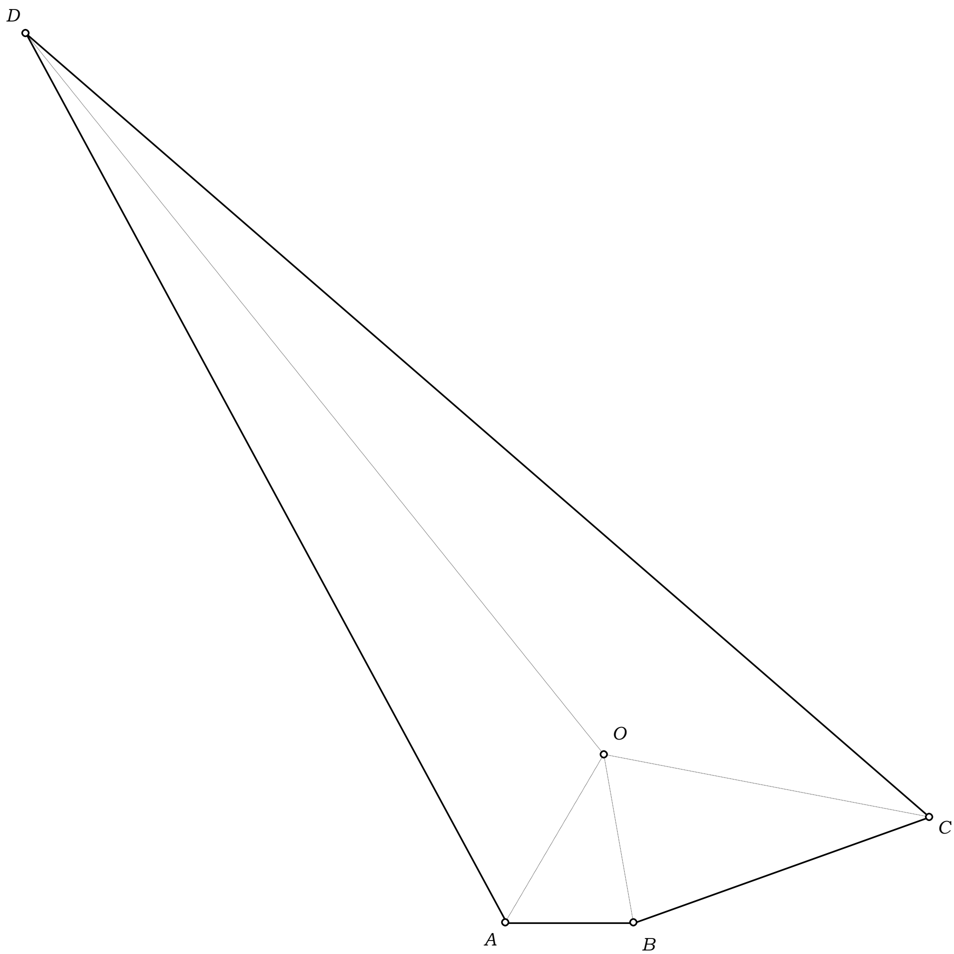


Figura 5.40

5.6. Trapecios

Del Teorema 5.3.2 (1.a) y de la definición podemos ver que los lados paralelos de un trapecio no pueden ser congruentes. Nuestro primer resultado concerniente a trapecios es una consecuencia inmediata de los Teoremas 3.4.7 y 3.4.8.

5.6.1. Teorema. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $AB \parallel CD$.
2. $\angle A$ y $\angle D$ son suplementarios.
3. $\angle B$ y $\angle C$ son suplementarios.

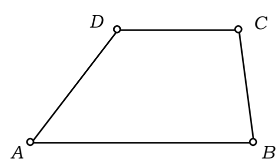


Figura 5.41

5.6.2. Teorema. En todo trapecio, las alturas correspondientes a los lados paralelos son congruentes.

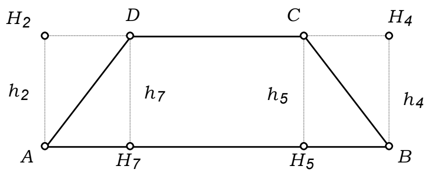


Figura 5.42

Prueba: Sea $\square ABCD$ un trapecio tal que $AB \parallel CD$. Basamos nuestros argumentos en la figura 5.42. Sean H_2, H_4, H_5 y H_7 las proyecciones de los vértices A, B, C y D sobre las rectas $\overleftrightarrow{DC}$ y $\overleftrightarrow{AB}$, respectivamente. Por definición, $h_2 = AH_2$, $h_4 = BH_4$, $h_5 = CH_5$ y $h_7 = DH_7$ son las alturas correspondientes a los lados paralelos AB y DC. Como $h_2 \perp \overleftrightarrow{AB}$, $h_4 \perp \overleftrightarrow{AB}$, $h_5 \perp \overleftrightarrow{AB}$ y $h_7 \perp \overleftrightarrow{AB}$, por el Teorema 3.7.1, hallamos que las cuatro alturas h_2, h_4, h_5 y h_7 son paralelas entre sí. La conclusión final se sigue del Teorema 3.4.10. ♣

5.6.3. Teorema del Segmento Medio del Trapecio. Sea $\square ABCD$ un trapecio con $AB \parallel CD$. Si M y N son los puntos medios de BC y AD, respectivamente, entonces:

1. $MN \parallel AB$ y $MN \parallel CD$,
2. $|MN| = \dfrac{|AB|+|DC|}{2}$ y
3. si $E \in AB$ y $F \in CD$, entonces MN corta a EF en su punto medio.

Prueba: Consideremos la diagonal AC y el punto de intersección O de esta diagonal y MN. Por el Teorema 4.3.11, sabemos que O resulta ser el punto medio de AC. De acuerdo con el Teorema 4.3.10 aplicado a los triángulos ΔCAB y ΔACD, vemos que

$$OM \parallel AB,\ |OM| = \frac{|AB|}{2},\ NO \parallel DC \text{ y } |NO| = \frac{|DC|}{2}.$$

Por ello, $MN \parallel AB$, $MN \parallel DC$ y

$$|MN| = |NO| + |OM| = \frac{|AB|}{2} + \frac{|DC|}{2} = \frac{|AB|+|DC|}{2}.$$

Con esto, quedan demostrados los dos primeros incisos.

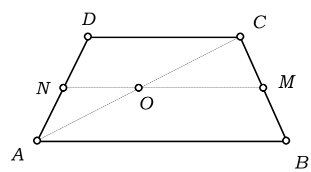


Figura 5.43

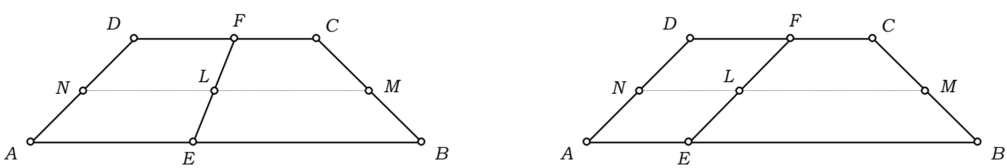


Figura 5.44

3. Tenemos que $\square EBCF$ es un paralelogramo, o bien, un trapecio. Lo mismo pasa con el cuadrilátero $\square AEFD$. Sea L el punto medio de EF. Observemos que los dos primeros incisos valen también para paralelogramos. Por lo cual, $LM \parallel AB$ y $NL \parallel AB$. El Axioma de las Rectas Paralelas nos dice que $\overleftrightarrow{NL} = \overleftrightarrow{LM}$. De aquí se sigue que $L \in \overleftrightarrow{NL} = \overleftrightarrow{MN}$. Así probamos que MN corta a EF en su punto medio. ♣

5.6.4. Teorema. Sean $\square ABCD$ un trapecio tal que $AB \parallel DC$ y $DC < AB$, y M y N los puntos medios de los lados BC y AD, respectivamente. Entonces, las diagonales del trapecio dividen al segmento MN en tres segmentos, dos de los cuales son congruentes y tienen longitud igual a $\frac{|DC|}{2}$ y la longitud del restante es igual a $\frac{|AB|-|DC|}{2}$.

Prueba: Sean $\square ABCD$ un trapecio y O y P los puntos de intersección de las diagonales AC y BD con MN, respectivamente. Por el Teorema 4.3.10, sabemos que $NO \cong PM$ y $|PM| = \frac{|DC|}{2}$. Por ello,

$$|NM| = |NO| + |OP| + |PM| = |OP| + 2\frac{|DC|}{2} = |OP| + |DC|.$$

De donde hallamos que

$$|OP| = |NM| - |DC| = \frac{|AB|+|DC|}{2} - |DC| = \frac{|AB|-|DC|}{2}. \clubsuit$$

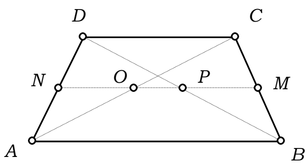
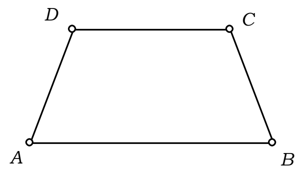


Figura 5.45

5.6.5. Definición. Un trapecio se llama *isósceles* si sus dos lados no paralelos son congruentes.



$BC \cong AD$
Figura 5.46

El siguiente teorema lista algunas propiedades que caracterizan a los trapecios isósceles.

5.6.6. Teorema. Sea $\square ABCD$ un trapecio con $AB \parallel DC$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:
1. $\square ABCD$ es isósceles con $AD \cong BC$.
2. $\angle A \cong \angle B$.
3. $\angle D \cong \angle C$.
4. La recta que une los puntos medios de AB y CD es perpendicular a AB.
5. $AC \cong BD$.

Prueba: Sin perder generalidad, supongamos que $DC < AB$. Sea P el punto de intersección de las rectas $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{AD}$.

$1 \Rightarrow 2$. Por hipótesis, tenemos que $AD \cong BC$. Tracemos una recta paralela a AD que pase por el punto C y corte a AB en el punto Q. Del Teorema 3.4.10 hallamos que $AD \cong QC$. Por consiguiente, el triángulo ΔCQB es isósceles, pues $QC \cong BC$. De acuerdo con el Teorema 3.2.9, tenemos que $\angle BQC \cong \angle B$. Por otro lado, según el Teorema 3.4.6 sabemos que $\angle A \cong \angle BQC$. Por lo tanto, $\angle A \cong \angle B$.

$2 \Rightarrow 1$. Supongamos que $\angle A \cong \angle B$. Del Teorema 3.2.9 se sigue que ΔPAB es un triángulo isósceles, en el cual $PA \cong PB$. Según el Teorema 3.4.6, $\angle A \cong \angle CDP$ y $\angle B \cong \angle PCD$. De donde hallamos que $\angle CDP \cong \angle PCD$. Esto y el Teorema 3.2.9 implican que $PD \cong PC$. Aplicando el Teorema 1.7.1, concluimos que $AD \cong BC$.

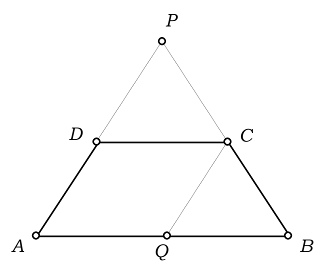


Figura 5.47

La equivalencia $1 \Leftrightarrow 3$ se establece de manera análoga.

$2 \Rightarrow 4$. De nuestra suposición se sigue que ΔPAB es un triángulo isósceles con $PA \cong PB$. Por el Teorema 4.3.1, sabemos que $\overleftrightarrow{PM} \perp AB$, en donde M es el punto medio de AB. De la hipótesis también podemos deducir que ΔPDC es un triángulo isósceles con $PD \cong PC$ (esto se hizo en la demostración de $2 \Rightarrow 1$). De aquí obtenemos que $\overleftrightarrow{PN} \perp DC$, en donde N es el punto medio de DC. Pero como $AB \parallel DC$, por el Teorema 3.7.2, $\overleftrightarrow{PN} \perp AB$. La unicidad del Teorema 3.7.3 nos asegura que $\overleftrightarrow{PN} = \overleftrightarrow{PM}$ y, por consiguiente, $\overleftrightarrow{MN} \perp AB$.

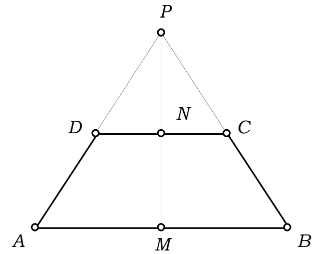


Figura 5.48

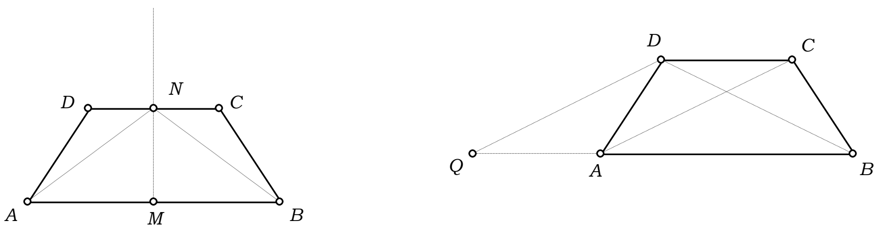


Figura 5.49

$4 \Rightarrow 1$. Sean M y N los puntos medios de AB y DC, respectivamente, y supongamos que $\overleftrightarrow{MN} \perp AB$. Según el Teorema 3.7.2, $\overleftrightarrow{MN} \perp DC$. Lo cual quiere decir que $\overleftrightarrow{MN}$ es la mediatriz de los segmentos AB y DC. En consecuencia, $AN \cong BN$. Por otra parte, el criterio 3.6.5 nos asegura que $\Delta NAM \cong \Delta NBM$. De donde obtenemos la congruencia $\angle ANM \cong \angle MNB$. De acuerdo con el Teorema 2.7.5, $\angle DNA \cong \angle BNC$. Adicional a esto, en los triángulos ΔDAN y ΔCBN se cumple que $DN \cong NC$ y $AN \cong BN$. Del criterio 3.2.6 vemos que $\Delta DAN \cong \Delta CBN$. Por lo tanto, $AD \cong BC$.

$1 \Rightarrow 5$. Supongamos que $AD \cong BC$. Ya que el segundo inciso también se cumple, sabemos que $\angle A \cong \angle B$. Así, por el criterio de congruencia 3.2.6, se cumple la congruencia $\Delta DAB \cong \Delta CAB$. En consecuencia, $AC \cong BD$.

$5 \Rightarrow 1$. Supongamos que $AC \cong BD$. Basamos nuestros razonamientos en el diagrama derecho de la figura 5.49. Tracemos una recta paralela a AC que pase por el punto D y corte a $\overleftrightarrow{AB}$ en el punto Q. Tenemos entonces que $\square QACD$ es un paralelogramo. De acuerdo con el Teorema 5.3.1, $QD \cong AC$. Así tenemos que el triángulo ΔDQB es isósceles con $QD \cong BD$. En consecuencia, por el Teorema 3.2.9, $\angle AQD \cong \angle DBA$. Por otro lado, según el Teorema 3.4.6, tenemos que $\angle AQD \cong \angle BAC$. En consecuencia, $\angle BAC \cong \angle DBA$. De acuerdo con el primer criterio de congruencia de triángulos (3.2.6), $\Delta CAB \cong \Delta DAB$. Por lo tanto, $AD \cong BC$. ♣

5.6.7. Definición. Un trapecio se llama *rectangular* si uno de sus ángulos es recto.

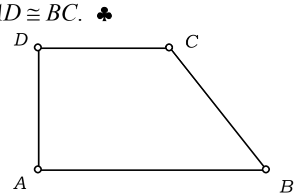


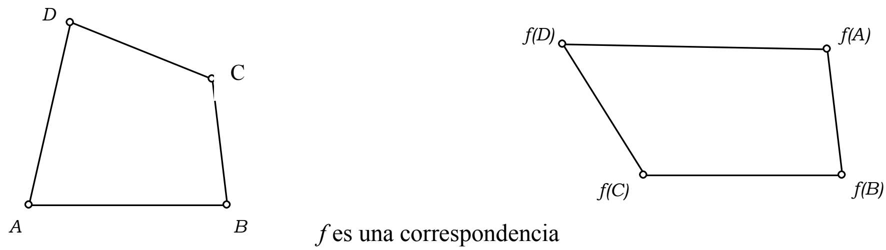
Figura 5.50

5.6.8. Teorema. Todo trapecio rectangular tiene dos ángulos rectos.

Prueba: El resultado es una consecuencia inmediata de los Teoremas 2.6.3, 2.7.11 y 5.6.1. ♣

5.7. Congruencia de cuadriláteros

Una *correspondencia* entre los vértices de dos cuadriláteros $\square ABCD$ y $\square PQRS$ es una biyección f entre los vértices de $\square ABCD$ y los vértices de $\square PQRS$, de tal forma que $f(A)f(B)$, $f(B)f(C)$, $f(C)f(D)$ y $f(D)f(A)$ son los lados del cuadrilátero $\square PQRS$. Para ilustrar esta noción, veamos los siguientes ejemplos:



f es una correspondencia

Figura 5.51

f no es una correspondencia

Figura 5.52

En este último ejemplo, $f(A)f(B)$ y $f(C)f(D)$ son las diagonales del segundo cuadrilátero y, según lo convenido, esta biyección no puede ser una correspondencia entre los vértices de ambos cuadriláteros.

5.7.1. Definición. Si hay una correspondencia entre los vértices de un cuadrilátero $\square ABCD$ y los vértices de un segundo cuadrilátero $\square PQRS$, entonces escribimos $A \to f(A)$, $B \to f(B)$, $C \to f(C)$ y $D \to f(D)$ y decimos que:

al lado AB le corresponde el lado $f(A)f(B)$,
al lado BC le corresponde el lado $f(B)f(C)$,
al lado CD le corresponde el lado $f(C)f(D)$,
al lado DA le corresponde el lado $f(D)\,f(A)$,
al ángulo $\angle A$ le corresponde el ángulo $\angle f(A)$,
al ángulo $\angle B$ le corresponde el ángulo $\angle f(B)$,
al ángulo $\angle C$ le corresponde el ángulo $\angle f(C)$ y
al ángulo $\angle D$ le corresponde el ángulo $\angle f(D)$.

5.7.2. Definición. Decimos que dos cuadriláteros son *congruentes* si existe una correspondencia entre sus vértices, de tal manera que los lados correspondientes y los ángulos correspondientes sean congruentes. La congruencia entre dos cuadriláteros $\square ABCD$ y $\square A'B'C'D'$ será denotada por $\square ABCD \cong \square A'B'C'D'$.

En general, se entenderá que al escribir $\square ABCD \cong \square A'B'C'D'$ la correspondencia implícita está dada por $A \to A'$, $B \to B'$, $C \to C'$ y $D \to D'$, pero cuando escribamos $\square ABCD \cong \square LMNO$ tendremos que fijarnos muy bien en el contexto para describir la correspondencia. Las propiedades básicas de la congruencia de cuadriláteros quedan determinadas por el siguiente Axioma:

***CC**: Sean $\square ABCD$, $\square A'B'C'D'$* y *$\square A''B''C''D''$* tres cuadriláteros.
1.(Reflexiva) $\square ABCD \cong \square ABCD$.
2.(Simétrica) Si $\square ABCD \cong \square A'B'C'D'$, *entonces* $\square A'B'C'D' \cong \square ABCD$.
3.(Transitiva) Si se cumplen las dos congruencia*s* $\square ABCD \cong \square A'B'C'D'$ y $\square A'B'C'D' \cong \square A''B''C''D''$, entonces $\square ABCD \cong \square A''B''C''D''$.

La congruencia entre dos cuadriláteros se puede reducir a la congruencia de triángulos de la siguiente manera:

5.7.3. Teorema. Sean $\square ABCD$ y $\square A'B'C'D'$ dos cuadriláteros. Las siguientes condiciones son equivalentes:
1. $\square ABCD \cong \square A'B'C'D'$.
2. $\Delta BCA \cong \Delta B'C'A'$ y $\Delta DAC \cong \Delta D'A'C'$.
3. $\Delta ABD \cong \Delta A'B'D'$ y $\Delta CDB \cong \Delta C'D'B'$.

Prueba: Basta con probar la equivalencia entre los dos primeros enunciados.
$1 \Rightarrow 2$. Si $\square ABCD \cong \square A'B'C'D'$, entonces tenemos que $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$ y $\angle B \cong \angle B$. Por el primer criterio de congruencia de triángulos (3.2.6), hallamos que $\Delta BCA \cong \Delta B'C'A'$. Análogamente, se establece la congruencia $\Delta DAC \cong \Delta D'A'C'$.
$2 \Rightarrow 1$. Supongamos que $\Delta BCA \cong \Delta B'C'A'$ y $\Delta DAC \cong \Delta D'A'C'$. De la primera congruencia deducimos que $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$, $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$ y $\angle B \cong \angle B'$, y de la segunda congruencia se obtienen las congruencias $DA \cong D'A'$, $DC \cong D'C'$, $\angle CAD \cong \angle C'A'D'$, $\angle DCA \cong \angle D'C'A'$ y $\angle D \cong \angle D'$. Según el Teorema 2.8.1, $\angle A = \angle BAC + \angle CAD \cong \angle B'A'C' + \angle C'A'D' = \angle A'$ y $\angle C = \angle ACB' + \angle DCA \cong \angle A'C'B' + \angle D'C'A' = \angle C'$. Por lo tanto, $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$, $DC \cong D'C'$, $DA \cong D'A'$, $\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$, $\angle C \cong \angle C'$ y $\angle D \cong \angle D'$. Lo cual significa que $\square ABCD \cong \square A'B'C'D'$. ♣

5.7.4. Corolario. Si $\square ABCD \cong \square A'B'C'D'$, entonces $AC \cong A'C'$ y $BD \cong B'D'$.

El recíproco del corolario anterior no es cierto: los cuadriláteros de la figura de abajo no son congruentes, pero sus diagonales son congruentes.

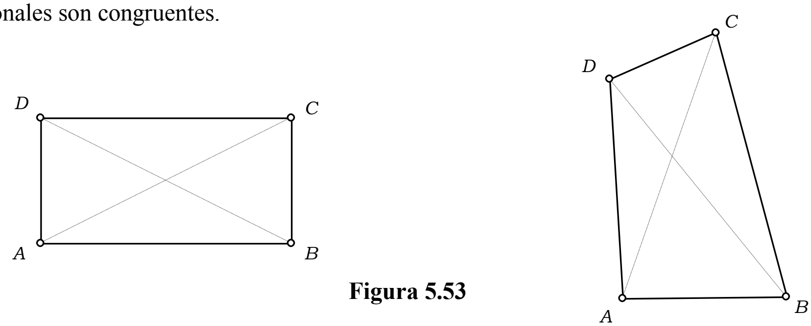


Figura 5.53

Es claro que para establecer la congruencia entre dos cuadriláteros en general, no será suficiente analizar la congruencia entre tres de sus ocho partes principales (como en el caso de los triángulos). Comparar cuatro partes de un cuadrilátero con sus correspondientes partes de otro cuadrilátero tampoco garantiza la congruencia de ambos cuadriláteros. A continuación, veremos algunos ejemplos para todos los casos posibles que involucran cuatro partes:

1. *LLLL*: significa los cuatro lados.

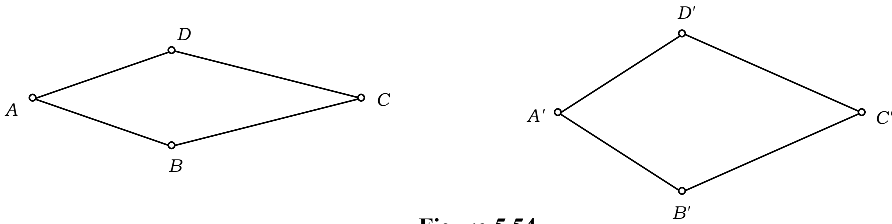


Figura 5.54

Estos dos cuadriláteros tienen sus lados correspondientes congruentes, pero el ángulo $\angle A$ del primero no es congruente con ningún ángulo del segundo.

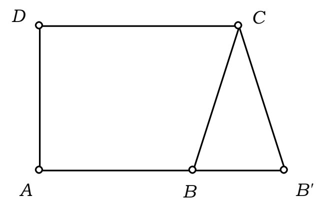


Figura 5.55

2. *ALLL* = *LLLA*: significa tres lados y un ángulo no comprendido entre estos tres lados. En este ejemplo, tenemos que $\angle BAD$, AD, DC son partes comunes de los cuadriláteros $\square ABCD$, y $\square AB'CD$ y $CB \cong CB'$, pero claramente los cuadriláteros no son congruentes.

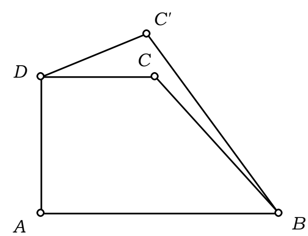


Figura 5.56

3. *LALL* = *LLAL*: significa tres lados y un ángulo comprendido entre un par de estos lados. En la figura de la derecha, los cuadriláteros $\square ABCD$ y $\square ABC'D$ no son congruentes, pero AB, $\angle BAD$, AD son partes comunes de ambos y $DC \cong DC'$.

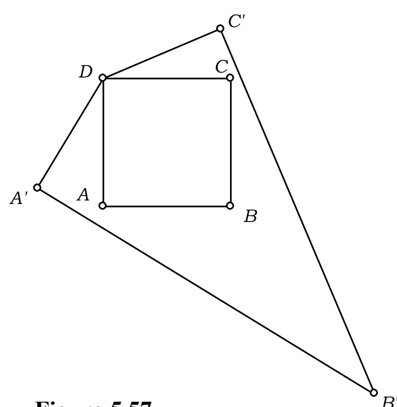


Figura 5.57

4. *ALLA*: significa dos lados que comparten un vértice y dos ángulos sin lado común, ninguno de los cuales está comprendido entre los dos lados. En nuestro ejemplo, tenemos que $\square ABCD$ es un cuadrado, $DA \cong DA' \cong DC \cong DC'$, y los ángulos $\angle B'A'D$ y $\angle DC'B'$ son rectos. Pero obviamente los cuadriláteros $\square ABCD$ y $\square A'B'C'D$ no son congruentes.

5. ***AALL = LLAA***: significa dos lados con un vértice en común y dos ángulos con un lado común no comprendidos entre estos dos lados. Claramente los cuadriláteros $\square ABCD$ y $\square AB'CD$ no son congruentes, pero $CB \cong CB'$, comparten los ángulos $\angle BAD$ y $\angle ADC$ y el lado DC.

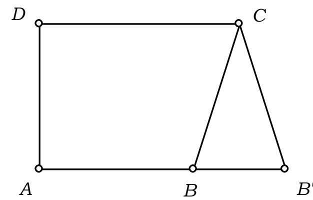


Figura 5.58

6. ***LAAL***: significa dos lados sin vértice en común y dos ángulos con un lado en común. Los cuadriláteros $\square ABCD$ y $\square A'B'CD$ son rectángulos no congruentes con $AB \cong DC \cong A'B'$.

Figura 5.59

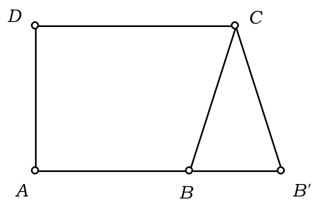


Figura 5.60

7. ***ALAL = LALA***: significa dos lados y dos ángulos con uno de los lados considerados en común. Los ángulos $\angle BAD$ y $\angle ADC$, y los lados AD y DC son comunes a los cuadriláteros $\square ABCD$ y $\square AB'CD$, los cuales no son congruentes.

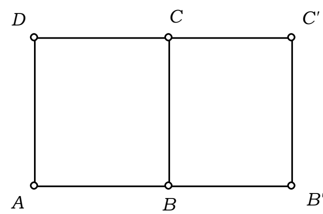


Figura 5.61

8. ***AAAL = LAAA***: significa tres ángulos y un lado que pertenezca a sólo uno de los ángulos. Los cuadriláteros $\square ABCD$ y $\square AB'C'D$ son dos rectángulos que no son congruentes. Sin embargo, $BC \cong B'C'$.

Figura 5.62

9. ***AALA = ALAA***: significa tres ángulos y un lado común a un par de estos ángulos. Los rectángulos $\square ABCD$ y $\square A'B'CD$ no son congruentes, pero tenemos que $AB \cong A'B'$.

10. ***AAAA***: significa los cuatro ángulos. Los cuadriláteros $\square ABCD$ y $\square AB'C'D$ son dos rectángulos no congruentes.

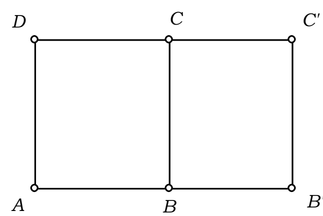


Figura 5.63

Con estos ejemplos se puede uno convencer que para establecer un criterio general de congruencia para cuadriláteros es necesario tomar en cuenta al menos cinco las ocho partes (cuatro lados y cuatro ángulos) que determinan un cuadrilátero. Analicemos ahora uno a uno de los diferentes casos, usando cinco partes de cada uno de los dos cuadriláteros en cuestión, para ver en cuáles circunstancias sí se puede formular algún criterio de congruencia y en cuales no es posible. Detallemos primero el significado de nuestra notación:

1. ***ALLLL = LALLL = LLALL = LLLAL = LLLLA***: significa los cuatro lados y un ángulo cualquiera.

2. ***AALLL = LAALL = LLAAL = LLLAA = ALLLA***: significa tres lados y dos ángulos, ninguno de los cuales está comprendido entre un par de los tres lados.

3. ***ALALL = LLALA***: significa tres lados y dos ángulos uno de los cuales está comprendido entre un par de los tres lados, y los dos ángulos comparten un lado.

4. ***ALLAL = LALLA***: significa tres lados y dos ángulos, uno de los cuales está comprendido entre un par de los tres lados, y los dos ángulos no tienen un lado en común.

5. ***LALAL***: significa tres lados y los dos ángulos comprendidos entre los tres lados.

Del Teorema 5.1.13 sabemos que dos cuadriláteros con tres ángulos correspondientes congruentes tienen el cuarto ángulo correspondiente congruente. Hay que tener esto muy en cuenta para los siguientes dos criterios.

6. ***LAAAL = LLAAA = ALLAA = AALLA = AAALL = LALAA = AALAL = ALALA***: significa tres ángulos y dos lados adyacentes.

7. ***LAALA = ALAAL***: significa tres ángulos y dos lados opuestos.

8. ***AAAAL = AAALA = AALAA = ALAAA = LAAAA***: significa los cuatro ángulos y un lado.

Veamos que el primer caso sí nos da un criterio de congruencia para cuadriláteros.

5.7.5. Primer Criterio de Congruencia de Cuadriláteros (*ALLLL*). Si los cuatro lados y un ángulo de un cuadrilátero son congruentes a sus correspondientes cuatro lados y ángulo de otro cuadrilátero, entonces ambos cuadriláteros son congruentes.

Prueba: Supongamos que los cuadriláteros $\square ABCD$ y $\square A'B'C'D'$ cumplen que $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$, $CD \cong C'D'$, $DA \cong D'A'$ y $\angle A \cong \angle A'$.

Figura 5.64

Consideremos los triángulos ΔADB y $\Delta A'D'B'$. Por el primer criterio de congruencia de triángulos (3.2.6), se tiene que $\Delta ABD \cong \Delta A'B'D'$. Por ello, $BD \cong B'D'$. Ahora, si aplicamos el criterio de congruencia 3.2.12 a los triángulos ΔBCD y $\Delta B'C'D'$, hallamos que $\Delta BCD \cong \Delta B'C'D'$. En particular, se cumple que $\angle C \cong \angle C'$. De las dos congruencias de triángulos vemos que

$$\angle DBA \cong \angle D'B'A',\ \angle ADB \cong \angle A'D'B',\ \angle CBD \cong \angle C'B'D' \text{ y } \angle BDC \cong \angle B'D'C'.$$

Según el Teorema 2.8.1,

$$\angle B = \angle DBA + \angle CBD \cong \angle D'B'A' + \angle C'B'D' = \angle B' \text{ y } \angle D = \angle ADB + \angle BDC \cong \angle A'D'B' + \angle B'D'C' = \angle D'.$$

Por lo tanto, $\square ABCD \cong \square A'B'C'D'$. ♣

Los siguientes ejemplos nos aseguran que los casos segundo, tercero y cuarto no garantizan la congruencia de los dos cuadriláteros en cuestión.

5.7.6. Ejemplo. El criterio ***AALLL*** no garantiza la congruencia de dos cuadriláteros: en la figura de la derecha, los cuadriláteros $\square ABCD$ y $\square AB'C'D$ cumplen que $\angle CBA \cong \angle C'B'A$, $\angle A$ es un ángulo común a ambos cuadriláteros, AD es un lado común, $DC \cong DC'$ y $BC \cong B'C'$, pero no son congruentes. ♣

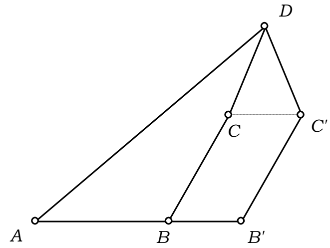


Figura 5.65

5.7.7. Ejemplo. El criterio ***ALALL*** tampoco garantiza la congruencia de dos cuadriláteros. Por ejemplo, los cuadriláteros $\square ABCD$ y $\square ABCD'$ satisfacen que el ángulo $\angle BAD$, el lado AB, el ángulo $\angle CBA$ y el lado BC son comunes a ambos cuadriláteros y además $DC \cong DC'$, pero es claro que dichos cuadriláteros no pueden ser congruentes. ♣

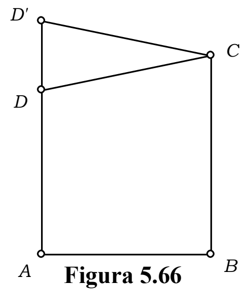


Figura 5.66

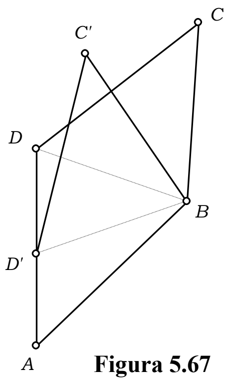


Figura 5.67

5.7.8. Ejemplo. Veamos un ejemplo para mostrar que el criterio ***ALLAL*** no implica la congruencia de dos cuadriláteros: los cuadriláteros $\square ABCD$ y $\square ABC'D'$ tienen como partes comunes al ángulo $\angle BAD$ y al lado AB, y también se cumple que $BC \cong B'C'$, $\angle DCB \cong \angle D'C'B'$ y $DC \cong D'C'$, pero no son congruentes. ♣

El quinto caso nos da nuestro segundo criterio de congruencia para cuadriláteros.

5.7.9. Segundo Criterio de Congruencia de Cuadriláteros (*LALAL*). Si tres lados y dos ángulos comprendidos entre estos lados de un cuadrilátero son congruentes a sus correspondientes tres lados y dos ángulos comprendidos entre estos lados de otro cuadrilátero, entonces los cuadriláteros son congruentes.

Prueba: Sean $\square ABCD$ y $\square A'B'C'D'$ dos cuadriláteros tales que $AB \cong A'B'$, $\angle B \cong \angle B'$, $BC \cong B'C'$, $\angle C \cong \angle C'$ y $CD \cong C'D'$.

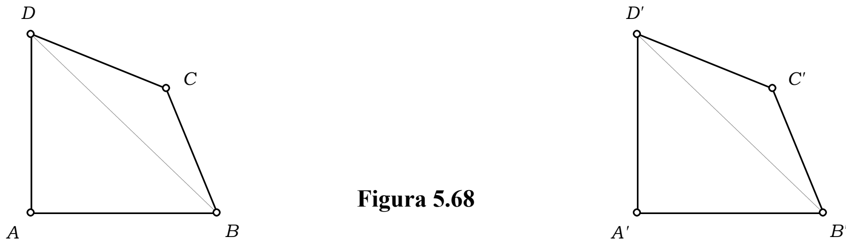


Figura 5.68

Primero consideremos los triángulos ΔBCD y $\Delta B'C'D'$. De acuerdo con el criterio 3.2.6, $\Delta BCD \cong \Delta B'C'D'$. Por ello, sabemos que $BD \cong B'D'$ y $\angle CBD \cong \angle C'B'D'$. Lo cual implica que

$$\angle DBA = \angle B - \angle CBD \cong \angle B' - \angle C'B'D' = \angle D'B'A'$$

(esto es una consecuencia del Teorema 2.8.2). Aplicando de nueva cuenta el criterio de congruencia para triángulos 3.2.6 a los triángulos ΔABD y $\Delta A'B'D'$, obtenemos que $\Delta ABD \cong \Delta A'B'D'$. Por consiguiente, $AD \cong A'D'$. Del primer criterio de congruencia de cuadriláteros (5.7.5) concluimos que los cuadriláteros $\square ABCD$ y $\square A'B'C'D'$ son congruentes. ♣

Para establecer el tercer criterio de congruencia, nos basaremos en el sexto criterio.

5.7.10. Tercer Criterio de Congruencia de Cuadriláteros (*LLAAA*). Si tres ángulos y dos lados adyacentes de un cuadrilátero son congruentes a sus correspondientes tres ángulos y dos lados adyacentes de otro cuadrilátero, entonces los cuadriláteros son congruentes.

Prueba: Supongamos que $\square ABCD$ y $\square A'B'C'D'$ son dos cuadriláteros tales que $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$, $\angle C \cong \angle C'$, $\angle D \cong \angle D'$ y $\angle A \cong \angle A'$.

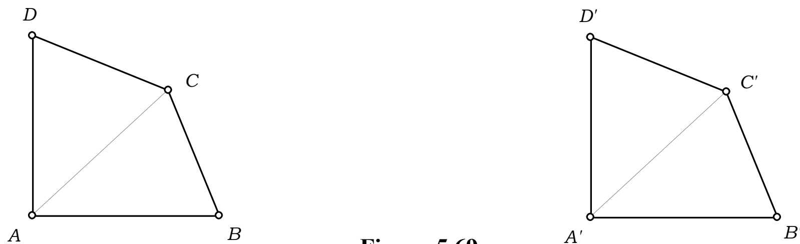


Figura 5.69

Del Teorema 5.1.13 deducimos que $\angle B \cong \angle B'$. Según el criterio 3.2.6, obtenemos que $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ y, por tanto, $AC \cong A'C'$, $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ y $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$. Usando estas identidades y basándonos en el Teorema 2.8.2, encontramos que

$$\angle CAD = \angle A - \angle BAC \cong \angle A' - \angle B'A'C' = \angle C'A'D' \text{ y } \angle DCA = \angle C - \angle ACB \cong \angle C' - \angle A'C'B' = \angle D'C'A'.$$

Otra vez, por el primer criterio de congruencia 3.2.6, hallamos que $\Delta ACD \cong \Delta A'C'D'$. Por lo cual, $AD \cong A'D'$ y $DC \cong D'C'$. Esto prueba que $\square ABCD \cong \square A'B'C'D'$. ♣

5.7.11. Ejemplo. El ejemplo de la figura 5.70 muestra que el criterio ***LAALA*** tampoco asegura la congruencia entre dos cuadriláteros:

En los cuadriláteros $\square ABCD$ y $\square A'B'CD$, sus cuatro ángulos son rectos, comparten el lado DC y $AB \cong A'B'$. Claramente, estos dos cuadriláteros no pueden ser congruentes. ♣

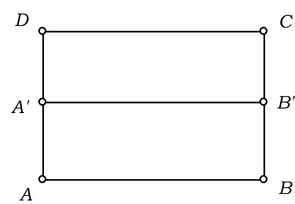


Figura 5.70

En el artículo [a-80], se discute ampliamente el criterio ***ALALA*** para cuadriláteros, y el autor da una bonita aplicación de este criterio a una demostración por disección del Teorema de Pitágoras.

5.7.12. Ejemplo. En los rectángulos de la derecha $\square ABCD$ y $\square ABC'D'$, se tiene que $AD \cong BC \cong B'C'$. Evidentemente, estos dos rectángulos no son congruentes. Esto muestra que el criterio ***AAAAL*** tampoco garantiza la congruencia de dos cuadriláteros. ♣

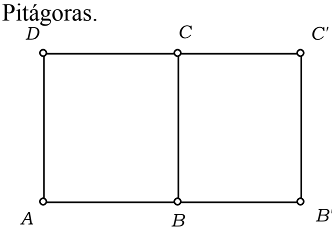


Figura 5.71

5.8. Algoritmo de la División de Euclides

El Algoritmo de la División (también conocido como Algoritmo de Euclides) nos da el procedimiento para encontrar el máximo común divisor de dos números enteros positivos (el lector puede encontrar información sobre el algoritmo de Euclides en cualquier libro de Teoría de Números, por ejemplo [l-79]). Veamos qué nos dice dicho algoritmo:

Sean p_1 y p_2 dos número enteros positivos. Sin perder generalidad, podemos suponer que $p_1 \leq p_2$. Tenemos entonces que

$$p_1 = q_2\, p_2 + p_3, \quad \text{en donde } 0 < p_3 < p_2$$
$$p_2 = q_3\, p_3 + p_4, \quad \text{en donde } 0 < p_4 < p_3$$
$$p_3 = q_4\, p_4 + p_5, \quad \text{en donde } 0 < p_5 < p_4$$

...
...
...
...
...
...
...

$$p_{k-2} = q_{k-1}\, p_{k-1} + p_k, \quad \text{en donde } 0 < p_k < p_{k-1}$$
$$p_{k-1} = q_k\, p_k.$$

Al final de este proceso, obtenemos el máximo común divisor p_k de los números dados p_1 y p_2.

Ilustremos el Algoritmo de la División con un ejemplo concreto:

Pongamos $p_1 = 54$ y $p_2 = 15$. Entonces,

$$54 = (3)(15) + 9$$
$$15 = (1)(9) + 6$$
$$9 = (1)(6) + 3$$
$$6 = (2)(3).$$

Por consiguiente, el máximo común divisor de 54 y 15 es 3. En este ejemplo tenemos que

$$p_3 = 9,\ p_4 = 6,\ p_5 = 3,\ q_2 = 3,\ q_3 = 1,\ q_4 = 1 \text{ y } q_5 = 2.$$

Ahora interpretemos este procedimiento de Euclides de manera geométrica, tal y como lo hizo I. Cook en su artículo [a-31]:

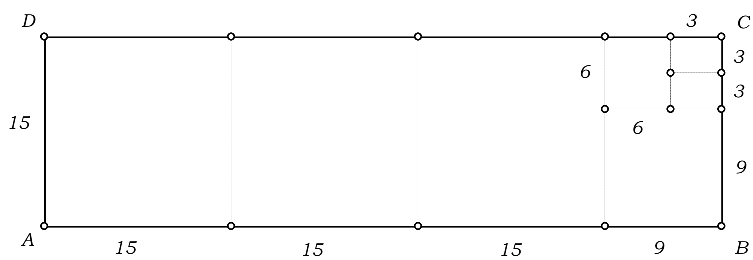


Figura 5.72

Si □*ABCD* es un rectángulo tal que $|AB| = 54$ y $|BC| = 15$, entonces □*ABCD* se puede dividir en 3 cuadrados de lado 15, 1 cuadrado de lado 9, 1 cuadrado de lado 6 y 2 cuadrados de lado 3. Esta interpretación establece la conexión entre el Algoritmo de la División y la división de un rectángulo en cuadrados (a lo que también se le conoce como poner azulejos sobre una superficie rectangular). Así, el algoritmo nos da también un procedimiento para dividir un rectángulo cuyos lados tienen longitud entera en cuadrados. El método general es el siguiente:

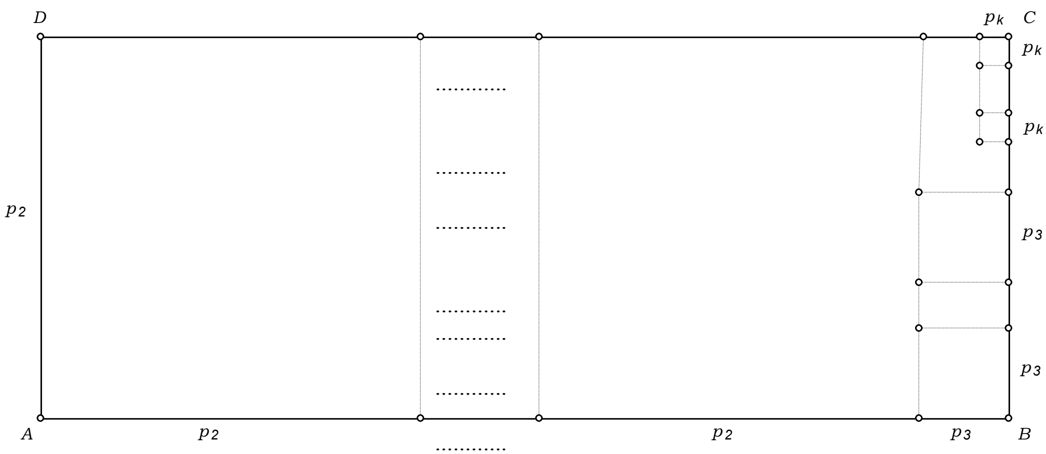


Figura 5.73

En esta figura, □*ABCD* es un rectángulo cuyos lados son números enteros positivos $|AB| = p_1$ y $|BC| = p_2$. Consideremos los números naturales positivos $p_3, ..., p_{k-1}$ y p_k, y $q_2, ..., q_{k-1}$, y q_k que se obtienen al aplicar el Algoritmo de la División a los números p_1 y p_2. Empezamos nuestra división trazando q_2 cuadrados de lado p_2 y así sucesivamente hasta que el rectángulo original □*ABCD* quede dividido en q_i cuadrados de lado p_i, para cada número entero $i = 2,..., k$. De esta observación podemos formular el siguiente teorema cuya prueba se deduce de la figura 5.73.

5.8.1. Teorema (I. Cook). Si □*ABCD* es un cuadrado cuyos lados son números enteros positivos p_1 y p_2, entonces

$$p_1\, p_2 = \sum_{i=2}^{k} q_i p_i^2 ,$$

en donde los números enteros positivos $p_3, ..., p_{k-1}$ y p_k, y $q_2, ..., q_{k-1}$ y q_k se obtienen mediante la aplicación del Algoritmo de Euclides a los números p_1 y p_2.

En el ejemplo de la figura 5.72 tenemos que

$$(54)(15) = (3)(15)^2 + (1)(9)^2 + (1)(6)^2 + (2)(3)^2 .$$

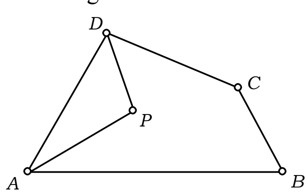
Problemas

5.1. Probar que un conjunto convexo contiene al punto medio de los segmentos que unen dos de sus puntos.
5.2. Si un conjunto de puntos del plano contiene el punto medio de cada segmento que une a dos de sus puntos, ¿es el conjunto convexo?
5.3. Encontrar una familia de conjuntos no convexos del plano cuya unión sea un conjunto convexo.
5.4. Dados dos puntos A y B, probar que el segmento AB es igual a la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a A y a B.
5.5. Si X es un conjunto convexo y $P \notin X$, probar que el conjunto $\cup\{PA : A \in X\}$ es también un conjunto convexo.
5.6. Probar que los subconjuntos convexos de una recta son sus subconjuntos de un solo punto, sus segmentos, sus segmentos menos sus puntos extremos, sus segmentos menos uno de sus puntos extremos, sus semirrectas y los conjuntos que consisten de una semirrecta junto con su vértice.
5.7. Si $\mathcal{C}$ es un conjunto convexo y A, B y $C \in \mathcal{C}$ tres puntos no colineales, probar que $int(\Delta ABC) \subseteq \mathcal{C}$.
5.8. Sea ΔABC un triángulo. Probar que $int(\Delta ABC) \cup \Delta ABC$ es el conjunto convexo más pequeño que contiene a los tres puntos A, B y C.
5.9. Probar que si el interior de un cuadrilátero es un conjunto convexo del plano, entonces el cuadrilátero es convexo.
5.10. Probar que un cuadrilátero es convexo si y solo si cada recta que contenga a una de sus diagonales está entre los dos vértices por los que no pasa.
5.11. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero convexo. Si $P \in AB$, $Q \in BC$, $R \in CD$ y $S \in DA$, probar que $\square PQRS$ es también un cuadrilátero convexo.
5.12. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero. Probar que $int(\square ABCD) \cup \square ABCD$ es el conjunto convexo más pequeño que contiene a los cuatro puntos A, B, C y D.
5.13. Se tienen cuatro rectas que se cortan de dos en dos. Probar que cuatro de los seis puntos de intersección de dichas rectas son los vértices de un cuadrilátero convexo.
5.14. Dados cinco puntos en el plano, de tal forma que ninguna terna de ellos sea colineal, probar que cuatro de ellos determinan un cuadrilátero convexo.
5.15. Dados cuatro puntos en el plano tales que ninguna terna de ellos es colineal, dar un procedimiento para nombrar a los puntos dados con las letras A, B, C y D de tal forma que $\square ABCD$ sea un cuadrilátero convexo.

Nota: De aquí en adelante supondremos que nuestros cuadriláteros son convexos.

5.16. Si una recta no pasa por ninguno de los vértices de un cuadrilátero y corta a un lado del mismo, probar que dicha recta corta a uno y solamente a uno de los otros tres lados del cuadrilátero.
5.17. Probar que si una recta pasa por un punto del interior de un cuadrilátero, entonces dicha recta corta al cuadrilátero en exactamente dos puntos.
5.18. Probar que si una recta corta a un lado de un cuadrilátero, entonces dicha recta corta a un segundo lado del cuadrilátero.
5.19. Si $\square ABCD = \square A'B'C'D'$, probar que $\{A, B, C, D\} = \{A', B', C', D'\}$.
5.20. ¿Es posible establecer una correspondencia biunívoca entre los puntos de dos cuadriláteros arbitrarios $\square ABCD$ y $\square A'B'C'D'$, de tal forma que al vértice A le corresponda el vértice A', al vértice B le corresponda el vértice B', al vértice C le corresponda el vértice C' y al vértice D le corresponda el vértice D'?
5.21. Probar que la suma de las distancias de los vértices de un cuadrilátero a una recta cualquiera es igual a cuatro veces la distancia de esta recta al punto de intersección de los segmentos que unen los puntos medios de los lados opuestos del cuadrilátero.
5.22. ¿Pueden ser agudos todos los ángulos de un cuadrilátero?
5.23. ¿Pueden ser obtusos todos los ángulos de un cuadrilátero?

5.24. Probar que la suma de las medidas de dos ángulos exteriores de un cuadrilátero es igual a la suma de las medidas de los dos ángulos internos no adyacentes a dichos ángulos exteriores.
5.25. Probar que un cuadrilátero que no es un rectángulo no puede tener más de tres ángulos obtusos y tampoco puede tener menos de un ángulo obtuso.
5.26. ¿Es posible que los ángulos de un cuadrilátero $\square ABCD$ cumplan que $m(\angle A) + m(\angle B) = m(\angle C) - m(\angle D)$?
5.27. Si las medidas de los ángulos de un cuadrilátero están en proporción 1:4:6:9, probar que dos de sus lados son paralelos.
5.28. En cierto cuadrilátero $\square ABCD$ se cumple que $\angle B$ es el doble de $\angle A$, $\angle C$ el triple de $\angle A$ y $\angle D$ el doble de $\angle B$. Calcular la medida de cada uno de los ángulos del cuadrilátero.
5.29. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero tal que $m(\angle A) = 6x$, $m(\angle B) = 4x + 40$, $m(\angle C) = 2x + 20$ y $m(\angle D) = 3x$, en donde x es un número real positivo. Encontrar x y dar las medidas de los ángulos del cuadrilátero.
5.30. Si las medidas de los ángulos exteriores de un cuadrilátero son $4x + 20$, $2x$, $x + 10$ y $3x$, en donde x es un número real positivo, encontrar x y dar las medidas de los ángulos interiores del cuadrilátero.
5.31. En cierto cuadrilátero $\square ABCD$ se cumple que $m(\angle A) + m(\angle B) = 100$, $m(\angle C) - m(\angle D) = 20$ y $m(\angle A) + m(\angle C) = 150$. Calcular la medida de cada uno de los ángulos del cuadrilátero.
5.32. Probar que un cuadrilátero $\square ABCD$ es un rectángulo si y solo si $m(\angle A) + m(\angle B) = m(\angle C) + m(\angle D)$, $m(\angle A) - m(\angle B) = m(\angle C) - m(\angle D)$ y $m(\angle A) + m(\angle C) = m(\angle B) + m(\angle D)$.
5.33. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero. Si $m(\angle A) = 100$ y los vértices B, C y D equidistan de A, calcular la medida del ángulo $\angle C$.
5.34. Probar que el ángulo formado por las bisectrices de dos ángulos adyacentes de un cuadrilátero tiene medida igual a la mitad de la suma de las medidas de los otros dos ángulos.
5.35. Probar que el ángulo formado por las bisectrices de dos ángulos exteriores con vértices adyacentes de un cuadrilátero tiene medida igual a la mitad de la suma de las medidas de los otros dos ángulos.
5.36. Probar que en todo cuadrilátero el ángulo formado por las bisectrices de dos ángulos opuestos tiene medida igual a la mitad de la diferencia de las medidas de los otros dos ángulos.
5.37. ¿Es cierto que en todo cuadrilátero el ángulo formado por las bisectrices de dos ángulos exteriores con vértices opuestos tiene medida igual a la mitad de la diferencia de las medidas de los otros dos ángulos?
5.38. Si dos ángulos consecutivos de un cuadrilátero miden 80 y 110, encontrar la medida del ángulo formado por las bisectrices de los otros dos ángulos.
5.39. Si en cierto cuadrilátero $\square ABCD$ se cumple que $m(\angle A) = 120$ y $m(\angle B) = 70$, calcular la medida del ángulo que forman las bisectrices exteriores del cuadrilátero cuyos vértices son C y D.
5.40. Calcular la medida de cada uno de los ángulos del cuadrilátero formado por las bisectrices del cuadrilátero $\square\,(\angle 40, \angle 100, \angle 64, \angle 156)$.
5.41. Calcular la medida de cada uno de los ángulos del cuadrilátero formado por las bisectrices de los ángulos exteriores del cuadrilátero $\square\,(\angle 60, \angle 70, \angle 140, \angle 90)$.
5.42. En cierto cuadrilátero $\square ABCD$ se cumple que $m(\angle A) - m(\angle B) = 60$, $m(\angle A) + m(\angle B) = 100$ y el ángulo formado por las bisectrices de $\angle C$ y $\angle D$ mide 50. Calcular las medidas de los ángulos $\angle A$ y $\angle B$.
5.43. En la figura:



tenemos un cuadrilátero $\square ABCD$ tal que $m(\angle BAP) = 30$, $m(\angle DPA) = 80$, $m(\angle DCB) = 140$ y $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{DP}$ son las bisectrices de los ángulos $\angle A$ y $\angle D$, respectivamente. Hallar la medida del ángulo $\angle B$.

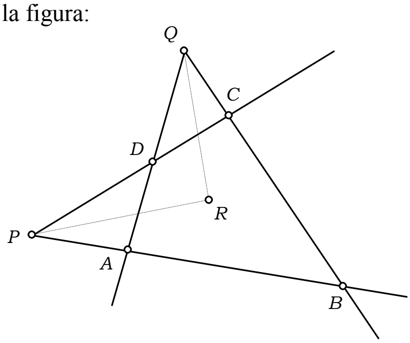
5.44. Si un cuadrilátero tiene dos ángulos opuestos rectos, probar que las bisectrices de los otros dos ángulos son paralelas.
5.45. Probar que si un par de ángulos opuestos de un cuadrilátero son congruentes, entonces las bisectrices de los dos ángulos restantes son paralelas.
5.46. Si las bisectrices de dos ángulos opuestos de un cuadrilátero son paralelas, probar que los ángulos restantes son congruentes.

5.47. Si un cierto cuadrilátero tiene dos ángulos adyacentes rectos, probar que las bisectrices de los otros dos ángulos son perpendiculares.
5.48. Si las cuatro bisectrices de los ángulos de un cuadrilátero $\square ABCD$ concurren en un punto P, probar que los ángulos $\angle APB$ y $\angle CPD$ son suplementarios.

5.49. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero tal que $AB \cong AD$ y $BC \cong CD$. Probar que $\overrightarrow{CA}$ es la bisectriz del ángulo $\angle C$ y es perpendicular a la otra diagonal.
5.50. Probar que el ángulo formado por las bisectrices de los ángulos determinados por las rectas que contienen los lados opuestos de un cuadrilátero tiene medida igual a la mitad de la suma de las medidas de dos ángulos opuestos del cuadrilátero.
5.51. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero en el cual $AB \cong CD$ y $AD \parallel BC$. Si AB y CD no son paralelos, probar que $\angle ABC \cong \angle BCD$.
5.52. Sean $\square ABCD$ un cuadrilátero, O el punto de intersección de sus diagonales y E el punto de intersección de las rectas $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{BC}$. Probar que el ángulo formado por las bisectrices de los ángulos $\angle AOD$ y $\angle AEB$ tiene medida igual a la mitad de la suma de las medidas de dos ángulos opuestos del cuadrilátero.

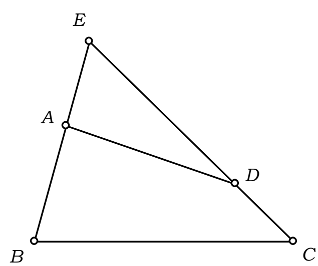
5.53. Si $\square ABCD$ es un cuadrilátero en el cual $\angle B$ y $\angle D$ son ángulos rectos y $DC \cong BC$, probar que $\overrightarrow{AC}$ es la bisectriz del ángulo $\angle A$.

5.54. Si en el cuadrilátero $\square ABCD$ se cumple que $\angle B \cong \angle D$ y $\overrightarrow{AC}$ es la bisectriz del ángulo $\angle A$, probar que $\overrightarrow{CA}$ es la bisectriz del ángulo $\angle C$.
5.55. En la figura:



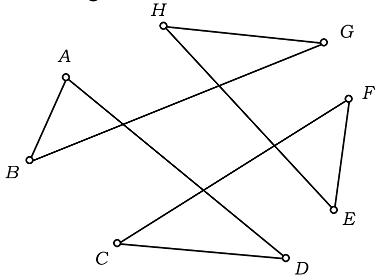
tenemos que $m(\angle APD) = 40$ y $m(\angle DQC) = 50$. Si $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{QR}$ son las bisectrices de los ángulos $\angle APD$ y $\angle DQC$, respectivamente, y $m(\angle QRP) = 100$, calcular las medidas de los ángulos del cuadrilátero $\square ABCD$.

5.56. En la figura:



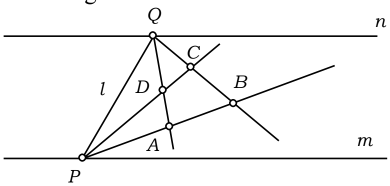
tenemos que $m(\angle AED) = 3x$, $m(\angle EDA) = y$, $m(\angle BAD) = 4x + 5$, $m(\angle CBA) = 2y + 25$ y $m(\angle DCB) = x + y$. Hallar la medida de cada uno de los ángulos del cuadrilátero $\square ABCD$.

5.57. En la figura:



calcular la suma de las medidas de los ángulos cuyos vértices son A, B, C, D, E y F.

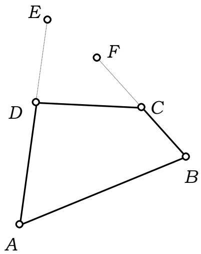
5.58. En la figura:



tenemos que $m \parallel n$, y las semirrectas $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PD}$, $\overrightarrow{QA}$ y $\overrightarrow{QB}$ trisecan a los ángulos que se forman entre las rectas paralelas y la recta transversal l. Si $m(\angle DPQ) = 20$ y $m(\angle PQD) = 40$, calcular las medidas de los ángulos del cuadrilátero $\square ABCD$.

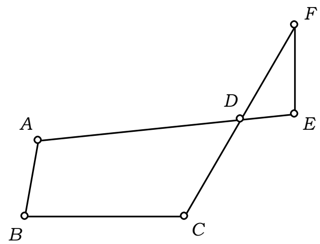
5.59. Si en el cuadrilátero $\square ABCD$ se tiene que $AB \cong AC \cong AD$, probar que $m(\angle C) = m(\angle B) + m(\angle D)$.

5.60. En la figura:



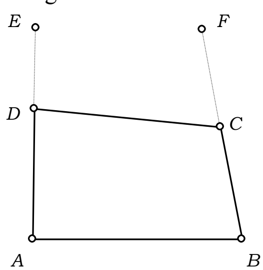
si $\square ABCD$ es un cuadrilátero tal que $m(\angle A) = 60$, $m(\angle B) = 70$ y $m(\angle DCF) = 45$, encontrar $m(\angle C)$, $m(\angle D)$ y $m(\angle CDE)$.

5.61. En la figura:



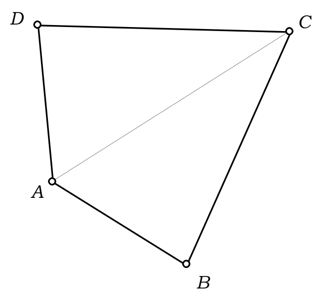
tenemos que $m(\angle BAD) = 110$, $m(\angle CBA) = 80$, $m(\angle DCB) = 120$ y $m(\angle DFE) = 30$. Hallar la medida del ángulo $\angle DEF$.

5.62. En la figura:



si $\square ABCD$ es un cuadrilátero, $E \in \overleftrightarrow{AD}$ y $F \in \overleftrightarrow{BC}$, probar que $m(\angle A) + m(\angle B) = m(\angle CDE) + m(\angle FCD)$.

5.63. En la figura:



si $\square ABCD$ es un cuadrilátero tal que $\angle B \cong \angle D$, probar que $AB \cong AD$ si y solo si $\overrightarrow{CA}$ es la bisectriz del ángulo $\angle C$.

5.64. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero con dos ángulos opuestos suplementarios. Sean E y F los puntos de intersección de las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$, y $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{BC}$, respectivamente; M es el punto en donde la bisectriz del ángulo $\angle AED$ corta a AD y N es el punto en donde la bisectriz del ángulo $\angle DFC$ corta a CD.

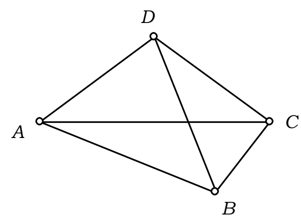
a. Probar que el triángulo ΔEMN es isósceles.

b. Probar que las bisectrices de los ángulos $\angle AED$ y $\angle DFC$ son paralelas o bien perpendiculares.

5.65. Si una de las diagonales de un cuadrilátero biseca a los ángulos que une, probar que las diagonales de dicho cuadrilátero son perpendiculares.

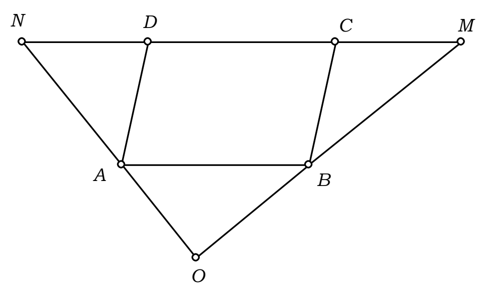
5.66. Si la diagonal AC de un cuadrilátero $\square ABCD$ biseca a los ángulos $\angle A$ y $\angle C$, probar que $AB \cong AD$ y $BC \cong CD$.

5.67. Si las diagonales de un cuadrilátero son congruentes y un par de lados opuestos también son congruentes, probar que uno de los triángulos de los cuales el cuadrilátero es dividido por sus diagonales tiene que ser isósceles.
5.68. Si una diagonal de un cuadrilátero lo divide en dos triángulos congruentes, ¿es el cuadrilátero un papalote?
5.69. ¿Es posible que el segmento que une los puntos medios de dos lados opuestos de un cuadrilátero sea congruente con el segmento que une los puntos medios de las diagonales del mismo cuadrilátero?
5.70. Probar que en todo cuadrilátero el segmento que une los puntos medios de dos lados opuestos biseca al segmento que une los puntos medios de las diagonales.
5.71. Probar que en un trapezoide los segmentos que unen los puntos medios de los lados opuestos se cortan en el punto medio del segmento que une los puntos medios de las diagonales.
5.72. Si en el cuadrilátero $\square ABCD$ se cumple que $\Delta ABC \cong \Delta ADC$, probar que AD biseca a BD.
5.73. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero en el cual $AB \cong CD$. Si existe un punto $P \in int(\square ABCD)$ tal que $PA \cong PD$ y $PB \cong PC$, probar que $BC \parallel AD$.
5.74. Sean $\square ABCD$ un cuadrilátero y O el punto de intersección de sus diagonales. Si $AC \cong BD$ y $DO \cong OC$, probar que $\Delta ADB \cong \Delta BCA$ y $AB \parallel CD$.
5.75. Sea $\square ABCD$ un trapezoide con $AB \cong CD$. Si P es el punto de intersección de las mediatrices de BC y AD, probar que $\Delta PAB \cong \Delta PDC$.
5.76. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero tal que $AB \cong AD$ y $\angle CBD$ es un ángulo recto. Probar que la recta que pasa por el punto A y es paralela a BC corta a CD en su punto medio.
5.77. Si las mediatrices de los lados de un cuadrilátero forman un cuadrilátero, probar que las diagonales de este último son perpendiculares a las diagonales del cuadrilátero original.
5.78. En la figura:



en el cuadrilátero $\square ABCD$ se cumple que $AD \cong DC$ y DB no biseca a AC. Probar que BA y BC no son congruentes.

5.79. Sean $\square ABCD$ un cuadrilátero con $AB \parallel CD$ y O el punto de intersección de sus diagonales. Probar que si $AO \cong OB$, entonces:
a. ΔOCD es un triángulo isósceles con $OC \cong OD$, y
b. $\angle A \cong \angle B$ y $\angle C \cong \angle D$.
5.80. En la figura:



si en el cuadrilátero $\square ABCD$ se cumple que $AD \parallel BC$, $ND \cong AD$ y $CM \cong CB$, probar que ΔOAB es un triángulo rectángulo.

5.81. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero. Si una recta paralela a BD corta a las rectas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{DA}$ en los puntos M, N, P y Q, respectivamente, probar que $MP \cong NQ$.
5.82. Supongamos que tenemos un cuadrilátero con un eje de simetría.
a. Si dos vértices adyacentes del cuadrilátero son simétricos con respecto al eje dado, probar que el cuadrilátero es un trapecio isósceles.
b. Si dos vértices opuestos del cuadrilátero son simétricos con respecto al eje de simetría dado, probar que la diagonal que une a dichos vértices admite a la recta que contiene a la segunda diagonal como su mediatriz. En este caso, ¿cuáles son las posibles formas del cuadrilátero?

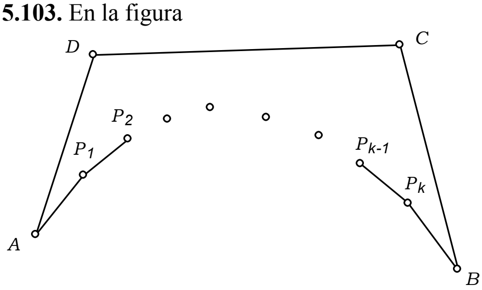
5.83. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero. Si M es el punto medio de AD y N es el punto medio de BC, probar que MN biseca a AC y BD.
5.84. Si las diagonales de un cuadrilátero son perpendiculares, probar que el cuadrilátero que se obtiene al unir los puntos medios de sus lados es un rectángulo.
5.85. Si las diagonales de un cuadrilátero son congruentes, probar que el cuadrilátero que se obtiene al unir los puntos medios de sus lados es un rombo.
5.86. Probar que los puntos medios de los lados de un rombo forman un cuadrado.
5.87. Probar que los puntos medios de los lados de un rectángulo forman un rombo.
5.88. Probar que los puntos medios de los lados de un cuadrado forman un cuadrado.
5.89. Probar que los puntos medios de los lados de un papalote forman un trapecio.
5.90. Sean $\square ABCD$ un cuadrilátero y L, M, N y O los puntos medios de sus lados AB, BC, CD y DA, respectivamente.

a. Dar condiciones necesarias y suficientes en $\square ABCD$ para que el cuadrilátero $\square LMNO$ sea un rectángulo.
b. Dar condiciones necesarias y suficientes en $\square ABCD$ para que el cuadrilátero $\square LMNO$ sea un cuadrado.

5.91. Sean $\square ABCD$ un cuadrilátero y O el punto de intersección de sus diagonales. Si O es el punto medio de AC, probar que el cuadrilátero se puede inscribir en un triángulo de tal forma que dos de sus vértices sean los puntos medios de dos de los lados del triángulo, el cuadrilátero y el triángulo tengan un vértice en común y el cuarto vértice esté en uno de los lados del triángulo.
5.92. Sean $\square ABCD$ un cuadrilátero y L, M, N y O los puntos medios de sus lados AB, BC, CD y DA, respectivamente. Sean P un punto arbitrario del plano, P' el punto simétrico de P con respecto a L, P'' el punto simétrico de P' con respecto a M, P''' el punto simétrico de P'' con respecto a N, y P'''' el punto simétrico de P''' con respecto a O; ¿qué puede uno decir acerca de los puntos P y P''''?
5.93. Probar que en cualquier cuadrilátero las rectas que pasan por los puntos medios de los lados opuestos y la recta que pasa por los puntos medios de las diagonales son concurrentes.
5.94 (Teorema de von Aubel). Sobre los lados de un cuadrilátero $\square ABCD$ y en su exterior construimos cuadrados cuyos centros sean los puntos P, Q, R y S, y sea M el punto medio de la diagonal BD.

a. ¿Qué puede uno decir acerca de los triángulos ΔPMS y ΔQMR?
b. Probar que las diagonales del cuadrilátero $\square PQRS$ son congruentes y perpendiculares.

5.95. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero en el cual $AB \cong BC$ y $CD \cong DA$. Probar que BD está en la mediatriz de AC.
5.96. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero tal que $AD \cong BC$ y AD y BC no son paralelos. Probar que $AB \parallel DC$ si y solo si $\angle D \cong \angle C$.
5.97. Si $\square ABCD$ es un cuadrilátero tal que $AB \parallel CD$ y $AD \cong BC$, probar que $\angle A \cong \angle B$ o $\angle A$ y $\angle B$ son suplementarios.
5.98. Si $\square ABCD$ es un cuadrilátero tal que $AB \parallel CD$ y $\angle A \cong \angle B$, probar que $AD \cong BC$.
5.99. Si $\square ABCD$ es un cuadrilátero tal que $\angle A \cong \angle B$ y $AD \cong BC$, probar $AB \parallel CD$.
5.100. Si dos ángulos de un cuadrilátero no son congruentes, ¿tiene el cuadrilátero dos lados no congruentes?
5.101. ¿Cuántos cuadriláteros hay tales que $|AB| = |BC| = 3$, $CD \cong DA$, $|AC| = 4$, y $|BD| = 6$?
5.102. ¿Cuántos cuadriláteros hay tales que $|AB| = |BC| = 3$, $CD \cong DA$, $|AC| = 6$, y $|BD| = 4$?
5.103. En la figura



a. Si la región poligonal $A P_1 P_2 \ldots P_{k-1} P_k B$ es convexa, probar la desigualdad
$|AP_1| + |P_1 P_2| + \ldots + |P_{k-1} P_k| + |P_k B| < |AD| + |DC| + |BC|$.

b. ¿Es cierta la afirmación anterior si omitimos la convexidad de la región poligonal?

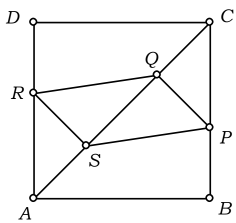
5.104. Probar que en cualquier cuadrilátero $\square ABCD$ se cumplen las desigualdades

$$|AB| + |CD| < |AC| + |BD| \text{ y } |BC| + |AD| < |AC| + |BD|.$$

5.105. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero. Probar que $|AC| + |BD| \leq d(P,A) + d(P,B) + d(P,C) + d(P,D)$, para cualquier punto $P \in int(\square ABCD)$.

5.106. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero. Si $|AB| + |BD| < |AC| + |CD|$, probar que $AB < AC$.
5.107. Sean AB un segmento y m su mediatriz. Si P y Q están en el semiplano determinado por m que contiene a B y $\square ABPQ$ es un cuadrilátero, probar que $|PA| - |PB| > |QA| - |QB|$.
5.108. Si $\square ABCD$ es un cuadrilátero en el cual $\angle D$ es un ángulo recto y $m(\angle A) = m(\angle B) = 60$, probar que
$$|AB| + |BC| = 2|AD|.$$
5.109. Si el cuadrilátero $\square ABCD$ cumple que $m(\angle A) < 60$, ¿puede ser la diagonal BD menor que AB y AD?
5.110. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero tal que $AB > BC > CD > DA$. Probar que $\angle D > \angle B$.
5.111. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero. Si AD es el lado más grande del cuadrilátero y BC es su lado más pequeño, probar que $\angle B > \angle D$ y $\angle C > \angle A$.
5.112. Si en el cuadrilátero $\square ABCD$ se cumple que $AC > BD$, ¿es cierto que uno de los ángulos $\angle B$ o $\angle D$ debe ser obtuso?
5.113. Sean $\square ABCD$ un cuadrilátero y O el punto de intersección de sus diagonales.
a. Si $\angle OBA > \angle DCO$, probar que $\angle ODC > \angle BAO$.
b. Si $OC > OD > OB > OA$, probar que $\angle A$ es obtuso y $\angle C$ es agudo.
5.114. Si en un cuadrilátero $\square ABCD$ se tiene que $AB < BC$ y $AD < CD$, probar que $\angle A > \angle C$.
5.115. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero en el cual $AB < BC$. Si $\angle A < \angle C$, probar que $CD < AD$.
5.116. Si en cierto cuadrilátero $\square ABCD$ se tiene que $BC < CD$, probar que $\angle ADB > \angle ABD$.
5.117. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero en el cual $AB \cong CD$ y $BD > AC$. Probar que $\angle C > \angle B$.
5.118. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero en el cual $AB \cong AD$ y $\angle B \cong \angle C \cong \angle D$. Probar que $AC \cong AB$.
5.119. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero tal que $AB \cong CD$ y $\angle C > \angle B$. Probar que $DB > AC$ y $\angle A > \angle D$.
5.120. Si $\square ABCD$ es un cuadrilátero en el cual $AB \cong AD$, probar que $BC \cong CD$ si y solo si $\angle B \cong \angle D$.
5.121. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero con $\angle B$ y $\angle D$ ángulos rectos. Si $AB > AD$, probar que $CD > BC$.
5.122. Si en un cuadrilátero $\square ABCD$ se cumple que $AB > BC$, $AD \perp AB$, y $CD \perp BC$, probar que $CD > AD$.
5.123. Sean $\square ABCD$ y $\square A'B'C'D'$ dos cuadriláteros tales que $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$, $CD \cong C'D'$ y $DA \cong D'A'$. Si $\angle A > \angle A'$, probar que $\angle B < \angle B'$, $\angle C > \angle C'$ y $\angle D < \angle D'$.
5.124. Sean $\square ABCD$ y $\square A'B'C'D'$ dos cuadriláteros tales que $AB \cong BC \cong A'B' \cong B'C'$ y los ángulos $\angle C$, $\angle D$, $\angle C'$ y $\angle D'$ son rectos. Si $\angle B' > \angle B$, probar que $A'D' > AD$.
5.125. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero tal que $AC > BD$. Si $P \in AC$ satisface que $AP \cong AB$, probar que $PC < BC$.
5.126. Sean $\square ABCD$ un cuadrilátero y O el punto de intersección de sus diagonales. Si $\angle BOC < \angle AOB$, probar que $BC < AB$.
5.127. (Geometry Forum, Problem of the Week, Guess a Quadrilateral - April 18-22, 1994) Dado un cuadrilátero que tiene un par de lados opuestos congruentes, otro par de lados opuestos no congruentes y un par de ángulos opuestos suplementarios, decir qué tipo de cuadrilátero es.
5.128. El libro de W. H. Sherard III [l-289] contiene una serie de problemas que tratan de describir una figura geométrica mediante algunas de sus propiedades. A continuación, damos el acertijo número 19 de este libro.
Describir la figura geométrica que posee las siguientes propiedades:
Es una figura cerrada cuyos lados son segmentos.
Sus bisectrices no contienen sus diagonales.
Ninguno de sus lados son perpendiculares.
Tienen seis pares de ángulos.
Dos de sus ángulos son congruentes y agudos.
Dos de sus ángulos son congruentes y obtusos.
Tiene cuatro pares de ángulos suplementarios.
Sus diagonales no son congruentes.
No tiene ejes de simetría.
Tiene dos pares de lados paralelos.
5.129. Si la suma de las longitudes de cualquier par de lados adyacentes de un cuadrilátero es igual a una constante, probar que dicho cuadrilátero tiene que ser un paralelogramo.
5.130. Si dos segmentos que se cortan en un punto distinto de los extremos no se bisecan entre sí, probar que el cuadrilátero que sus puntos extremos determinan no puede ser un paralelogramo.

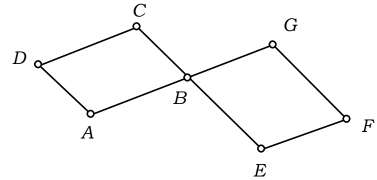
5.131. Dadas i rectas paralelas y j rectas paralelas con dirección distinta a la de las primeras, en donde i y j son números enteros mayores que uno, ¿cuántos paralelogramos se pueden formar con todas las rectas dadas?
5.132. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero. Si $AB \cong CD$, y los ángulos $\angle ACB$ y $\angle CAD$ son rectos, probar que $\square ABCD$ es un paralelogramo.
5.133. En la figura:



$\square ABCD$ es un cuadrado $AQ \cong CS$, $PQ \perp AC$ y $RS \perp AC$.
Probar que $\square PQRS$ es un paralelogramo.

5.134. Probar que cada ángulo interior de un paralelogramo es congruente con uno de los ángulos exteriores del mismo paralelogramo.
5.135. Si cada ángulo interior de un cuadrilátero es congruente con uno de los ángulos exteriores del mismo, ¿es el cuadrilátero un paralelogramo?
5.136 (Trip. 1866). Probar que un cuadrilátero que tiene dos lados opuestos congruentes y dos ángulos opuestos obtusos congruentes es un paralelogramo. Probar que el resultado no es cierto si reemplazamos agudo por obtuso.
5.137. Si un ángulo de un paralelogramo mide 57, encontrar las medidas de los otros ángulos.
5.138. Si $\square ABCD$ es un paralelogramo y $2m(\angle D) = m(\angle C)$, calcular la medida de cada uno de los ángulos del paralelogramo.
5.139. Calcular las medidas de los ángulos de un paralelogramo sabiendo que $m(\angle BAC) = 30$ y $m(\angle ACB) = 20$.
5.140. Calcular las medidas de los ángulos de un paralelogramo sabiendo que tiene dos ángulos opuestos complementarios.
5.141. Calcular las medidas de los ángulos de un paralelogramo sabiendo que uno de sus ángulos obtusos es el doble de uno de sus ángulos agudos.
5.142. Probar que en todo paralelogramo un segmento que une los puntos medios de dos de sus lados opuestos y una de sus diagonales se bisecan entre sí.
5.143. Probar que las diagonales de un paralelogramo que no es un rectángulo no son congruentes.
5.144. Si una de las diagonales de un cuadrilátero y uno de los segmentos que unen los puntos medios de dos lados opuestos del mismo se bisecan uno al otro, probar que el cuadrilátero es un paralelogramo.
5.145. Sean $\square ABCD$ un paralelogramo, O el punto de intersección de sus diagonales y l una recta que pasa por O. Supongamos que l corta a AB en L y a DC en M. Probar que $LB \cong DM$, $MC \cong AL$ y $LO \cong OM$.
5.146. Probar que toda recta que pasa por el punto de intersección de las diagonales de un paralelogramo corta a las rectas que contienen a dos lados opuestos del mismo en puntos cuyo segmento que determinan tiene al punto de intersección de las diagonales como su punto medio.
5.147. Si O es el punto de intersección de las diagonales de un paralelogramo $\square ABCD$, probar que cualquier recta que pase por O y sea paralela a uno de los lados del paralelogramo biseca a los lados del paralelogramo que no son paralelos con la recta.
5.148. Probar que en todo paralelogramo la diagonal que une los dos vértices de sus ángulos agudos es menor que la otra diagonal.
5.149. Sean $\square ABCD$ paralelogramo y O el punto de intersección de sus diagonales. Si $\angle AOB$ es obtuso, probar que $AB > AD$.
5.150. Si $\square ABCD$ es un paralelogramo con $m(\angle A) = 89$ y P es el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos $\angle A$ y $\angle D$, ¿cuál de los segmentos es mayor: OA u OD?
5.151. Sea O el punto de intersección de las diagonales de un paralelogramo $\square ABCD$. Si l y m son dos rectas que pasan por O, l corta a AB y CD en P y Q, respectivamente, y m corta a AD y BC en R y S, respectivamente, probar que $\square PRQS$ es un paralelogramo.

5.152. En la figura:



tenemos dos paralelogramos $\square ABCD$ y $\square EFGB$.
Probar que $\angle C \cong \angle E$ y $\angle D \cong \angle F$.

5.153. Si $\square ABCD$ es un paralelogramo y $AC < BD$, probar que $\angle A > \angle B$.
5.154. Si $\square ABCD$ es un paralelogramo y $\angle A$ es un ángulo agudo, probar que $AC > BD$.
5.155. Sea $\square ABCD$ un paralelogramo. Si $\angle BDC \cong \angle ACD$, probar que $\square ABCD$ es un rectángulo.
5.156. Probar que si un paralelogramo tiene un ángulo recto, entonces tiene que ser un rectángulo.
5.157. Probar que en todo paralelogramo dos de sus vértices opuestos son equidistantes de la recta que une los otros dos vértices.
5.158. Si un ángulo de un paralelogramo se incrementa y las longitudes de los lados se conservan, probar que la diagonal desde el vértice de dicho ángulo disminuye.
5.159. Sea $\square ABCD$ un paralelogramo. Si $P \in AB$ satisface que $AP \cong DP \cong CP$ y $PB \cong BC$, calcular la medida de cada uno de los ángulos del paralelogramo.
5.160. Sea $\square ABCD$ un paralelogramo. Si $P \in AB$ satisface que $BP \cong CP \cong DP$ y $m(\angle A) = 100$, calcular la medida del ángulo $\angle CPD$.
5.161. Sea $\square ABCD$ un paralelogramo tal que $|AB| = 2|BC|$. Prolongamos ambos lados de BC hasta dos puntos E y F tales que $BE \cong BC \cong CF$. Probar que $AF \perp DE$.
5.162. Sean $\square ABCD$ un paralelogramo, $L \in AB$ y $M \in CD$. Probar que $AL \cong CM$ si y solo si LM y BD se cortan en su punto medio.
5.163. Sean $\square ABCD$ un paralelogramo, $P \in BC$ y $Q \in DC$ tales que $PQ \parallel DB$. Probar que $\Delta ABP \cong \Delta ADQ$.
5.164 (Regents Exams, Plane Geometry, January 25, 1954, Part II # 27). Sea $\square ABCD$ un paralelogramo. Si $P, Q \in \overleftrightarrow{AC}$ y $AP \cong QC$, probar que los puntos P, B, Q y D son los vértices de un paralelogramo.
5.165. Sean $\square ABCD$ un paralelogramo, L el punto medio de AB, y M el punto medio de CD. Probar que $DL \parallel MB$ y que AC queda trisecado por los segmentos DL y MB.
5.166. Sean $\square ABCD$ un paralelogramo, M y N los puntos medios de AD y BC, respectivamente, y P y Q los puntos de intersección de BM y DN con AC, respectivamente. Probar las siguientes afirmaciones:
a. Los segmentos BM y DN trisecan a la diagonal AC.
b. ¿Qué tipo de cuadrilátero es $\square MPNQ$?
c. Dar condiciones a $\square ABCD$ para que el cuadrilátero $\square MPNQ$ sea: un rectángulo, un rombo, un cuadrado.
5.167. Sean $\square ABCD$ un paralelogramo y L, M, N y O los puntos medios de los lados AB, BC, CD y DA, respectivamente.
a. Si P es punto de intersección de BO y CL, Q es punto de intersección de CL y DM, R es punto de intersección de DM y AN, y S es punto de intersección de AN y BO, probar que $\square PQRS$ es un paralelogramo.
b. Si E es punto de intersección de AM y CL, y F es punto de intersección de CO y AN, probar que $\square AECF$ es un paralelogramo.
5.168. Sean $\square ABCD$ un paralelogramo y M y N los puntos medios de AB y BC, respectivamente. Si P es el punto de intersección de MN y BD, probar que $|BD| = 4|BP|$.
5.169. Una diagonal de un paralelogramo es trisecada. Si unimos con un segmento estos dos puntos de trisección y los puntos medios de dos lados opuestos del mismo paralelogramo, probar que se forma un paralelogramo.
5.170. Sean $\square ABCD$ un paralelogramo y M y N los puntos que trisecan a la diagonal AC.
a. Probar que $\square BMDN$ es un paralelogramo.
b. Probar $\overrightarrow{BM}$ y $\overrightarrow{BN}$ pasan por los puntos medios de AD y CD, respectivamente.
5.171. Sea $\square ABCD$ un paralelogramo tal que $|AB| = 10$ y $|BC| = 5$. Calcular las longitudes de los segmentos en los cuales los lados del paralelogramo quedan partidos por las bisectrices de los ángulos del mismo paralelogramo.

5.172. Sean $\square ABCD$ un paralelogramo y $E \in BD$ tal que $EC \perp BD$. Probar que las rectas perpendiculares a AB y AD en los puntos B y D, respectivamente, se cortan en la recta $\overleftrightarrow{CE}$.

5.173 (Varignon). Probar que la proyección de una de las diagonales de un paralelogramo sobre una recta cualquiera es igual a la suma de las proyecciones de dos lados adyacentes del paralelogramo sobre la misma recta.

5.174. Sean $\square ABCD$ un paralelogramo, P y R las proyecciones de A y C sobre la diagonal BD, y Q y S las proyecciones de B y D sobre la diagonal AC. Probar que $\square PQRS$ es un paralelogramo semejante al original.

5.175. Sean $\square ABCD$ un paralelogramo y O el punto de intersección de sus diagonales. Las rectas que pasan por los puntos A y C y son perpendiculares a BD, junto con las rectas que pasan por los puntos B y D y son perpendiculares a AC forman un cuadrilátero que será denotado por $\square PQRS$.

a. ¿Qué se puede decir acerca del cuadrilátero $\square PQRS$?
b. Probar que O es el centro del cuadrilátero $\square PQRS$.
c. Probar que las rectas que contienen a las diagonales del cuadrilátero $\square PQRS$ son perpendiculares a las rectas que contienen a las diagonales del paralelogramo $\square ABCD$.

5.176. Sean $\square ABCD$ un paralelogramo y O el punto de intersección de sus diagonales. Tomamos puntos $P \in AB$, $Q \in BC$, $R \in CD$ y $S \in DA$, de tal forma que $\square PRQS$ sea un paralelogramo. Probar las siguientes afirmaciones:

a. El centro del paralelogramo $\square PRQS$ es O.
b. Cada uno de los lados de $\square PRQS$ es paralelo a una de las diagonales de $\square ABCD$.
c. ¿Puede ser $\square PRQS$ un rectángulo sin que el paralelogramo $\square ABCD$ sea un rectángulo?

5.177. Probar que en todo paralelogramo las bisectrices de dos de sus ángulos adyacentes son perpendiculares.

5.178. Probar que en todo paralelogramo las bisectrices de dos de sus ángulos opuestos son paralelas.

5.179. Probar que las bisectrices de los ángulos exteriores de un paralelogramo forman un rectángulo cuya diagonal tiene longitud igual a la suma de las longitudes de dos lados adyacentes del paralelogramo.

5.180. Sean $\square ABCD$ un paralelogramo y P y Q los puntos de intersección de BD con las bisectrices de los ángulos $\angle A$ y $\angle C$, respectivamente. Probar que $BQ \cong DP$.

5.181. Sean $\square ABCD$ un paralelogramo y L el punto medio de BC. Probar que $\overrightarrow{AL}$ es la bisectriz del ángulo $\angle A$ si y solo si $2|AB| = |AD|$.

5.182. Sea $\square ABCD$ un paralelogramo. Probar que las bisectrices de $\angle C$ y $\angle D$ se intersecan en un punto de AB si y solo si $|AB| = 2|AD|$.

5.183. Sea $\square ABCD$ un paralelogramo tal que $|AB| = 2|AD|$; y P el punto de intersección de la bisectriz del ángulo $\angle B$ y CD. Probar las siguientes afirmaciones:

a. $CP \cong PD$.
b. $\overrightarrow{AP}$ es la bisectriz de $\angle A$.
c. $\angle APB$ es un ángulo recto.

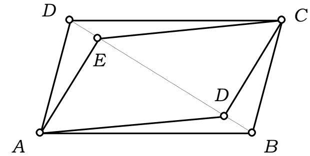
5.184. Sea $\square ABCD$ un paralelogramo en el cual $|AB| = 2|BC|$. Si M es el punto medio de CD, probar que $\angle AMB$ es un ángulo recto.

5.185. Sea $\square ABCD$ un paralelogramo. Sean F el punto de intersección de la bisectriz de $\angle A$ y la recta $\overleftrightarrow{CD}$, y E el punto de intersección de la bisectriz de $\angle D$ y la recta $\overleftrightarrow{AB}$.

a. Probar que $AE \cong AD$.
b. Probar que $\square AEFD$ es un paralelogramo.

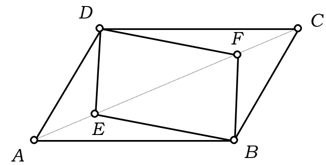
5.186. Si dos paralelogramos tienen una diagonal en común, probar que sus vértices no comunes forman un paralelogramo.

5.187. En la figura:



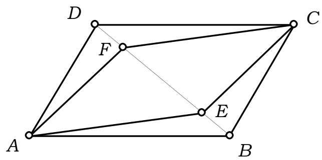
sea $\square ABCD$ un paralelogramo. Si $AE \perp BD$ y $DC \perp BD$, probar que $\square ADCE$ es también un paralelogramo.

5.188. En la figura:



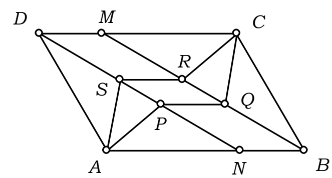
□$ABCD$ es un paralelogramo y $AE \cong CF$. Probar que □$EBFD$ es un paralelogramo.

5.189. En la figura:



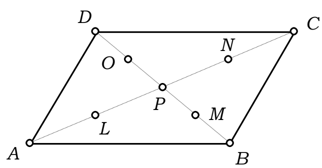
□$ABCD$ es un paralelogramo. Si $\angle CFD \cong \angle AEB$, probar que □$AECF$ es un paralelogramo.

5.190. En la figura:



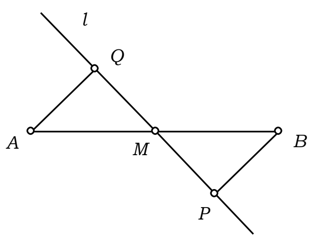
□$ABCD$ es un paralelogramo, $\overrightarrow{BM}$ es la bisectriz de $\angle B$, $\overrightarrow{DN}$ es la bisectriz de $\angle D$, $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{AS}$ trisecan a $\angle A$, y $\overrightarrow{CQ}$ y $\overrightarrow{CR}$ trisecan a $\angle C$. Probar que □$PQRS$ es un paralelogramo

5.191. En la figura:



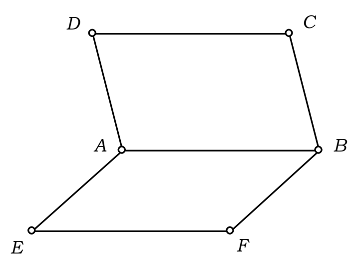
□$ABCD$ es un paralelogramo, P es el punto de intersección de sus diagonales, L, M, N y O son los puntos medios de AP, BP, CP y DP, respectivamente. Probar que □$LMNO$ es un paralelogramo.

5.192. En la figura:

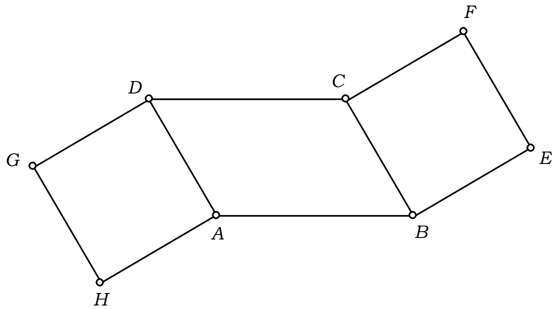


M es el punto medio del segmento AB, y P y Q son las proyecciones de B y A sobre la recta l, respectivamente. Si $AQ \cong BP$, probar que □$APBQ$ es un paralelogramo.

5.193. En la figura:
tenemos dos paralelogramos □$ABCD$ y □$EFBA$.
a. Si $m(\angle ABF) = 45$ y $m(\angle DCB) = 120$, calcular la medida del ángulo $\angle DAE$.
b. Probar que □$EFCD$ es un paralelogramo.

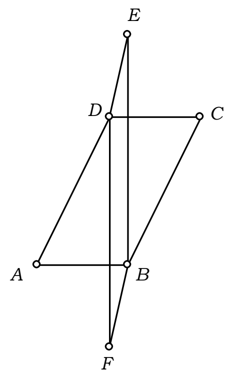


5.194. En la figura:



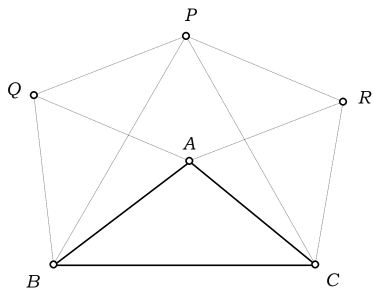
tenemos dos cuadrados $\square BEFC$ y $\square ADGH$, y un paralelogramo $\square ABCD$. Probar que $\square HBFD$ es un paralelogramo.

5.195. En la figura:



tenemos dos paralelogramos $\square ABCD$ y $\square FBED$. Probar que $\square AFCE$ es un paralelogramo.

5.196[i-3]. En la figura:

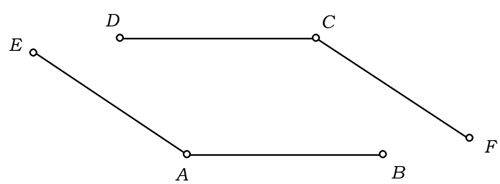


los triángulos ΔPBC, ΔQBA y ΔRAC son equiláteros.

a. Probar que $\Delta ABC \cong \Delta QBP$.

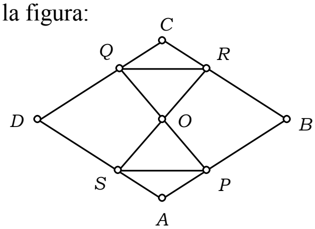
b. Probar que $\square ARPQ$ es un paralelogramo.

5.197. En la figura:



los segmentos AB, CD, AE y CF son tales que $AB \cong CD$, $AB \parallel CD$, $AE \cong CF$ y $AE \parallel CF$. Probar que BD y EF se cortan en su punto medio.

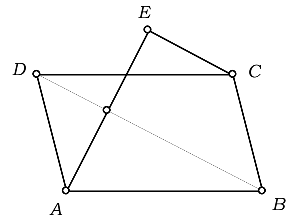
5.198. En la figura:



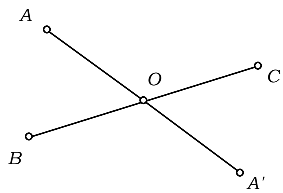
$\square ABCD$ es un paralelogramo, y se cumple que $AP \cong QC$ y $AS \cong CR$. Probar que $\Delta APS \cong \Delta CQR$ y $\Delta OSP \cong \Delta ORQ$.

5.199. En la figura:

si $\square ABCD$ es un paralelogramo, $AE \perp BD$ y $\overleftrightarrow{BD} \parallel \overleftrightarrow{CE}$, probar que $BE \cong CD$.

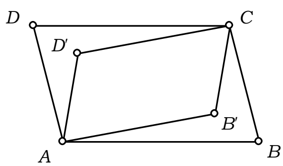


5.200. En la figura:



sean O el punto medio del segmento BC, $AO \cong BO$, y A' el punto simétrico de A con respecto al punto O. Probar que $\square ABA'C$ es un paralelogramo y $\Delta ABA'$ es un triángulo rectángulo.

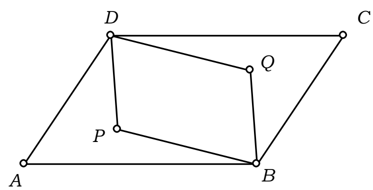
5.201. En la figura:



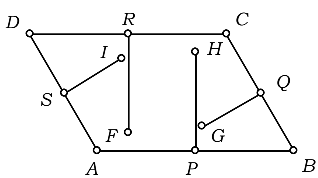
tenemos dos paralelogramos $\square ABCD$ y $\square AB'CD'$. Probar que los segmentos que unen los puntos medios de los lados opuestos de $\square ABCD$ y $\square AB'CD'$ son concurrentes.

5.202. En la figura:

si $\square ABCD$ y $\square PBQD$ son paralelogramos, probar que $AP \cong QC$.



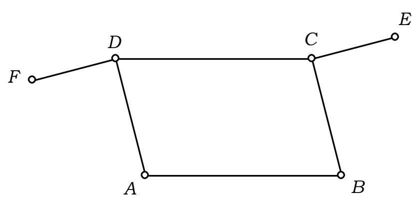
5.203 (Pemb. 1900). En la figura:



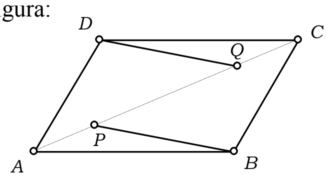
tenemos que $\square ABDE$ es un paralelogramo y P, Q, R y S son los puntos medios de los lados AB, BC, CD y DA, respectivamente. Si $|PH| = |RF| = \dfrac{|AB|}{2}$, $|QG| = |SI| = \dfrac{|BC|}{2}$, $PH \perp AB$, $QG \perp BC$, $RF \perp CD$ y $SI \perp DA$, probar que $\square FGHI$ es un rombo.

5.204. En la figura:

tenemos que $\square ABCD$ es un paralelogramo, $CE \cong DF$, $CE \perp BC$ y $DF \perp AD$. Probar que EF biseca a CD.

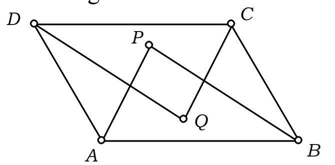


5.205. En la figura:



$\square ABCD$ es un paralelogramo. Si $AP \cong CQ$, probar que $DQ \parallel PB$.

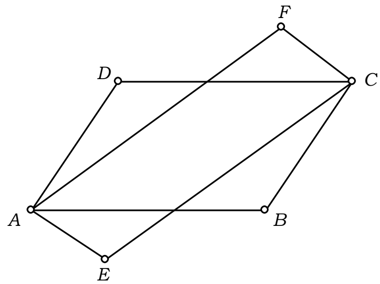
5.206. En la figura:



$\square ABCD$ es un paralelogramo. Si $AP \parallel QC$ y $BP \parallel QD$, probar que $AQ \parallel PC$.

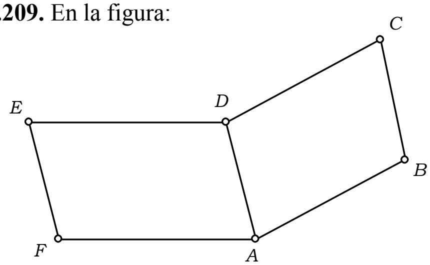
5.207. Sea $\square ABCD$ un paralelogramo. Extendemos BC hasta un punto E tal que $BC \cong CE$. Si $\square CEFG$ es un paralelogramo, probar que $AG \parallel DF$ y $AG \cong DF$.

5.208. En la figura:



tenemos dos paralelogramos $\square ABCD$ y $\square AECF$. Probar que $AE \parallel FC$, y BD y EF se cortan en su punto medio.

5.209. En la figura:



tenemos dos paralelogramos $\square ABCD$ y $\square ADEF$. Probar que el punto de intersección de BE y FC equidista de las rectas $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{EF}$.

5.210. Sean $\square ABCD$ y $\square ABEF$ dos paralelogramos tales que CD y EF están en diferentes semiplanos determinados por la recta $\overleftrightarrow{AB}$. Si $AC \cong AF$ y $AD \cong AE$, probar que AC y AF pertenecen a una misma recta.

5.211. Si $\square ABCD$ y $\square ABEF$ son dos paralelogramos tales que C, D, E y F son colineales, probar que $\Delta ADF \cong \Delta BCE$.

5.212. Probar que la suma de las distancias de los vértices de un paralelogramo a una recta cualquiera es igual a cuatro veces la distancia de esta recta al punto de intersección de las diagonales del paralelogramo.

5.213. Dado un paralelogramo $\square ABCD$ y una recta l contenida en su exterior, probar que

$$d(A,l) + d(C,l) = d(B,l) + d(D,l).$$

5.214. Sean $\square ABCD$ un paralelogramo y l una recta que pasa por el vértice A.

a. Si l no corta en ningún otro punto al paralelogramo, probar que $d(C,l) = d(B,l) + d(D,l)$.

b. Si l corta al paralelogramo, probar que $d(C,l) = |d(B,l) - d(D,l)|$.

5.215. En el exterior de un rectángulo $\square ABCD$ trazamos dos rectas equidistantes y paralelas a AC, las cuales cortan a $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{DA}$ en los puntos S, R, Q y P, respectivamente. Probar que $\square PQRS$ es un paralelogramo en el cual la diferencia de las longitudes de dos de sus lados adyacentes es igual a $|AC|$.

5.216. Sean $\square ABCD$ un cuadrilátero, y M y N los puntos medios de AB y CD, respectivamente. Si AC y MN se cortan en su punto medio, probar que $\square ABCD$ es un paralelogramo.

5.217. Sean $\square ABCD$ un paralelogramo, O el punto de intersección de sus diagonales, y M y N los puntos medios de AO y OB, respectivamente. Si $P \in AB$ y $Q \in CD$ son colineales con O, probar que $\square PNQM$ es también un paralelogramo.

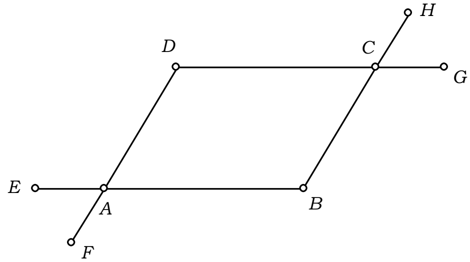
5.218. Sean $\square ABCD$ un paralelogramo y M el punto medio de AB. Si la recta que pasa por B y es paralela a DM corta a $\overleftrightarrow{DA}$ en el punto P, probar que $DP \cong BC$.

5.219. Sean $\square ABCD$ un paralelogramo y $E \in \overleftrightarrow{AB}$ tales que $\angle A$ no es recto y $DA \cong DE$. Probar que $E \in \overrightarrow{AB}$ si y solo si $\angle C \cong \angle DEA$.

5.220. Sean P, A, B y Q cuatro puntos consecutivos tales que $PA \cong AB \cong BQ$. Si $\square ABCD$ es un paralelogramo tal que $|BC| = 2|AB|$, probar que $PC \perp QD$.

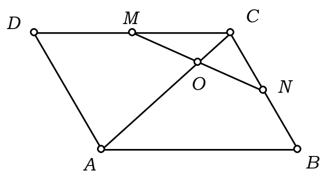
5.221. Sean $\square ABCD$ un paralelogramo, M el punto medio de CD, P el punto medio de AM y Q el punto medio de BM. Si la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ corta a BC y a AD en los puntos E y F, respectivamente, probar que $|EF| = 4|EQ|$.

5.222. En la figura:



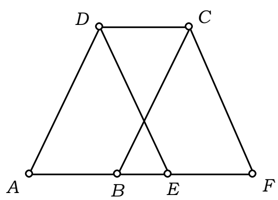
$\square ABCD$ es un paralelogramo $EA \cong CG$ y $FA \cong CH$.
a. Probar que $\square EFGH$ es un paralelogramo.
b. Probar que el punto de intersección de las diagonales de $\square ABCD$ y de $\square EFGH$ es el mismo.
c. Probar que el punto de intersección de las diagonales de $\square ABCD$, F y H son colineales.

5.223. En la figura:



tenemos un paralelogramo $\square ABCD$, M el punto medio de CD y $|CO| = \dfrac{|AC|}{4}$. Si N es el punto de intersección de $\overrightarrow{MO}$ y BC, probar que O es el punto medio de MN.

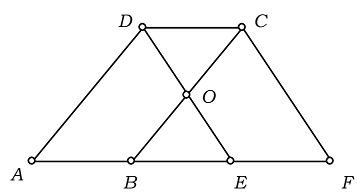
5.224. En la figura:



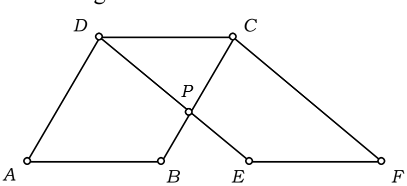
si $\square ABCD$ y $\square EFCD$ son paralelogramos, probar que $AE \cong BF$.

5.225. En la figura:

tenemos dos paralelogramos $\square ABCD$ y $\square EFCD$. Si $OB \cong OE$, probar que B y E trisecan a AF.

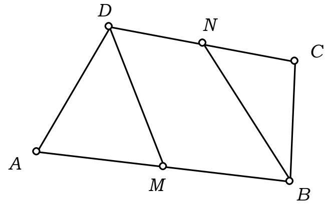


5.226. En la figura:



tenemos dos paralelogramos $\square ABCD$ y $\square EFCD$ tales que $m(\angle A) = 60$ y $m(\angle F) = 40$. Si P es el punto de intersección de BC y ED, encontrar la medida del ángulo $\angle BPE$.

5.227. En la figura:

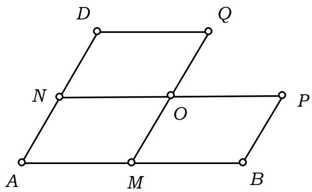


tenemos un cuadrilátero □$ABCD$, y M y N son los puntos medios de AB y CD, respectivamente. Si □$ABCD$ no es un paralelogramo, probar que □$MBCN$ tampoco es un paralelogramo.

5.228. Sean □$ABCD$ un paralelogramo y O el punto de intersección de sus diagonales. Si $a = 10$, $e = 9$ y $f = 14$, calcular la distancia de O al lado AB del paralelogramo.

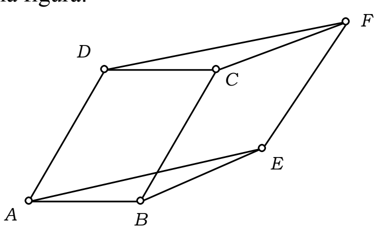
5.229. Sean □$ABCD$ un paralelogramo y M el punto medio de CD. Si $N \in AC$ satisface que $|AC| = 4|CN|$ y P es el punto de intersección de BC y $\overleftrightarrow{MN}$, probar que P es el punto medio de BC.

5.230. En la figura:



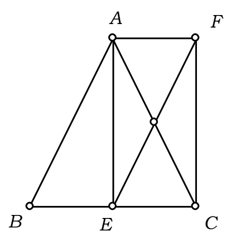
tenemos que M y N son los puntos medios de AB y DA, respectivamente, □$ABPN$ y □$AMQD$ son paralelogramos, y O es el punto de intersección de MQ y NP. Si completamos el paralelogramo □$ABCD$, probar que A, O y C son colineales.

5.231. En la figura:



si □$ABCD$ y □$BEFC$ son paralelogramos, probar que $\Delta ABE \cong \Delta DCF$.

5.232. En la figura:



si □$BEFA$ es un paralelogramo y □$ECFA$ es un rectángulo probar que ΔABC es un triángulo isósceles.

5.233. Sea □$ABCD$ un cuadrilátero. Si $P \in AB$ y $Q \in DC$ son tales que $DP \parallel BQ$, probar lo siguiente:

a. El cuadrilátero □$PBQD$ es un paralelogramo y

b. $AQ \cong CP$.

5.234. Probar que los lados de un paralelogramo inscrito en un rectángulo son paralelos a las diagonales del rectángulo.

5.235. Sea □$ABCD$ un paralelogramo. Sean E la proyección de B sobre la recta $\overleftrightarrow{AD}$, F la proyección de D sobre la recta $\overleftrightarrow{BC}$, G el punto de intersección de AF y BE, y H el punto de intersección de CE y DF. Probar que □$EGFH$ es un paralelogramo.

5.236. Sea $\square ABCD$ un paralelogramo. Trazamos una recta paralela a BD que pase por el punto C y corte a $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$ en los puntos P y Q, respectivamente. Probar que B, C y D son los puntos medios de los lados del triángulo ΔAPQ.

5.237. Si $\square ABCD$ es un paralelogramo con $BC > AB$, probar que $\overrightarrow{AC}$ no pude ser la bisectriz del ángulo $\angle A$.

5.238. Sea $\square ABCD$ un paralelogramo. Si las bisectrices de los ángulos $\angle A$ y $\angle B$ se cortan en el punto M y las bisectrices de los ángulos $\angle C$ y $\angle D$ se cortan en el punto N, probar que $\Delta MAB \cong \Delta NCD$.

5.239. Sea $\square ABCD$ un paralelogramo. Si las bisectrices de los ángulos $\angle A$ y $\angle B$ se cortan en el punto P, probar que P es equidistante de $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{AD}$.

5.240. Sea $\square ABCD$ un paralelogramo.

a. Probar que la bisectriz del ángulo $\angle A$ corta al lado DC si y solo si $AD \leq AB$.

b. Probar que la bisectriz del ángulo $\angle A$ corta al lado BC si y solo si $AB \leq AD$.

c. Dar una condición necesaria y suficiente para que $\overrightarrow{AC}$ sea la bisectriz del ángulo $\angle A$.

5.241. Sea $\square ABCD$ un paralelogramo. Si las bisectrices de los ángulos $\angle A$ y $\angle B$ cortan a las rectas $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{AD}$ en los puntos E y F, respectivamente, probar las siguientes afirmaciones:

a. $\square ABEF$ es un rombo, y

b. AE y BF se bisecan entre sí.

5.242. Sean ΔABC un triángulo y M el punto medio del lado BC. Si $P \in \overrightarrow{AM}$ satisface que $AM \cong MP$, probar que $\square ABPC$ es un paralelogramo.

5.243. Sean $\square ABCD$ un cuadrilátero, y l y m dos rectas secantes. En términos de ángulos, dar una condición necesaria y suficiente para que se pueda inscribir en $\square ABCD$ un paralelogramo $\square A'B'C'D'$, de tal forma que sus lados sean paralelos a las rectas l y m, y cada uno de los lados del cuadrilátero original contenga uno y solo uno de los vértices del paralelogramo.

5.244. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero. Si completamos los paralelogramos $\square BADE$ y $\square ADCF$, probar que EF biseca a BC.

5.245. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero. Si completamos los paralelogramos $\square ABCP$, $\square BCDQ$, $\square CDAR$ y $\square DABS$, probar que AQ, BR, CS y DP son congruentes y paralelos.

5.246. Sean ΔABC un triángulo y $P \in int(\Delta ABC)$. Si completamos los paralelogramos $\square BPCD$, $\square CPAE$ y $\square APBF$, probar que $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

5.247 (Baccalauréat Besançon, 1905). Sobre los lados de un paralelogramo trazamos exteriormente cuadrados. Probar que los centros de estos cuadrados son los vértices de un cuadrado cuyo centro coincide con el centro del paralelogramo.

5.248. Exteriormente construimos triángulos equiláteros ΔAPB, ΔBQC, ΔCRD y ΔDSA sobre los lados de un paralelogramo $\square ABCD$. Probar las siguientes afirmaciones:

a. $\square PQRS$ es un paralelogramo.

b. ΔPQD es un triángulo equilátero.

5.249. Si construimos triángulos equiláteros ΔAPB, ΔBQC, ΔCRD y ΔDSA sobre los lados de un paralelogramo $\square ABCD$ y hacia el interior del mismo, ¿es $\square PQRS$ un paralelogramo?

5.250. Construimos triángulos equiláteros ΔAPB, ΔBQC y ΔCRD sobre los lados AB, BC y CD de un paralelogramo $\square ABCD$, de tal forma que P, $R \in ext(\square ABCD)$, y $Q \in int(\square ABCD)$. Probar que PQ y RQ son congruentes a las diagonales del paralelogramo original.

5.251. Exteriormente construimos triángulos rectángulos isósceles ΔAPB, ΔBQC, ΔCRD y ΔDSA teniendo como hipotenusas a los lados de un paralelogramo $\square ABCD$. Probar que $\square PQRS$ es un cuadrado.

5.252. Sean $\square ABCD$ un rectángulo y O el punto de intersección de sus diagonales. Si completamos el paralelogramo $\square ABEO$, probar que los segmentos OE y BC se bisecan uno al otro.

5.253. Sean m y n dos rectas paralelas y fijemos dos puntos $A \in m$ y $B \in n$. Si M es el punto medio de AB y l es una recta que pasa por M y corta a las rectas m y n en los puntos C y D, respectivamente, probar que $\square ADBC$ es un paralelogramo.

5.254[a-3]. Sea □*ABCD* un paralelogramo. Supongamos que $A = P_0,\ P_1, ...,\ P_k = B$ dividen a *AB* en *k* segmentos congruentes entre sí, y $D = Q_0,\ Q_1, ...,\ Q_k = C$ dividen a *CD* en *k* segmentos congruentes entre sí. Probar que los segmentos $AQ_1,\ P_1Q_2, ...,\ P_{k-1}C$ dividen a la diagonal *BD* en *k* segmentos congruentes entre sí.

5.255. Sean $\angle AOB$ un ángulo no degenerado y $P \in int(\angle AOB)$. La recta paralela a $\overrightarrow{OA}$ que pasa por *P* corta a $\overrightarrow{OB}$ en el punto *R* y la recta paralela a $\overrightarrow{OB}$ que pasa por *P* corta a $\overrightarrow{OA}$ en el punto *S*. Si *M* es el punto medio de *OP*, probar que *R*, *M* y *S* son colineales.

5.256. Si una de las mediatrices de uno de los lados de un paralelogramo es el eje de simetría del mismo, probar que el paralelogramo tiene que ser un rectángulo.

5.257. Sea □*ABCD* un cuadrilátero. Si $AB \cong CD$ y $\angle A$ y $\angle B$ son suplementarios, probar que □*ABCD* es un paralelogramo, o bien, es un trapecio con $\angle A \cong \angle D$ y $\angle B \cong \angle C$.

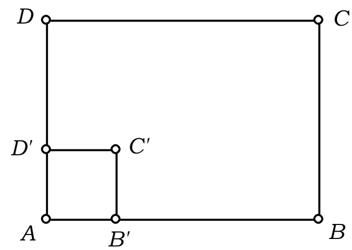
5.258. Probar que las diagonales de un rectángulo son más grandes que los lados del mismo. ¿Es cierta esta afirmación para los paralelogramos?

5.259. Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, probar que las bisectrices de los cuatro ángulos internos forman un rectángulo.

5.260. Probar que un cuadrilátero es un rectángulo si y solo si todos sus ángulos son congruentes entre sí.

5.261. En la figura:

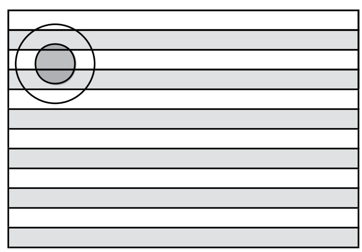
tenemos un rectángulo □*ABCD* y un cuadrado □*AB'C'D'*. Si los puntos *A*, *C'* y *C* son colineales, probar que □*ABCD* tiene que ser un cuadrado.



5.262. ¿Es posible dividir un cuadrado en cuatro partes y con ellas formar dos cuadrados congruentes más pequeños?

5.263[l-315]. Un carpintero tiene que cubrir un hoyo rectangular en el piso de 2 pulgadas de ancho por 12 pulgadas de largo. Él tiene una tabla rectangular de 3 pulgadas de ancho por 8 pulgadas de largo. ¿Puede el carpintero cubrir el hoyo cortando la tabla en solo dos piezas?

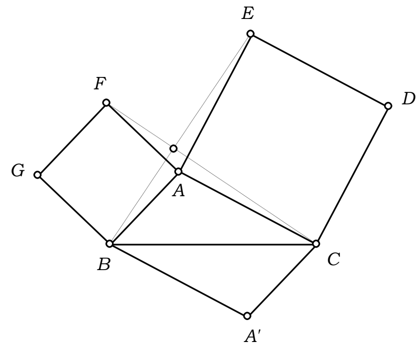
5.264[l-119, p. 37]. Había un rey que tenía 6 hermanos y 6 hermanas. Su bandera reflejaba este hecho con 12 franjas (ver la figura). Cuando dos de sus hermanos se mudaron a otro reino, el rey decidió borrar dos franjas de su bandera, ¿es posible dividir la bandera original en dos partes, de tal modo que con ellas se forme una bandera con 10 franjas?



5.265. Sea □*ABCD* un rectángulo cuyos lados tienen longitudes 4 y 10. Calcular la longitud de la diagonal del cuadrado determinado por las bisectrices de los ángulos del rectángulo.

5.266[De Longchamps, Journal de Math. Elémentaires, 1889]. Sea □*ABCD* un rectángulo. Si *P* es el punto de intersección de la bisectriz del ángulo $\angle A$ y la recta perpendicular a *BD* que pasa por el vértice *C*, probar que $CP \cong CA$.

5.267. En la figura:



tenemos un triángulo ΔABC y dos cuadrados $\square ACDE$ y $\square BAFG$. Probar las siguientes afirmaciones:

a. $\Delta ACF \cong \Delta AEB$.

b. $BE \perp CF$.

Completamos el paralelogramo $\square ABA'C$.

c. AA' corta a BC en su punto medio.

d. $\Delta AEF \cong \Delta CAA'$.

e. $|EF| = 2|AM_a|$.

Sea P el punto de intersección de h_a y EF.

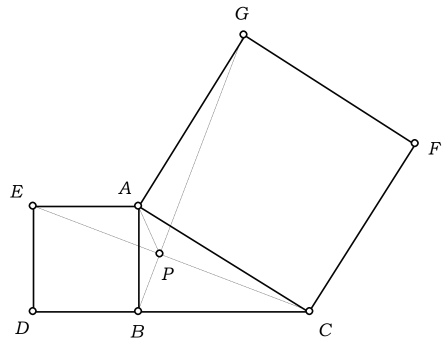
f. $\Delta AM_aC \cong \Delta PAE$.

g. P es el punto medio de EF.

h. Si $\angle A$ es obtuso, probar que $m(\angle CAF) = m(\angle EAB) = 90 + m(\angle A)$.

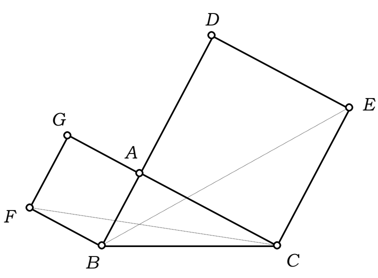
i. Si $\angle A$ es obtuso, probar que $m(\angle CAF) = m(\angle EAB) = 360 - m(\angle A)$.

5.268 (Trip. 1872). En la figura:



tenemos dos cuadrados $\square ABDE$ y $\square ACFG$ sobre los lados de un triángulo ΔABC rectángulo en $\angle B$. Si P es el punto de intersección de BG y CE, probar que $\overrightarrow{PA}$ es la bisectriz del ángulo $\angle GPE$.

5.269. En la figura:



tenemos dos cuadrados $\square ABFG$ y $\square ACED$ sobre los lados de un triángulo ΔABC rectángulo en $\angle A$. Probar las siguientes afirmaciones.

a. E, A y F son colineales.

b. BE y CF se cortan en la altura h_a.

c. Las rectas $\overleftrightarrow{ED}$, $\overleftrightarrow{FG}$ y h_a concurren en un punto P.

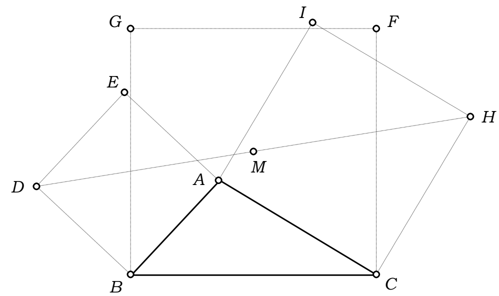
d. $BE \perp CP$, $BP \perp CF$, $BP \cong CF$ y $BE \cong CP$.

e. Probar que h_a pasa por el punto medio de GD.

f. Si I y J son las proyecciones de E y F sobre la recta $\overleftrightarrow{BC}$, respectivamente, probar que $|BC| = |IE| + |JF|$.

g. Probar que ΔABC y ΔADG son simétricos.

5.270[a-17]. En la figura:



tenemos un triángulo arbitrario ΔABC y sobre cada uno de sus lados construimos cuadrados como muestra la figura. Si M es el punto medio de DH, probar que M es el centro del cuadrado $\square BCFG$.

Si el lector quiere conocer más propiedades de esta configuración, puede consultar el artículo [a-182].

5.271. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$. Completamos los rectángulos $\square B\,H_a AD$ y $\square\, H_a CEA$.

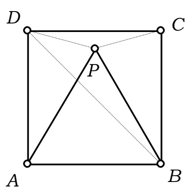
a. Probar que los puntos D, A y E son colineales.

b. Expresar la distancia entre los centros de ambos rectángulos en función de a.

5.272. Sean $\square ABCD$ un cuadrado y $B' \in AB$. Sea $\square AB'C'D'$ el cuadrado cuyo lado es AB' que se encuentra en el interior del cuadrado $\square ABCD$. Probar que la recta perpendicular a DB' que pasa por A corta a $D'B$ en su punto medio.

5.273. Si sobre los lados opuestos AB y CD de un cuadrado $\square ABCD$ exteriormente se construyen triángulos equiláteros ΔPAB y ΔQDC, probar que $PD \parallel BQ$.

5.274. En la figura:

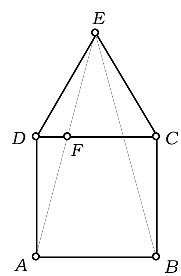


$\square ABCD$ es un cuadrado y ΔPAB un triángulo equilátero.

a. Calcular la medida de cada uno de los ángulos del triángulo ΔPCD.

b. Hallar las medidas de los ángulos $\angle DPA$ y $\angle PBD$.

5.275. En la figura:

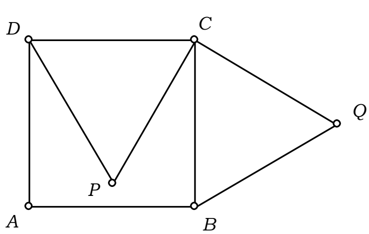


$\square ABCD$ es un cuadrado y ΔEDC es un triángulo equilátero.

a. Calcular las medidas de los ángulos $\angle EAD$, $\angle AEC$, $\angle AFC$ y $\angle AEB$.

b. Probar que $EA \cong EB$.

5.276. En la figura:

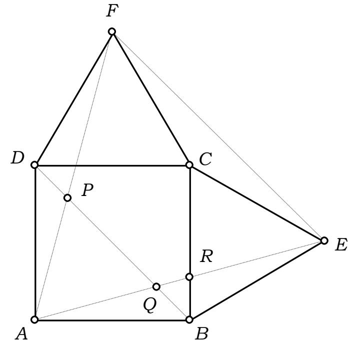


$\square ABCD$ es un cuadrado, y ΔPCD y ΔQCB son triángulos equiláteros. Probar las siguientes afirmaciones:

a. Los puntos P, A y C son colinelaes.

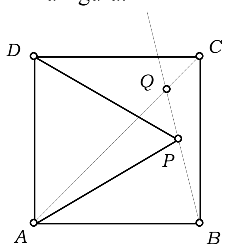
b. $\overleftrightarrow{PD} \perp \overleftrightarrow{BQ}$.

5.277. En la figura:



tenemos un $\square ABCD$ cuadrado y dos triángulos equiláteros ΔECB y ΔDCF. Hallar las medidas de los ángulos $\angle EAF$, $\angle PQA$, $\angle APQ$, $\angle ERC$, $\angle ECF$ y $\angle FEC$.

5.278. En la figura:



tenemos que $\square ABCD$ es un cuadrado, ΔPDA es un triángulo equilátero y Q es el punto de intersección de $\overleftrightarrow{BP}$ y AC.

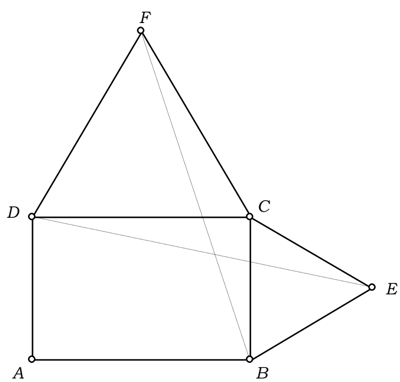
a. Calcular la medida de cada uno de los ángulos del triángulo ΔPAB.

b. Probar que $m(\angle DPQ) = 15$.

c. Probar que $PQ \cong CQ$.

5.279. Si exteriormente construimos triángulos equiláteros ΔAPB, ΔBQC, ΔCRD y ΔDSA sobre los lados de un cuadrado $\square ABCD$, probar que $\square PQRS$ es un cuadrado.

5.280. En la figura:

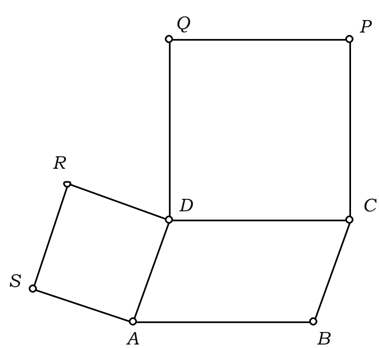


$\square ABCD$ es un rectángulo, y ΔECB y ΔFDC son triángulos equiláteros.

a. Probar que $DE \cong BF$.

b. Probar que ΔAEF es equilátero.

5.281. En la figura:



si $\square ABCD$ es un paralelogramo, y $\square DCPQ$ y $\square ADRS$ son dos cuadrados, probar que $AQ \cong RC$.

5.282. Sean $\square ABCD$ un cuadrado y l una recta que yace en el exterior del mismo y que pasa por su vértice D. Si O es el punto de intersección de las diagonales del cuadrado, probar que $d(A,l) + d(B,l) + d(C,l) = 4d(O,l)$.
5.283 (Baccalauréat Marseille, 1905). Sea $\square ABCD$ un rectángulo.

a. Probar que la suma $d(P, \overleftrightarrow{AC}) + d(P, \overleftrightarrow{BD})$ es constante para cada punto $P \in \square ABCD$.

b. Probar que la suma $d(P, \overleftrightarrow{AC}) + d(P, \overleftrightarrow{BD})$ es constante para cada punto P sobre una de las rectas que contenga a uno de los lados del rectángulo.

5.284. Si las bisectrices de los ángulos de un cuadrilátero forman un cuadrado, ¿es el cuadrilátero un rectángulo?
5.285. Probar que las bisectrices de los ángulos exteriores de un rectángulo forman un cuadrado, cuya diagonal tiene longitud igual a la suma de las longitudes de dos lados adyacentes del rectángulo.
5.286. Probar que las bisectrices de los ángulos formados por las diagonales de un rectángulo son paralelas a los lados del mismo rectángulo.
5.287. Probar que si las bisectrices de los ángulos de un rectángulo se intersecan en un punto, entonces el rectángulo tiene que ser un cuadrado.
5.288. Si $\square ABCD$ es un rectángulo tal que $m(\angle BAC) = 40$, calcular la medida del ángulo que forman sus diagonales.
5.289. Sean $\square ABCD$ un rectángulo y O el punto de intersección de sus diagonales. Si $m(\angle AOB) = 110$, calcular la medida del ángulo $\angle DBA$.
5.290. Calcular la medida del ángulo formado por las diagonales de un rectángulo, las cuales son iguales al doble de uno de los lados del rectángulo.
5.291. Si $\square ABCD$ es un rectángulo, y L y M son los puntos medios de AB y DC, respectivamente, probar que $AM \cong CL$.

5.292. Sean $\square ABCD$ un rectángulo y M el punto medio de BC. Si E es el punto de intersección de $\overleftrightarrow{DC}$ y $\overleftrightarrow{AM}$, probar que $AB \cong CE$.
5.293. Por el centro de un cuadrado trazamos dos rectas perpendiculares que corten a los lados del cuadrado.

a. Probar que con los puntos de intersección se forma un cuadrado.

b. Probar que dichas rectas dividen al cuadrado en cuatro cuadriláteros congruentes.

5.294. Fijamos un cuadrado y dos rectas perpendiculares que se cortan en un punto del interior del cuadrado. Probar que dichas rectas determinan junto con las rectas que contienen a dos lados paralelos del cuadrado dos segmentos congruentes.
5.295. Sea $\square ABCD$ un cuadrado. Si $L \in AB$, $M \in BC$, $N \in CD$ y $O \in DA$ son tales que $\square LMNO$ es un cuadrado, probar que los cuatro triángulos ΔLBM, ΔMCN, ΔNDO y ΔOLA son congruentes.
5.296. Si un rectángulo está inscrito en un cuadrado y uno de sus lados no es paralelo a ninguna de las diagonales del cuadrado, probar que el rectángulo es un cuadrado.
5.297. Sean $\square ABCD$ un rectángulo y O el punto de intersección de sus diagonales. Si l es una recta que pasa por O y corta a $\overleftrightarrow{AB}$ en E, a BC en P, a AD en Q y a $\overleftrightarrow{DC}$ en F, probar que $\Delta PBE \cong \Delta QDF$.
5.298. Sean $\square ABCD$ un cuadrilátero y M el punto medio de AD. Si $AB \cong DC$ y $MB \cong MC$, probar que

a. $AD \parallel BC$ y

b. $\square ABCD$ es un rectángulo si y solo si $AB \parallel DC$.

5.299. Sean $\square ABCD$ un rectángulo, O el punto de intersección de sus diagonales y P, $Q \in \overleftrightarrow{BD}$ tales que $|PO| = |QO|$. Trazamos dos rectas paralelas a $\overleftrightarrow{AC}$ que pasen por los puntos P y Q, y que corten a $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{DC}$ en los puntos E, F, G y H, respectivamente. Probar que $\square EFGH$ es un paralelogramo.
5.300. Sea $\square ABCD$ un cuadrado. Si $P \in BC$ y $Q \in DC$ satisfacen que $AP \cong BQ$, probar que $AP \perp BQ$.
5.301. Sean $\square ABCD$ un cuadrado y $P \in BD$ tales que $AB \cong BP$. Si la recta perpendicular a BD en el punto P corta a AD en el punto Q, probar que $AQ \cong QP \cong PD$.

5.302. Sean $\square ABCD$ un cuadrado y M el punto medio de BC. Si $\overleftrightarrow{AM}$ y $\overleftrightarrow{DC}$ se cortan en el punto E, probar que $AB \cong CE$ y $AC \cong BE$.

5.303. Sea $\square ABCD$ un rectángulo tal que $|AB| = k|BC|$, en donde $k \geq 2$ es un número entero. Supongamos que los puntos B_1, B_2,..., B_{k-1} y C_1, C_2,..., C_{k-1} dividen a los lados AB y DC en segmentos congruentes entre sí, respectivamente. Si E_i es el punto de intersección de $B_i\,C_i$ y la diagonal AC, probar que $|B_i\,E_i| = \frac{i}{k}|BC|$, para cada $1 \leq i < k$.

5.304. Sean $\square ABCD$ un cuadrado, $P \in AB$ y $Q \in BC$. Si $PB \cong BQ$, y O es el punto de intersección de AQ y PC, probar que

a. los puntos B, O y D son colineales, y

b. $AO \cong BO$.

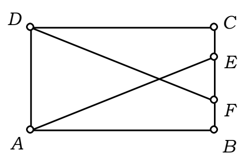
5.305. Sean $\square ABCD$ un cuadrado y l una recta que pasa por A que yace en el exterior del cuadrado. Si M y N son las proyecciones de B y D sobre la recta l, respectivamente, probar que $AM \cong AN$.

5.306. Sean $\square ABCD$ un cuadrado y l una recta que pasa por el punto D. Si L y M son las proyecciones de A y B sobre l, y N la proyección de A sobre $\overleftrightarrow{BM}$, probar que $\square ALMN$ es también un cuadrado.

5.307. Sea $\square ABCD$ un rectángulo. Si una recta que pasa por A y corta al lado CD interseca a $\overrightarrow{BC}$ en el punto E, probar que $BD < AE$.

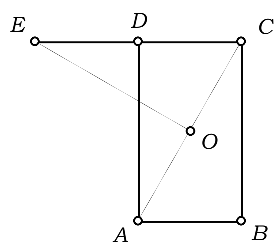
5.308. Sean $\square ABCD$ un cuadrado y O el punto de intersección de sus diagonales. Tomemos un punto $X \in DO - \{D, O\}$. Si Y es el punto de intersección de AO y la recta que pasa por B que es perpendicular a AX, probar que $DX \cong AY$.

5.309. En la figura:



$\square ABCD$ es un rectángulo. Si $BF \cong CE$, probar que $AE \cong DF$.

5.310. En la figura:

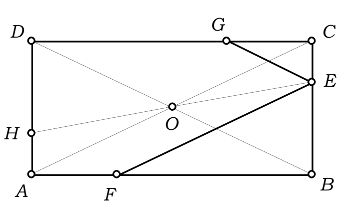


se tiene que $\square ABCD$ es un rectángulo tal que $|AC| = 2|AB|$ y O es el punto de intersección de sus diagonales. Si $ED \cong DC$, probar que

a. $OE \perp AC$ y

b. $OE \cong AD$.

5.311. En la figura:



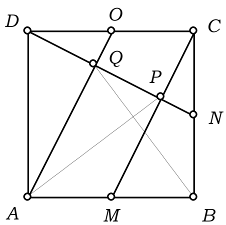
sean $\square ABCD$ un rectángulo y O el punto de intersección de sus diagonales. Sean $E \in BC$ un punto arbitrario, $F \in AB$ y $G \in CD$ tales que $EF \parallel AC$ y $EG \parallel BD$. Probar las siguientes afirmaciones:

a. $|EF| + |EG| = |AC|$.

b. $O \in FG$.

c. Si H es el punto de intersección de AD y $\overleftrightarrow{EO}$, ¿qué tipo de cuadrilátero es $\square EGHF$?

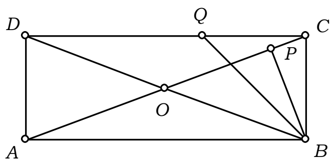
5.312. En la figura:



tenemos que $\square ABCD$ es un cuadrado, M y N son los puntos medios de AB y BC, respectivamente, $AQ \perp DN$, y P es el punto de intersección de CM y DN. Probar lo siguiente:

a. $CM \cong DN$.
b. $CM \perp DN$.
c. $\overrightarrow{AQ}$ pasa por el punto medio O de CD.
d. $AP \cong AB$.
e. ¿Es cierto que $BQ \cong AB$?
f. ¿Es cierto que $\Delta QOD \cong \Delta PNC$?
g. $|PN| = \dfrac{|PC|}{2} = \dfrac{|PM|}{3} = \dfrac{|PD|}{4}$.

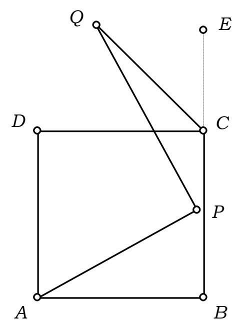
5.313. En la figura:



tenemos que $\square ABCD$ es un rectángulo, P es la proyección de B sobre AC y Q es el punto de intersección de la bisectriz del ángulo $\angle PBD$ y DC. Si $m(\angle AOB) = 140$, calcular la medida del ángulo $\angle BQC$.

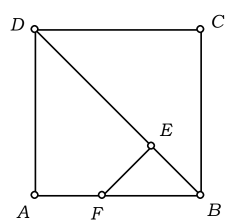
5.314. Sea $\square ABCD$ un cuadrado. Encontrar un punto $E \in \overleftrightarrow{AB}$ tal que si F es su proyección sobre $\overleftrightarrow{AC}$, entonces $AF \cong FE \cong EB$.

5.315 (Trip. 1870). En la figura:



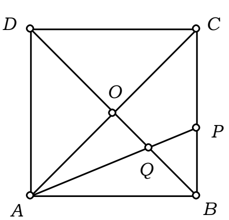
$\square ABCD$ es un cuadrado, $P \in BC$ es arbitrario, $\overrightarrow{CQ}$ es la bisectriz del ángulo $\angle ECD$, y $AP \perp CQ$. Probar que $AP \cong CQ$.

5.316. En la figura:



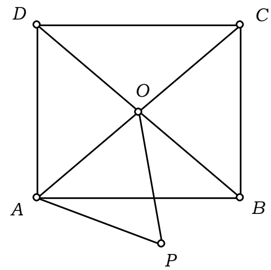
$\square ABCD$ es un cuadrado, $DA \cong DE$ y $EF \perp BD$.
Probar que $AF \cong FE \cong EB$.

5.317. En la figura:



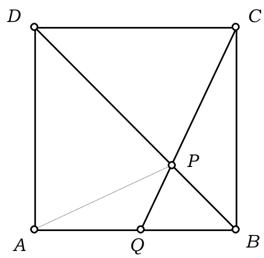
tenemos que $\square ABCD$ es un cuadrado y O es el punto de intersección de sus diagonales. Sean P y Q los puntos de intersección de la bisectriz del ángulo $\angle BAC$ con BC y BD, respectivamente. Probar que $|PC| = 2|OQ|$.

5.318. En la figura:



sean □$ABCD$ un cuadrado y ΔPOA un triángulo equilátero. Calcular la medida de cada uno de los ángulos del triángulo ΔAPB.

5.319. En la figura:



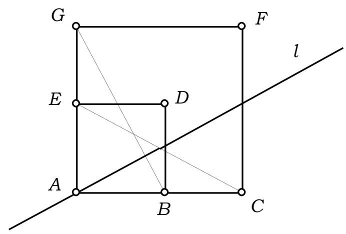
sean □$ABCD$ un cuadrado, y C, P y Q tres puntos colineales.

a. Si $m(\angle CPD) = 70$, calcular la medida del ángulo $\angle CQA$.

b. Probar que $45 < m(\angle CPD) < 90$ al variar Q sobre $AB - \{A, B\}$.

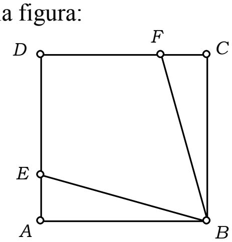
c. Si $m(\angle CQA) = 120$, calcular la medida del ángulo $\angle CPD$.

5.320. En la figura:



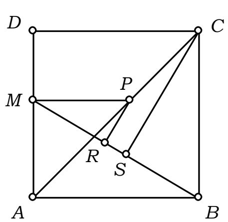
tenemos dos cuadrados □$ABDE$ y □$ACFG$. Si l es una recta que pasa por el punto A, y $l \perp GB$, probar que l biseca a EC.

5.321. En la figura:



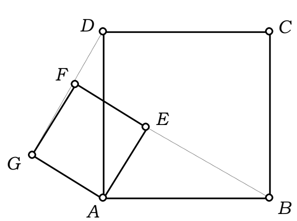
tenemos un cuadrado □$ABCD$. Si $m(\angle EBA) = m(\angle CBF) = 15$, probar que ΔBFE es un triángulo isósceles.

5.322. En la figura:



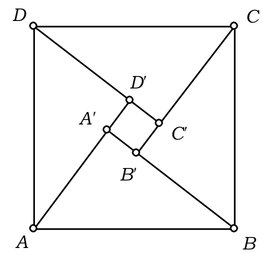
tenemos que □$ABCD$ es un cuadrado y P es cualquier punto de AC. Si M es la proyección de P sobre AD, R es la proyección de P sobre MB y S es la proyección de C sobre MB, probar que $MR \cong SB$.

5.323. En la figura:



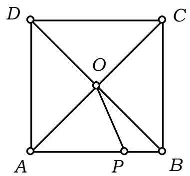
tenemos dos cuadrados □$ABCD$ y □$AEFG$. Probar que $BE \cong DG$.

5.324. En la figura:



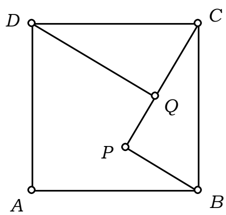
si $\square ABCD$ es un cuadrado, $AD' \perp DC'$, $CB' \perp DC'$, $AD' \perp A'B$ y $CB' \perp A'B$, probar que $\square A'B'C'D'$ es un cuadrado.

5.325. En la figura:



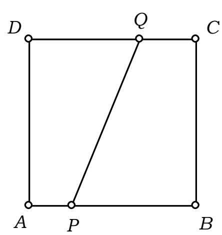
tenemos que $\square ABCD$ es un cuadrado y O es el punto de intersección de sus diagonales. Si $AO \cong AP$, probar que
$m(\angle AOP) = 3m(\angle POB)$.

5.326. En la figura:



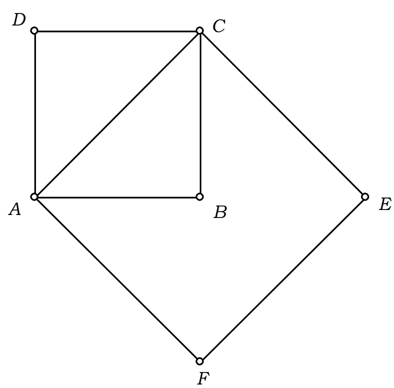
$\square ABCD$ es un cuadrado, $PB \perp PC$ y $DQ \perp PC$. Probar que $DQ \cong PC$.

5.327. En la figura:



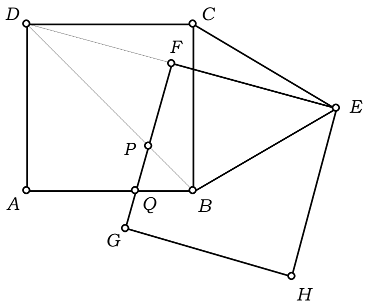
tenemos un cuadrado $\square ABCD$, $AP < PB$ y $QC < QD$. Probar que $|AP| + |PQ| + |QC| < |PB| + |PQ| + |DQ|$.

5.328. En la figura:



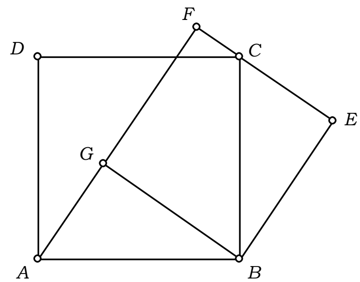
tenemos dos cuadrados $\square ABCD$ y $\square ACEF$. Probar que A, B y E, y C, B y F son dos hileras de puntos.

5.329. En la figura:



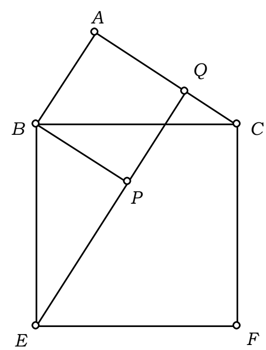
tenemos un triángulo equilátero ΔBEC y dos cuadrados $\square ABCD$ y $\square EFGH$. Hallar las medidas de los ángulos $\angle BEH$, $\angle BPF$ y $\angle PQA$.

5.330. En la figura:



tenemos que $\square ABCD$ es un cuadrado, $\angle AGB$ es un ángulo recto, $BG > AG$, y $\square GBEF$ es un cuadrado. Probar que E, C y F son colineales.

5.331. En la figura:



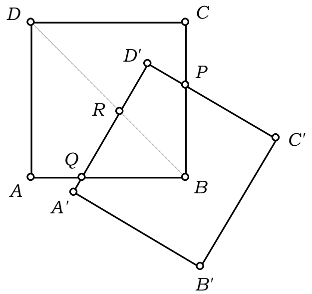
tenemos que $\angle A$ es un ángulo recto, $\square EFCB$ es un cuadrado, $EQ \perp AC$ y $BP \perp EQ$. Probar que $\square PQAB$ es un cuadrado.

5.332. Sean $\square ABCD$ un cuadrado y $P \in BC$. Si E y F son las proyecciones de D y B sobre AP, probar que $DE \cong AF$.

5.333. Sean $\square ABCD$ un cuadrado y O el punto de intersección de sus diagonales. Sea l una recta que pasa por O y corta a AB en el punto E, de tal forma que $\dfrac{|AE|}{|EB|} = \dfrac{1}{2}$. Si $P \in l \cap int(\square ABCD)$, probar que las distancias $d(P, \overleftrightarrow{AB})$, $d(P, \overleftrightarrow{AD})$, $d(P, \overleftrightarrow{BC})$ y $d(P, \overleftrightarrow{CD})$ están en progresión aritmética.

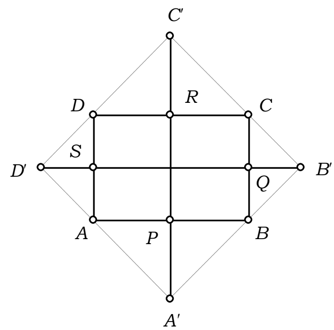
5.334[I-144]. Sobre cada uno de los lados de un triángulo rectángulo construimos dos cuadrados interna y exteriormente. Probar que los centros de seis cuadrados están situados de tres en tres sobre rectas perpendiculares.

5.335. En la figura:

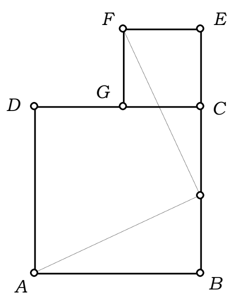


tenemos dos cuadrados $\square ABCD$ y $\square A'B'C'D'$. Si $m(\angle BPC') = 60$, hallar las medidas de los ángulos $\angle D'QA$, $\angle D'PB$ y $\angle BRD'$.

5.336. En la figura:
$\square ABCD$ es un rectángulo, P, Q, R y S son los puntos medios de los lados AB, BC, CD y DA, respectivamente, $AP \cong PA'$, $BQ \cong QB'$, $CR \cong RC'$ y $DS \cong SD'$. Probar que $\square A'B'C'D'$ es un cuadrado.



5.337. En la figura:



tenemos dos cuadrados $\square ABCD$ y $\square GCEF$, los puntos B, C y E son colineales y $BP \cong CE$.

a. Probar que $AP \cong PF$.

b. Probar que $\angle FPA$ es un ángulo recto.

5.338. Por cada uno de los vértices de un cuadrado y hacia el exterior del mismo trazamos rectas que formen un ángulo de 30 con el lado correspondiente del cuadrado. Probar que dichas rectas forman un cuadrado.

5.339. Sea $\square ABCD$ un cuadrado. Si $P \in AB$, $Q \in BC$, $R \in CD$ y $S \in DA$ son tales que $AP \cong BQ \cong CR \cong DS$, probar las siguientes afirmaciones:

a. $\square PQRS$ es un cuadrado.

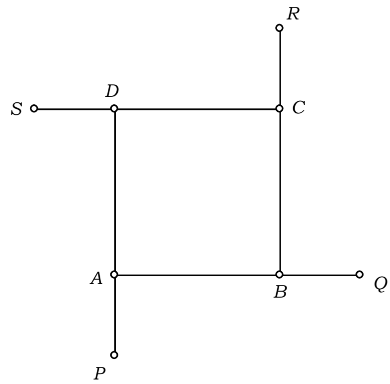
b. $\square APCR$ es un paralelogramo.

c. $\square ABCD$ y $\square PQRS$ tienen el mismo centro.

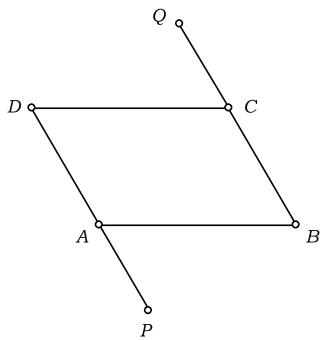
5.340. Si $\square ABCD$ y $\square AECF$ son dos rectángulos compartiendo la diagonal AC, probar que $\square BEDF$ es también un rectángulo.

5.341. Sean $\square ABCD$ un rectángulo, y M y N los puntos medios de AB y CD, respectivamente. Si AN y CM cortan a BD en los puntos Q y P, respectivamente, probar que $\square MPNA$ es un paralelogramo.

5.342. En la figura:
se cumple que $\square ABCD$ es un cuadrado y $AP \cong BQ \cong CR \cong DS$.
Probar que $\square PQRS$ es también un cuadrado.



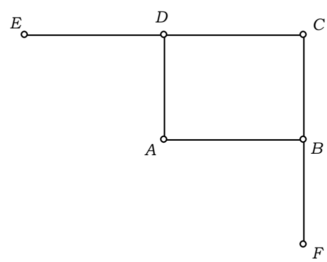
5.343. En la figura:



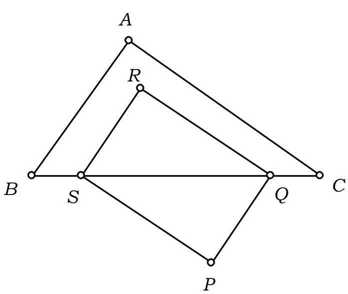
si $\square ABCD$ es un paralelogramo, $m(\angle A) = 120$ y $|AP| = |CQ| = \dfrac{|AB|}{2}$, probar que $\square PBQD$ es un rectángulo.

5.344. En la figura:

tenemos que $\square ABCD$ es un rectángulo, $ED \cong DC$ y $BC \cong BF$. Probar que E, A y F son colineales.



5.345. En la figura:



ΔABC es un triángulo rectángulo en $\angle A$ y $\square PQRS$ es un rectángulo. Dar una condición necesaria y suficiente para que los puntos A, R y P sean colineales.

5.346. Sean $\square ABCD$ un rectángulo y P, $Q \in CD$ tales que $CP \cong DQ$. Si O es el punto de intersección de $\overleftrightarrow{AQ}$ y $\overleftrightarrow{BP}$, probar que $OC \cong OD$.
5.347. Probar que si dos lados adyacentes de un paralelogramo son congruentes, entonces el paralelogramo es un rombo.
5.348. Si dos alturas correspondientes a dos lados adyacentes de un paralelogramo son congruentes, probar que el paralelogramo es un rombo.
5.349. Si una de las rectas que contienen a una de las diagonales de un paralelogramo es el eje de simetría del mismo, probar que el paralelogramo es un rombo.

5.350. Si en un paralelogramo dos lados adyacentes forman ángulos congruentes con cualquiera de las diagonales, probar que el paralelogramo resulta ser un rombo.

5.351. Sean $\square ABCD$ un paralelogramo y O el punto de intersección de sus diagonales. Trazamos una recta que pase por el punto O y corte a $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ en los puntos M y N, respectivamente, y posteriormente trazamos una segunda recta por el punto O que sea perpendicular a la anterior y corte a $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{DA}$ en los puntos P y Q, respectivamente. ¿Qué tipo de cuadrilátero es $\square MPNQ$?

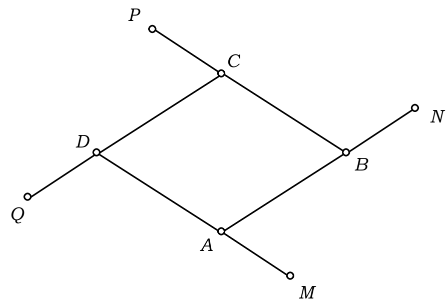
5.352. Sea $\square ABCD$ un paralelogramo. Si F es el punto de intersección de la bisectriz de $\angle A$ y $\overleftrightarrow{CD}$, y E es el punto de intersección de la bisectriz de $\angle D$ y $\overleftrightarrow{BC}$, probar que $\square AEFD$ es un rombo.

5.353. En la figura:

$\square ABCD$ es un rombo y los segmentos AM, BN, CP y DQ son congruentes entre sí.

a. Probar que $\square MNPQ$ es un paralelogramo.

b. ¿Puede $\square MNPQ$ ser un rombo?



5.354. Si la diagonal AC de un cuadrado $\square ABCD$ es trisecada por los puntos P y Q, probar que $\square PBQD$ es un rombo.

5.355. Si en un cuadrilátero sus diagonales bisecan a sus cuatro ángulos interiores, probar que el cuadrilátero tiene que ser un rombo.

5.356. Sean $\square ABCD$ un rombo y O el punto de intersección de sus diagonales. Si M y N son los puntos medios de OB y OD, respectivamente, probar que $\square AMCN$ es un paralelogramo.

5.357. Calcular la medida de cada uno de los ángulos de un rombo, sabiendo que uno de sus lados es congruente con la diagonal más pequeña.

5.358. Si el ángulo que forman una de las diagonales de un rombo y un lado mide 35, encontrar las medidas de los ángulos del rombo.

5.359. Si los puntos medios de los lados de un paralelogramo forman un rombo, probar que el paralelogramo tiene que ser un cuadrado.

5.360. Probar que las bisectrices de los ángulos formados por las diagonales de un rombo cortan a los lados del rombo en puntos que determinan un cuadrado.

5.361. La suma o la diferencia de las distancias de un punto cualquiera del plano a dos lados opuestos de un rombo es igual a la suma o la diferencia de las distancias del mismo punto a los otros dos lados.

5.362. La suma de las distancias de un punto dado del plano a dos lados adyacentes de un rombo es igual a la suma de las distancias de los otros dos lados al punto dado.

5.363. La diferencia de las distancias de un punto dado del plano a dos lados adyacentes de un rombo es igual a la diferencia de las distancias de los otros dos lados al punto dado.

5.364. Tenemos dos segmentos congruentes que se cortan en su punto medio. Si trazamos las rectas perpendiculares a cada uno de dichos segmentos que pasen por sus puntos extremos, probar que se forma un rombo cuyo centro es el punto de intersección de los segmentos.

5.365. En un rombo se trazan las mediatrices de cada uno de sus lados. Probar las siguientes afirmaciones:

a. Si dos lados del rombo son adyacentes, entonces sus mediatrices se cortan en un punto de una de las diagonales.

b. Si dos lados del rombo son opuestos, entonces sus mediatrices son paralelas.

5.366. Probar que todas las alturas de un rombo son congruentes entre sí.

5.367. Probar que las proyecciones del punto de intersección de las diagonales de un rombo sobre los lados del mismo son los vértices de un cuadrado.

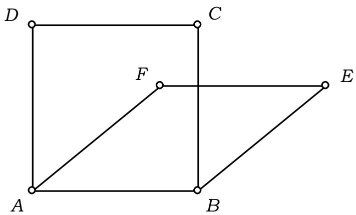
5.368. Probar que el punto de intersección de las diagonales de un rombo es equidistante de los lados del rombo.

5.369. Si un cuadrado y un rombo yacen entre las mismas dos rectas paralelas, probar que una diagonal del rombo es menor que la diagonal del cuadrado y esta es menor que la otra diagonal del rombo.

5.370. Sean □*ABCD* un rombo y l una recta paralela a $\overleftrightarrow{BD}$. Fijamos un punto $P \in l$. Si Q es el punto de intersección de $\overleftrightarrow{AD}$ y la recta que pasa por P y es paralela a $\overleftrightarrow{AB}$, probar que ΔAQP es un triángulo isósceles.

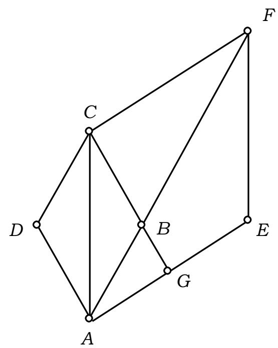
5.371. Exteriormente construimos triángulos equiláteros ΔAPB, ΔBQC, ΔCRD y ΔDSA sobre los lados de un rombo □*ABCD*. Probar que □*PQRS* es un rectángulo.

5.372. En la figura:



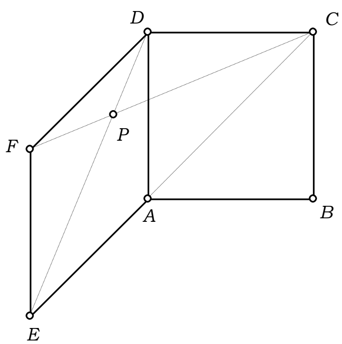
si □*ABCD* es un cuadrado y □*ABEF* es un rombo, probar que ΔBEC es un triángulo isósceles.

5.373. En la figura:



tenemos dos rombos □*ABCD* y □*AEFC*. Si G es el punto de intersección de AE y $\overleftrightarrow{BC}$, y $m(\angle ADC) = 120$, calcular la medida del ángulo $\angle CGA$.

5.374. En la figura:

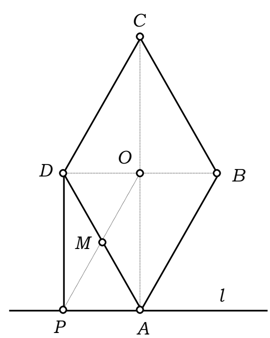


tenemos un cuadrado □*ABCD* y un rombo □*EADF*.

a. Calcular la medida de cada uno de los ángulos del triángulo ΔDPF.

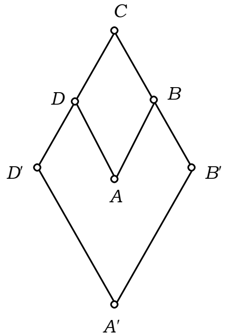
b. Probar que $PE \cong PC$.

5.375. En la figura:



tenemos que □*ABCD* es un rombo, O es el punto de intersección de sus diagonales, $l \parallel BD$, P es la proyección de D sobre l, y M es el punto de intersección de PO y AD. Probar que $|AB| = 2|MO|$.

5.376. En la figura:



si □*ABCD* y □*A'B'CD'* son dos rombos, probar que

a. los puntos *A*, *A'* y *C* son colineales, y

b. $AB \parallel A'B'$.

5.377. Sea □*ABCD* un trapecio con $AB \parallel CD$. Probar que $|AB|$, $|AC|$ y $|DB|$, y $|CD|$, $|AC|$ y $|DB|$ son los lados de un triángulo.

5.378. Sea □*ABCD* un trapecio con $AB \parallel CD$. Probar las siguientes desigualdades:

a. $|AB| + |CD| < |AC| + |BD|$.

b. $|AB| - |CD| < |BC| + |AD|$.

5.379. Sea □*ABCD* un trapecio tal que $AB \parallel CD$ y $\angle A$ sea un ángulo obtuso. Si *P* es el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos $\angle A$ y $\angle D$, comparar los segmentos *DP* y *AP*.

5.380. Probar que las bisectrices de dos ángulos adyacentes que comparten uno de los lados no paralelos de un trapecio forman un ángulo recto.

5.381. Si en el trapecio □*ABCD* tenemos que $AB \parallel CD$, $m(\angle C) = 120$ y $m(\angle D) = 100$, calcular la medida de cada uno de los ángulos del trapecio.

5.382. Si en el trapecio □*ABCD* tenemos que $AB \parallel CD$, $m(\angle D) - m(\angle A) = 70$ y $m(\angle C) - m(\angle B) = 80$, calcular la medida de cada uno de los ángulos del trapecio.

5.383. Sea □*ABCD* un trapecio con $AB \parallel CD$ y $CD < AB$. Si *P* es el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos $\angle A$ y $\angle B$, $m(\angle APB) = 140$ y $m(\angle D) - m(\angle C) = 4$, calcular la medida de cada uno de los ángulos del trapecio.

5.384. Sea □*ABCD* un trapecio tal $AB \parallel CD$, $CD \cong AD$ y $m(\angle D) = 2m(\angle B)$. Probar que $|AB| = 2|CD|$.

5.385. Sea □*ABCD* un trapecio tal que $AB \parallel CD$, $AD \cong BC$, $|AB| = 2|AD|$ y $\angle ADB$ y $\angle ACB$ son ángulos rectos.

a. Calcular las medidas de los ángulos del trapecio.

b. Probar que $|AB| = 2|CD|$.

5.386. Sean □*ABCD* un trapecio con $AB \parallel CD$ y *M*, *N*, *P* y *Q* los puntos medios de sus lados *AB*, *CD*, *BC* y *AD*, respectivamente.

a. Si *R* y *S* son los puntos medios de las diagonales *AC* y *BD*, respectivamente, probar que *R*, *S*, *P* y *Q* son colineales.

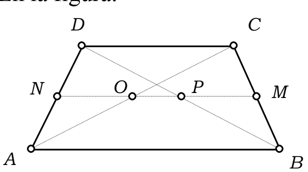
b. Probar que *PQ* y *RS* tienen el mismo punto medio, digamos *O*.

c. Si fijamos los puntos *A*, *B* y *N*, y variamos *D* y *C* manteniendo a *N* como el punto medio de *CD*, ¿qué puede uno decir acerca del punto *O* del problema del inciso b?

5.387. Demuestre que la recta que une los puntos medios de las diagonales de un trapecio es paralela a uno de los lados paralelos del mismo trapecio.

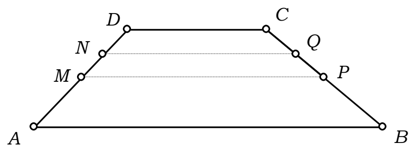
5.388. Si dos ángulos adyacentes que comparten uno de los lados paralelos de un trapecio son complementarios, probar que la longitud del segmento que une los puntos medios de los lados paralelos es igual a la mitad de la diferencia de las longitudes de los lados paralelos.

5.389. En la figura:



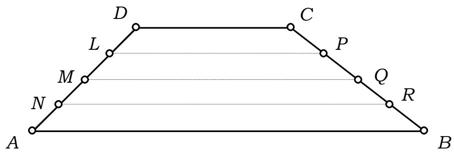
□*ABCD* es un trapecio con $AB \parallel CD$, y *M* y *N* son los puntos medios de *BC* y *AD*, respectivamente. Si $|MN| = 7$ y $|PO| = 3$, calcular la longitud de *AB* y *CD*.

5.390. En la figura:



tenemos que $\square ABCD$ es un trapecio con $AB \parallel CD$, y M, P, N y Q son los puntos medios de AD, BC, MD y PC, respectivamente. Si $|NQ| = 30$ y $|CD| = 20$, calcular la longitud de AB y MP.

5.391. En la figura:



tenemos un trapecio $\square ABCD$ cuyos lados no paralelos se han dividido en cuatro segmentos congruentes entre sí. Si $|DC| = 8$ y $|NR| = 20$, calcular la longitud de cada uno de los segmentos LP, MQ y AB.

5.392. Sean $\square ABCD$ un trapecio con $AB \parallel CD$, y M el punto medio de AB. Si E es el punto de intersección de DM y AC, y F es el punto de intersección de CM y BD, probar que $AB \parallel EF$.

5.393. Sean $\square ABCD$ un trapecio con $AB \parallel CD$, M y N los puntos medios de AD y BC, respectivamente, y P el punto de intersección de AC y MN. Pongamos $|MP| = x$ y $|PN| = y$. Si $|AB| = 3x + y - 5$ y $|DC| = x + y + 1$, calcular las longitudes de AB y DC.

5.394. Sean $\square ABCD$ un trapecio con $AB \parallel CD$, M y N los puntos medios de AD y BC, respectivamente, y P y Q los puntos de intersección de AC y BD con MN, respectivamente. Si $|MN| = 10$, $|PQ| = x + y$, $|AB| = 3x + 2y - 1$ y $|DC| = 2x + y$, calcular la longitud de PQ.

5.395. Sea $\square ABCD$ un trapecio tal que $AB \parallel CD$, $|AB| = 30$ y el segmento que une los puntos medios de sus diagonales tiene longitud 6. Calcular la longitud del lado CD.

5.396. Si en un cierto trapecio uno de los lados paralelos es el doble que el otro y el segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos tiene longitud 10, calcular las longitudes de los lados paralelos del trapecio.

5.397. Dados tres números reales positivos a, b y r, probar que una condición necesaria y suficiente para que exista un trapecio de lados paralelos a y b y con segmento medio r es que se cumpla la identidad $r = \frac{a+b}{2}$. ¿Cuántos trapecios con dicha propiedad pueden existir?

5.398. Sean $\square ABCD$ un trapecio con $AB \parallel CD$ y h la altura correspondiente a los lados paralelos. Si mantenemos las longitudes de los lados paralelos del trapecio y variamos h, ¿cómo varía la longitud del segmento medio del trapecio?

5.399. Sea $\square ABCD$ un trapecio con $AB \parallel CD$. Si $|AB| = 10$ y $|CD| = 7$, hallar la distancia entre los puntos medios de las diagonales del trapecio $\square ABCD$.

5.400. Probar que las diagonales de un trapecio con tres lados congruentes son las bisectrices de los ángulos adyacentes al cuarto lado.

5.401. Si las diagonales de un trapecio son congruentes y perpendiculares y la altura con respecto a sus lados paralelos es igual a 10, calcular la longitud del segmento que une los puntos medios de las diagonales del trapecio.

5.402. En un cierto trapecio $\square ABCD$, se cumple que $AB \parallel CD$, $|AB| = 2|BC|$ y $BC \cong CD \cong AD$. Si M es el punto medio de AB, probar que ΔMCD es un triángulo equilátero.

5.403. Sea $\square ABCD$ un trapecio tal que $AB \parallel CD$, $|AB| = 2|CD|$ y $BC \cong CD \cong AD$. Probar que AC y BC son perpendiculares.

5.404. Sea $\square ABCD$ un trapecio tal que $AB \parallel CD$, $CD \perp DA$, $m(\angle B) = 135$ y $m(\angle C) = 45$. Si M es el punto medio de DC, probar que $\square ABCM$ es un paralelogramo.

5.405. Sea $\square ABCD$ un trapecio con $AB \parallel CD$. Si el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos $\angle A$ y $\angle B$ yace en el lado CD, probar que $|CD| = |AD| + |BC|$.

5.406. Sea $\square ABCD$ un trapecio con $AB \parallel CD$ y $CD < AB$. Si $|CD| = |AD| + |BC|$, probar que el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos $\angle A$ y $\angle B$ está en CD.

5.407. Sea $\square ABCD$ un trapecio tal que $AB \parallel CD$ y $|AB| = 2|CD|$. Si M, N y O son los puntos medios de AB, BC y AC, respectivamente, probar que los cuadriláteros $\square AMDC$, $\square MBON$ y $\square NODC$ son paralelogramos.
5.408. Sean $\square ABCD$ un trapecio con $AB \parallel CD$ y $CD < AB$, y M el punto medio de AB. Probar que $|AB| = 2|CD|$ si y solo si $DA \cong CM \cong CB \cong DM$, $DA \parallel CM$ y $CB \parallel DM$.
5.409. Sea $\square ABCD$ un trapecio tal que $AB \parallel CD$ y $|AB| = 2|CD|$. Si M y N son los puntos medios de BC y AD, respectivamente, probar que las diagonales del trapecio trisecan a MN.
5.410. Sea $\square ABCD$ un trapecio con $AB \parallel CD$ y $CD < AB$. Sean E el punto de intersección de $\overleftrightarrow{CD}$ y la recta paralela a BC que pasa por A, y F el punto de intersección de $\overleftrightarrow{CD}$ y la recta paralela a DA que pasa por B. Probar que EF y DC tienen el mismo punto medio.
5.411. Probar que un cuadrilátero con diagonales congruentes y dos lados opuestos congruentes tiene que ser un trapecio isósceles.
5.412. Sean $\square ABCD$ un trapecio isósceles con $AB \parallel CD$, y O el punto de intersección de sus diagonales. Probar que $OA \cong OB$ y $OC \cong OD$.
5.413. Probar que un trapecio es isósceles si y solo si dos de sus ángulos opuestos son suplementarios.
5.414. Sean $\square ABCD$ un trapecio con $AB \parallel CD$, y M y N los puntos medios de AB y CD, respectivamente. Si la recta $\overleftrightarrow{MN}$ forma con las rectas $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{BC}$ dos ángulos congruentes, probar que el trapecio tiene que ser isósceles.
5.415. Sea $\square ABCD$ un trapecio isósceles con $AB \parallel CD$. Si uno de los ángulos del trapecio mide 60, probar que $|BC| = ||AB| - |CD||$.
5.416. Sea $\square ABCD$ un trapecio isósceles con $AB \parallel CD$ y $m(\angle C) = 2m(\angle A)$. Probar que $|AB| = |BC| + |CD|$.
5.417. Sean $\square ABCD$ un trapecio con $AB \parallel CD$, y P, Q, R y S los puntos medios de AB, BC, CD y DA, respectivamente. Probar que el trapecio $\square ABCD$ es isósceles si y solo si $\square PQRS$ es un rombo.
5.418. Si por los vértices de un trapecio trazamos rectas paralelas a sus diagonales, probar que el cuadrilátero que se forma es un paralelogramo. ¿En qué caso dicho paralelogramo resulta ser un rectángulo?
5.419. Probar que la mediatriz de uno de los lados paralelos de un trapecio isósceles pasa por el punto de intersección de las rectas que contienen a los lados no paralelos de dicho trapecio.
5.420. Probar que las mediatrices de los lados de un trapecio isósceles son concurrentes.
5.421. Sean $\square ABCD$ un trapecio isósceles con $AB \parallel CD$, y P, Q, R y S los puntos medios de AB, BC, CD y DA, respectivamente. Probar que los siguientes enunciados son equivalentes:

a. $\square PQRS$ es un cuadrado.
b. $AC \perp BD$.
c. La longitud de la altura correspondiente a los lados AB y CD es igual a $\dfrac{|AB|+|CD|}{2}$.

5.422. Sean $\square ABCD$ un trapecio isósceles con $AB \parallel CD$ y $AB > CD$, y H el pie de la altura del vértice D con respecto al lado AB. Probar las siguientes afirmaciones:

a. $|AH| = \dfrac{|AB|+|CD|}{2}$.
b. $|HB| = \dfrac{|AB|-|CD|}{2}$.
c. $\dfrac{|AB|+|CD|}{2} < |AC| = |BD|$.

5.423. Si en el trapecio isósceles $\square ABCD$ se cumple que $AB \parallel CD$, $m(\angle BAC) = 20$ y $m(\angle ADB) = 100$, calcular la medida de cada uno de los ángulos del trapecio.
5.424. Si un ángulo de cierto trapecio isósceles tiene media 80, calcular la medida de cada uno de los ángulos del trapecio.
5.425. Sean $\square ABCD$ un trapecio isósceles con $AB \parallel CD$, y O el punto de intersección de sus diagonales. Si $m(\angle AOB) = 120$ y $m(\angle CAD) = 40$, calcular la medida de cada uno de los ángulos del trapecio.
5.426. Sean $\square ABCD$ un trapecio isósceles con $AB \parallel CD$, y P el punto de intersección de las bisectrices de sus ángulos agudos. Si $m(\angle APB) = 40$, calcular la medida de cada uno de los ángulos del trapecio.

5.427. Sea $\square ABCD$ un trapecio isósceles tal que $AB \parallel CD$ y $CD < AB$. Si P es el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos agudos del trapecio y Q es el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos exteriores del trapecio con vértices A y B, probar que $\square AQPB$ es un cuadrado.
5.428. Sea $\square ABCD$ un trapecio isósceles tal que $AB \parallel CD$ y $BC \cong CD < AB \cong AC$. Calcular la medida de cada uno de los ángulos del trapecio.
5.429. Sea $\square ABCD$ un trapecio isósceles tal que $AB \parallel CD$, $BC \cong CD < AB$, y sus diagonales son perpendiculares a sus lados no paralelos. Calcular la medida de cada uno de los ángulos del trapecio.
5.430. Sea $\square ABCD$ un trapecio isósceles tal que $AB \parallel CD$ y $CD < AB \cong AC$. Si $m(\angle BAC) = 40$, calcular la medida de cada uno de los ángulos del trapecio.
5.431. Calcular la medida de cada uno de los ángulos de un trapecio isósceles sabiendo que sus ángulos obtusos son el doble que sus ángulos agudos.
5.432. Calcular las medidas de los ángulos de un trapecio isósceles $\square ABCD$ sabiendo que $AB \parallel CD$ y $|AB| = 2|CD| = |AD| + |BC|$.
5.433. La altura correspondiente a los lados paralelos de un trapecio isósceles forma con uno de los lados no paralelos un ángulo de medida 40. Calcular las medidas de los ángulos del trapecio.
5.434. Sean $\square ABCD$ un trapecio isósceles con $AB \parallel CD$ y $AB > CD$, y O el punto de intersección de sus diagonales. Sean L y M las proyecciones de D y C sobre la recta $\overleftrightarrow{AB}$, respectivamente. Si P y Q son las intersecciones de DL y AC, y CM y BD, respectivamente, probar que O es el punto medio de PC y QD.
5.435. ¿Puede un trapecio rectangular tener sus diagonales congruentes?
5.436. Si el ángulo más pequeño de un trapecio rectangular mide 80, ¿cuánto mide su ángulo mayor?
5.437. Si $\square ABCD$ es un trapecio rectangular en $\angle A$ tal que $AB \parallel CD$, $AD \cong CD$ y $AC \cong AB$, calcular la medida de cada uno de los ángulos del trapecio.
5.438. Sea $\square ABCD$ un trapecio rectangular en $\angle A$ con $AB \parallel CD$. Si $AD \cong CD$ y $AC \cong BC$, calcular la medida de cada uno de los ángulos del trapecio.
5.439. Si $\square ABCD$ es un trapecio rectangular en $\angle A$ tal que $AB \parallel CD$, $AD \cong CD$, probar que AB y BC no pueden ser congruentes.
5.440. Sea $\square ABCD$ un trapecio rectangular en $\angle A$ con $AB \parallel CD$. Si $|AD| = |CD|$ y $|AB| = 2|CD|$, calcular la medida de cada uno de los ángulos del trapecio.
5.441. Sea $\square ABCD$ un trapecio rectangular en $\angle A$ con $AB \parallel CD$. Si $|AD| = |CD|$ y $|AB| = 3|CD|$, calcular la medida de cada uno de los ángulos del trapecio.
5.442. Sea $\square ABCD$ un trapecio rectangular en $\angle A$ con $AB \parallel CD$. Si $CD \cong BC$ y $|AB| = 2|CD|$, probar que $AC \cong BC$ y calcular la medida de cada uno de los ángulos del trapecio.
5.443. Si $\square ABCD$ es un trapecio rectangular en $\angle A$ tal que $AB \parallel CD$, ¿puede ser el triángulo ΔABC equilátero?
5.444. Sea $\square ABCD$ un trapecio rectangular en $\angle A$ con $AB \parallel CD$. Si $AB \cong BC$ y $|AB| = 2|CD|$, calcular la medida de cada uno de los ángulos del trapecio.
5.445. Si $\square ABCD$ es un trapecio rectangular en $\angle A$ tal que $AB \parallel CD$, y uno de sus ángulos mide 45, probar que $|AD| = ||AB| - |CD||$.
5.446. Sea $\square ABCD$ un trapecio rectangular en $\angle A$ tal que $AB \parallel CD$. Si M es el punto medio de BC, probar que $AM \cong DM$.
5.447. Sea $\square ABCD$ un trapecio tal que $AB \parallel CD$. Probar que la bisectriz del ángulo $\angle A$ corta CD si y solo si $AD < DC$.
5.448. Sea $\square ABCD$ es un trapecio rectangular en $\angle A$ tal que $AB \parallel CD$, $AB > DC$ y $AB \cong BC$ Si P un punto en la recta que contiene a la bisectriz del ángulo $\angle B$, y Q la proyección de P sobre la recta $\overleftrightarrow{AD}$, probar que $PQ < CP$.
5.449. Sean AB, AC y AD tres segmentos congruentes entre sí. Si $\angle DCB$ es un ángulo recto, probar que A, B y D tienen que ser colineales.
5.450. Sean l y m dos rectas perpendiculares que se cortan en el punto O y $P \notin l \cup m$. Si P' es el punto simétrico de P con respecto a la recta l, y P'' es el punto simétrico de P con respecto a la recta m, probar que P', O y P'' son colineales.

5.451. Sea $\angle AOB$ un ángulo recto. Si *A'* es el punto simétrico de *A* con respecto a la recta $\overleftrightarrow{OB}$ y *B'* es el punto simétrico de *B* con respecto a la recta $\overleftrightarrow{OA}$, ¿qué tipo de cuadrilátero es $\square ABA'B'$? Probar que los puntos de uno de los lados del cuadrilátero $\square ABA'B'$ son los puntos simétricos de su lado opuesto con respecto al punto *O*.

5.452. Sea $\square ABCD$ un rombo tal que $m(\angle A) = 60$. Sean *C'* y *D'* los puntos simétricos de *C* y *D* con respecto a la recta $\overleftrightarrow{AB}$. Probar las siguientes afirmaciones.

a. $\square ABCD \cong \square ABC'D'$.

b. $\Delta ADD'$ es un triángulo equilátero.

c. $\square CDD'C'$ es un rectángulo.

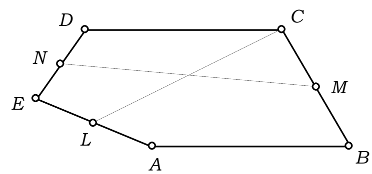
d. $\square ACD'C'$ es un trapecio isósceles.

5.453. Sea *AB* un segmento. Si *M* y *N* son dos puntos en el semiplano determinado por la mediatriz del segmento *AB* que contiene al punto *B* tal que $\square ABMN$ es un cuadrilátero convexo, probar que

$$|AM| - |BM| > |AN| - |BN| > 0.$$

5.454. Sean *A*, *B*, *C* y *D* cuatro puntos en el plano. Designemos por *M*, *N*, *P*, *Q*, *R* y *S* a los puntos medios de *AB*, *CD*, *AC*, *BD*, *AD* y *BC*, respectivamente. Probar que los segmentos *MN*, *PQ* y *RS* tienen el mismo punto medio.

5.455. En la figura:

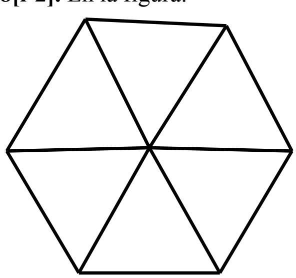


tenemos que $AB \parallel CD$ y $AB \cong CD$. Si *L*, *M* y *N* son los puntos medios de *BC*, *DE* y *EA*, respectivamente, probar que *MN* y *CL* se bisecan entre sí.

5.456[l-311]. Cada lado de un cuadrado se ha dividido en *k* segmentos congruentes entre sí, en donde *k* es un número entero positivo; ¿cuántos triángulos se pueden formar cuyos vértices sean los puntos de división?

5.457[l-311]. Los lados de un paralelogramo se cortan por dos series de rectas paralelas a sus lados. Si cada uno de los lados del paralelogramo ha quedado dividido en *k* segmentos congruentes entre sí, en donde *k* es un número entero positivo, ¿cuántos paralelogramos hay en la nueva figura?

5.458[i-2]. En la figura:



tenemos 12 palillos.

a. Quitar dos palillos, de tal forma que queden exactamente cuatro triángulos congruentes.

b. Quitar dos palillos, de tal forma que queden tres triángulos congruentes y dos paralelogramos congruentes.

c. Quitar dos palillos, de tal forma que queden dos triángulos congruentes y dos paralelogramos congruentes.

d. Quitar dos palillos, de tal forma que queden exactamente tres triángulos congruentes y un paralelogramo.

Los libros [l-29] y [l-119] ofrecen varios juegos de ingenio usando palillos.

5.459[a-156]. Probar cada uno de los siguientes criterios de congruencia para cuadriláteros especiales.

a.**[*L*]** Si dos cuadrados tienen un lado congruente, entonces son congruentes.

b.**[*D*]** Si una diagonal de un cuadrado es congruente a la diagonal de otro cuadrado, entonces los cuadrados son congruentes.

c.**[*LL*]** Si dos lados adyacentes de un rectángulo son congruentes a dos lados adyacentes de otro rectángulo, entonces los dos rectángulos son congruentes.

d.**[*LD*]** Si un lado y una diagonal de un rectángulo son congruentes a un lado y a una diagonal de otro rectángulo, entonces los dos rectángulos son congruentes.

e.**[*LA*]** Si un lado y el ángulo formado por el lado y la diagonal de un rectángulo son congruentes al lado correspondiente y al ángulo correspondiente de otro rectángulo, entonces los dos rectángulos son congruentes.

f.**[*DA*]** Si una diagonal y el ángulo formado por la diagonal y el lado adyacente de un rectángulo son congruentes a la diagonal correspondiente y al ángulo correspondiente de otro rectángulo, entonces los dos rectángulos son congruentes.

g.**[*LAL*]** Si dos lados y el ángulo comprendido de un paralelogramo son congruentes a dos lados y al ángulo comprendido de otro paralelogramo, entonces los dos paralelogramos son congruentes.

h.**[*LAD*]** Si un lado, una diagonal y el ángulo formado por el lado y la diagonal de un paralelogramo son congruentes a un lado, a una diagonal y al ángulo formado por el lado y la diagonal de otro paralelogramo, entonces los dos paralelogramos son congruentes.

i.**[*DAD*]** Si las diagonales y el ángulo formado por ellas de un paralelogramo son congruentes a las diagonales y al ángulo formado por estas de otro paralelogramo, entonces los dos paralelogramos son congruentes.

j.**[*LLD*]** Si dos lados adyacentes y la diagonal comprendida entre ellos de un paralelogramo son congruentes a dos lados adyacentes y a la diagonal comprendida entre estos de otro paralelogramo, entonces los dos paralelogramos son congruentes.

k.**[*LA*]** Si un lado y un ángulo de un rombo son congruentes a un lado y un ángulo de otro rombo, entonces los dos rombos son congruentes.

l.**[*LD*]** Si un lado y una diagonal de un rombo son congruentes a un lado y una diagonal de otro rombo, entonces los dos rombos son congruentes.

m.**[*DD*]** Si las diagonales de un rombo son congruentes a las diagonales de otro rombo, entonces los dos rombos son congruentes.

n.**[*DA*]** Si una diagonal y un ángulo de un rombo son congruentes a la correspondiente diagonal y al correspondiente ángulo de otro rombo, entonces los dos rombos son congruentes.

5.460. Probar que dos rombos son congruentes si y solo si las distancias entre las intersecciones de sus diagonales a cualquier punto medio de cualquiera de sus lados son iguales.

5.461. Sean $\square ABCD$ y $\square A'B'C'D'$ dos cuadriláteros y P, Q, R y S los puntos medios de los lados del primero y P', Q', R' y C' los puntos medios de los lados del segundo. Si $\square ABCD \cong \square A'B'C'D'$, probar lo siguiente:

a. $\square PQRS \cong \square P'Q'R'D'$.

b. $PR \cong P'R'$ y $QS \cong Q'S'$.

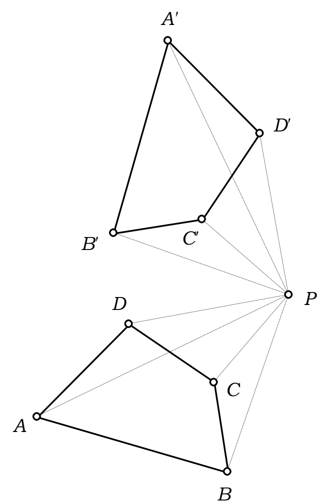
5.462. Sean $\square ABCD$ y $\square A'B'C'D'$ dos cuadriláteros tales que $AB \cong A'B'$, $DC \cong D'C'$, $\angle CAB \cong \angle C'A'B'$, $\angle ABD \cong \angle A'B'D'$, $\angle BDC \cong \angle B'D'C'$ y $\angle DCA \cong \angle D'C'A'$. Probar que $\square ABCD \cong \square A'B'C'D'$.

5.463. Sean $\square ABCD$ y $\square A'B'C'D'$ dos cuadriláteros tales que $\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$, $\angle C \cong \angle C'$, $\angle D \cong \angle D'$, $AB \cong A'B'$ y $DC \cong D'C'$. Si las rectas $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{BC}$ se cortan, probar que $\square ABCD \cong \square A'B'C'D'$.

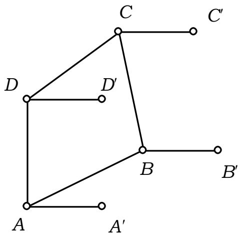
5.464. Sean $\square ABCD$ y $\square A'B'C'D'$ dos cuadriláteros tales que $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$, $CD \cong C'D'$, $DA \cong D'A'$ y $AC \cong A'C'$. Probar que $\angle A \cong \angle A'$ y $BD \cong B'D'$.

5.465. En la figura:

$\square ABCD$ es un cuadrilátero y P es un punto arbitrario. Si $AP \cong A'P$, $BP \cong B'P$, $CP \cong C'P$, $DP \cong D'P$, $AP \perp A'P$, $BP \perp B'P$, $CP \perp C'P$ y $DP \perp D'P$, probar que $\square ABCD \cong \square A'B'C'D'$.

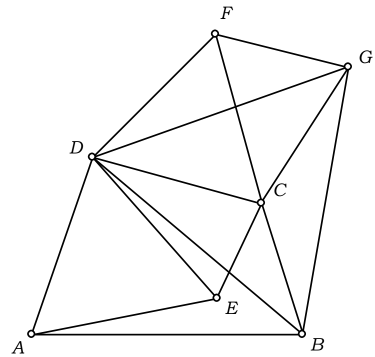


5.466. En la figura:



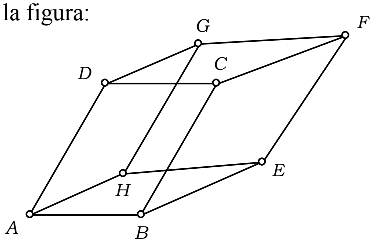
$\square ABCD$ es cualquier cuadrilátero y AA', BB', CC' y DD' son segmentos congruentes entre sí con una misma dirección. Probar que $\square ABCD \cong \square A'B'C'D'$.

5.467[I-240]. En la figura:



$\square ABCD$ es un cuadrilátero cualquiera y los triángulos ΔEDA, ΔGDB y ΔFDC son isósceles. Probar que $\square ABCD \cong \square DEGF$.

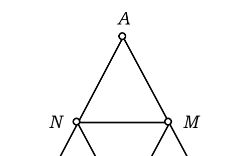
5.468. En la figura:



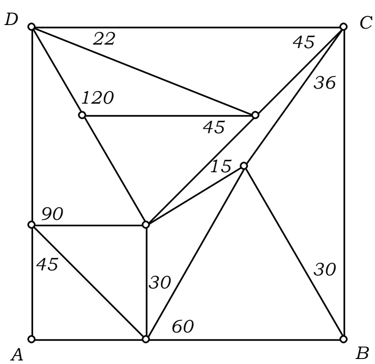
si $\square ABCD$, $\square BEFC$ y $\square AHGD$ son paralelogramos, probar que $\square ABEH \cong \square CFGD$.

5.469. En la figura:

si $\square BLMN$ y $\square LCMN$ son dos paralelogramos tales que $BN \cong CM$. Probar que ΔABC es un triángulo isósceles.

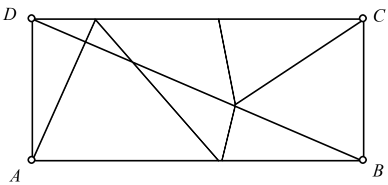


5.470. En la figura:



$\square ABCD$ es un cuadrado que ésta dividido en triángulos. Con las medidas que se dan de algunos de los ángulos de los triángulos que dividen al cuadrado, encontrar las medidas de los ángulos de cada uno de dichos triángulos. Decir cuántos triángulos isósceles, equiláteros y escalenos hay.

5.471. En la figura:



marcar sobre las líneas el camino más largo entre los vértices A y B del rectángulo.

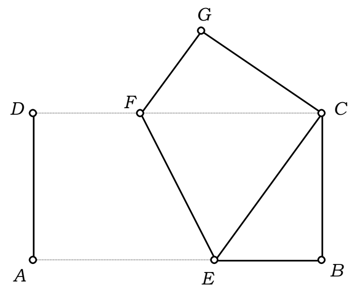
5.472. Mediante dobleces de una hoja de papel, marcar sobre la misma un rectángulo; un cuadrado y un papalote.

5.473. ¿Se puede dividir una hoja de papel rectangular en tres tiras iguales con un solo corte de tijera?

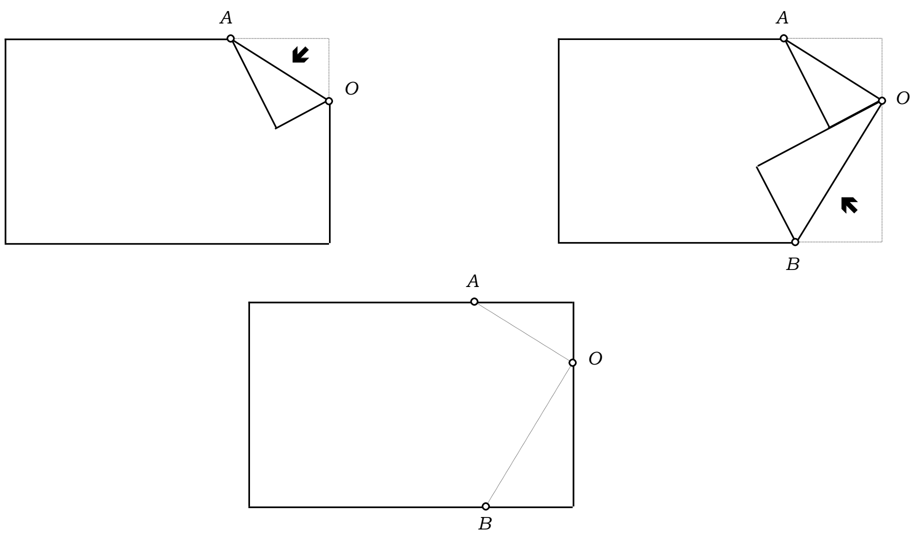
5.474. ¿De cuántas maneras distintas se puede cortar un rectángulo de papel con un solo corte de tijera?

5.475. En la figura:

una hoja rectangular de papel se ha doblado como indica el dibujo. Si $m(\angle CEF) = 55$, hallar la medida del ángulo $\angle FCE$.

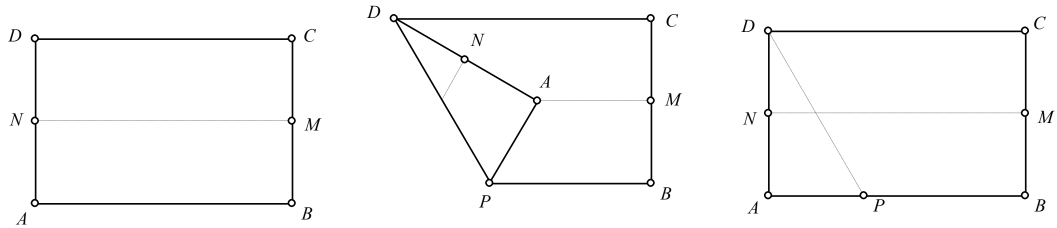


5.476. En la figura:



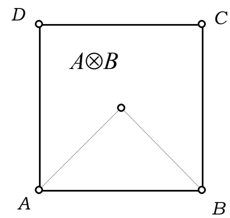
tenemos una hoja de papel rectangular. Doblamos una de sus esquinas de manera arbitraria a lo largo de OA, y en la esquina siguiente hacemos un doblez como lo muestra la figura a lo largo de OB. Si desdoblamos la hoja, obtenemos un ángulo $\angle AOB$ marcado sobre ella. Probar que $\angle AOB$ es siempre un ángulo recto que no depende del primer doblez que se hizo.

5.477[I-49]. En la figura:



tenemos una hoja de papel rectangular que la doblamos por la mitad haciendo coincidir el lado AB y DC. Posteriormente, la doblamos de tal manera que el vértice A caiga sobre el segmento marcado MN marcándose de esta forma un punto P sobre el lado AB. Probar que $m(\angle ADC) = 30$. Finalmente, desdoblamos la hoja. Probar que $m(\angle PDC) = 60$.

5.478. En el artículo [a-130], el autor consideró la siguiente operación en el plano:



si A y B son dos puntos en el plano, sabemos (ver Problema 11.206) que existe un único punto $A \otimes B$ tal que $A \otimes B$ es el punto donde se intersecan las diagonales del cuadrado de lado AB, orientando los puntos A, B y $A \otimes B$ en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Probar las siguientes afirmaciones:

a. $A \otimes B \neq B \otimes A$, para cualquier par de puntos A y B.

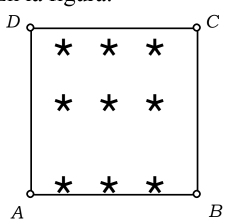
b. Los puntos A, B, $A \otimes B$ y $B \otimes A$ son los lados de un cuadrado, para cualquier par de puntos A y B.

c. $(A \otimes B) \otimes (B \otimes A) = B$ y $(B \otimes A) \otimes (A \otimes B) = A$, para cualquier par de puntos A y B.

Recordemos la operación introducida en el Problema 4.312: si A y B son dos puntos en el plano, $A \bullet B$ = punto medio del segmento AB.

d. $(C \otimes A) \otimes (B \otimes C) = A \bullet B$, para cualquier terna de puntos A, B y C.

5.479. En la figura:



sea $\square ABCD$ un cuadrado. Trazar dos cuadrados dentro de $\square ABCD$ de tal forma que todas las estrellas queden separadas, es decir, cada una de las estrellas quede en una y solo una de las regiones determinadas por los dos cuadrados que se tracen.

5.480[I-220]. Un subconjunto X del plano se llama *estrellado* con respecto a un punto P si para cada punto $A \in X$ se cumple la contención $PA \subseteq X$.

a. Probar que un conjunto de puntos del plano es convexo si y solo si es estrellado con respecto a cualquiera de sus puntos.

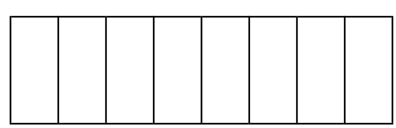
b. Dar un ejemplo de un conjunto estrellado que no sea convexo.

c. Probar que la unión de dos subconjuntos estrellados con respecto a un mismo punto es también un conjunto estrellado con respecto a un mismo punto.

d. Probar que la intersección de dos conjuntos estrellados con respecto a un mismo punto es también un conjunto estrellado con respecto a un mismo punto.

e. ¿Es la intersección de dos conjuntos estrellados un conjunto estrellado?

5.481. Una hoja de papel rectangular es doblada en sí misma cierto número de veces. Cuando se desdobla los dobleces quedan marcados tal y como lo indica la figura de la derecha. ¿Cuál es el mínimo número de veces que la hoja fue doblada?



CAPÍTULO 6

PROPORCIONALIDAD Y SEMEJANZA

6.1. Segmentos proporcionales

Empezamos con la definición esencial de este capítulo.

6.1.1. Definición. Decimos que dos segmentos AB y CD son *proporcionales* a dos segmentos $A'B'$ y $C'D'$ si

$$\frac{|AB|}{|CD|}=\frac{|A'B'|}{|C'D'|}.$$

Veamos a continuación algunas propiedades básicas de los pares de segmentos proporcionales.

6.1.2. Lema. Si los segmentos AB y CD son proporcionales a los segmentos $A'B'$ y $C'D'$, entonces AB y $A'B'$ son proporcionales a los segmentos CD y $C'D'$.

Prueba: De $\frac{|AB|}{|CD|}=\frac{|A'B'|}{|C'D'|}$ se obtiene la identidad $\frac{|AB|}{|A'B'|}=\frac{|CD|}{|C'D'|}$. ♣

6.1.3. Lema. Sean A, B y C, y A', B' y C' dos hileras de puntos consecutivos. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $\frac{|AB|}{|BC|}=\frac{|A'B'|}{|B'C'|}$.
2. $\frac{|AC|}{|BC|}=\frac{|A'C'|}{|B'C'|}$.
3. $\frac{|AC|}{|AB|}=\frac{|A'C'|}{|A'B'|}$.

Prueba: Basta probar la equivalencia entre las dos primeras condiciones. En efecto, tenemos que

$$\frac{|AB|}{|BC|}=\frac{|A'B'|}{|B'C'|}\Leftrightarrow\frac{|AC|}{|BC|}=\frac{|AB|+|BC|}{|BC|}=\frac{|AB|}{|BC|}+1=\frac{|A'B'|}{|B'C'|}+1=\frac{|A'B'|+|B'C'|}{|B'C'|}=\frac{|A'C'|}{|B'C'|}.\ ♣$$

6.1.4. Lema. Sean A, B, C y D, y A', B', C' y D' dos hileras de puntos consecutivos. Si $\frac{|AB|}{|A'B'|}=\frac{|BC|}{|B'C'|}=\frac{|CD|}{|C'D'|}$, entonces $\frac{|AB|}{|A'B'|}=\frac{|AC|}{|A'C'|}=\frac{|BD|}{|B'D'|}=\frac{|AD|}{|A'D'|}$.

Prueba: Usaremos el siguiente hecho algebraico cuya demostración se deja al lector:

(*) Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, entonces $\frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+d}$.

Por hipótesis, sabemos que $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CD|}{|C'D'|}$. Del Axioma AM y (*) se sigue que

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|AB|+|BC|}{|A'B'|+|B'C'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|},\ \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|BC|+|CD|}{|B'C'|+|C'D'|} = \frac{|BD|}{|B'D'|} \text{ y}$$

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BD|}{|B'D'|} = \frac{|AB|+|BD|}{|A'B'|+|B'D'|} = \frac{|AD|}{|A'D'|}. \clubsuit$$

Nuestra primera definición se puede extender a más puntos de la siguiente manera:

6.1.5. Definición. Sea $k > 2$ un número entero positivo y sean $A_1, A_2, \ldots, A_k$ y $B_1, B_2, \ldots, B_k$ dos hileras de puntos consecutivos. Decimos que $A_1, A_2, \ldots, A_k$ y $B_1, B_2, \ldots, B_k$ son *proporcionales* si

$$\frac{|A_1A_2|}{|B_1B_2|} = \frac{|A_2A_3|}{|B_2B_3|} = \ldots = \frac{|A_{k-1}A_k|}{|B_{k-1}B_k|}.$$

6.1.6. Lema. Si $A_1, A_2, \ldots, A_k$ y $B_1, B_2, \ldots, B_k$ son dos hileras de puntos proporcionales, entonces

$$\frac{|A_1A_2|}{|B_1B_2|} = \frac{|A_1A_k|}{|B_1B_k|}.$$

Prueba: Procedamos por inducción en k. El Lema 6.1.3 coincide con el caso $k = 3$ y el Lema 6.1.4 establece el caso cuando $k = 4$. Supongamos que se cumple para $k > 4$. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_{k+1}$ y $B_1, B_2, \ldots, B_{k+1}$ dos hileras de puntos proporcionales. Por hipótesis de inducción, sabemos que $\frac{|A_1A_2|}{|B_1B_2|} = \frac{|A_1A_k|}{|B_1B_k|}$, puesto que $A_1, A_2, \ldots, A_k$ y $B_1, B_2, \ldots, B_k$ dos hileras de puntos proporcionales. Pero como la igualdad $\frac{|A_1A_2|}{|B_1B_2|} = \frac{|A_kA_{k+1}|}{|B_kB_{k+1}|}$ se cumple, tenemos entonces que $\frac{|A_1A_k|}{|B_1B_k|} = \frac{|A_kA_{k+1}|}{|B_kB_{k+1}|}$. Según la afirmación (*) de la prueba del Lema 6.1.4, concluimos que $\frac{|A_1A_2|}{|B_1B_2|} = \frac{|A_1A_{k+1}|}{|B_1B_{k+1}|}$ tal como se requería. $\clubsuit$

6.1.7. Teorema. Si $A_1, A_2, \ldots, A_k$ y $B_1, B_2, \ldots, B_k$ son dos hileras de puntos proporcionales, entonces

$$\frac{|A_1A_2|}{|B_1B_2|} = \frac{|A_iA_j|}{|B_iB_j|} \text{ para todo } 1 \le i < j \le k.$$

Prueba: La demostración es por inducción matemática. Para $k = 3$, la conclusión es consecuencia directa del Lema 6.1.6. Supongamos que se cumplen las identidades para el número entero $k > 3$. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_{k+1}$ y $B_1, B_2, \ldots, B_{k+1}$ son dos hileras de puntos proporcionales. Como $A_1, A_2, \ldots, A_k$ y $B_1, B_2, \ldots, B_k$ también forman dos hileras de puntos proporcionales, por hipótesis de inducción, hallamos que $\frac{|A_1A_2|}{|B_1B_2|} = \frac{|A_iA_j|}{|B_iB_j|}$ para todo $1 \le i < j \le k$. De la misma manera, se tiene que $\frac{|A_2A_3|}{|B_2B_3|} = \frac{|A_iA_j|}{|B_iB_j|}$, para todo $2 \le i < j \le k + 1$. Por otra parte, sabemos que $\frac{|A_1A_2|}{|B_1B_2|} = \frac{|A_kA_{k+1}|}{|B_kB_{k+1}|}$. De acuerdo con el Lema 6.1.6, la igualdad $\frac{|A_1A_2|}{|B_1B_2|} = \frac{|A_1A_{k+1}|}{|B_1B_{k+1}|}$

también se cumple. Por lo tanto, $\dfrac{|A_1A_2|}{|B_1B_2|} = \dfrac{|A_iA_j|}{|B_iB_j|}$ siempre que $1 \leq i < j \leq k+1$. ♣

6.1.8. Lema. Sean AB un segmento, y $M, N \in AB$. Si $\dfrac{|AM|}{|MB|} = \dfrac{|AN|}{|NB|}$, entonces $M = N$.

Prueba. Según el Lema 6.1.3, sabemos que $\dfrac{|AM|}{|AB|} = \dfrac{|AN|}{|AB|}$ y, por tanto, $|AM| = |AN|$. Del Axioma CS_2 concluimos que $M = N$, pues M y N están en un mismo lado de la recta $\overleftrightarrow{AB}$ con respecto al punto A. ♣

Si los puntos M y N están en la recta $\overleftrightarrow{AB}$ pero fuera del segmento AB, también se cumple la conclusión del Lema 6.1.8 como a continuación veremos.

6.1.9. Lema. Sean A y B dos puntos en el plano. Si $M, N \in \overleftrightarrow{AB} - AB$ y $\dfrac{|AM|}{|MB|} = \dfrac{|AN|}{|NB|}$, entonces $M = N$.

Prueba: Primero veremos que M y N tienen que estar del mismo lado de la recta $\overleftrightarrow{AB}$ con respecto al punto A. Si esto no es cierto, entonces tenemos dos posibilidades: M precede a A y B precede a N en la recta $\overleftrightarrow{AB}$, o N precede a A y B precede a M en la recta $\overleftrightarrow{AB}$:

Figura 6.1

Si M precede a A y B precede a N en la recta $\overleftrightarrow{AB}$, según el Teorema 1.9.4, hallamos que $|AM| < |MB|$ y $|NB| < |AN|$. Por consiguiente, $\dfrac{|AM|}{|MB|} < 1$ y $\dfrac{|AN|}{|NB|} > 1$, lo cual contradice nuestra hipótesis. Una contradicción similar se obtiene al suponer que N precede a A y B precede a M en la recta $\overleftrightarrow{AB}$. Así, debemos tener que M y N están en el mismo lado de la recta $\overleftrightarrow{AB}$ con respecto al punto A. Sin perder generalidad, supongamos que M precede a N sobre la recta $\overleftrightarrow{AB}$:

Figura 6.2

Si N precede a A en la recta $\overleftrightarrow{AB}$, entonces, por el Lema 6.1.3, $\dfrac{|AM|}{|AB|} = \dfrac{|AN|}{|AB|}$ y, por tanto, $|AM| = |AN|$. El Axioma CS_2 nos segura que los puntos M y N son el mismo. Un argumento similar aplicado a la suposición de que B precede a M en la recta $\overleftrightarrow{AB}$ nos conduce también a la igualdad $M = N$. ♣

Si el orden de los factores que aparecen en el Teorema 6.1.8 se cambia, entonces no se cumple la igualdad de los puntos en cuestión. Por ejemplo, si $M, N \in AB$ trisecan al segmento AB, entonces $\dfrac{|MB|}{|AM|} = \dfrac{|AN|}{|NB|}$ y $M \neq N$.

6.1.10. Teorema. Si una recta corta a tres o más rectas paralelas, de tal modo que se formen segmentos congruentes entre sí, entonces cualquier otra recta transversal corta a las rectas paralelas en segmentos congruentes entre sí.

Prueba: Basta probar el resultado para cuatro rectas paralelas, pues para tres rectas se procede de manera similar y, posteriormente, se aplica inducción. Sean l_1, l_2, l_3 y l_4 cuatro rectas paralelas cortadas por una recta transversal *m* en los puntos *A*, *B*, *C* y *D*, respectivamente, de tal forma que $AB \cong CD$. Sea *n* una segunda recta que corte a las cuatro rectas l_1, l_2, l_3 y l_4 en los puntos *A*', *B*', *C*' y *D*', respectivamente. Supondremos que las rectas *m* y *n* no son paralelas, dejando al lector que verifique la prueba en el caso que lo sean. De acuerdo con el Corolario 3.7.5, podemos trazar rectas paralelas a *m*, y que pasen por los puntos *A*' y *C*' y corten a las rectas l_2 y l_4 en los puntos *P* y *Q*, respectivamente.

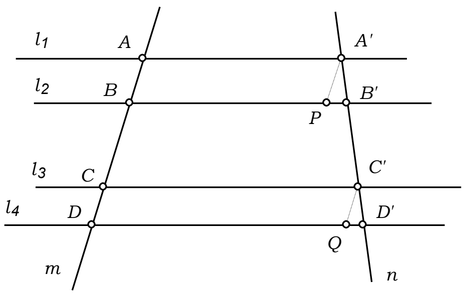


Figura 6.3

Por el Teorema 3.4.10 y nuestra suposición, sabemos que $A'P \cong AB \cong CD \cong C'Q$. Por otra parte, con base en el Teorema 3.4.6,

$$\angle B'PA' \cong \angle B'BA \cong \angle D'QC' \cong \angle D'DC,$$

y, de igual modo, hallamos que $\angle A'B'P \cong \angle C'D'Q$. De aquí se sigue, por el criterio *AAL* (3.5.1), que los triángulos $\Delta A'PB'$ y $\Delta C'QD'$ son congruentes. Por lo tanto, $A'B' \cong C'D'$, lo cual se quería probar . ♣

El Teorema anterior nos proporciona un método geométrico para dividir cualquier segmento en un determinado número de partes iguales.

6.1.11. Construcción. Dividir un segmento en *k* partes iguales, en donde $k > 2$ es un número entero.

Prueba: Sea *AB* un segmento. Por el punto *A* trazamos una recta *l* diferente de la recta $\overleftrightarrow{AB}$. Sobre un mismo lado de la recta *l* con respecto al punto *A* trazamos *k* puntos A_1, A_2, $A_3, \ldots, A_k$ tales que $AA_1 \cong A_1A_2 \cong A_2A_3 \cong \ldots \cong A_{k-1}A_k$ (esto es posible de hacer por el Axioma CS_2 tomando cualquier segmento como base). Basándonos en el Corolario 3.7.5, por cada punto A_i trazamos una recta l_i paralela a $\overleftrightarrow{BA_k}$, con $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Sea B_i el punto de intersección de l_i y *AB*, para cada $i = 1, 2, \ldots, k-1$ (figura 6. 4). De acuerdo con el Teorema 6.1.10, concluimos que

$$AB_1 \cong B_1B_2 \cong B_2B_3 \cong \ldots \cong B_{k-1}B. \text{ ♣}$$

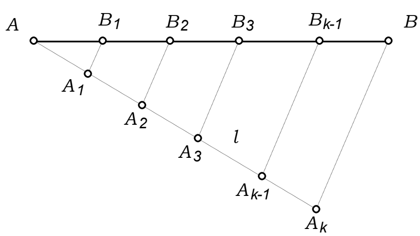


Figura 6.4

6.1.12. Definición. Decimos que dos segmentos *AB* y *CD* son *conmensurables* si $\frac{|AB|}{|CD|}$ es un número racional. Si *AB* y *CD* no son conmensurables, entonces decimos que son *inconmensurables*.

Sean *AB* y *CD* dos segmentos conmensurables. Si $\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{p}{q}$, en donde *p* y *q* son números enteros positivos, entonces $r = \dfrac{|AB|}{p} = \dfrac{|CD|}{q}$. De aquí podemos ver que los segmentos AB y CD se pueden dividir en p segmentos y q segmentos congruentes entre sí, respectivamente, cada uno de los cuales tiene longitud r. Esta es una característica muy importante de los segmentos conmensurables que usaremos en el siguiente teorema.

6.1.13. Teorema de la Proporción Triangular. Si una recta paralela a uno de los lados de un triángulo corta a los otros dos lados del mismo triángulo, entonces los dos segmentos que se forman en uno de estos dos lados son proporcionales a los dos segmentos que se forman en el segundo de dichos lados.

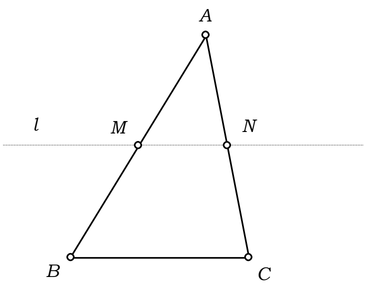


Figura 6.5

Prueba: Sean ΔABC un triángulo y l una recta paralela a $\overleftrightarrow{BC}$ que corta a AB y AC en los puntos M y N, respectivamente. Supongamos primero que los segmentos AM y MB son conmensurables. Entonces, tenemos que $\dfrac{|AM|}{|MB|} = \dfrac{p}{q}$, en donde p y q son números enteros positivos. Por consiguiente, podemos dividir a los segmentos AM y MB en p y q segmentos congruentes entre sí, respectivamente, de longitud igual a $r = \dfrac{|AM|}{p} = \dfrac{|MB|}{q}$. Trazamos rectas paralelas a l que pasen por los puntos que dividen a los segmentos AM y MB. Por el Teorema 6.1.10, dichas rectas dividen a los segmentos AN y NC en p y q segmentos congruentes entre sí, respectivamente, cada uno de los cuales tiene longitud $\dfrac{|AN|}{p} = \dfrac{|NC|}{q}$. De donde hallamos que $\dfrac{|AM|}{|MB|} = \dfrac{|AN|}{|NC|} = \dfrac{p}{q}$. Ahora supongamos que los segmentos AM y MB son inconmensurables. Fijemos un número entero positivo p. Con base en la Construcción 6.1.11, procedemos a dividir el segmento AM en p segmentos congruentes entre sí de longitud $r = \dfrac{|AM|}{p}$. Se cumple entonces que $|AM| = pr$. Tomemos un número entero positivo q tal que $qr < |MB| < (q+1)r$. Entonces, tenemos que

$$\frac{qr}{pr} < \frac{|MB|}{|AM|} < \frac{(q+1)r}{pr}$$

$$\frac{q}{p} < \frac{|MB|}{|AM|} < \frac{(q+1)}{p}.$$

Trazamos rectas paralelas a l por cada uno de los puntos en que fue dividido el segmento AM. Por el Teorema 6.1.10, el segmento AN también queda dividido en segmentos de longitud s, de tal forma que $|AN| = ps$ y, además, se cumple que $qs < |NC| < (q+1)s$. Por consiguiente,

$$\frac{q}{p} < \frac{|NC|}{|AN|} < \frac{(q+1)}{p},$$

de donde hallamos la desigualdad

$$\left| \frac{|MB|}{|AM|} - \frac{|NC|}{|AN|} \right| < \frac{1}{p}.$$

Pero como p es un entero positivo arbitrario, se sigue que $\dfrac{|MB|}{|AM|} = \dfrac{|NC|}{|AN|}$. Es decir, los segmentos AM y MB son proporcionales a los segmentos AN y NC. Del Lema 6.1.3, podemos ver que también se cumplen las identidades

$$\frac{|AM|}{|AB|} = \frac{|AN|}{|AC|} \text{ y } \frac{|MB|}{|AB|} = \frac{|NC|}{|AC|}. \clubsuit$$

A continuación, veremos que el recíproco del Teorema de la Proporción Triangular se cumple.

6.1.14. Teorema. Si una recta corta a dos lados de un triángulo en partes proporcionales, entonces dicha recta es paralela al tercer lado.

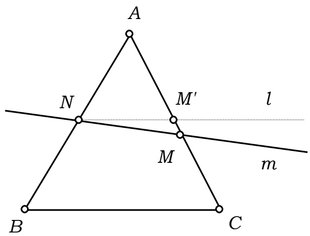


Figura 6.6

Prueba: Sean ΔABC un triángulo y *m* una recta que corta a *AC* y *AB* en los puntos *M* y *N*, respectivamente, de tal forma que $\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{|AN|}{|NB|}$. Sea *l* la recta paralela a *BC* que pasa por *N* y corta a *AC* en el punto *M*'. Por el Teorema de la Proporción Triangular (6.1.13), sabemos que $\frac{|AM'|}{|M'C|} = \frac{|AN|}{|NB|}$. Pero como $\frac{|AN|}{|NB|} = \frac{|AM|}{|MC|} = \frac{|AM'|}{|M'C|}$, del Lema 6.1.8 hallamos que $M = M'$. Con esto probamos que la recta $\overleftrightarrow{MN}$ es paralela a *BC*. ♣

6.1.15. Teorema. Si una recta es paralela a un lado de un triángulo y corta a las dos rectas que contienen a cada uno de los otros dos lados del mismo, entonces los dos segmentos que se forman en una de dichas rectas son proporcionales a los dos segmentos que se forman en la segunda de ellas.

Prueba. Sean ΔABC un triángulo y *l* una recta paralela a $\overleftrightarrow{BC}$ que corta a las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{AC}$ en los puntos *M* y *N*, respectivamente. Consideremos el caso en que *N* y *C* están del mismo lado de la recta $\overleftrightarrow{AC}$ con respecto al punto *A*. Si $N \in AC$, el resultado se sigue directamente del Teorema 6.1.13. Supongamos que $N \notin AC$.

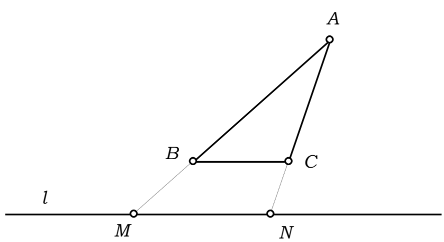


Figura 6.7

Tenemos entonces que los lados *AM* y *AN* del triángulo ΔAMN son cortados por la recta $\overleftrightarrow{BC}$ en los puntos *B* y *C* (figura 6.7). Por el Teorema de la Proporción Triangular (6.1.13), hallamos que $\frac{|AB|}{|BM|} = \frac{|AC|}{|CN|}$ y del Lema 6.1.3 obtenemos que $\frac{|AM|}{|MB|} = \frac{|AN|}{|NC|}$. El caso restante es cuando el punto *A* esté entre *N* y *C*. Tomemos puntos $M' \in \overleftrightarrow{AB}$ y $N' \in \overleftrightarrow{AC}$ tales que $MA \cong M'A$, $NA \cong N'A$, *A* está entre *N* y *N*' y entre *M* y *M*'. Según el criterio 3.2.6, encontramos que

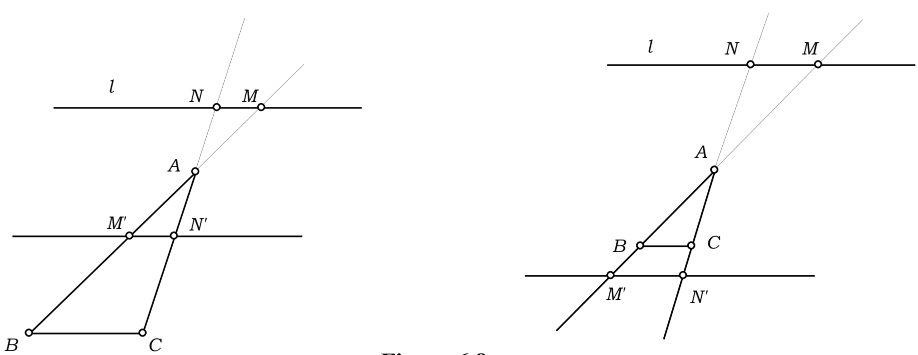


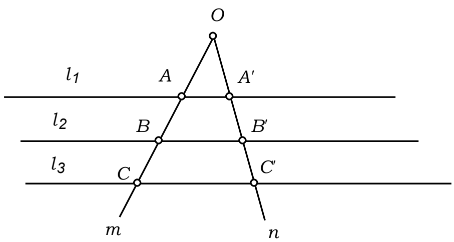
Figura 6.8

$\Delta AMN \cong \Delta AM'N'$. En particular, tenemos que $\angle NMA \cong \angle N'M'A$ y por el Teorema 3.4.4 concluimos que $\overleftrightarrow{M'N'} \parallel \overleftrightarrow{MN} = l$. Por ello, $\overleftrightarrow{M'N'} \parallel \overleftrightarrow{BC}$. La figura 6.8 ilustra las dos posibilidades que ahora tenemos que considerar.

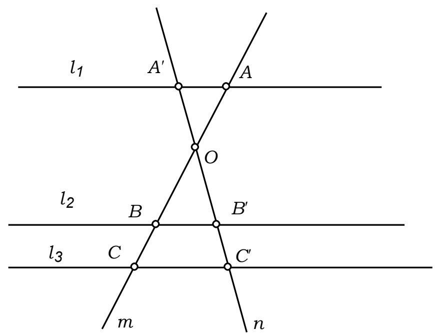
Por el Teorema 6.1.13, sabemos que $\frac{|AM'|}{|M'B|}=\frac{|AN'|}{|N'C|}$ o $\frac{|AB|}{|BM'|}=\frac{|AC|}{|CN'|}$. Aplicando el Lema 6.1.3 a ambos casos, hallamos que $\frac{|AM'|}{|AB|}=\frac{|AN'|}{|AC|}$. Sustituyendo $|AM| = |AM'|$ y $|AN| = |AN'|$ vemos que $\frac{|AM|}{|AB|} = \frac{|AN|}{|AC|}$. De acuerdo con el Lema 6.1.3, encontramos que $\frac{|AM|}{|MB|}=\frac{|AN|}{|NC|}$. ♣

6.1.16. Lema. Sean *m* y *n* dos rectas que se cortan en el punto *O* y sean l_1, l_2 y l_3 tres rectas paralelas entre sí que cortan a *m* y *n* en los puntos *A*, *B* y *C* y *A*', *B*' y *C*', respectivamente. Entonces, $\frac{|AB|}{|BC|}=\frac{|A'B'|}{|B'C'|}$.

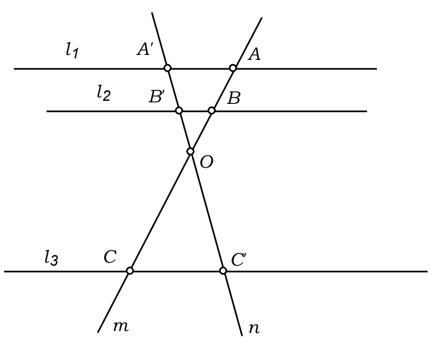
Prueba: Sin perder generalidad, supongamos que los puntos *A*, *B* y *C* son consecutivos. Tenemos entonces que los puntos *A*', *B*' y *C*' también son consecutivos. Si $O \in \{A, B, C\}$, el problema se reduce a tener un triángulo y una recta paralela a uno de los lados del triángulo. El resultado, en este caso, es consecuencia del Teorema 6.1.15. Supongamos pues que $O \notin \{A, B, C\}$. Tenemos los siguientes cuatro casos posibles:



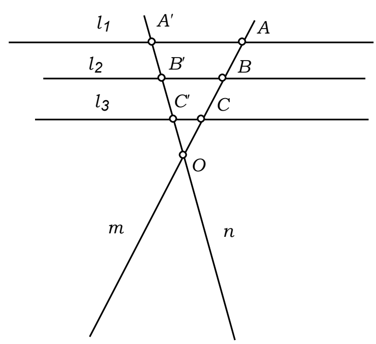
caso I



caso II



caso III



caso IV

Figura 6.9

Los casos II y III se pueden reducir al primer caso tal y como se hizo en la prueba del Teorema 6.1.15. Las demostraciones de los casos I y IV son completamente análogas. Así que solo basta con probar el primer caso. En efecto, según el Teorema 6.1.13, se cumplen las identidades

$$\frac{|BC|}{|OA|}=\frac{|AC|}{|OA|}-\frac{|AB|}{|OA|}=\frac{|A'C'|}{|OA'|}-\frac{|A'B'|}{|OA'|}=\frac{|B'C'|}{|OA'|} \text{ y } \frac{|OB|}{|BC|} = \frac{|OB'|}{|B'C'|}.$$

Lo cual implica que

$$\frac{|AB|}{|BC|}=\frac{|OB|}{|BC|}-\frac{|OA|}{|BC|}=\frac{|OB'|}{|B'C'|}-\frac{|OA'|}{|B'C'|}=\frac{|A'B'|}{|B'C'|}.\ \clubsuit$$

6.1.17. Teorema Fundamental de la Proporción Paralela. Sean l_1, l_2, l_3 y l_4 cuatro rectas paralelas cortadas por una recta transversal *m* en los puntos *A*, *B*, *C* y *D*, respectivamente. Si *n* es una recta que corta a l_1, l_2, l_3 y l_4 en los puntos *A*', *B*', *C*' y *D*', respectivamente, entonces los segmentos *AB* y *CD* son proporcionales a los segmentos *A*'*B*' y *C*'*D*'.

Prueba: Si *m* || *n*, por el Teorema 3.4.10, sabemos que *AB* ≅ *A*'*B*' y *CD* ≅ *C*'*D*', por ello, el resultado se sigue trivialmente. Supongamos pues que *m* y *n* se cortan en el punto *O*. Según el Lema 6.1.16, tenemos que

$$\frac{|AB|}{|BC|}=\frac{|A'B'|}{|B'C'|}\ \text{y}\ \frac{|BC|}{|CD|}=\frac{|B'C'|}{|C'D'|}.$$

Por consiguiente,

$$\frac{|AB|}{|CD|}=\frac{\frac{|A'B'|}{|B'C'|}|BC|}{\frac{|C'D'|}{|B'C'|}|BC|}=\frac{|A'B'|}{|C'D'|}.\ \clubsuit$$

El Teorema Fundamental de la Proporción Paralela se puede ampliar a una cantidad arbitraria de rectas paralelas:

6.1.18. Corolario. Sean l_1, l_2, …, l_k rectas paralelas y *l* una recta que las corte en lo puntos A_1, A_2, … , A_k, respectivamente. Si *m* es otra recta que corta a las rectas dadas en los puntos B_1, B_2, …, B_k, respectivamente, entonces $A_1, A_2,\ldots, A_k$ y $B_1, B_2,\ldots, B_k$ son dos hileras de puntos proporcionales.

Prueba: Consideremos las rectas l_1, l_2, l_i y l_{i+1}, en donde 2 < *i* < *k*. De acuerdo con el Teorema 6.1.13, $\frac{|A_1A_2|}{|B_1B_2|}=\frac{|A_iA_{i+1}|}{|B_iB_{i+1}|}$, para cada 2 < *i* < *k*. Es decir,

$$\frac{|A_1A_2|}{|B_1B_2|}=\frac{|A_2A_3|}{|B_2B_3|}=\ldots=\frac{|A_{k-1}A_k|}{|B_{k-1}B_k|}.$$

Así queda probado que $A_1, A_2,\ldots, A_k$ y $B_1, B_2,\ldots, B_k$ son dos hileras de puntos proporcionales. ♣

6.2. Triángulos semejantes

6.2.1. Definición. Un lado de un triángulo es *homólogo* a un lado de otro triángulo si sus ángulos opuestos son congruentes. Decimos que dos triángulos son *semejantes* cuando cada ángulo de uno de ellos es congruente a un ángulo del otro, y cualesquiera dos lados de uno de dichos triángulos son proporcionales a sus lados homólogos del otro triángulo.

En símbolos, el triángulo Δ*ABC* es semejante al triángulo Δ*A*'*B*'*C*', escribimos Δ*ABC* ~ Δ*A*'*B*'*C*', si ∠*A* ≅ ∠*A*', ∠*B* ≅ ∠*B*', ∠*C* ≅ ∠ *C*' y $\frac{|AB|}{|A'B'|}=\frac{|BC|}{|B'C'|}=\frac{|AC|}{|A'C'|}$ (a este número se le llama la *razón de semejanza* de los dos triángulos). Es claro de la definición que dos triángulos congruentes son semejantes, pero el recíproco no es cierto en general. Veamos a continuación que la relación de semejanza es de equivalencia.

6.2.2. Teorema. Sean ΔABC, $\Delta A'B'C'$ y $\Delta A''B''C''$ tres triángulos.
1.(Reflexiva) $\Delta ABC \sim \Delta ABC$.
2.(Simétrica) Si $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, entonces $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$.
3.(Transitiva) Si $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ y $\Delta A'B'C' \sim \Delta A''B''C''$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta A''B''C''$.

Prueba: Solo es necesario probar la transitividad de la relación de semejanza. Por hipótesis, sabemos que

$$\angle A \cong \angle A',\ \angle B \cong \angle B',\ \angle C \cong \angle C',\ \frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|},$$

$$\angle A' \cong \angle A'',\ \angle B' \cong \angle B'',\ \angle C' \cong \angle C'' \text{ y } \frac{|A'B'|}{|A''B''|} = \frac{|B'C'|}{|B''C''|} = \frac{|A'C'|}{|A''C''|}.$$

Por consiguiente,

$$\angle A \cong \angle A'',\ \angle B \cong \angle B'' \text{ y } \angle C \cong \angle C''$$

y

$$\frac{|AB|}{|A''B''|} = \frac{\dfrac{|AB|}{|A'B'|}}{\dfrac{|A''B''|}{|A'B'|}} = \frac{\dfrac{|BC|}{|B'C'|}}{\dfrac{|B''C''|}{|B'C'|}} = \frac{|BC|}{|B''C''|} = \frac{\dfrac{|BC|}{|B'C'|}}{\dfrac{|B''C''|}{|B'C'|}} = \frac{\dfrac{|AC|}{|A'C'|}}{\dfrac{|A'C''|}{|A'C'|}} = \frac{|AC|}{|A''C''|}.$$

Por lo tanto, $\Delta ABC \sim \Delta A''B''C''$. ♣

6.2.3. Corolario. Si $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ y $\Delta A'B'C' \sim \Delta A''B''C''$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta A''B''C''$.

La prueba del siguiente Teorema es evidente.

6.2.4. Teorema. Si $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ y $AB \cong A'B'$, entonces $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

6.2.5. Teorema de Tales de Mileto. Toda recta paralela a uno de los lados de un triángulo junto con las rectas que contienen los otros dos lados determina un nuevo triángulo semejante al triángulo original.

Prueba: Sean ΔABC un triángulo y l una recta paralela a BC. Supongamos que l corta a $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{AB}$ en los puntos M y N, respectivamente. Probaremos que $\Delta ABC \sim \Delta ANM$. Consideraremos cada uno de los tres casos posibles:

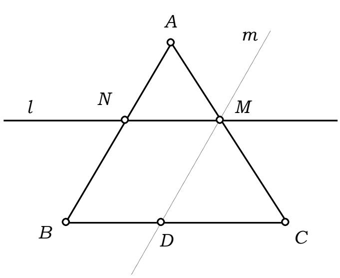


Figura 6.10

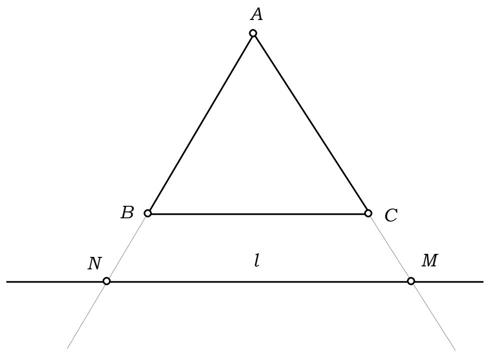
Caso I. $M \in AC$ y $N \in AB$. Consideremos la recta m paralela a AB que pasa por el punto M y corta a BC en el punto D (ver figura 6.10). Por el Teorema 3.4.6, hallamos que $\angle B \cong \angle MNA$ y $\angle C \cong \angle AMN$. De donde se sigue, por el Corolario 4.3.6, que los triángulos ΔABC y ΔANM tienen sus ángulos correspondientes congruentes. Por otro lado, del Teorema 6.1.13 hallamos que

$$\frac{|AN|}{|AB|} = \frac{|AM|}{|AC|} \text{ y } \frac{|AM|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|BC|}.$$

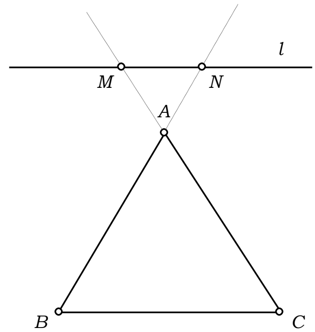
Sabemos que el cuadrilátero $\square NBDM$ es un paralelogramo y, por el Teorema 5.3.1, tenemos que $NM \cong BD$. Así, encontramos que

$$\frac{|AN|}{|AB|} = \frac{|AM|}{|AC|} = \frac{|NM|}{|BC|}.$$

Esto prueba que $\Delta ABC \sim \Delta ANM$. En la siguiente figura se muestran los dos casos restantes:



Caso II



Caso III

Figura 6.11

El tercer caso se puede reducir al segundo mediante un razonamiento análogo al usado en la prueba de Teorema 6.1.15. Supongamos que las condiciones del segundo caso se cumplen. Aplicando el primer caso al triángulo ΔANM y a la recta $\overleftrightarrow{BC}$, hallamos que $\Delta ABC \sim \Delta ANM$. ♣

6.2.6. Primer Criterio de Semejanza de Triángulos (*AAA*). Si dos triángulos tienen sus ángulos correspondientes congruentes, entonces los triángulos son semejantes.

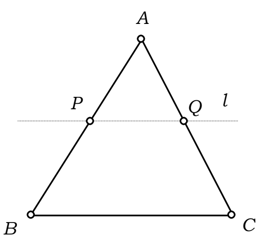


Figura 6.12

Prueba: Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos tales que $\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$ y $\angle C \cong \angle C'$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $AB > A'B'$. Tomemos un punto $P \in AB$ tal que $AP \cong A'C'$. Tracemos una recta paralela l a BC que pase por P y corte a AC en el punto Q. Por el Teorema de Tales (6.2.5), sabemos que $\Delta ABC \sim \Delta APQ$. En particular, tenemos que $\angle B \cong \angle P$ y $\angle C \cong \angle Q$, lo cual nos asegura a que los triángulos ΔAPQ y $\Delta A'B'C'$ tienen sus ángulos correspondientes congruentes y como $AP \cong A'C'$, por el criterio 3.2.6, concluimos que $\Delta APQ \cong \Delta A'B'C'$. Así, por la transitividad de la semejanza (6.2.2), hallamos que $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. ♣

El Teorema 3.4.6 y el primer criterio de semejanza de triángulos (6.2.6) establecen el siguiente resultado.

6.2.7. Corolario. Dos triángulos cuyos lados correspondientes sean paralelos son semejantes.

Como una consecuencia directa de los Teoremas 4.3.10, 6.2.2 (3) y 6.2.6 tenemos lo siguiente.

6.2.8. Corolario. En todo triángulo ΔABC se cumple que $\Delta ABC \sim \Delta A M_b M_c \sim \Delta M_a B M_c \sim \Delta M_a M_b C$ y la razón de semejanza es igual a $\frac{1}{2}$.

6.2.9. Corolario (Criterio de Semejanza *AA*).
1. Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos correspondientes congruentes.
2. Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen un ángulo agudo congruente.
3. Dos triángulos isósceles son semejantes si tienen el ángulo opuesto a la base congruente.
4. Todos los triángulos equiláteros son semejantes.

6.2.10. Segundo Criterio de Semejanza de Triángulos (*LAL*). Si dos triángulos tienen un par de lados proporcionales y los ángulos comprendidos entre dichos lados congruentes, entonces los triángulos son semejantes.

Prueba: Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos tales que $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|}$ y $\angle B \cong \angle B'$. Sin perder generalidad supongamos que $A'B' \leq AB$. Fijemos un punto $P \in AB$, de tal manera que $PB \cong A'B'$. Ahora, por P trazamos una recta paralela a AC que corte a BC en el punto Q.

Figura 6.13

De acuerdo con el Teorema de Tales (6.2.5), sabemos que $\Delta ABC \sim \Delta PBQ$. De aquí y de nuestra suposición se sigue que

$$\frac{|AB|}{|PB|} = \frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|BC|}{|BQ|}.$$

De estas identidades deducimos que $|B'C'| = |BQ|$. Según el primer criterio de congruencia de triángulos (3.2.6), $\Delta PBQ \cong \Delta A'B'C'$ y, por consiguiente, $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. ♣

Para triángulos rectángulos, tenemos el siguiente criterio de semejanza que es consecuencia del criterio anterior.

6.2.11. Corolario. Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen los catetos proporcionales.

6.2.12. Tercer Criterio de Semejanza de Triángulos (*LLL*). Si los tres lados de un triángulo son proporcionales a los tres lados de otro triángulo, entonces ambos triángulos son semejantes.

Prueba: Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos tales que $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|}$. Sin perder generalidad, supongamos que $A'B' \leq AB$. Tomemos un punto $P \in AB$ tal que $AP \cong A'B'$. Por P tracemos una recta paralela a

Figura 6.14

BC que corte a AC en el punto Q. Del Teorema 6.2.5 hallamos que $\Delta ABC \sim \Delta APQ$. Usando esta semejanza y nuestra suposición, se obtienen las identidades

$$\frac{|AB|}{|AP|} = \frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|AC|}{|AQ|} = \frac{|BC|}{|PQ|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|}.$$

De aquí deducimos que $|AP| = |A'B'|$, $|AQ| = |A'C'|$ y $|PQ| = |B'C'|$. Según el criterio 3.2.12, $\Delta APQ \cong \Delta A'B'C'$. Lo cual implica que $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. ♣

6.2.13. Corolario. Dos triángulos isósceles son semejantes si la base y un lado de uno de ellos son proporcionales a la base y a un lado del otro.

6.2.14. Teorema. Sea ΔABC un triángulo. Desde un punto arbitrario $O \notin \Delta ABC$ se trazan tres rectas l_1, l_2 y l_3 que pasen por los vértices del triángulo A, B y C, respectivamente, y trazamos rectas paralelas a $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{AC}$ que corten a l_1 en A', a l_2 en B', y a l_3 en C'. Entonces, $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, y la razón de semejanza es igual a la razón de las distancias del punto O a dos vértices correspondientes de cada uno de los triángulos.

Prueba:

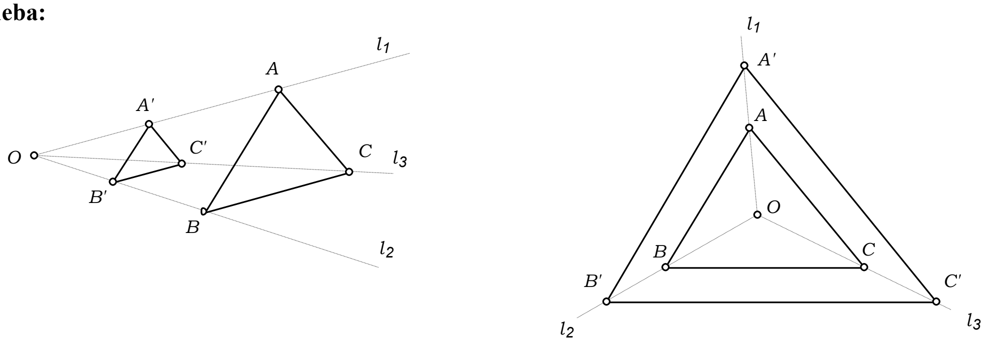


Figura 6.15

Consideremos el triángulo ΔOAB. De acuerdo con el Teorema 6.2.5, sabemos que $\Delta OAB \sim \Delta OA'B'$ y, por ello, $\frac{|OA|}{|OA'|} = \frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BO|}{|B'O|}$. Similarmente se establece la identidad $\frac{|OA|}{|OA'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|} = \frac{|CO|}{|C'O|}$. Por lo cual, $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|}$. Por otra parte, el Teorema 3.4.6 nos garantiza que $\angle OAC \cong \angle OA'C'$ y $\angle OAB \cong \angle OA'B'$. De los Teoremas 2.8.1 y 2.8.2, en los respectivos dos casos que se muestran en la figura 6.15, obtenemos que $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$. Según el criterio de semejanza (6.2.10), $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. Por consiguiente,

$$\frac{|OA|}{|OA'|} = \frac{|OB|}{|O'B'|} = \frac{|OC|}{|OC'|} = \frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}.$$

En esta identidad, podemos ver que la razón de semejanza es igual a la razón de las distancias del punto O a dos vértices correspondientes de los triángulos. ♣

El siguiente Corolario del Teorema 6.2.14 proporciona un método para producir varios triángulos semejantes a uno dado.

6.2.15. Corolario. Si desde un punto O ubicado en el exterior de un triángulo ΔABC se trazan tres rectas l_1, l_2 y l_3 que pasen por los vértices del triángulo A, B y C, respectivamente, y posteriormente trazamos rectas paralelas a los lados del triángulo formando otro triángulo que tenga sus vértices en dichas rectas, entonces el triángulo resultante es semejante al triángulo dado ΔABC y la razón de semejanza es igual a la razón de las distancias del punto O a dos vértices correspondientes de los triángulos.

6.2.16. Teorema. Sea ΔABC un triángulo y sean l_1, l_2 y l_3 tres rectas paralelas entre sí tales que $A \in l_1$, $B \in l_2$ y $C \in l_3$. Si trazamos dos rectas paralelas a dos lados del triángulo original, de tal forma que se forme un triángulo $\Delta A'B'C'$ con $A' \in l_1$, $B' \in l_2$ y $C' \in l_3$, entonces $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

Prueba: Supongamos que $AB \parallel A'B'$ y $AC \parallel A'C'$. De acuerdo con los Teoremas 2.8.2 y 3.4.6, $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$. Según el Teorema 3.4.10, hallamos que $AB \cong A'B'$ y $AC \cong A'C'$. La conclusión se sigue del criterio de congruencia para triángulos 3.2.6. ♣

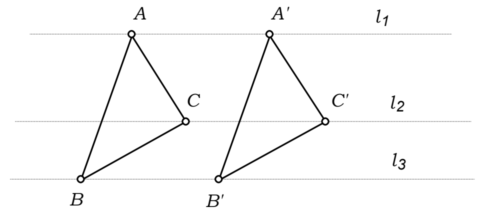


Figura 6.16

6.3. División de un segmento

En esta sección, estudiaremos la división de un segmento en una razón dada y al final daremos la construcción de algunas proporciones numéricas conocidas.

Sean AB un segmento y $M \in \overleftrightarrow{AB} - \{A, B\}$. Analicemos la razón $\frac{|AM|}{|MB|}$ al moverse M a lo largo de la recta $\overleftrightarrow{AB}$:

1. M precede a A en la recta $\overleftrightarrow{AB}$. En este caso,

$$\frac{|AM|}{|MB|} = \frac{|MB| - |AB|}{|MB|} = 1 - \frac{|AB|}{|MB|} < 1.$$

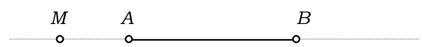


Figura 6.17

Al alejarse M de A podemos ver que la razón $\frac{|AM|}{|MB|}$ se aproxima a 1, ya que $\frac{|AB|}{|MB|}$ tiende a 0. Cuando M se acerca a A, la razón $\frac{|AB|}{|MB|}$ se aproxima a 1 y, por ello, la razón $\frac{|AM|}{|MB|}$ tiende a 0. En este caso, se cumple la desigualdad $0 < \frac{|AM|}{|MB|} < 1$.

2. $M \in AB$. Si M es el punto medio de AB, tenemos entonces que $\frac{|AM|}{|MB|} = 1$. Supongamos que el punto medio de AB es el punto $O \neq M$ y que M está entre A y O. Entonces, se cumple que $\frac{|AM|}{|MB|} \leq \frac{|AO|}{|MB|} < 1$. Si M se aproxima a A, entonces la longitud de MB se aproxima a la longitud de AB y como $\frac{|AM|}{|MB|} = \frac{|AB| - |MB|}{|MB|} = \frac{|AB|}{|MB|} - 1$, la razón $\frac{|AM|}{|MB|}$ se aproxima a 0. Es claro que si M se aproxima a O, entonces la razón $\frac{|AM|}{|MB|}$ tiende a 1. Así queda establecida la desigualdad $0 < \frac{|AM|}{|MB|} < 1$ cuando M está entre A y O. Analicemos el caso cuando M está entre O y B.

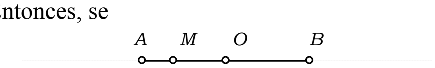


Figura 6.18

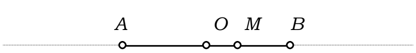


Figura 6.19

Tenemos entonces que $1 < \frac{|AM|}{|MB|}$ y como $|AO| < |AM|$, $\frac{|AM|}{|MB|} > \frac{|AO|}{|MB|}$. Usando esta última desigualdad, observamos que si M se acerca a B, entonces $\frac{|AM|}{|MB|}$ tiende hacia el infinito. Si M se acerca al punto O, entonces $\frac{|AM|}{|MB|}=\frac{|AO|-|OM|}{|MB|}$ se aproxima a 1. Por lo tanto, $1<\frac{|AM|}{|MB|}$.

3. Por último supongamos que B precede a M sobre en la recta $\overleftrightarrow{AB}$.

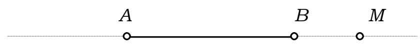


Figura 6.20

La igualdad $|MB| = |AM| - |AB|$ implica que $1<\frac{|AM|}{|MB|}$. Por otra parte sabemos que $\frac{|AM|}{|MB|} = \frac{|AB|+|MB|}{|MB|}=\frac{|AB|}{|MB|}+1$.

De aquí podemos ver que si M se aleja de B, entonces $\frac{|AM|}{|MB|}$ se aproxima a 1. Al acercarse M a B, la longitud $|MB|$ decrece y entonces la razón $\frac{|AM|}{|MB|}$ crece infinitamente.

Es claro que para cualquier segmento AB existe un único punto $M \in AB$ (a saber, el punto medio del segmento) tal que $\frac{|AM|}{|MB|} = 1$. Cuando la razón dada es diferente de 1, la situación es muy diferente como a continuación veremos:

6.3.1. Construcción (División de un segmento en una proporción dada). Dado un segmento AB y un número real positivo $r \neq 1$, existen dos puntos $M, N \in \overleftrightarrow{AB}$ tales que $M \in AB$, $N \notin AB$ y $\frac{|AM|}{|MB|}=\frac{|AN|}{|NB|}=r$.

Prueba: Sea $r \neq 1$ un número real positivo. Primero encontraremos al punto $M \in AB$. Sea l una recta que pase por A y no contenga a B. Sobre l fijamos dos puntos A' y B', tal y como lo muestra la figura 6.21, tales que $|AA'| = r$ y $|A'B'| = 1$. Después, por A' trazamos una recta paralela a BB', la cual corta al segmento AB en el punto M. Según el Teorema 6.1.13,

$$\frac{|AM|}{|MB|}=\frac{|AA'|}{|A'B'|}=\frac{r}{1}=r.$$

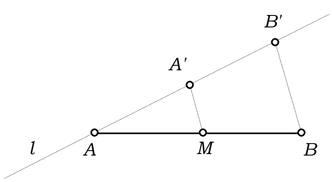


Figura 6.21

Para encontrar al segundo punto N, consideraremos dos casos:

Primer caso: $r < 1$. Tracemos dos rectas paralelas l y m que pasen por los puntos A y B, respectivamente, y fijemos dos puntos $A' \in l$ y $B' \in l$ tales que $|AA'| = r$ y $|BB'| = 1$ (esto es posible por el Teorema 1.10.4):

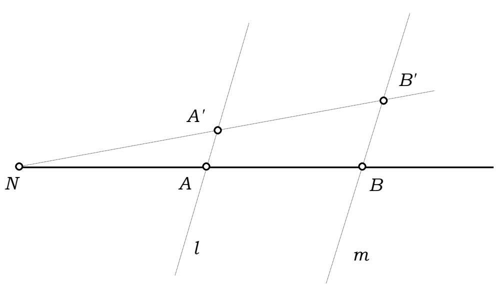


Figura 6.22

Según el Teorema de Tales de Mileto (6.2.5), sabemos que $\Delta NAA' \cong \Delta NBB'$. Como resultado hallamos que

$$\frac{|AN|}{|NB|}=\frac{|AA'|}{|BB'|}=\frac{r}{1}=r$$

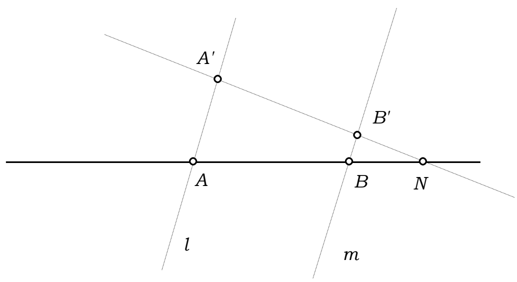


Figura 6.23

Segundo caso: $r > 1$. Como en el caso anterior, tracemos dos rectas paralelas l y m que pasen por los puntos A y B, respectivamente, y tomemos dos puntos $A' \in l$ y $B' \in l$ tales que $|AA'| = r$ y $|BB'| = 1$ (ver figura 6.23). Razonando como en el primer caso, concluimos que

$$\frac{|AN|}{|NB|} = \frac{|AA'|}{|BB'|} = \frac{r}{1} = r\,. \clubsuit$$

6.3.2. Construcción. Sean AB un segmento y $0 < r < 1$ un número real positivo. Encontrar un punto $M \in AB$ tal que $\dfrac{|AM|}{|AB|} = r$.

Prueba: Encontraremos el punto solicitado usando la misma técnica de la construcción anterior. Fijamos una recta l que pase por el punto A que sea diferente de $\overleftrightarrow{AB}$. De acuerdo con el Teorema 1.10.4, podemos encontrar dos puntos M', $B' \in l$, de tal forma que M' está entre AB', $|AM'| = r$ y $|AB'| = 1$. Por el punto M' trazamos una recta paralela a BB' que corte a AB en el punto M. Según el Teorema 6.1.13, obtenemos que

$$\frac{|AM|}{|AB|} = \frac{|AM'|}{|A'B'|} = \frac{r}{1} = r. \clubsuit$$

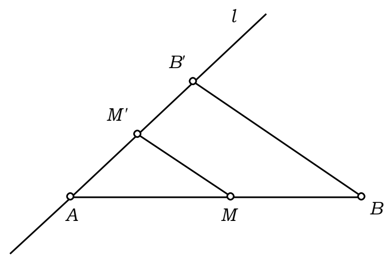


Figura 6.24

6.3.3. Definición. Sean a, b y c tres números reales positivos.

1. La *cuarta proporcional* de a, b y c es el número x tal que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{x}$.

2. La *tercera proporcional* de a y b es el número x tal que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{x}$.

3. La *media geométrica* (o *media proporcional*) de a y b es el número x tal que $\dfrac{a}{x} = \dfrac{x}{b}$.

6.3.4. Construcción de la Cuarta Proporcional. Sean a, b y c tres números reales positivos. Sobre una recta l colocamos tres puntos A, B y C, de tal forma que $|AB| = a$ y $|BC| = b$, y sobre una recta m que pase por el punto A y sea diferente de l, colocamos un punto D de manera que $|AD| = c$ (ver figura 6.25). Trazamos una recta paralela a BD que pase por el punto C y corte a la recta m en el punto E. Pongamos $x = |DE|$. Según el Teorema 6.1.13, los segmentos AB y BC son proporcionales a los segmentos AD y DE. Es decir,

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{a}{b} = \frac{|AD|}{|DE|} = \frac{c}{x}\,. \clubsuit$$

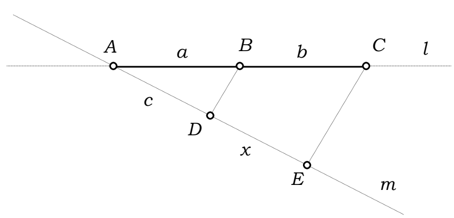


Figura 6.25

6.3.5. Construcción de la Tercera Proporcional. Para encontrar la tercera proporcional de dos números reales positivos *a*, *b*, basta construir la cuarta proporcional de la terna *a*, *b* y *b* tal y como se describió en 6.3.4.

♣

La construcción de la media geométrica de dos números reales positivos *a* y *b* se dará en la Construcción 11.5.1.

6.4. Algunas aplicaciones

En esta sección, daremos algunas aplicaciones importantes de los Teoremas de semejanza.

6.4.1. Teorema. Sean l_1, $l_2,\ldots,$ l_k rectas concurrentes, y *m* y *n* dos rectas paralelas que cortan a dichas rectas en los puntos $A_1, A_2,\ldots, A_k$ y $B_1, B_2,\ldots, B_k$, respectivamente. Entonces $A_1, A_2,\ldots, A_k$ y $B_1, B_2,\ldots, B_k$ son dos hileras de puntos proporcionales.

Prueba: Sea *O* el punto de concurrencia de las rectas l_1, $l_2,\ldots,$ l_k.

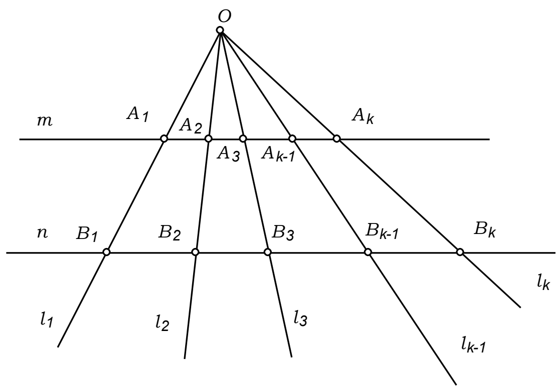


Figura 6.26

De acuerdo con el Teorema 6.2.5, sabemos que $\Delta O A_i A_j \sim \Delta O B_i B_j$, para cada $1 \le i < j < k$. Por consiguiente, $\dfrac{|A_iA_j|}{|B_iB_j|} = \dfrac{|OA_i|}{|OB_i|}$, para cada $1 \le i < j < k$, y $\dfrac{|OA_1|}{|OB_1|} = \dfrac{|OA_i|}{|OB_i|}$ para toda $1 \le i < k$. De donde hallamos que

$$\frac{|A_1A_2|}{|B_1B_2|} = \frac{|A_2A_3|}{|B_2B_3|} = \ldots\ldots\ldots = \frac{|A_{k-1}A_k|}{|B_{k-1}B_k|}.$$

Esto prueba que $A_1, A_2,\ldots, A_k$ y $B_1, B_2,\ldots, B_k$ son dos hileras de puntos proporcionales. ♣

Si en el enunciado del Teorema anterior requerimos que las rectas l_1, $l_2,\ldots,$ l_k sean paralelas, también se cumple y la proporción es igual a 1. El recíproco del Teorema 6.4.1 se cumple de manera general, pero solo lo enunciaremos y probaremos para tres rectas.

6.4.2. Teorema. Si tres rectas determinan sobre dos rectas paralelas segmentos proporcionales, entonces dichas rectas son concurrentes o son paralelas.

Prueba: Supongamos que las rectas l_1, l_2 y l_3 son cortadas por las rectas paralelas *m* y *n* en los puntos *A*, *B*, *C* y en los puntos *A'*, *B'* y *C'*, respectivamente, de tal modo que $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|}$. Sin perder generalidad supondremos que los puntos *A*, *B* y *C* son consecutivos. Supongamos que las rectas l_1 y l_2 se cortan en el punto *O* y que la recta l_3 no pasa por dicho punto. Sea *C''* el punto de intersección de las rectas $\overleftrightarrow{OC}$ y *n*. Según el Teorema 6.4.1, $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C''|}$. Por consiguiente, $\frac{|BC|}{|B'C''|} = \frac{|BC|}{|B'C'|}$ y, por tanto,

$$|B'C''| = |B'C'|.$$

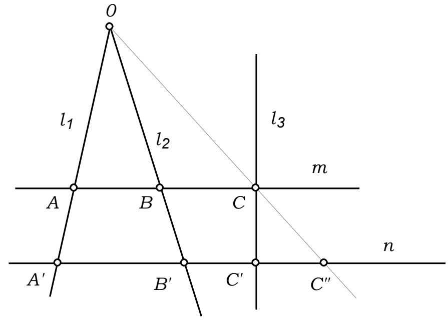
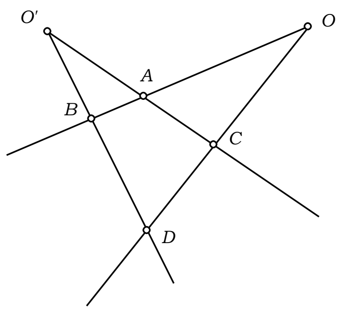


Figura 6.27

De acuerdo con el Teorema 1.10.4, vemos que $C = C'$, pero esto no puede ser posible. Por lo tanto l_1, l_2 y l_3 son concurrentes. Supongamos ahora que $l_1 \parallel l_2$. Si l_2 y l_3 se cortaran en un punto, por la primera parte de la prueba, las rectas l_1, l_2 y l_3 serían concurrentes, lo cual es imposible. Por consiguiente, $l_2 \parallel l_3$. ♣

El siguiente Teorema de J. V. Roberti [a-138], aunque su enunciado no menciona círculo alguno, unifica dos teoremas clásicos sobre círculos (ver Teorema 9.6.1).

6.4.3. Teorema de los Ángulos Congruentes. En la figura,



si $\angle BOD$ y $\angle DO'C$ son dos ángulos congruentes, entonces

$$|O'A||AC| = |OA||AB| \text{ y } |O'D||BD| = |OD||CD|.$$

Figura 6.28

Prueba: Por el primer criterio de semejanza de triángulo (6.2.6), sabemos que

$$\Delta O'BA \sim \Delta OCA \text{ y } \Delta O'DC \sim \Delta ODB.$$

De donde se siguen las identidades

$$\frac{|O'A|}{|OA|} = \frac{|AB|}{|AC|} \text{ y } \frac{|O'D|}{|OD|} = \frac{|CD|}{|BD|}.$$

Por lo tanto,

$$|O'A||AC| = |OA||AB| \text{ y } |O'D||BD| = |OD||CD|. \text{ ♣}$$

Una bonita aplicación del teorema anterior es el siguiente corolario.

6.4.4. Corolario. En la siguiente figura,

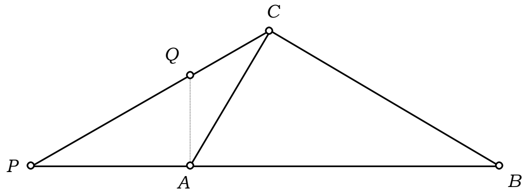


Figura 6.29

si $\angle ACB$ es un ángulo recto, $QA \perp PB$ y $QA \cong QC$, entonces $|PA||PB| = |PC|^2$.

Prueba: De acuerdo con el Teorema 3.2.9, sabemos que $\angle CAQ \cong \angle QCA$. Por ser $\angle BAQ$ un ángulo recto,

$$90 = m(\angle BAQ) = m(\angle BAC) + m(\angle CAQ) = m(\angle BAC) + m(\angle QCA) = m(\angle BAC) + m(\angle CBA)$$

$$m(\angle QCA) = m(\angle CBA)$$

$$\angle QCA \cong \angle CBA \qquad (2.5.7).$$

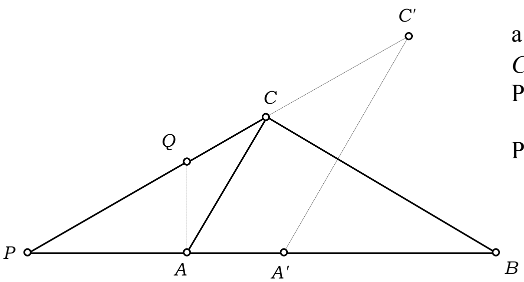


Figura 6.30

Fijemos un punto $A' \in AB$ y tracemos una recta paralela a AC que pase por A' y corte a la recta $\overleftrightarrow{PC}$ en el punto C'. Según el Teorema 3.4.6, $\angle QC'A' \cong \angle QCA \cong \angle CBA$. Por el Teorema de los Ángulos Congruentes (6.4.3),

$$|C'P||PC| = |PB||PA'|.$$

Por otro lado, con base en el Teorema 6.1.13, sabemos que

$$\frac{|PC|}{|C'P|} = \frac{|PA|}{|PA'|}$$

$$|C'P| = \frac{|PC||PA'|}{|PA|}.$$

Sustituyendo, obtenemos como resultado que

$$\frac{|PC||PA'|}{|PA|}|PC| = |PB||PA'|$$

$$|PA||PB| = |PC|^2. ♣$$

6.4.5. Teorema. En la siguiente figura,

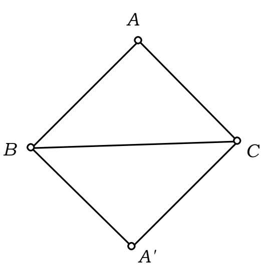


Figura 6.31

si ΔABC y $\Delta A'BC$ son dos triángulos rectángulos con $\angle A$ y $\angle A'$ como ángulos rectos, entonces $\angle BAA' \cong \angle BCA'$.

Prueba: Primero consideremos el caso cuando $AB \parallel A'C$. Del Problema 3.158 podemos observar que $AC \parallel CA'$. Por lo cual, $\square ABA'C$ es un rectángulo. Sea O el punto de intersección de las diagonales de este rectángulo.

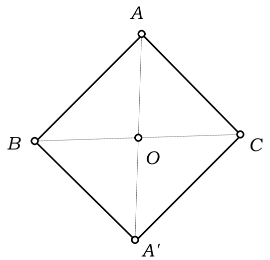


Figura 6.32

Como $\Delta OAB \cong \Delta OA'C$ y ΔOAB es un triángulo isósceles, tenemos entonces que $\angle BAA' \cong \angle BCA'$.

Consideremos ahora el caso cuando las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{A'C}$ se intersecan en un punto que llamaremos D.

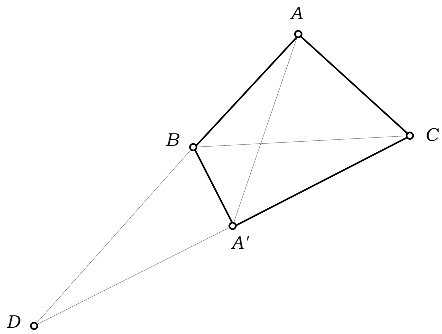


Figura 6.33

Por el primer criterio de semejanza (6.2.6), los triángulos $\Delta A'BD$ y ΔACD son semejantes. Por ello, $\frac{|DA'|}{|DA|} = \frac{|BD|}{|DC|}$.

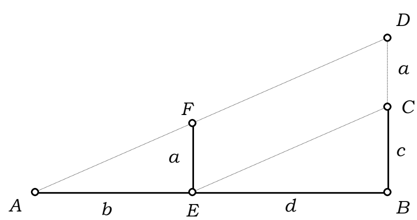
Comos los triángulos ΔBDC y $\Delta A'DA$ comparten el ángulo $\angle CDA$ y se cumple $\frac{|BD|}{|DA'|} = \frac{|DC|}{|DA|}$ por el criterio de semejanza 6.2.10, $\Delta BDC \sim \Delta A'DA$. Finalmente esto nos da la congruencia

$$\angle BAA' \cong \angle BCA'. \clubsuit$$

Aplicando directamente el Teorema de Tales (6.2.5), se pueden obtener demostraciones geométricas de algunos enunciados puramente algebraicos. Por ejemplo:

6.4.6. Teorema. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Prueba [l-208]:



♣

Figura 6.34

6.5. Semejanza de cuadriláteros

Del mismo modo que definimos los lados homólogos de dos triángulos, definimos lados homólogos entre dos cuadriláteros de la siguiente manera:

6.5.1. Definición. Un lado de un cuadrilátero es *homólogo* a un lado de otro cuadrilátero si sus ángulos opuestos son congruentes. Decimos que dos cuadriláteros son *semejantes* (en símbolos, $\square ABCD \sim \square A'B'C'D'$) cuando cada ángulo de uno es congruente a un ángulo del otro, y cada par de lados homólogos es proporcional al correspondiente par de lados homólogos del otro.

En símbolos, $\square ABCD \sim \square A'B'C'D'$ significa que $\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$, $\angle C \cong \angle C'$, $\angle D \cong \angle D'$ y $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CD|}{|C'D'|} = \frac{|DA|}{|D'A'|}$. Evidentemente, dos cuadriláteros congruentes son semejantes, pero hay cuadriláteros semejantes que no son congruentes. De la definición se ve claramente que todos los cuadrados son semejantes. Muchos de los teoremas básicos sobre la semejanza de cuadriláteros son similares a los teoremas para triángulos. Por ejemplo, el Teorema 6.2.2 tiene su versión para cuadriláteros como se indica a continuación (omitimos la prueba por ser análoga a la del Teorema 6.2.2).

6.5.2. Teorema. Sean $\square ABCD$, $\square A'B'C'D'$ y $\square A''B''C''D''$ tres cuadriláteros.
1.(Reflexiva) $\square ABCD \sim \square ABCD$.
2.(Simétrica) Si $\square ABCD \sim \square A'B'C'D'$, entonces $\square A'B'C'D' \sim \square ABCD$.
3.(Transitiva) Si $\square ABCD \sim \square A'B'C'D'$ y $\square A'B'C'D' \sim \square A''B''C''D''$, entonces

$$\square ABCD \sim \square A''B''C''D''.$$

La semejanza de cuadriláteros se puede reducir a la semejanza de triángulos.

6.5.3. Teorema. Sean $\square ABCD$ y $\square A'B'C'D'$ dos cuadriláteros. Las siguientes condiciones son equivalentes:
1. $\square ABCD \sim \square A'B'C'D'$.
2. $\Delta BCA \sim \Delta B'C'A'$ y $\Delta DAC \sim \Delta D'A'C'$.
3. $\Delta ABD \sim \Delta A'B'D'$ y $\Delta CDB \sim \Delta C'D'B'$.

Prueba: Solo probaremos la equivalencia entre los dos primeros enunciados.

1 $\Rightarrow$ 2. Por hipótesis, sabemos que $\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$, $\angle C \cong \angle C'$, $\angle D \cong \angle D'$ y que $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CD|}{|C'D'|} = \frac{|DA|}{|D'A'|}$. Según el segundo criterio de semejanza (6.2.10), hallamos que $\Delta BCA \sim \Delta B'C'A'$. $\Delta DAC \sim \Delta D'A'C'$.

2 $\Rightarrow$ 1. Supongamos que $\Delta BCA \sim \Delta B'C'A'$ y $\Delta DAC \sim \Delta D'A'C'$. Entonces, tenemos que $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|}$, $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$, $\angle B \cong \angle B'$, $\frac{|CD|}{|C'D'|} = \frac{|DA|}{|D'A'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|}$, $\angle CAD \cong \angle C'A'D'$, $\angle DCA \cong \angle D'C'A'$ y $\angle D \cong \angle D'$. De aquí obtenemos que

$$\angle A = \angle BAC + \angle CAD \cong \angle B'A'C' + \angle C'A'D' = \angle A' \text{ y } \angle C = \angle ACB + \angle DCA \cong \angle A'C'B' + \angle D'C'A' = \angle C'.$$

Lo cual demuestra las congruencias $\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$, $\angle C \cong \angle C'$ y $\angle D \cong \angle D'$. Como

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|} = \frac{|CD|}{|C'D'|} = \frac{|DA|}{|D'A'|},$$

entonces obtenemos como resultado que $\square ABCD \sim \square A'B'C'D'$. ♣

6.5.4. Corolario. Si $\square ABCD \sim \square A'B'C'D'$, entonces $\frac{|AC|}{|A'C'|} = \frac{|BD|}{|B'D'|}$.

El ejemplo que se mostró en la figura 5.53 nos muestra que el recíproco del Corolario 6.5.4 no se cumple. Los criterios ***LLLL*** y ***AAAA*** no garantizan la semejanza entre dos cuadriláteros:

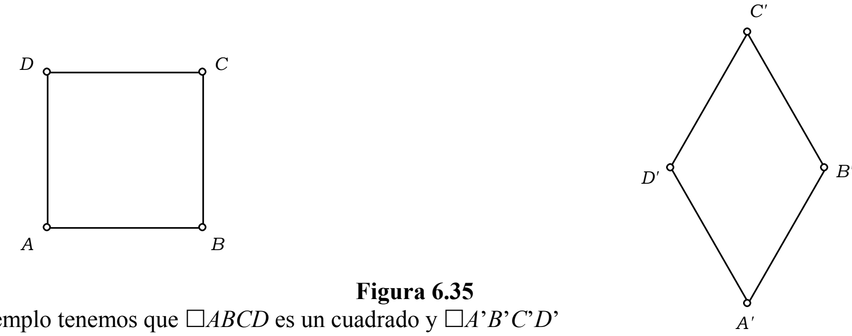


Figura 6.35

En este ejemplo tenemos que □*ABCD* es un cuadrado y □*A*'*B*'*C*'*D*' es un rombo cuyos lados tienen la misma longitud.

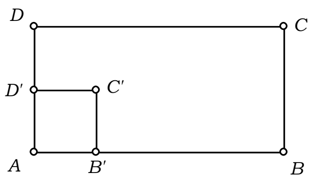


Figura 6.36

El rectángulo □*ABCD* satisface que $|AB| = 4$, $|BC| = 2$, y el cuadrado □*AB*'*C*'*D*' tiene todos sus lados de longitud 1. Claramente los cuadriláteros □*ABCD* y □*AB*'*C*'*D*' no pueden ser semejantes, aunque tengan todos sus ángulos congruentes.

Veamos a continuación los cinco criterios que sí garantizan la semejanza de dos cuadriláteros.

6.5.5. Primer Criterio de Semejanza de Cuadriláteros (***ALLLL*****).** Si los cuatro lados de un cuadrilátero son proporcionales a los cuatro lados de otro cuadrilátero y ambos tienen un ángulo congruente, entonces los cuadriláteros son semejantes.

Prueba: Supongamos que los cuadriláteros □*ABCD* y □*A*'*B*'*C*'*D*' satisfacen las relaciones $\angle A \cong \angle A'$ y $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CD|}{|C'D'|} = \frac{|DA|}{|D'A'|}$.

Figura 6.37

De acuerdo con el segundo criterio de semejanza (6.2.10), sabemos que $\Delta ABD \sim \Delta A'B'D'$. Como resultado de esto, obtenemos la identidad $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BD|}{|B'D'|}$. Así, hallamos que $\frac{|BD|}{|B'D'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CD|}{|C'D'|}$. Según el tercer criterio de semejanza (6.2.12), $\Delta CDB \sim \Delta C'D'B'$. Por el Teorema 6.5.3, concluimos que □*ABCD* ~ □*A*'*B*'*C*'*D*'. ♣

6.5.6. Segundo Criterio de Semejanza de Cuadriláteros (*LALAL*). Si tres lados de un cuadrilátero son proporcionales a tres lados de otro cuadrilátero, y los dos ángulos comprendidos entre dichos lados del primer cuadrilátero son congruentes a sus correspondientes ángulos comprendidos entre dichos lados del segundo cuadrilátero, entonces los cuadriláteros son semejantes.

Prueba: Sean $\square ABCD$ y $\square A'B'C'D'$ dos cuadriláteros tales que $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CD|}{|C'D'|}$, $\angle B \cong \angle B'$ y $\angle C \cong \angle C'$.

Figura 6.38

La semejanza $\Delta BCD \sim \Delta B'C'D'$ se sigue del segundo criterio 6.2.10. De donde se obtiene que $\frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CD|}{|C'D'|} = \frac{|BD|}{|B'D'|}$ y $\angle CBD \cong \angle C'B'D'$. Por el Teorema 2.8.2, $\angle DBA = \angle B - \angle CBD \cong \angle B' - \angle C'B'D' = \angle D'B'A'$. Aplicando de nuevo el criterio 6.2.10, hallamos que $\Delta ABD \sim \Delta A'B'D'$. De acuerdo con el Teorema 6.5.3, $\square ABCD \sim \square A'B'C'D'$. ♣

6.5.7. Tercer Criterio de Semejanza de Cuadriláteros (*LLAAA*). Si tres ángulos de un cuadrilátero son congruentes a tres ángulos de otro cuadrilátero, y dos lados (ninguno de los cuales es común a dos de los ángulos dados del primer cuadrilátero) son proporcionales a dos lados (ninguno de los cuales es común a dos de los ángulos dados del segundo cuadrilátero), entonces los cuadriláteros son congruentes.

Prueba: Supongamos que $\square ABCD$ y $\square A'B'C'D'$ son dos cuadriláteros tales que $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|}$, $\angle C \cong \angle C'$, $\angle D \cong \angle D'$ y $\angle A \cong \angle A'$.

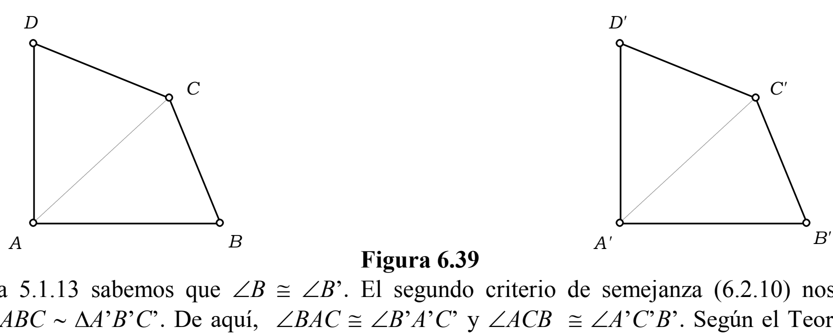


Figura 6.39

Del Teorema 5.1.13 sabemos que $\angle B \cong \angle B'$. El segundo criterio de semejanza (6.2.10) nos garantiza la semejanza $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. De aquí, $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ y $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$. Según el Teorema 2.8.2, se tiene que $\angle CAD = \angle A - \angle BAC \cong \angle A' - \angle B'A'C' = \angle C'A'D'$ y $\angle DCA = \angle C - \angle ACB \cong \angle C' - \angle A'C'B' = \angle D'C'A'$. Aplicando el primer criterio de semejanza (6.2.6), obtenemos que $\Delta DAC \sim \Delta D'A'C'$. La semejanza buscada $\square ABCD \sim \square A'B'C'D'$ la establece el Teorema 6.5.3. ♣

6.5.8. Cuarto Criterio de Semejanza de Cuadriláteros (*LALAA*). Si dos lados con un vértice en común de un cuadrilátero son proporcionales a dos lados con un vértice en común de otro, y tres ángulos (uno de los cuales es el comprendido entre dichos lados del primer cuadrilátero) son congruentes a tres ángulos (uno de los cuales es el comprendido entre dichos lados del segundo cuadrilátero), entonces los cuadriláteros son semejantes.

Prueba: Sean □*ABCD* y □*A'B'C'D'* dos cuadriláteros tales que $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|}$, $\angle B \cong \angle B'$, $\angle C \cong \angle C'$ y $\angle D \cong \angle D'$. Por el Teorema 5.1.13, sabemos que $\angle A \cong \angle A'$. El tercer criterio de semejanza de cuadriláteros (6.5.7) nos asegura que □*ABCD* ~ □*A'B'C'D'*. ♣

6.5.9. Quinto Criterio de Semejanza de Cuadriláteros (*ALALA*). Si dos lados de un cuadrilátero son proporcionales a dos lados de otro cuadrilátero, y tres ángulos (uno de los cuales es el comprendido entre dos de dichos lados del primer cuadrilátero) son congruentes a tres ángulos (uno de los cuales es el comprendido entre dos de dichos lados del segundo cuadrilátero), entonces los cuadriláteros son semejantes.

Prueba: Supongamos que los cuadriláteros □*ABCD* y □*A'B'C'D'* cumplen que $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|}$, $\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$ y $\angle C \cong \angle C'$. En vista del Teorema 5.1.13, $\angle D \cong \angle D'$. Según el tercer criterio (6.5.7), concluimos que □*ABCD* ~ □*A'B'C'D'*. ♣

Los criterios restantes no garantizan la semejanza de dos cuadriláteros:

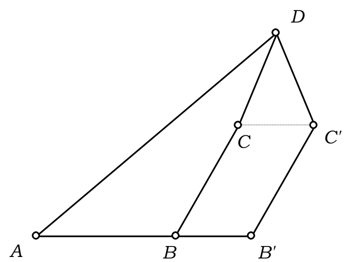


Figura 6.40

El criterio ***AALLL*** no determina la semejanza entre dos cuadriláteros:

En la figura 6.40, los cuadriláteros □*ABCD* y □*AB'C'D* satisfacen que $\angle CBA \cong \angle C'B'A$, $\angle A$ es un ángulo común, *AD* es un lado común, $DC \cong DC'$ y $BC \cong B'C'$, pero estos dos cuadriláteros no son semejantes. ♣

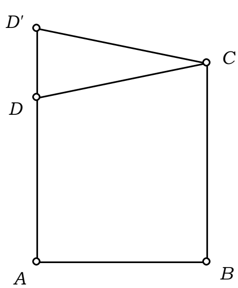


Figura 6.41

Tampoco el criterio ***ALALL*** garantiza la semejanza entre dos cuadriláteros. Por ejemplo, en la figura 6.41, los cuadriláteros □*ABCD* y □*ABCD'* tienen como partes comunes a los ángulos $\angle CBA$ y $\angle BAD$, y a los lados *AB* y *BC*. También se cumple que $DC \cong DC'$, pero es evidente que dichos cuadriláteros no son semejantes. ♣

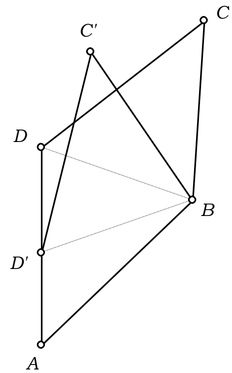


Figura 6.42

Este ejemplo muestra que el criterio ***ALLAL*** no asegura la semejanza entre dos cuadriláteros:

Los cuadriláteros $\square ABCD$ y $\square ABC'D'$ comparten el ángulo $\angle BAD$ y el lado AB. Además, se cumple que $BC \cong B'C'$, $\angle DCB \cong \angle D'C'B'$ y $DC \cong D'C'$. Claramente estos dos cuadriláteros no pueden ser semejantes. ♣

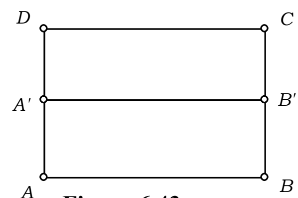


Figura 6.43

Para ver que el criterio ***LAALA*** no garantiza la semejanza de Cuadriláteros, basta con considerar los rectángulos $\square ABCD$ y $\square A'B'CD$, en los cuales $AB \cong A'B' \cong DC$. Dichos rectángulos no resultan ser semejantes. ♣

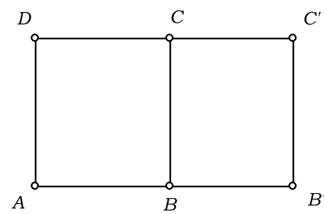


Figura 6.44

Los rectángulos $\square ABCD$ y $\square ABC'D'$ de la figura 6.44 satisfacen que $AD \cong BC \cong B'C'$, pero estos dos rectángulos obviamente no son semejantes. Con este ejemplo mostramos que el criterio ***AAAAL*** tampoco garantiza la semejanza de dos cuadriláteros. ♣

Problemas

6.1. Dividir un segmento dado en dos partes, de tal forma que la longitud de una sea $\frac{2}{3}$ la longitud de la otra.

6.2. Si un segmento de longitud a es dividido en la razón $\frac{i}{j}$, encontrar la medida de cada una de las dos partes en función de a, i y j.

6.3. Sean AB un segmento y a, b y c tres números reales positivos. Dividir AB en tres segmentos AC, CD y DB, de tal forma que $\frac{|AC|}{a} = \frac{|CD|}{b} = \frac{|DB|}{c}$.

6.4. Si $P \in AB$ y $\frac{|AP|}{|PB|} = \frac{3}{4}$, encontrar $\frac{|AP|}{|AB|}$.

6.5. Sean AB un segmento y X, $Y \in AB$ tales que Y está entre X y B, $\frac{|XY|}{|YB|} = \frac{|AX|}{|AB|}$ y $\frac{|AB|}{|XB|} = k$, en donde k es un número entero positivo. Encontrar $\frac{|AY|}{|YB|}$.

6.6. Sean AB y $A'B'$ dos segmentos congruentes. Si $C \in AB$ y $C' \in A'B'$ satisfacen que $\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{|A'C'|}{|C'B'|}$, probar las congruencias $AC \cong A'C'$ y $CB \cong C'B'$.

6.7. Si $|AB| = 9$, $P \in \overleftrightarrow{AB} - AB$ y $\frac{|AP|}{|PB|} = \frac{3}{2}$, encontrar $|AP|$ y $|PB|$.

6.8. Si $|AB| = 6$, $P \in \overleftrightarrow{AB} - AB$ y $\frac{|AP|}{|PB|} = \frac{3}{4}$, encontrar $|AP|$ y $|PB|$.

6.9. Si $|AB| = 7$ y $P \in AB$ divide al segmento AB en la razón $\frac{|AP|}{|PB|} = \frac{4}{3}$, encontrar $|AP|$ y $|PB|$.

6.10. Si $|AB| = 10$, $P \in AB$ divide al segmento AB en la razón $\frac{|AP|}{|PB|} = \frac{2}{3}$ y $Q \in \overleftrightarrow{AB} - AB$ satisface que $\frac{|AQ|}{|QB|} = \frac{3}{2}$, encontrar $|PQ|$.

6.11. Sean A, C y B tres puntos consecutivos. Si $|AC| = 11$ y $\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{4}{7}$, calcular la longitud de cada uno de los segmentos AC y CB.

6.12. Sean AB un segmento de longitud 70 y M su punto medio. Si $P \in AB$ satisface que $\frac{|AP|}{|PB|} = \frac{3}{7}$, encontrar la longitud del segmento PM.

6.13. Sean AB un segmento y M su punto medio. Si $P \in AB$ satisface que $|PM| = 4$ y $\frac{|AP|}{|PB|} = \frac{4}{7}$, encontrar la longitud del segmento AB.

6.14. Sean AB un segmento de longitud 30 y M su punto medio. Si $P \in \overleftrightarrow{AB} - AB$ satisface que $\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{3}{5}$, encontrar la longitud del segmento PM.

6.15. Sean AB un segmento y M su punto medio. Si $P \in \overleftrightarrow{AB} - AB$ satisface que $|PM| = 15$ y $\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{1}{3}$, encontrar la longitud del segmento AB.

6.16. Si $|AB| = 10$ y los puntos $P \in AB$ y $Q \in \overleftrightarrow{AB} - AB$ satisfacen que $\frac{|AP|}{|PB|} = \frac{|AQ|}{|QB|} = \frac{3}{2}$, encontrar $|PQ|$, $|AP|$, $|PB|$, $|AQ|$ y $|QB|$.

6.17. Si $|AB| = 10$, encontrar dos puntos M, $M' \in \overleftrightarrow{AB}$ tales que $\frac{|AM|}{|MB|} = \frac{|AM'|}{|M'B|} = \frac{2}{3}$ y calcular $|AM|$, $|MB|$, $|AM'|$ y $|M'B|$.

6.18. Sean AB y $A'B'$ dos segmentos. Si $C \in AB$ y $C' \in A'B'$ satisfacen que $r = \frac{|AC|}{|A'C'|} = \frac{|CB|}{|C'B'|}$, probar que $\frac{|AB|}{|A'B'|} = r$.

6.19. Sean A, B, C y D cuatro puntos consecutivos tales que $|AB| = 1$, $|BC| = 2$ y $|CD| = 3$. Si $M \in \overleftrightarrow{AD} - AC$ satisface la identidad $\frac{|MA|}{|MC|} = \frac{2}{5}$, calcular $\frac{|MO|}{|MO'|}$, en donde O y O' son los puntos medios de AB y CD, respectivamente.

6.20. Sean $P \in AB$ y $P' \notin AB$ tales que $\frac{|AP|}{|PB|} = \frac{i}{j} = \frac{|AP'|}{|P'B|}$, en donde i y j son números enteros positivos con $i < j$. Probar la identidad $\frac{2i}{|AB|} = \frac{j}{|PB|} - \frac{j}{|P'B|}$.

6.21. Sean A, P, Q y B cuatro puntos consecutivos. Si $\frac{|AP|}{|PB|} = 3$, $\frac{|AQ|}{|QB|} = 5$ y $|PQ| = 20$, encontrar la longitud del segmento AB.

6.22. Sean A, P, Q y B cuatro puntos consecutivos. Si $\frac{|AP|}{|PB|} = 2$ y $\frac{|AQ|}{|QB|} = 4$, probar que $\frac{|AP|}{|AB|} + \frac{|AQ|}{|AB|} = \frac{22}{15}$.

6.23. Sean A, B, C y D cuatro puntos consecutivos. Si $|AB| = \frac{|AD|}{3}$, $|AB| = x + 1$, $|BC| = 2x + 1$ y $|CD| = 3x + 2$, encontrar las longitudes de los segmentos AB, BC y CD.

6.24. Sean A, B, C y D cuatro puntos consecutivos. Si $\frac{|CD|}{|AC|} = \frac{1}{8}$ y $\frac{|AB|}{|BD|} = \frac{4}{5}$, probar que $|AB| = |BC|$ y $\frac{|AB|}{|CD|} = 4$.

6.25. Sean A', A, O, B y B' cinco puntos consecutivos. Si $|A'A| = \frac{7}{8}$, $|B'B| = \frac{3}{10}$, M es el punto medio de AB y M' es el punto medio de $A'B'$, encontrar la razón $\frac{|A'M'|}{|AM|}$.

6.26. Sean A, B y C tres puntos colineales consecutivos. Pongamos $a = |AB|$ y $b = |BC|$. Sea $X \in AC$ un punto tal que $|AB| = \frac{1}{5}|AM|$ en donde M es el punto medio de XC. Expresar $|BX|$ en función de a y b.

6.27. Dados dos puntos A y B en el plano, encontrar un punto $M \in \overleftrightarrow{AB}$ tal que

$$|AM||BM| = \frac{|AB|^2}{2}.$$

6.28. Sean AB un segmento, y $C \in AB$ y $D\in \overleftrightarrow{AB}-AB$ puntos tales que $k=\dfrac{|AC|}{|CB|}=\dfrac{|AD|}{|DB|} \neq 1$. Pongamos $a = |AB|$.

a. Si $k > 1$, probar que $|CD| = \dfrac{2ak}{k^2-1}$.

b. Si $k < 1$, probar que $|CD| = \dfrac{2a}{1-k^2}$.

6.29. Sean AB un segmento y $M, N \in \overleftrightarrow{AB}$ puntos tales que $\dfrac{|AM|}{|MB|} = \dfrac{|AN|}{|NB|} = \dfrac{i}{j}$. Pongamos $a = |AB|$.

a. Expresar en función de a, i y j las longitudes de los segmentos MA, MB, NA, NB y MN.
Sea P el punto medio de MN.

b. Escribir $\dfrac{|PM|}{|PB|}$ en función de i y j.

c. Probar que $\dfrac{|PA|}{|PB|} = \dfrac{|AM|^2}{|MB|^2} = \dfrac{i^2}{j^2}$.

6.30. Sean l y m dos rectas que se cortan en el punto O. Supongamos que $A \in l$ y $B \in m$ cumplen que $|OA| = 10$ y $|OB| = 12$, y M, $M' \in l$ satisfacen que $\dfrac{|AM|}{|MB|} = \dfrac{|AM'|}{|M'B|} = \dfrac{3}{2}$.

a. Si por M y M' trazamos dos rectas paralelas a $\overleftrightarrow{AB}$ que corten a m en los puntos N y N', respectivamente, calcular las longitudes de los segmentos ON y ON'.

b. Si n es otra recta que pasa por el punto O diferente de l y m, y si los puntos C, P y P' son las proyecciones de B, N y N' sobre esta recta, respectivamente, probar que $MP \parallel M'P'$.

6.31. Sea l un recta variable que pasa por un punto fijo P y que corta a dos rectas paralelas fijas en los puntos A y B. Probar que el producto $|PA||PB|$ es constante.

6.32. Cuatro rectas paralelas entre sí determinan sobre una recta transversal tres segmentos de longitudes 10, 20 y 35. Si un segmento transversal a las cuatro rectas tiene longitud 100, encontrar la longitud de cada uno de los segmentos que dichas rectas paralelas determinan sobre dicho segmento transversal.

6.33. Sean l una recta y P y Q puntos fuera de l. Si $d(P,l) = 2$ y $d(Q,l) = 5$, calcular la distancia del punto medio de PQ a la recta l.

6.34. Sean l y l' dos rectas paralelas, $P \in l$, $P \in l'$, M el punto medio del segmento PP', y m una recta que pasa por M y es paralela a l. Si $A\in l$ y $A'\in l'$, probar que el punto medio del segmento AA' está sobre la recta m.

6.35. Si AB y CD, y CD y EF son dos pares de segmentos conmensurables, probar que AB y EF también son conmensurables.

6.36. Probar que dos segmentos AB y CD son conmensurables si y solo si existen un número real positivo t y dos números naturales positivos p y q tales que $|AB| = tp$ y $|CD| = tq$.

6.37. ¿Son el cateto y la hipotenusa de un triángulo rectángulo conmensurables?

6.38. ¿Es posible expresar a una unión finita de segmentos colineales como una unión finita de segmentos congruentes entre sí?

6.39. Sea ΔABC un triángulo. Trazamos una recta paralela a BC que corte a AB y AC en los puntos D y E, respectivamente, y por D trazamos una recta paralela a AB que corte a BC en el punto F. Si BD y DA son conmensurables, probar que los segmentos BF y FC son también conmensurables.

6.40. Sea ΔABC un triángulo. Si AB y BC, y AC y BC son dos pares de segmentos conmensurables, probar que también AB y AC son conmensurables.

6.41. Definición. Decimos que un triángulo ΔABC es *conmensurable* si $\dfrac{|AB|}{|BC|}$ y $\dfrac{|AC|}{|BC|}$ son números racionales.

Probar que un triángulo ΔABC es conmensurable si y solo si existen dos números racionales positivos p y q tales que $\Delta ABC \sim \Delta(1,p,q)$.

6.42. Si un triángulo es conmensurable, probar que todos sus triángulos semejantes también son conmensurables.

6.43. Por un punto O del plano trazamos tres rectas $\overleftrightarrow{AP}$, $\overleftrightarrow{BQ}$ y $\overleftrightarrow{CR}$, de tal forma que $AB \parallel PQ$ y $BC \parallel QR$. Probar que $AC \parallel PR$.

6.44. Sean AB un segmento, M su punto medio y l una recta. Trazamos rectas paralelas en una dirección dada por cada uno de los puntos A, M y B que corten a l en los puntos A', M' y B', respectivamente. Probar las siguientes afirmaciones:

a. M' es el punto medio de $A'B'$.

b. $2|MM'| = |AA'| + |BB'|$.

c. Si las rectas de dicha dirección son perpendiculares a l, entonces $A'M \cong B'M$.

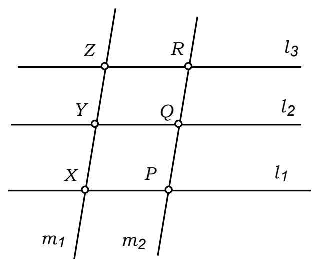
6.45. Sean A, C, D y B cuatro puntos consecutivos tales que $AC \cong CD \cong DB$ y l una recta que no corta a AB. Si A', C', D' y B' son las proyecciones de A, C, D y B sobre l, respectivamente, probar que

$$3|CC'| = 2|AA'| + |BB'|.$$

6.46. Sean A y B dos puntos y $P \notin \overleftrightarrow{AB}$. Encontrar una recta l que pase por P y $\dfrac{d(A,l)}{d(B,l)} = \dfrac{7}{5}$.

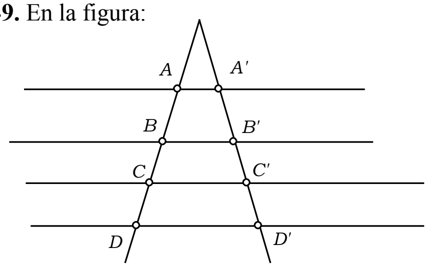
6.47. Sean AB un segmento y D un punto que divide a AB, de tal forma que $|AD|^2 = |AB||BD|$. Sea C un punto fuera de $\overleftrightarrow{AB}$ tal que $BC \perp \overleftrightarrow{AB}$ y $BC \cong AD$. Si E es el punto de intersección de $\overleftrightarrow{AB}$ y la recta perpendicular $\overleftrightarrow{AC}$ en el punto C, probar que $BD \cong BE$.

6.48. En la figura:



si $l_1 \parallel l_2$, $l_2 \parallel l_3$ y $m_1 \parallel m_2$, probar que $\dfrac{|YR|}{|XQ|} = \dfrac{|ZQ|}{|YP|}$.

6.49. En la figura:

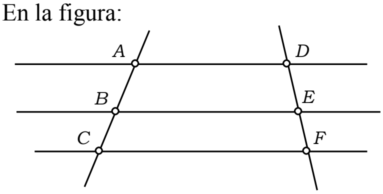


tenemos dos rectas secantes y cuatro rectas paralelas.

a. Si $|AB| = 3$, $|BC| = 2$, $|CD| = 1$ y $|A'D'| = 30$, calcular las longitudes de los segmentos $A'B'$, $B'C'$ y $C'D'$.

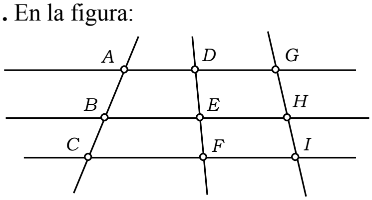
b. Si $|BC| = 6$, $|CD| = 2$, $|A'B'| = 8$ y $|C'D'| = 4$, calcular las longitudes de los segmentos AB y $B'C'$.

6.50. En la figura:



tenemos tres rectas paralelas cortadas por dos rectas transversales. Si $|AB| = 2x$, $|BC| = x - 1$, $|DE| = 3x - 1$ y $|DF| = 5x + 2$, calcular la longitud de cada uno de los segmentos AB, BC, DE y EF.

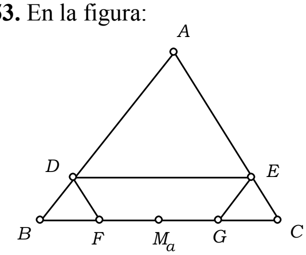
6.51. En la figura:



tenemos tres rectas paralelas cortadas por tres rectas transversales. Si $|AC| = x$, $|BC| = 3y$, $|DE| = 8$, $|EF| = 4$, $|GI| = 2y + 1$ y $|HI| = x$, calcular la longitud de cada uno de los segmentos AB, BC, GH y HI.

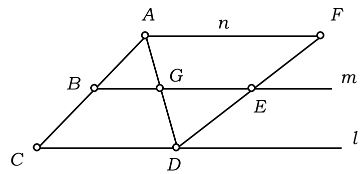
6.52. Tenemos dos triángulos tales que si unimos sus vértices correspondientes con rectas, dichas rectas resultan ser concurrentes, ¿son estos dos triángulos semejantes?

6.53. En la figura:



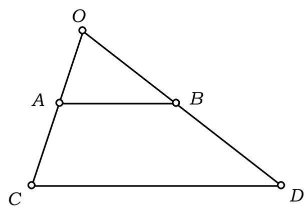
tenemos que $FM_a \cong M_aG$, $EG \parallel AB$ y $DF \parallel AC$. Probar que $DE \parallel BC$.

6.54. En la figura:



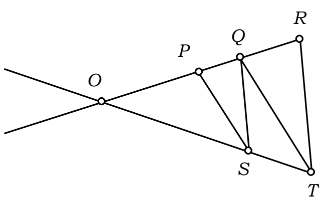
si $l \parallel m$, $l \parallel n$, $|AB| = 4$, $|BC| = 2$, $|GD| = 3$ y $|DE| = 5$, encontrar la longitud del segmento EF.

6.55. En la figura:



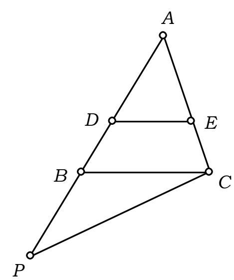
si $AB \parallel CD$, probar que $AB < CD$.

6.56. En la figura:



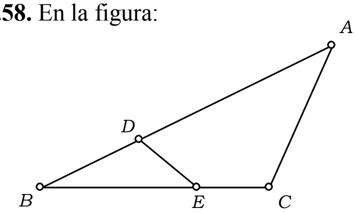
si $PS \parallel QT$ y $QS \parallel RT$, probar que $\dfrac{|OP|}{|OQ|} = \dfrac{|OQ|}{|OR|}$.

6.57. En la figura:



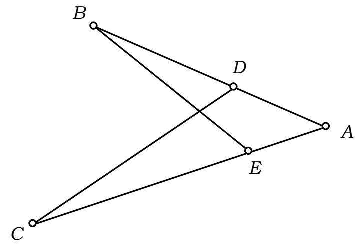
tenemos que $DE \parallel BC$ y $BE \parallel PC$. Si $\dfrac{|AD|}{|DB|} = \dfrac{1}{3}$, calcular $\dfrac{|AP|}{|PB|}$.

6.58. En la figura:



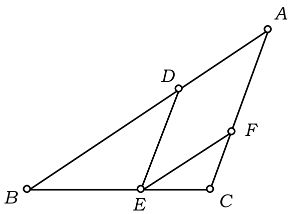
tenemos que $\angle ACB \cong \angle BDE$, $DE \cong EC$, $|AD| = 10$, $|DB| = 3$ y $|AC| = 8$. Encontrar la longitud de BC.

6.59. En la figura:



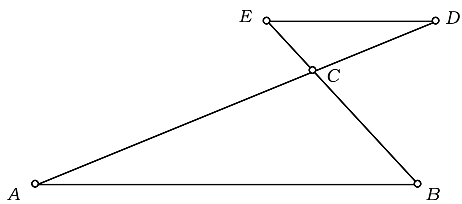
tenemos que $\angle EBA \cong \angle ACD$, $|BD| = 6$, $|CE| = 10$ y $|EA| = 3$. Encontrar la longitud de DA.

6.60 (CESGRARIO 90). En la figura:



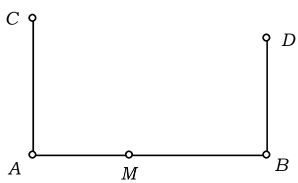
tenemos que $|AB| = 6$, $|BC| = 4$ y $|AC| = 3$. Si $\square EFAD$ es un rombo, calcular la longitud de sus lados.

6.61. En la figura:



supongamos que $|CB| = 3$, $|CD| = 2$ y $|CE| = 1$. Probar que $ED \parallel AB$ si y solo si $|AC| = 6$.

6.62. En la figura:



sea $M \in AB$ y supongamos que $AB \perp AC$ y $AB \perp BD$. Probar la equivalencia de los siguientes enunciados:

a. $|AM||MB| = |AC||DB|$.
b. $\Delta AMC \sim \Delta MBD$.
c. $\angle DMC$ es un ángulo recto.

Supongamos que $\angle DMC$ es recto. Si $|AC| + |BD| = 10$, probar que $|AM||MB| < 25$.

6.63. Sea ΔABC un triángulo. Si D y E dividen a los lados AB y AC en la razón $\frac{i}{j}$, respectivamente, probar que $|DE| = \frac{i}{i+j}a$.

6.64. Sea ΔABC un triángulo. Si $D, E \in int(\Delta ABC)$ y $DE \parallel BC$, probar que $DE < BC$.

6.65. Sean ΔABC un triángulo y $M, M' \in BC$. Sean P y P' los puntos de intersección de AC con las rectas paralelas a AB que pasan por los puntos M y M', respectivamente, y Q y Q' los puntos de intersección de AB con las rectas paralelas a AC que pasan por los puntos M y M', respectivamente. Probar que $|PP'||AB| = |QQ'||AC|$.

6.66. Sean ΔABC un triángulo y $D \in AB$ y $E \in BC$ tales que $\frac{|BD|}{|DA|} = \frac{1}{2}$ y $\frac{|BE|}{|EC|} = \frac{3}{4}$. Si AE y CD se cortan en el punto F, calcular $\frac{|CF|}{|FD|}$.

6.67. Sean ΔABC, $D, E \in AB$, $F \in AC$ y $G \in BC$. Si $AD \cong EB$, $DF \parallel BC$ y $EG \parallel AC$, probar que $FG \parallel AB$.

6.68. Sean ΔABC un triángulo y $P \in AB$ y $Q \in AC$ tales que $AP \cong AQ$. Si R es el punto de intersección de $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{PQ}$, probar que $\frac{|BR|}{|CR|} = \frac{|BP|}{|CQ|}$.

6.69. Sean ΔABC un triángulo y $D \in AB$ y $E \in AC$ tales que $DE \parallel FG$, y $\dfrac{|DB|}{|AD|} = \dfrac{1}{2}$. Si P es el punto de intersección de BE y CD, probar que $\dfrac{|BP|}{|PE|} = \dfrac{|CP|}{|PD|} = \dfrac{3}{2}$.

6.70. Sean ΔABC un triángulo y D, $F \in AB$, y E, $G \in AC$ tales que $DE \parallel FG$ y $FG \parallel BC$. Si $|AD| = 2$, $|AE| = 3$, $|EG| = 6$ y $|FB| = 4$, encontrar las longitudes de los segmentos DF y GC.

6.71. Sean ΔABC un triángulo y $P \in BC$ y $Q \in AC$ tales que $\dfrac{|BP|}{|PC|} = \dfrac{1}{3}$ y $\dfrac{|CQ|}{|QA|} = \dfrac{1}{6}$. Si P es el punto de intersección de $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{PQ}$, calcular $\dfrac{|PR|}{|PQ|}$.

6.72. Sean ΔABC un triángulo y $D \in BC$. Por el punto D trazamos rectas que sean paralelas a AC y AB y corten a AB y AC en los puntos E y F, respectivamente. Encontrar la condición que debe cumplir el punto D para que $EF \parallel BC$.

6.73. Sean ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$ y l una recta perpendicular a BC en el punto D. Si l corta a la recta $\overleftrightarrow{AB}$ en el punto E y a AC en el punto F, probar que $\dfrac{|BD|}{|DF|} = \dfrac{|DE|}{|DC|}$.

6.74. Sean ΔABC un triángulo, P, $Q \in BC$, $S \in AB$ y $R \in AC$. Si $BP \cong QC$, $PR \parallel AB$, y $QS \parallel AC$, probar que $RS \parallel BC$.

6.75. Sean ΔABC un triángulo y $D \in BC$ tales que $\dfrac{|BD|}{|DC|} = \dfrac{|AB|}{|AC|}$. Si prolongamos a AD hasta un punto E, de tal forma que $\dfrac{|AB|}{|AE|} = \dfrac{|AD|}{|AC|}$, probar que ΔBEC es un triángulo isósceles.

6.76. Sea ΔABC un triángulo. Una recta paralela a BC corta a AB y a AC en los puntos D y E, respectivamente, y una recta paralela a AB que pasa por E corta a BC en el punto F. Probar que $\dfrac{|AD|}{|DB|} = \dfrac{|BF|}{|FC|}$.

6.77. Sea ΔABC un triángulo. Una recta paralela a BC corta a AB y a AC en los puntos D y E, respectivamente, y una recta paralela a BE que pasa por C corta a $\overleftrightarrow{AB}$ en el punto F. Probar que $\dfrac{|AD|}{|AB|} = \dfrac{|AB|}{|AF|}$.

6.78. Sean ΔABC un triángulo y $P \in BC$ y $Q \in AB$ tales que $\dfrac{|BP|}{|PC|} = \dfrac{3}{5}$ y $\dfrac{|BQ|}{|QA|} = \dfrac{1}{2}$. Si R es el punto de intersección de AP y CQ, probar que $\dfrac{|BQ|}{|QA|} = \dfrac{5}{7}$.

6.79. Sean ΔABC un triángulo y $P \in BC$ y $Q \in AC$ tales que $\dfrac{|BP|}{|BC|} = \dfrac{2}{5}$ y $\dfrac{|CQ|}{|AC|} = \dfrac{1}{3}$. Si R es el punto de intersección de AP y BQ, probar que R es el punto medio de BQ.

6.80. Sean ΔABC un triángulo y $P \in AB$ y $Q \in AC$ tales que $\dfrac{|AP|}{|PB|} = \dfrac{3}{4}$ y $\dfrac{|AQ|}{|QC|} = \dfrac{3}{2}$. Si R es el punto de intersección de $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{PQ}$, probar que C es el punto medio de BR.

6.81. Sean ΔABC un triángulo y $P \in BC$ y $Q \in AC$ tales que $\dfrac{|BP|}{|BC|} = \dfrac{1}{3}$ y $\dfrac{|AQ|}{|QC|} = \dfrac{7}{4}$. Si R es el punto de intersección de $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{PQ}$, probar que $\dfrac{|AR|}{|BR|} = \dfrac{7}{2}$.

6.82. Sean ΔABC un triángulo y $D \in AB$ y $E \in AC$. Si $|AD| = \dfrac{|AB|}{6}$ y $|AE| = \dfrac{|AC|}{6}$, probar que $|DE| = \dfrac{|BC|}{6}$.

6.83. Sea ΔABC un triángulo en el cual $|AB| = 11$ y $|AC| = 24$. Supongamos que $D \in AB$ satisface que $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{3}{4}$. Si trazamos una recta paralela a BC que pase por el punto D y corte a AC en el punto E, calcular $|AE|$ y $|EC|$.

6.84. Consideremos el triángulo $\Delta(14,9,8)$. Fijemos un punto $D \in \overleftrightarrow{BC}$ tal que C esté entre B y D, y $|CD| = 1$, y un segundo punto $E \in AB$, de tal forma que $|AE| = 1$. Si F es el punto de intersección de AC y ED, encontrar las longitudes de los segmentos AF y FC.

6.85. Sean ΔABC y ΔDBC dos triángulos y $E \in BC$. Por E trazamos rectas paralelas a AC y DC que corten a AB y a DB en los puntos F y G, respectivamente. Probar que $FG \parallel AD$.

6.86. Sean ΔABC y ΔDBC dos triángulos tales que A y D están en un mismo semiplano determinado por $\overleftrightarrow{BC}$ y AC y BD se cortan en el punto E. Si por E trazamos una recta paralela a BC que corte a AB y a CD en los puntos P y G, respectivamente, probar que E es el punto medio de PQ.

6.87. Sean ΔABC un triángulo y $P \in int(\Delta ABC)$. Tomamos puntos $A' \in PA$, $B' \in PB$ y $C' \in PC$, de tal modo que $A'B' \parallel AB$ y $B'C' \parallel BC$. Probar que $A'C' \parallel AC$.

6.88. Sean ΔABC un triángulo y M el punto medio de BC. Por M trazamos dos rectas paralelas a AB y AC que corten a AC en E y a AB en D, respectivamente. Probar que $DE \parallel BC$.

6.89. Se tiene un triángulo ΔABC tal que $|AB| = 46$ y $|AC| = 60$, y dos puntos $D \in AB$ y $E \in AC$. Si $|AB| = 16$, ¿cuál deber ser la longitud del segmento BE para que $DE \parallel BC$?

6.90. En el triángulo $\Delta(10,20,21)$, tomamos puntos $D \in AB$ y $E \in AC$ tales que $DE \parallel BC$. Si $|AD| = 10$, calcular las longitudes de los segmentos DB, DE, AE y EC.

6.91. Sea ΔABC un triángulo. Supongamos que una recta paralela a BC corta a AC en dos segmentos de longitud 13 y 12. Si $|AB| = 100$, ¿cuáles son las longitudes de los segmentos en los que dicha recta corta a AB?

6.92. Sea ΔABC un triángulo. Una recta paralela a BC corta a AB y AC en los puntos D y E, respectivamente. Supongamos que $|DC|^2 = |BC||DE|$.

a. Probar que $\Delta DEC \sim \Delta DBC$.

b. Probar que $|AD|^2 = |AC||AE|$ y $|AC|^2 = |AB||AD|$.

c. Deducir una construcción para encontrar el segmento DE.

6.93. En un triángulo isósceles ΔABC con $AB \cong AC$, sean M el punto medio de BC, $D \in AB$ y $E \in AC$. Probar las siguientes afirmaciones:

a. $|CE| = \frac{|MB|^2}{|BD|}$ si y solo si $\angle EMD \cong \angle CBA \cong \angle ACB$.

En los incisos siguientes supondremos que $|CE| = \frac{|MB|^2}{|BD|}$.

b. Si $ED \parallel BC$, entonces $BM \cong BD$.

c. $\Delta DBM \cong \Delta MCE \cong \Delta DME$.

d. Las semirrectas $\overrightarrow{DM}$ y $\overrightarrow{EM}$ son las bisectrices de los ángulos $\angle BDE$ y $\angle DEC$, respectivamente.

e. $d(M,AB) = d(M,AC) = d(M,DE)$.

6.94. Intersecando dos triángulos arbitrarios, ¿es posible formar un triángulo semejante a uno dado?

6.95. Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos semejantes. Probar las siguientes afirmaciones.

a. Si los ángulos de ΔABC son agudos, entonces también los ángulos de $\Delta A'B'C'$ son agudos.

b. Si ΔABC tiene un ángulo obtuso, entonces $\Delta A'B'C'$ también tiene un ángulo obtuso.

c. Si ΔABC es isósceles, entonces $\Delta A'B'C'$ es también isósceles.

d. Si ΔABC es equilátero, entonces $\Delta A'B'C'$ es también equilátero.

e. Si ΔABC es un triángulo rectángulo, entonces $\Delta A'B'C'$ es también rectángulo.

6.96. Por tres puntos dados en el plano, trazar tres rectas, de tal manera que se forme un triángulo que sea semejante a un triángulo dado.

6.97. Probar que dos triángulos semejantes son congruentes si tienen un par de alturas correspondientes congruentes.

6.98. Si $\Delta(a,b,c) \sim \Delta(6,7,5)$ y $a = 3$, encontrar b y c.
6.99. Probar que si $\Delta(a,b,c) \sim \Delta(a',b',c')$ y $a < b < c$, entonces $a' < b' < c'$.
6.100. Probar que si $\Delta(a,b,c) \sim \Delta(a',b',c')$ y $\angle A < \angle B < \angle C$, entonces $\angle A' < \angle B' < \angle C'$.
6.101. Si $\Delta OAB \sim \Delta OCD$ y los puntos A, B, C, y D son colineales, probar que $\Delta OAC \sim \Delta OBD$.
6.102. Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos semejantes tales que $a = 2x$, $b = x$, $c = x + 7$, $a' = 30$ y $b' = 2x + 5$. Encontrar los valores numéricos de las variables a, b, c, a', b' y c'.
6.103. Si $\Delta(a,b,c) \sim \Delta(a',b',c')$, probar que $\Delta(a + b, a + c,b + c) \sim \Delta(a' + b',a' + c',b' + c')$.
6.104. Supongamos que $\Delta(a,b,c) \sim \Delta(a',b',c')$ y $t > 0$ es un número real.
a. ¿Cuándo $\Delta(a,b,c) \sim \Delta(a' + t,b' + t,c' + t)$?
b. ¿Cuándo $\Delta(a + t,b + t,c + t) \sim \Delta(a' + t,b' + t,c' + t)$?
6.105. Sea $k > 1$ un número entero. Probar que $\Delta(a,b,c) \sim \Delta(k,k+1,k+2)$ si y solo si existe un número real positivo x tal que $a = kx$ y $c - b = b - a = x$.
6.106. Sea ΔABC un triángulo. Si a', b' y c' son números reales positivos tales que $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$, probar que a', b' y c' son las longitudes de los lados de un triángulo semejante a ΔABC.
6.107. Si $\Delta(a,7,3) \sim \Delta(a',b',c')$ y $\frac{b}{b'} = 2$, probar que $2 < a' < 5$.
6.108. Sean ΔABC un triángulo y $P \in int(\Delta ABC)$. Si A', B' y C' son los puntos medios de PA, PB y PC, respectivamente, probar que $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.
6.109. Sean ΔABC un triángulo y $P \in int(\Delta ABC)$. Si $A' \in PA$, $B' \in PB$ y $C' \in PC$ satisfacen que $\frac{|PA|}{|PA'|} = \frac{|PB|}{|PB'|} = \frac{|PC|}{|PC'|}$, probar que $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.
6.110. Sean l, l' y l'' tres rectas concurrentes en el punto O. Si $p_{l,l'}$ es la función proyección de l sobre l' y $p_{l',l''}$ es la función proyección de l' sobre l'' (ver Problema 4.303), probar los siguientes enunciados:
a. Los puntos A, $p_{l,l'}(A)$ y $p_{l',l''}(p_{l,l'}(A))$ no son colineales, para todo punto $A \in l - \{O\}$.
b. $\Delta A\, p_{l,l'}(A)\, p_{l',l''}(p_{l,l'}(A)) \sim \Delta B\, p_{l,l'}(B)\, p_{l',l''}(p_{l,l'}(B))$, para cualquier par de puntos $A, B \in l - \{O\}$.
6.111. Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos isósceles con bases BC y $B'C'$, respectivamente. Probar que $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ si y solo si $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|}$.
6.112. Si ΔABC y $\Delta A'B'C'$ son dos triángulos tales que $m(\angle A) = 40 = m(\angle A')$, $m(\angle B) = 60$ y $m(\angle C') = 80$, probar que los dos triángulos tienen que ser semejantes.
6.113. Sean ΔABC un triángulo, l una recta que pasa por el vértice A paralela a BC, M y N los puntos medios de los lados AC y AB, respectivamente, y H y I los puntos de intersección de la recta l con las rectas $\overleftrightarrow{BM}$ y $\overleftrightarrow{CN}$, respectivamente. Si J es el punto de intersección de las rectas $\overleftrightarrow{BI}$ y $\overleftrightarrow{CH}$, probar que $\Delta ABC \sim \Delta JHI$.
6.114. Sean ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$ y l la bisectriz del ángulo exterior adyacente a $\angle A$. Si P, $Q \in l$ satisfacen que A está entre P y Q y $|AP||AQ| = |AB|^2$, probar que $\Delta ACQ \sim \Delta APB \sim \Delta SPQ$, donde S es el punto de intersección de las rectas $\overleftrightarrow{PB}$ y $\overleftrightarrow{QC}$.
6.115. Sean ΔABC un triángulo tal que $b > c$ y $M \in BC$. Por M trazamos rectas paralelas a AC y AB que corten a AB y AC en los puntos P y Q, respectivamente. Probar que $c \le |MP| + |MQ| \le b$.
6.116. Sean ΔABC un triángulo y M, $M' \in BC$. Por M y M' trazamos rectas paralelas a AB que corten a AC en P y en P', respectivamente, y rectas paralelas a AC que corten a AB en Q y en Q', respectivamente. Probar que

$$\frac{|PP'|}{|QQ'|} = \frac{|AC|}{|AB|}.$$

6.117. Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos semejantes. Si $D \in BC$ y $D' \in B'C'$ satisfacen que $\angle BAD \cong \angle B'A'D'$, probar que $\frac{|BD|}{|B'D'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|}$.

6.118. Sean ΔABC un triángulo, $D \in AB$, y $F \in AC$ tales que $DF \parallel BC$, $E \in \overleftrightarrow{AC}$ tal que C está entre A y E, y $CE \cong BD$, y M es punto de intersección de BC y DE. Probar que $\frac{|DM|}{|ME|} = \frac{|AC|}{|AB|}$.

6.119. Sean ΔABC un triángulo, $L \in BC$, M el punto de intersección de AC y la recta paralela a AB que pasa por L, y N el punto de intersección de AB y la recta paralela a AC que pasa por L. Probar que

$$\frac{|AN|}{|AB|} + \frac{|AM|}{|AC|} = 1.$$

6.120. Sean l, m y n tres rectas que concurren en el punto O y $A, A' \in l - \{O\}$. Sean B y B' las proyecciones de A y A' sobre m, respectivamente, y C y C' las proyecciones de B y B' sobre n, respectivamente. Probar las siguientes afirmaciones:

a. $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|}$.

b. $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

c. $AC \parallel A'C'$.

6.121. Sean ΔABC un triángulo equilátero y $D, E \in \overleftrightarrow{BC}$ tales que D precede a B y C precede a E. Si $m(\angle DAE) = 120$, probar las siguientes afirmaciones:

a. $\Delta ADB \sim \Delta ACE$.

b. $|BD||CE| = |BC|^2$.

c. $\frac{|AD|^2}{|AE|^2} = \frac{|BD|}{|CE|}$.

6.122. Sean ΔABC un triángulo y D el punto medio de BC. Sean $P \in BC$ y l una recta paralela a AD que pase por el punto P y que corte a $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{AC}$ en los puntos M y N, respectivamente.

a. Probar que $\frac{|AM|}{|AB|} = \frac{|AN|}{|AC|}$.

b. Demostrar la igualdad $|PM| + |PN| = 2|AD|$.

6.123. Sea ΔABC un triángulo. Sean $P_0, \ldots, P_k \in AB$ y $Q_0, \ldots, Q_k \in AC$ tales que $AP_0 \cong P_0P_1 \cong \ldots \cong P_kB$ y $P_iQ_i \parallel BC$, para cada $i \leq k$, en donde k es un número natural positivo. Para cada $i \leq k$, expresar la longitud del segmento P_iQ_i en función de $a = |BC|$.

6.124. Sean ΔABC y ΔADC dos triángulos tales que B y D están en diferentes semiplanos determinados por $\overleftrightarrow{AC}$. Si $|AB|:|BC|:|CA| = |CA|:|AD|:|DC|$, probar que $\frac{|BC|^2}{|AD|^2} = \frac{|AB|}{|DC|}$ y $DC \parallel AB$.

6.125[a-Las-2]. Fijemos un número real $r > 0$. Dados dos puntos A y B en el plano, definimos $A \bullet B$ como el punto $P \in AB$ tal que $\frac{|AP|}{|PB|} = r$.

a. Probar que $A \bullet B = B \bullet A$ si y solo si $r = 1$. En este caso, $A \bullet B$ es el punto medio del segmento AB.

b. Si $A \bullet B = A \bullet C$, probar que $B = C$.

c. Si $A \bullet C = B \bullet C$, probar que $A = B$.

d. ¿Es cierto que $A \bullet (B \bullet C) = (A \bullet B) \bullet C$?

e. ¿Existen puntos A, B, C y D tales que $A \bullet B = C \bullet D$?

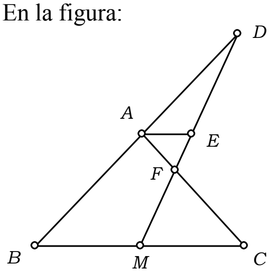
f. Probar que para cada par de puntos A y B existe un punto C en el plano tal que $A \bullet C = B$.

6.126[a-92]. Sean ΔLMN y ΔPQR dos triángulos. Dados dos puntos A y B en el plano, definimos $A \bullet B$ y $A+B$ como los puntos en el plano tales que $\Delta AB(A \bullet B) \cong \Delta LMN$ y $\Delta AB(A+B) \cong \Delta PQR$, y $A \bullet B$ y $A+B$ son tomados en el sentido contrario a las manecillas del reloj con respecto a los puntos A y B.

a. Probar que $(A + C) \bullet (B + D) = (A \bullet B) + (C \bullet D)$.

b. ¿Cuándo se cumple la igualdad $A \bullet B = A + B$?

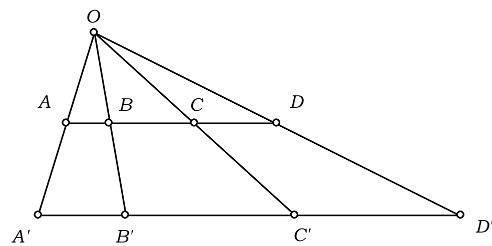
6.127. En la figura:



M es el punto medio de BC y $AE \parallel BC$.

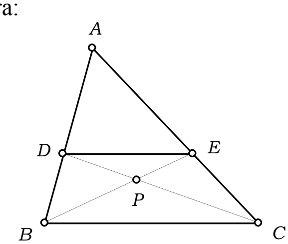
Probar que $\dfrac{|MF|}{|FE|} = \dfrac{|MD|}{|ED|}$.

6.128. En la figura:



se tiene que $AD \parallel A'D'$, $|AB| = 2$, $|BC| = 4$, $|CD| = 3$ y $|A'D'| = 16$. Encontrar las longitudes de los segmentos $A'B'$, $B'C'$ y $C'D'$.

6.129. En la figura:



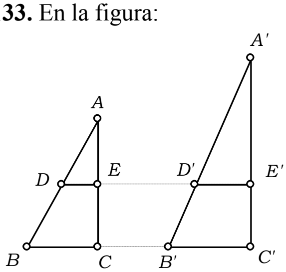
si $DE \parallel BC$, P es el punto de intersección de BE y CD, y $\dfrac{|AD|}{|DB|} = \dfrac{5}{3}$, calcular $\dfrac{|DP|}{|PC|}$.

6.130. Sean AB, $A'B'$ y $A''B''$ tres segmentos paralelos y M, M' y M'' sus puntos medios, respectivamente. Si A, A' y A'', y B, B' y B'' son dos hileras de puntos, probar que M, M' y M'' son colineales.

6.131[a-121]. Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos semejantes tales que B, C, B' y C' son colineales. Si D y D' son los puntos de intersección de $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{A'B}$, y $\overleftrightarrow{A'B'}$ y $\overleftrightarrow{AC'}$, respectivamente, probar que $D = D'$ o $DD' \parallel BC$.

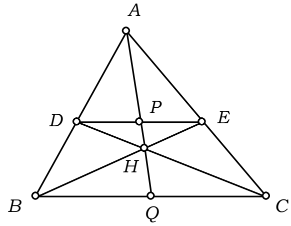
6.132. Sean ΔABC un triángulo, $D, G \in AB$, y $E, F \in AC$. Supongamos que $DE \parallel AB$ y $DE \parallel GF$. Si P es el punto de intersección de las diagonales del trapecio $\square DEFG$, probar que $\overrightarrow{AP}$ corta a BC en su punto medio.

6.133. En la figura:



tenemos dos triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ rectángulos en $\angle C$ y $\angle C'$, respectivamente, tales que $|BC| = 3$, $|AC| = 5$, $|B'C'| = 4$ y $|A'C'| = 8$. Supongamos que $DE \parallel BC$ y que BC y $B'C'$ son colineales lo mismo que DE y $D'E'$. Si $DE \cong D'E'$, calcular $|AE|$, $|A'E'|$, $|EC|$ y $|E'C'|$.

6.134. En la figura:

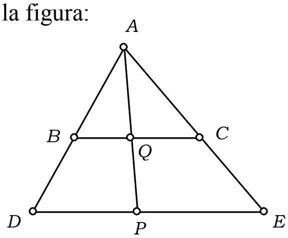


tenemos que $DE \parallel BC$ y $\overrightarrow{AH}$ corta a DE y BC en los puntos P y Q, respectivamente.

a. Probar que $\dfrac{|AP|}{|AQ|} = \dfrac{|PH|}{|HQ|}$.

b. Si $\dfrac{|AD|}{|AB|} = \dfrac{1}{3}$, probar que H es el punto medio de AQ.

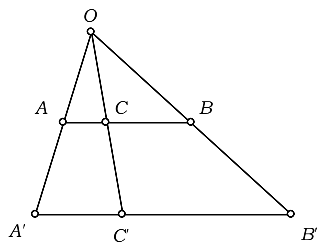
6.135. En la figura:



tenemos que $DE \parallel BC$ y $P \in DE$. Si $\overrightarrow{AP}$ corta a BC en el punto Q, $\dfrac{|DP|}{|PE|} = \dfrac{|BD|}{|CE|}$ y $\dfrac{|BQ|}{|QC|} = \dfrac{|DP|}{|PE|}$.

Probar que Q permanece si D se mueve y P conserva sus propiedades.

6.136. En la figura:

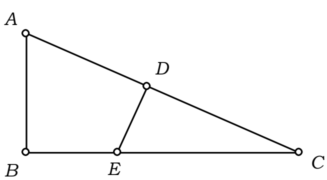


tenemos que $AB \parallel A'B'$. Si s es la media geométrica de $|AC|$ y $|CB|$, probar que $\dfrac{s}{k}$ es la media geométrica de $|A'C'|$ y $|C'B'|$, en donde $k = \dfrac{|AC|}{|A'C'|}$.

6.137. Sean AB y CD dos segmentos cuyas longitudes suman 10 y su media geométrica es igual a 3. Encontrar las longitudes de ambos segmentos.

6.138. Sean ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$ y l una recta paralela a AC que corta a AB y BC en los puntos D y E, respectivamente. Si $|DE|$ es la media geométrica de $|BD|$ y $|DA|$, probar que $|AE|$ es la media geométrica de $|BE|$ y $|EC|$.

6.139. En la figura:

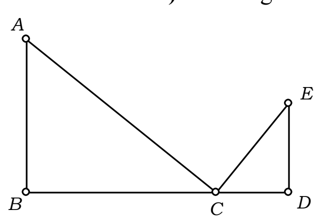


$\angle CBA$ es un ángulo recto y $AC \perp DE$.

Probar que $\dfrac{|EC|}{|AC|} = \dfrac{|DC|}{|BC|}$.

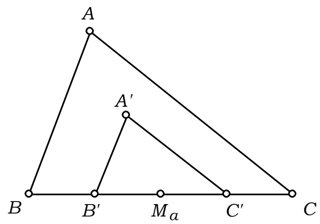
6.140[I-240]. Sean ΔABC un triángulo, $D \in AB$ y $E \in AC$ tales que $DE \parallel BC$. Sean M el punto medio de AE y P el punto de intersección de DE y MM_a. Si $\dfrac{|AD|}{|DB|} = 3$, calcular $\dfrac{|DP|}{|PE|}$.

6.141 (CESGRARIO 90). En la figura:



tenemos que $ED \perp BD$, $AB \perp BD$ y $EC \perp AC$.
Probar que $|AB||ED| = |BC||CD|$.

6.142. En la figura:

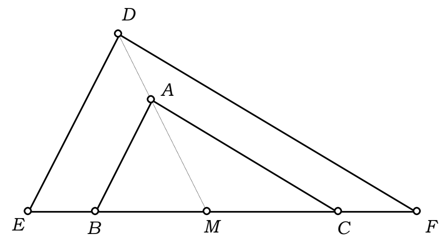


tenemos que B' es el punto medio de BM_a y C' es el punto medio de M_aC. Si

$$|A'B'| = \frac{|AB|}{2} \text{ y } |A'C'| = \frac{|AC|}{2},$$

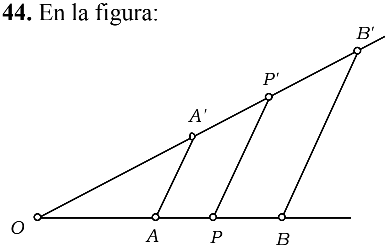
probar que A, A' y M_a son colineales.

6.143. En la figura:



sean ΔABC y ΔDEF dos triángulos tales que $DE \parallel AB$ y $DF \parallel AC$ y supongamos que D, A y M son colineales. Probar que $\frac{|MB|}{|BE|} = \frac{|MC|}{|CF|}$.

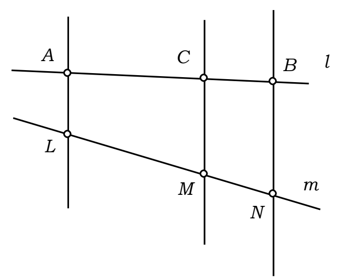
6.144. En la figura:



tenemos que $AA' \parallel PP'$ y $BB' \parallel PP'$. Probar que

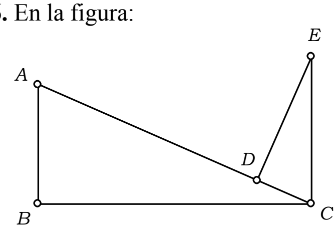
$$|AA'| + |BB'| = |PP'|(2 + \frac{|PB| - |PA|}{|OP|}).$$

6.145. En la figura:



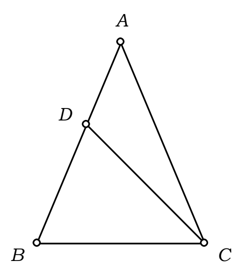
tenemos que $AL \parallel MC$, $MC \parallel BN$ y $2|CB| = |AC|$. Probar que $|AL| + 3|BM| = 3|CN|$.

6.146. En la figura:



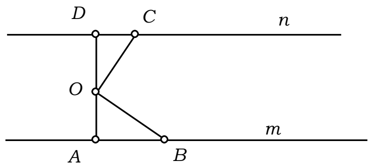
$\angle CBA$ es un ángulo recto y $AC \perp DE$. Probar que $\frac{|EC|}{|AC|} = \frac{|DE|}{|BC|}$.

6.147. En la figura:



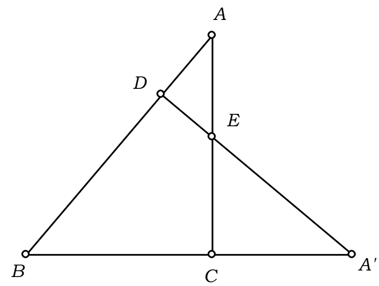
si $AB \cong AC$ y $BC \cong DC$, probar que $|BC|^2 = |AB||BD|$.

6.148. En la figura:



si $m \parallel n$, el ángulo $\angle BOC$ es recto y $AD \perp m$, probar que $|DC||AB| = |DO||OA|$.

6.149. En la figura:

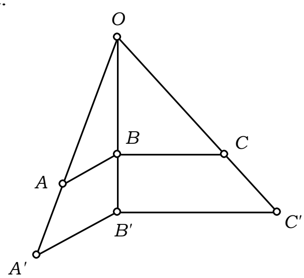


sean ΔABC y $\Delta A'BD$ dos triángulos rectángulos en $\angle C$ y $\angle D$, respectivamente. Probar las siguientes afirmaciones:

a. $|A'E||A'D| = |A'C||A'B|$, $|ED||EA'| = |EA||EC|$ y $|CE||CA| = |CB||CA'|$.

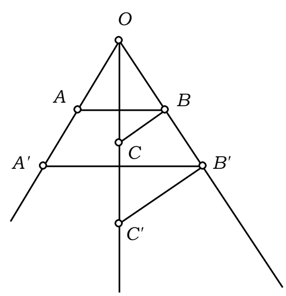
b. $\Delta ABC \sim \Delta A'BD \sim \Delta AED \sim \Delta A'EC$.

6.150. En la figura:



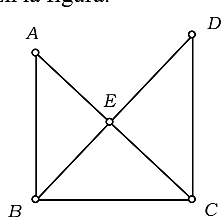
si $AB \parallel A'B'$ y $BC \parallel B'C'$, probar que $AC \parallel A'C'$.

6.151. En la figura:



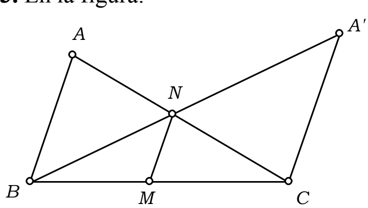
si $AB \parallel A'B'$ y $BC \parallel B'C'$, probar que $AC \parallel A'C'$.

6.152. En la figura:



tenemos que $AB \perp BC$, $DC \perp BC$ y $AC \perp BD$. Probar que los triángulos ΔEBC, ΔBEA, ΔECD, ΔABC y ΔDBC son semejantes entre sí.

6.153. En la figura:



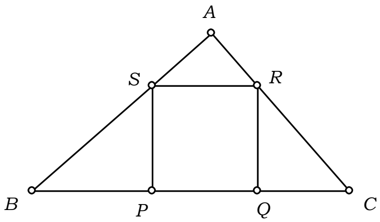
supongamos que $AB \parallel NM$ y $A'C \parallel NM$. Si $|AB| = 10$ y $|A'C| = 15$, calcular $|MN|$.

6.154. En un triángulo ΔABC, sean P, $Q \in BC$ tales que $|BP| = |PQ| = |QC|$, X el punto de intersección de AB con la recta paralela a AC que pasa por P y Y el punto de intersección de AC con la recta paralela a AB que pasa por Q. Probar que $XY \parallel BC$.

6.155. Sean ΔABC un triángulo y $\square PQRS$ un rectángulo inscrito en él, de tal modo que P, $Q \in BC$. Probar que

$$\frac{|PQ|}{a} + \frac{|QR|}{h_a} = 1.$$

6.156. En la figura:



tenemos un triángulo ΔABC y un cuadrado $\square PQRS$.

a[a-177], [a-161]. Si los ángulos $\angle B$ y $\angle C$ son agudos, probar que la longitud de los lados del cuadrado es igual a $\dfrac{2are(\Delta ABC)}{a + h_a}$.

b[a-21]. Si todos los ángulos del triángulo ΔABC son agudos, probar que el cuadrado más grande que se pueda inscribir en el triángulo tiene uno de sus lados en el lado más corto del mismo triángulo.

c[a-21]. Si ΔABC es un triángulo rectángulo, el cuadrado inscrito en el triángulo cuyos dos lados están sobre los catetos del mismo triángulo es más grande que el cuadrado inscrito que tiene uno de sus lados sobre la hipotenusa del mismo triángulo.

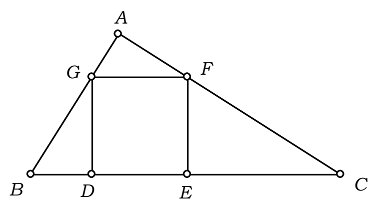
d[a-21]. Si todos los ángulos del triángulo ΔABC son agudos, probar que el cuadrado más grande que se puede inscribir en el triángulo tiene uno de sus lados en el lado más corto del triángulo.

Las demostraciones de los enunciados b), c) y d) aparecen en el artículo de J. E. Wetzel [a-177]. También este artículo contiene una extensa bibliografía sobre este tema. El libro de M. Gardner [l-153], en uno de sus capítulos, ofrece un bonito resumen sobre la inscripción de cuadrados en triángulos. Para una construcción de este tipo de cuadrados dentro de un triángulo, ver Problema 11.202.

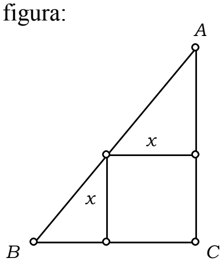
6.157. En la figura:

ΔABC es un triángulo rectángulo en $\angle A$ y $\square DEFG$ es un cuadrado. Probar que

$$|BD||EC| = |DE|^2.$$



6.158. En la figura:



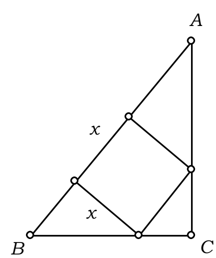
sean ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle C$ y x la longitud del cuadrado inscrito.

a[a-10]. Probar la relación $x = \dfrac{ab}{a+b}$.

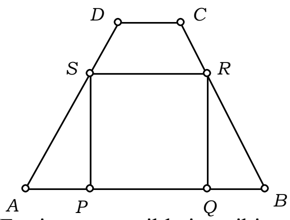
b[a-94]. Probar que $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$.

6.159[a-94]. En la figura:

sean ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle C$ y x la longitud del cuadrado inscrito. Probar la identidad $x = \dfrac{abc}{ab + c^2}$.



6.160. En la figura:



tenemos un trapecio isósceles $\square ABCD$ tal que $AB \parallel CD$, $|AB| = 20$, $|CD| = 4$, y la altura correspondiente a los lados paralelos tiene longitud igual a 8 y $\square PQRS$ es un cuadrado. Calcular la longitud de los lados del cuadrado.

6.161. ¿Es siempre posible inscribir en un trapecio isósceles un cuadrado como en el problema anterior?

6.162. Sea $\square PQRS$ un cuadrado inscrito en un rombo $\square ABCD$. Expresar la longitud de los lados del cuadrado en función de las longitudes e y f de las diagonales del rombo.

6.163. En el triángulo $\Delta(8,4,5)$ prolongamos BC del lado del punto C hasta un punto Q tal que $|CQ| = 2$, y también prolongamos AC del lado del punto C hasta un punto P. Si $PQ \parallel AB$, calcular la longitud del segmento CP.

6.164. Sean ΔABC un triángulo con $AC > AB$ y l una recta que pasa por B y corta a AC en el punto D. Si $\angle DBA \cong \angle C$, probar que $\dfrac{|BD|^2}{|BC|^2} = \dfrac{|AD|}{|AC|}$.

6.165. Sea ΔABC un triángulo. Si l es una recta paralela a BC que corta a las rectas $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{AB}$ en los puntos M y N, respectivamente, y D es el punto de intersección de $\overleftrightarrow{AB}$ y la recta paralela a BM que pasa por C, probar que

$$|AB|^2 = |AN||AD|.$$

6.166. Sean ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$, l la bisectriz del ángulo exterior adyacente al ángulo $\angle A$, y P, $Q \in l$ tales que A está entre P y Q, y $|AB|^2 = |AP||AQ|$.

a. Probar que $\Delta APB \sim \Delta ACQ$.

b. Si R es el punto de intersección de PB y CQ, probar que $\Delta RPQ \sim \Delta APB \sim \Delta ACQ$.

6.167. Sea ΔABC un triángulo. Prolongamos BC hasta un punto D, de tal forma que $2|CD| = |BC|$. Si E es el punto de intersección de AC y $M_a D$, probar que $|AE| = 3|CE|$.

6.168. Sean ΔABC un triángulo y $H \in AB$ y $K \in AC$ puntos tales que $\dfrac{|AH|}{|HB|} = \dfrac{|AK|}{|KC|} = \dfrac{5}{3}$. Encontrar $\dfrac{|KC|}{|AC|}$.

6.169. Sean ΔABC un triángulo, P, $Q \in BC$, $X \in AB$ y $Y \in AC$. Probar que $XY \parallel BC$ si y solo si $\dfrac{|QB|}{|QC|} = \dfrac{|PC|}{|PB|}$.

6.170. Sean ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$, $M \in int(\Delta ABC)$, y H, I y J las proyecciones de M sobre $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{AB}$, respectivamente. Probar que $|MH|^2 = |MI||MJ|$ si y solo si $\Delta MJH \sim \Delta MIH$.

6.171. En el triángulo $\Delta(10,6,7)$ tomamos un punto $P \in AB$ tal que $|PB| = 2$. Si $l \parallel \overleftrightarrow{BC}$, $P \in l$ y l corta a AC en el punto Q, calcular las longitudes de los segmentos AQ, QC y PQ.

6.172. Sean ΔABC y $\Delta A'BC$ dos triángulos con el mismo lado BC y la misma altura con respecto a sus vértices A y A'. Probar que toda recta paralela a BC corta a los otros dos lados de los triángulos en puntos que forman dos segmentos congruentes.

6.173. Dos triángulos tienen bases de longitud 10 y 6, y sus alturas correspondientes tienen longitudes 6 y 10, respectivamente. Si sus bases están sobre una misma recta, ¿a qué distancia de la recta que contiene a las bases se debe trazar una recta paralela para que corte a los otros lados de los triángulos dados en puntos que forman dos segmentos congruentes?

6.174. ¿Qué tan lejos se encuentra un hombre de su punto de partida si primero caminó 4 km hacia el norte, después 3 km hacia el este y, posteriormente, 5 km hacia el norte?

6.175. Se tiene un segmento inaccesible, pero visible, y un punto en un área accesible. Trazar una recta paralela al segmento inaccesible que pase por el punto accesible.

6.176. Probar cada uno de los siguientes criterios de semejanza para cuadriláteros especiales:

a.**[*LL*]** Si dos lados adyacentes de un rectángulo son proporcionales a dos lados adyacentes de otro rectángulo, entonces los dos rectángulos son semejantes.

b.**[*LD*]** Si un lado y una diagonal de un rectángulo son proporcionales a un lado y a una diagonal de otro rectángulo, entonces los dos rectángulos son semejantes.

c.**[*LAL*]** Si dos lados de un paralelogramo son proporcionales a dos lados de otro paralelogramo, y el ángulo comprendido entre los dos lados dados del primer paralelogramo es congruente con el ángulo comprendido entre los dos lados dados del segundo paralelogramo, entonces los dos paralelogramos son semejantes.

d.**[*LAD*]** Si un lado y una diagonal de un paralelogramo son proporcionales a un lado y a una diagonal de otro paralelogramo, y el ángulo formado por el lado y la diagonal del primer paralelogramo es congruente con el ángulo formado por el lado y la diagonal del segundo paralelogramo, entonces los dos paralelogramos son semejantes.

e.**[*DAD*]** Si las diagonales de un paralelogramo son proporcionales a las diagonales de otro paralelogramo, y el ángulo formado por las diagonales del primer paralelogramo es congruente con al ángulo formado por las diagonales del segundo paralelogramo, entonces los dos paralelogramos son semejantes.

f.**[*LLD*]** Si dos lados adyacentes y la diagonal comprendida ente ellos de un paralelogramo son proporcionales a dos lados adyacentes y a la diagonal comprendida entre estos lados de otro paralelogramo, entonces los dos paralelogramos son semejantes.

g.**[*LD*]** Si un lado y una diagonal de un rombo son proporcionales a un lado y una diagonal de otro rombo, entonces los dos rombos son semejantes.

h.**[*DD*]** Si las diagonales de un rombo son proporcionales a las diagonales de otro rombo, entonces los dos rombos son semejantes.

6.177. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero. Trazamos una recta paralela a AB que corte a $\overleftrightarrow{BC}$ y a $\overleftrightarrow{AD}$ en los puntos E y F, respectivamente, ¿es cierto que $\square ABCD \sim \square ABEF$?

6.178. Sean ΔABC un triángulo, $D \in AB$, E el punto de intersección de AC y la recta paralela a BC que pasa por D, y M y K las proyecciones de D y E sobre BC, respectivamente. Dado un rectángulo $\square OPQR$, ubicar al punto E, de tal forma que $\square MKED$ y $\square OPQR$ sean semejantes.

6.179. Sean $\square ABCD$ un cuadrilátero y $P \in \overleftrightarrow{AC} - AC$. Por P trazamos dos rectas tales que una de ellas corta a AB y BC en los puntos E y F, respectivamente, y la otra corta CD y DA en los puntos G y H, respectivamente. Si $EH \parallel BD$, probar que $FG \parallel BD$.

6.180. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero cualquiera. Si $E \in AB$, $F \in BC$, $G \in CD$ y $H \in DA$ satisfacen que

$$\frac{|AE|}{|EB|} = \frac{|BF|}{|FC|} = \frac{|CG|}{|GD|} = \frac{|DH|}{|HA|},$$

probar que $\square EFGH$ es un paralelogramo.

6.181. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero tal que $AB \cong CD$. Si E, F, G y H son los puntos medios de AD, AC, BD y BC, respectivamente, probar que $EH \perp FG$.

6.182. Sean $\square ABCD$ un cuadrilátero y $H \in AB$, $E \in BC$, $G \in CD$ y $K \in DA$. Sean F el punto de intersección de AC y EG, y I el punto de intersección de AC y HK. Supongamos que $GE \parallel BD$ y $HI \parallel BD$.

a. Probar que $\dfrac{|GF|}{|FE|} = \dfrac{|KI|}{|IH|}$.

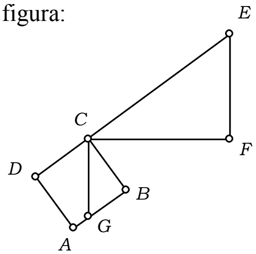
b. Probar que las rectas $\overleftrightarrow{KG}$, $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{HE}$ son concurrentes o son paralelas.

c. Si $GK \parallel AC$, probar que $FE \cong IH$ y $EH \parallel GK$.

6.183. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero tal que $\angle D$ y $\angle B$ son ángulos rectos. Si $P \in AC$ y los puntos M y N son sus proyecciones sobre BC y AD, respectivamente, probar que $\dfrac{|PM|}{|AB|} + \dfrac{|PN|}{|CD|} = 1$.

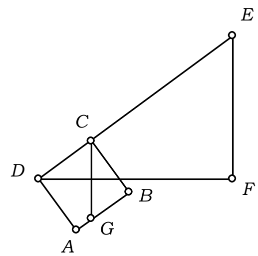
6.184. Sean □$ABCD$ un cuadrilátero y $E \in AD$. Tomamos puntos $P \in AE$ y $Q \in ED$ tales que $\frac{|AP|}{|PE|} = \frac{|DQ|}{|QE|}$.
Si R es el punto de intersección de EB y la recta que pasa por P paralela a AB y S es el punto de intersección de EC y la recta que pasa por Q paralela a CD, probar que $RS \parallel BC$.

6.185. En la figura:



tenemos un cuadrado □$ABCD$ y un triángulo ΔECF rectángulo en recto $\angle F$. Si $GC \parallel FE$ y D, C y E son colineales, probar la identidad $\frac{|BC|}{|CF|} = \frac{|GB|}{|FE|}$.

6.186. En la figura:



tenemos un cuadrado □$ABCD$ y un triángulo rectángulo ΔECF con ángulo recto $\angle F$. Si $GC \parallel FE$ y D, C y E son colineales, probar que $\Delta CGB \sim \Delta EDF$.

6.187. Sean □$ABCD$ un cuadrilátero y $M \in AB$, $N \in BC$, $P \in CD$ y $Q \in DA$. Si $\frac{|AM|}{|MB|} = \frac{|AQ|}{|QD|}$ y $\frac{|BN|}{|NC|} = \frac{|DP|}{|PC|}$, probar que $MQ \parallel NP$.

6.188. Sean □$ABCD$ un cuadrilátero y $P \in int$(□$ABCD$). Si PA, PB, PC y PD son divididos por los puntos A', B', C' y D', respectivamente, de tal modo que $\frac{|PA'|}{|PA|} = \frac{|PB'|}{|PB|} = \frac{|PC'|}{|PC|} = \frac{|PD'|}{|PD|} = \frac{2}{3}$. Probar las siguientes afirmaciones:

a. $A'B' \parallel AB$.
b. $\angle D'A'B' \cong \angle DAB$.
c. ¿Son los cuadriláteros □$ABCD$ y □$A'B'C'D'$ semejantes?

6.189. Sean □$ABCD$ un cuadrilátero y $P \in int$(□$ABCD$). Si PA, PB, PC y PD son divididos por los puntos A', B', C' y D', respectivamente. Si $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$ y $CD \parallel C'D'$, probar que □$ABCD \sim$ □$A'B'C'D'$. ¿Es cierta la afirmación si el punto yace en el exterior del cuadrilátero?

6.190. Si a un rectángulo lo cortamos en dos rectángulos congruentes y uno de estos es semejante al rectángulo original, ¿qué relación hay entre los lados del rectángulo original?

6.191. Dado un pliego rectangular de cartulina, probar que su ancho y su largo son conmensurables si y solo si el pliego se puede plegar hasta obtener un cuadrado.

6.192. Sean □$ABCD$ y □$A'B'C'D'$ dos cuadrados, $E \in \overleftrightarrow{AC}$ y $E' \in \overleftrightarrow{A'C'}$. Dar una condición necesaria y suficiente para que los cuadriláteros □$ABCE$ y □$A'B'C'E'$ sean semejantes.

6.193. Si a y b son dos números reales positivos, probar que

$$\square\left(a, \frac{a}{2}, a, \frac{a}{2}\right) \sim \square\left(a+b, \frac{a+b}{2}, a+b, \frac{a+b}{2}\right).$$

6.194. Sean □$ABCD$ y □$A'B'C'D'$ dos rectángulos semejantes. Probar que si uno de ellos es un cuadrado, entonces también lo es el segundo.

6.195. Sea □$ABCD$ un cuadrilátero tal que $\angle A \cong \angle CBD$ y $\overrightarrow{DB}$ es la bisectriz de $\angle D$. Probar la identidad

$$\frac{|AB|^2}{|BC|^2} = \frac{|AO|}{|OC|}.$$

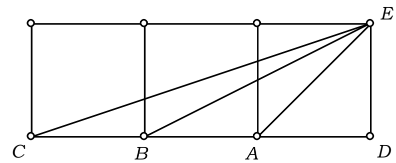
6.196. Si las bisectrices de un par de ángulos opuestos de un cuadrilátero se cortan en una de las diagonales, probar que las bisectrices del otro par de ángulos opuestos también se cortan en una de las diagonales del mismo cuadrilátero.

6.197. Sean □$ABCD$ un cuadrilátero y O el punto de intersección de sus diagonales. Sean E el punto de intersección de AB y la recta paralela a BC, F el punto de intersección de AD y la recta paralela a DC, G el punto de intersección de DC y la recta paralela a AD, y H el punto de intersección de BC y la recta paralela a AB**.**

a. Probar que $EF \parallel BD$ y $BD \parallel GH$.

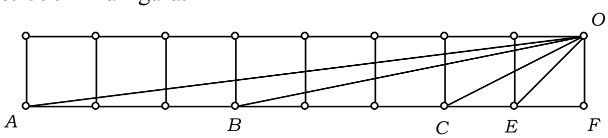
b. ¿Qué puede uno decir del cuadrilátero □$EFGH$ si O es el punto medio de AC?

6.198. En la figura:



tenemos tres cuadrados congruentes entre sí. Probar que $\angle DAE = \angle DBE + \angle DCE$.

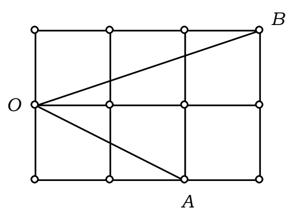
6.199. En la figura:



tenemos ocho cuadrados congruentes entre sí. Probar que

$$\angle FEO = \angle FCO + \angle FBO + \angle FCO.$$

6.200[K. Austin, Reader Reflections. Math Teacher 87 February (1994), 143]. En la figura:



tenemos seis cuadrados congruentes entre sí. Probar que $m(\angle AOB) = 45$.

6.201. Sean □$ABCD$ un rectángulo tal que $\dfrac{|AB|}{|BC|} = \dfrac{4}{3}$ y $E \in AB$. Si $\overrightarrow{CE}$ es la bisectriz del ángulo $\angle C$ y $|AB| = 3$, calcular la longitud de AE y probar que $|BC| = 2|BE|$.

6.202. Si □$ABCD$ es un rectángulo tal que $|AB| = 2|AD|$, probar que las bisectrices de $\angle A$ y $\angle C$ trisecan a BD.

6.203. Sean □$ABCD$ un cuadrado y □$EBFD$ un rectángulo, ambos compartiendo la diagonal DB. Si G es el punto de intersección de la recta perpendicular a $\overleftrightarrow{AE}$ en el punto A y la recta $\overleftrightarrow{BE}$, probar que $BG \cong ED$.

6.204. Sean □$ABCD$ un rectángulo y $M \in DC$ y $N \in AD$ tales que $\dfrac{|DM|}{|MC|} = \dfrac{|DN|}{|NA|} = \dfrac{4}{5}$. Si $|NM| = 4$, encontrar las longitudes de los lados del rectángulo.

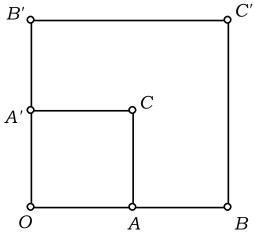
6.205. Sean □$ABCD$ un cuadrado, M el punto medio de DC y $P \in BC$ tal que $|BP| = 3|PC|$. Probar las siguientes afirmaciones:

a. $|AM| = 2|PM|$.

b. $\angle MPA \cong \angle CPM$.

6.206. Sea □$ABCD$ un rectángulo cuyos lados tienen longitudes 18 y 12. Sean M el punto medio de AB y P el punto de intersección de BD y CM. Calcular las distancias de P a cada uno de los lados del rectángulo

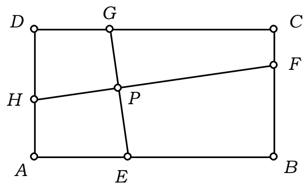
6.207. En la figura:



tenemos dos cuadrados □$OBC'B'$ y □$OACA'$.

Si $\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OA'|}{|OB'|}$, probar que los puntos O, C y C' son colineales.

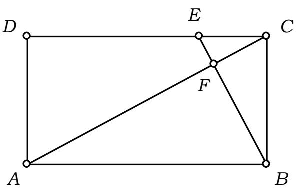
6.208. En la figura:



tenemos que □$ABCD$ es un rectángulo y $P \in int$(□$ABCD$).

Si $EG \perp HF$, probar que $\frac{|HF|}{|EG|} = \frac{|AB|}{|BC|}$.

6.209. En la figura:

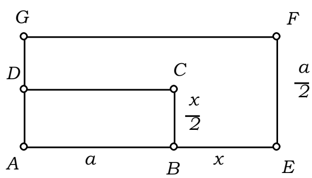


tenemos que □$ABCD$ es un rectángulo y $AC \perp BE$.
Probar las siguientes identidades:

a. $|CE||CD| = |CF||AC| = |BC|^2$.

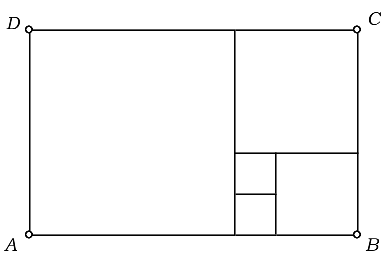
b. $\frac{|CE|}{|CD|} = \frac{|BC|^2}{|AB|^2}$.

6.210. En la figura:



sean □$ABCD$ y □$AEFG$ dos rectángulos y $a = |AB|$, ¿para qué valor de x los dos rectángulos son semejantes?

6.211(FUVEST-92 1ª FASE). En la figura:



tenemos un rectángulo □$ABCD$ dividido en cuadrados. Encontrar $\frac{|AB|}{|AD|}$.

6.212. Sea O el punto de intersección de las diagonales de un cuadrilátero □$ABCD$. Si $|DO| = \frac{3}{5}|OB|$, $|OC| = 15$ y $|AC| = 40$, probar que □$ABCD$ es un trapecio.

6.213. Probar que las diagonales de un trapecio se dividen entre ellas proporcionalmente.

6.214. Sean □$ABCD$ un trapecio tal que $AB \parallel CD$ y $|AB| = 2|CD|$ y O el punto de intersección de sus diagonales. Probar que $|AO| = 2|OC|$ y $|BO| = 2|OD|$.

6.215. Sea □$ABCD$ un trapecio rectangular en $\angle A$ con $AB \parallel CD$. Si $M, N \in AD$ y $P, Q \in BC$ satisfacen que $MP \parallel AB$, $NQ \parallel AB$, $|DM| = 2$, $|MN| = 5$, $|NA| = 8$, $|AB| = 16$ y $|CD| = 6$, calcular las longitudes de MP y NQ.

6.216. Sea □*ABCD* un trapecio con $AB \parallel CD$. Si *M* y *N* son los puntos medios de *AB* y *CD*, respectivamente, probar que

$$|MN|^2 = \frac{2(b^2 + d^2 + ac) - (a^2 + c^2)}{4} = \frac{2(e^2 + f^2 - ac) - (a^2 + c^2)}{4}.$$

6.217. Sea □*ABCD* un trapecio tal que $AB \parallel CD$, $|AB| = 20$, $|CD| = 8$ y la longitud de la altura correspondiente a los lados paralelos es igual a 4. Si *O* es el punto de intersección de las diagonales del trapecio, calcular la distancia de *O* a cada uno de los lados paralelos del trapecio.

6.218. Sean □*ABCD* un trapecio con $AB \parallel CD$ y *O* el punto de intersección de sus diagonales. Probar que

$$\frac{|CO|}{|OA|} = \frac{|DO|}{|OB|} = \frac{c}{a} \text{ y } \frac{|DO|}{|BD|} = \frac{c}{a+c}.$$

Por *O* trazamos una recta paralela a *AB* que corte a *BC* y a *AD* en los puntos *E* y *F*, respectivamente. Probar que

$$\frac{|BE|}{|BC|} = \frac{a}{a+c}, \quad \frac{|CE|}{|BC|} = \frac{c}{a+c}, \quad |EO| = |OF| = \frac{ac}{a+c} \text{ y } |FE| = \frac{2ac}{a+c}.$$

6.219. Sean □*ABCD* un trapecio con $AB \parallel DC$ y *i* y *j* dos números reales positivos. Supongamos que $F \in AD$ satisface la razón $\frac{|DF|}{|FA|} = \frac{i}{j}$ y que la recta paralela a *AB* que pasa por *F* corta a *AC*, *BD* y *BC* en los puntos *G*, *H* y *E*, respectivamente.

a. Probar que $|EF| = \frac{ai + cj}{i + j}$.

b. Expresar $|EG|$, $|EH|$, $|FG|$, $|FH|$,$|GH|$ y $\frac{|EF|}{|GH|}$ en función de *a*, *c*, *i* y *j*.

c. Probar que *EF* y *GH* tienen el mismo punto medio.

d. Analizar el caso cuando $i = a$ y $j = c$.

6.220. Sea □*ABCD* un trapecio tal que $AB \parallel CD$, $|AB| = 25$, $|CD| = 5$ y la altura correspondiente a los lados paralelos tiene longitud 6. Trazamos una recta paralela a *AB* que corte a *BC* y a *AD* en los puntos *E* y *F*, respectivamente. Si la distancia entre dicha recta paralela y $\overleftrightarrow{AB}$ es igual a 1, calcular la longitud de *EF*.

6.221. Sean □*ABCD* un trapecio con $AB \parallel DC$, *O* el punto de intersección de sus diagonales, *l* una recta paralela a *AB* que corta a *BC*, *AD*, *AC* y *DB* en los puntos *E*, *F*, *G* y *H*, respectivamente. ¿Cuáles razones son iguales

$$\frac{|AF|}{|AD|}, \frac{|BE|}{|BC|}, \frac{|AG|}{|AC|}, \frac{|BH|}{|BD|}, \frac{|AG|}{|AO|}, \frac{|AB|}{|GH|}, \frac{|BH|}{|BO|}, \frac{|AO|}{|AC|} \text{ y } \frac{|BO|}{|BD|}?$$

6.222. Sean □*ABCD* un trapecio con $AB \parallel DC$ y $AB > CD$, y *P* el punto de intersección de sus lados no paralelos. Por *P* trazamos una recta paralela a *AB* que corte a $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{BD}$ en los puntos *M* y *N*, respectivamente. Probar las siguientes identidades:

a. $|NP| = |PM| = \frac{ac}{a-c}$.

b. $|MN| = \frac{2ac}{a-c}$.

c. $\frac{|PC|}{|PB|} = \frac{|ND|}{|NB|} = \frac{c}{a}$.

d. $\frac{|PC|}{|BC|} = \frac{c}{a-c}$.

e. $\frac{|PB|}{|BC|} = \frac{a}{a-c}$.

Tomamos un punto $G \in PC$ tal que $\frac{|BG|}{|CG|} = \frac{i}{j}$. Por G trazamos una recta paralela a AB que corte a AM, BN y AP en los puntos E, F y H, respectivamente. Probar las siguientes afirmaciones:

f. $|GE| = \frac{aj}{i-j}$.

g. $|GF| = \frac{cj}{i-j}$.

h. $|EF| = \frac{aj+ci}{i-j}$.

i. $|GH| = \frac{ci-aj}{i-j}$.

j. $GF \cong HE$.

6.223. Sea $\square ABCD$ un trapecio tal que $AB \parallel DC$, $|AB| = 6$, $|BC| = 2$, $|CD| = 4$ y $|DA| = 1$. Si E es el punto de intersección de $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{AD}$, calcular la longitud de los segmentos CE y DE.

6.224. Probar que toda recta paralela a la base de un trapecio determina sobre los lados no paralelos dos pares de segmentos proporcionales. Inversamente, si una recta corta a los lados no paralelos de un trapecio en segmentos proporcionales, probar que dicha recta es paralela a la base.

6.225. Si $\square ABCD$ es un trapecio tal que $AB \parallel DC$ y $\angle DAC \cong \angle ABC$, probar la identidad

$$\frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|AB|}{|CB|}.$$

6.226. Sea $\square ABCD$ un trapecio tal que $AB \parallel CD$ y $a + c = b + d$. La recta que pasa por la intersección de las diagonales del trapecio corta a AD y BC en los puntos E y F, respectivamente. Probar que

$$|AE| + |BF| = a \text{ y } |DE| + |FF| = c.$$

6.227. Sean $\square ABCD$ un trapecio con $AB \parallel DC$, O el punto de intersección de sus diagonales, M el punto medio de AB y N el punto medio de DC. Probar que $O \in MN$.

6.228. Sea $\square ABCD$ un trapecio tal que $AB \parallel DC$, $|AB| = 15$, $|DC| = 10$ y altura correspondientes a los lados paralelos tiene longitud igual a 5. Calcular las alturas, con respecto a los lados paralelos del trapecio, de los dos triángulos que se forman al intersecar la prolongación de los dos lados no paralelos del trapecio.

6.229. Sea $\square ABCD$ un trapecio tal que $AB \parallel DC$. Si $|AB| = 12$, $|DC| = 8$, $|CB| = 3$ y $|DA| = 5$, calcular las longitudes de los lados de los dos triángulos que se forman con el punto de intersección de las rectas que contienen a los dos lados no paralelos del trapecio y los lados paralelos del mismo.

6.230. Sea $\square ABCD$ un trapecio rectangular en $\angle A$ con $AB \parallel DC$. Probar la equivalencia de los siguientes enunciados:

a. $BC \perp BD$.

b. $|BD|^2 = |AB||DC|$.

6.231. Sea $\square ABCD$ un trapecio rectangular en $\angle A$ tal que $AB \parallel DC$. Si $AC \perp DB$, probar que $|AD|^2 = |AB||DC|$.

6.232. Sea $\square ABCD$ un trapecio rectangular en $\angle A$ tal que $AB \parallel CD$. Si M es el punto medio de AD, probar que ΔBMC es un triángulo rectángulo si y solo si $d^2 = 4ac$.

6.233. Sean $\square ABCD$ un trapecio rectangular en $\angle A$ tal que $AB \parallel CD$ y $AB > CD$, y O el punto de intersección de sus diagonales. Determinar $d(O, \overleftrightarrow{AB})$ y $d(O, \overleftrightarrow{AD})$, en función de a, b y d.

6.234. Sea $\square ABCD$ un trapecio tal que $AB \parallel CD$. Sea P el punto de intersección de la recta que pasa por C y es paralela a AD y la recta que pasa por D y es paralela a BC. Si trazamos una recta paralela a AB que pase por P y corte a $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{AD}$ en los puntos E y F, respectivamente, expresar la longitud del segmento EF en función de a y c.

6.235. Sea $\square ABCD$ un trapecio tal que $AB \parallel DC$, $DC \perp BC$, $AB \perp BC$ y $|AB| + |DC| = 2|BC|$. Probar que cuando AB y AC varían de posición manteniendo las condiciones, el lado AD gira alrededor de un punto fijo.

6.236 (S. Roberts). Sean $\square ABCD$ un trapecio isósceles con $AB \parallel CD$ y $P \in BC$ tal que $\dfrac{|BP|}{|PC|} = \dfrac{i}{j}$. Por P trazamos una recta paralela a AB que corte a AD, AC y BD en los puntos Q, M y N, respectivamente. Probar que

$$|PM||PN| = (e^2 - b^2)\frac{ij}{(i+j)^2}.$$

6.237. Probar que una diagonal de un paralelogramo biseca a cualquier segmento interno del mismo que sea paralelo a la otra diagonal.

6.238. Sean $\square ABCD$ un paralelogramo, $P \in AB$, $Q \in BC$, $R \in CD$ y $S \in DA$. Si $RS \parallel AC$, $RQ \parallel BD$ y $SP \parallel BD$, probar que $PQ \parallel AC$.

6.239. Sean $\square ABCD$ un paralelogramo y $P \in BD$ y $Q \in AC$. Si $\overrightarrow{AP}$ es la bisectriz del ángulo $\angle A$ y $\overrightarrow{DQ}$ es la bisectriz del ángulo $\angle D$, probar que $PQ \parallel AD$.

6.240. Sean $\square ABCD$ un paralelogramo y $M \in BC$, $N \in DA$ y R, $S \in MN$ tales que $MN \parallel AB$. Si P es el punto de intersección de $\overleftrightarrow{AR}$ y $\overleftrightarrow{BS}$ y P es el punto de intersección de $\overleftrightarrow{DR}$ y $\overleftrightarrow{CS}$, probar que $PQ \parallel BC$.

6.241. Sean $\square ABCD$ un paralelogramo y $P \in BC$ y $Q \in AD$ tales que $\dfrac{|BP|}{|PC|} = \dfrac{|DQ|}{|QA|} = \dfrac{3}{4}$. Si M es el punto de intersección de BD y AP y N es el punto de intersección de BD y CQ, calcular $\dfrac{|BM|}{|MD|}$ y $\dfrac{|BN|}{|ND|}$.

6.242. Sean $\square ABCD$ un paralelogramo y l una recta que yace en el exterior del mismo y que pasa por B. Si M es el punto medio de BD, $d(M,l) = 2$ y $d(A,l) = 8$, calcular la distancia de los vértices D y C a la recta l.

6.243. Si las diagonales de un paralelogramo son proporcionales a sus lados no paralelos, probar que los ángulos que forman las diagonales son congruentes a los ángulos del paralelogramo.

6.244. Sean $\square ABCD$ un paralelogramo y $P \in AC$. Por P trazamos dos rectas que corten a AB, BC, CD y DA en los puntos E, F, G y H, respectivamente. Probar las siguientes afirmaciones.

a. $\Delta APH \sim \Delta CPF$.
b. $\Delta AEP \sim \Delta CGP$.
c. $\Delta HEP \sim \Delta FGP$.
d. $\dfrac{|AP|}{|PC|} = \dfrac{|HP|}{|PF|} = \dfrac{|PE|}{|PG|}$.

6.245. Consideremos el paralelogramo $\square\,(14,7,14,7)$. Sean E y F los puntos en donde la bisectriz del ángulo $\angle A$ corta a BD y CD, respectivamente. Encontrar $\dfrac{|EF|}{|AE|}$.

6.246. Sean $\square ABCD$ un paralelogramo, $P \in BC$ y Q el punto de intersección de $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{DC}$. Probar que

$$\frac{|AP|}{|AQ|} = \frac{|AB|}{|DQ|}.$$

6.247. Sea $\square ABCD$ un paralelogramo. Una recta que pasa por D corta al lado AB en M, a $\overleftrightarrow{BC}$ en N y a AC en I. Probar las siguientes afirmaciones:

a. $|AM||CN|$ es constante, es decir, no depende de la elección de la recta que pasa por D.
b. $|ID|^2 = |IM||IN|$.

6.248. Sea $\square ABCD$ un paralelogramo. Trazamos una recta por D que corte a AC, BC y $\overleftrightarrow{AB}$ en los puntos P, Q y R, respectivamente. Probar que $|PD|^2 = |PQ||PR|$.

6.249. Sean $\square ABCD$ un paralelogramo, $P \in \overleftrightarrow{BC} - BC$ y Q el punto de intersección de las rectas $\overleftrightarrow{AP}$ y $\overleftrightarrow{DC}$. Probar que $\dfrac{|AP|}{|AQ|} = \dfrac{|BP|}{|AD|}$.

6.250. Sea $\square ABCD$ un paralelogramo. Si P es el pie de la altura del paralelogramo con respecto al vértice A y al lado BC y Q es el pie de la altura del paralelogramo con respecto al vértice C y al lado AB. Probar la identidad

$$|AP||BC| = |CQ||AB|.$$

6.251. Sea $\square ABCD$ un paralelogramo. Por A trazamos una recta que corte a BD, BC y $\overleftrightarrow{CD}$ en los puntos E, F y G, respectivamente. Si $|EG| = 12$ y $|FG| = 3$, calcular la longitud de AE.

6.252. Sea $\square ABCD$ un paralelogramo. Por B trazamos una recta que corte a $\overleftrightarrow{DA}$ y $\overleftrightarrow{DC}$ en los puntos P y Q, respectivamente. Probar las siguientes afirmaciones:

a. $|CQ||AP| = ab$.
b. $|DP||DQ| = a|DP| + b|DQ|$.
c. Si B pertenece a la bisectriz de $\angle C$, probar que $\dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{|DP|} + \dfrac{1}{|DQ|}$.

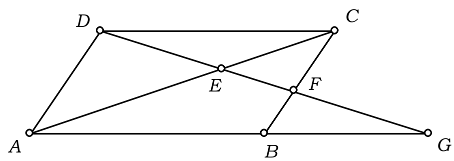
6.253[I-26]. Sean $\square ABCD$ un paralelogramo y l una recta que pasa por el vértice A. Probar lo siguiente:

a. Si l no corta a los lados del paralelogramo, entonces $d(C,l) = d(B,l) + d(D,l)$.
b. Si l corta a los lados del paralelogramo, entonces $d(C,l) = |d(B,l) - d(D,l)|$.

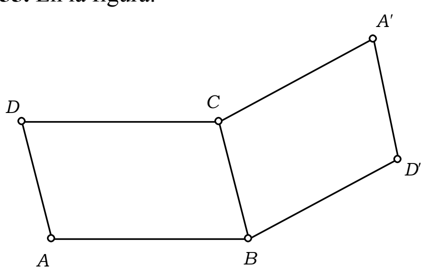
6.254. En la figura:

tenemos que $\square ABCD$ es un paralelogramo.
Probar las siguientes afirmaciones:

a. $\Delta DAG \sim \Delta FBG \sim \Delta FCD$.
b. $\dfrac{|BG|}{|BF|} = \dfrac{|AG|}{|BC|}$.
c. $|AG||DE| = |AB||EG|$.
d. $\dfrac{|EF|}{|DE|} = \dfrac{|EC|}{|AE|} = \dfrac{|DE|}{|EG|}$.
e. $|DE|^2 = |EF||EG|$.

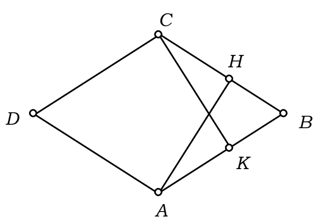


6.255. En la figura:



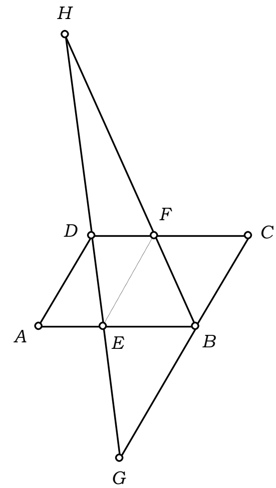
$\square ABCD$ y $\square BD'A'C$ son dos paralelogramos. Probar que AA' y DD' se cortan en su punto medio.

6.256. En la figura:



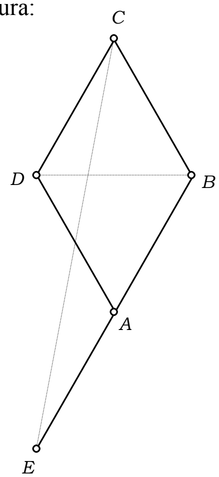
tenemos que $\square ABCD$ es un paralelogramo y H y K son las proyecciones de A y C sobre BC y AB, respectivamente. Probar que $|AB||CK| = |BC||AH|$. ¿Es cierto el resultado si el punto H cae fuera del segmento BC?

6.257. En la figura:



tenemos un paralelogramo $\square ABCD$, $BC \parallel EF$ y $|EB|$ es la media geométrica entre $|AE|$ y $|AB|$. Probar que $GE \cong DH$.

6.258. En la figura:

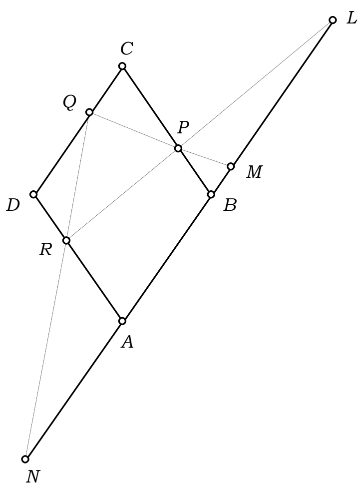


tenemos un rombo $\square ABCD$ y $AE \cong AB$.

a. Probar que EC biseca a AD.

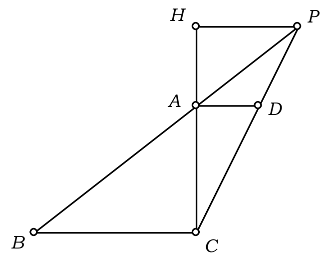
b. Probar que EC divide a BD en dos partes, una de las cuales es el doble de la otra.

6.259. En la figura:



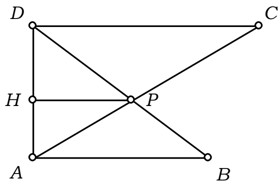
tenemos un rombo $\square ABCD$ cuyos lados tienen longitud 9 y puntos $P \in BC$, $Q \in CD$ y $R \in DA$ tales que $|BP| = |CQ| = |DR| = 3$. Si L, M y N son los puntos de intersección de las rectas $\overleftrightarrow{PR}$, $\overleftrightarrow{QP}$ y $\overleftrightarrow{QR}$ con la recta $\overleftrightarrow{AB}$, respectivamente, encontrar las longitudes de los segmentos AL, AM y AN.

6.260. En la figura:



se tiene que $PH \perp HC$, $AD \perp HC$, $BC \perp HC$, $|AC| = 2$, $|AD| = 1$ y $|BC| = 4$. Calcular la longitud del segmento PH.

6.261. En la figura:



tenemos que $DC \parallel AB$, $|DC| = 6$, $|AB| = 5$, $|AD| = 3$, $PH \parallel AB$ y $PH \perp AD$. Calcular la longitud del segmento PH.

6.262. Sean $\angle AOB$ un ángulo no degenerado y $P \in \overrightarrow{OA}$. Si Q es la proyección de P sobre $\overrightarrow{OB}$, probar que $\frac{|PQ|}{|OP|}$ es constante, es decir, no depende de la elección del punto P sobre el lado $\overrightarrow{OA}$. ¿Es cierta esta afirmación si P varia en ambos lados?

6.263. Sean $\angle\alpha$ un ángulo no degenerado de vértice O y l y m dos rectas que cortan a los lados del ángulo en los puntos A y B, y C y D, respectivamente. Si $OA \cong OB$ y $OC \cong OD$, probar que $l \parallel m$.

6.264. Sean $\angle ROS$ un ángulo agudo no degenerado y $P \in int(\angle ROS)$. Sea l una recta que pasa por P y corta a $\overrightarrow{OR}$ y $\overrightarrow{OS}$ en los puntos A y B, respectivamente, y sean C y D las proyecciones de P sobre $\overrightarrow{OS}$ y $\overrightarrow{OR}$, respectivamente. Si $Q \in CD$ satisface que $\angle ROP \cong \angle QOS$, probar que $\Delta AOP \sim \Delta COQ$.

6.265. Sean $\angle ABC$ un ángulo no degenerado, $M \in AB$, P el punto de intersección de $\overrightarrow{OA}$ y la recta paralela a $\overrightarrow{OB}$ que pasa por M, y Q el punto de intersección de $\overrightarrow{OB}$ y la recta paralela a $\overrightarrow{OA}$ que pasa por M. Probar que $\frac{|OP|}{|OA|} + \frac{|OQ|}{|OB|} = 1$. Recíprocamente, supongamos que $M \in int(\angle ABC)$ satisface que $\frac{|OP|}{|OA|} + \frac{|OQ|}{|OB|} = 1$, probar que $M \in AB$.

6.266. Sean $\angle AOB$ un ángulo no degenerado y M el punto medio de AB. Supongamos que l es una recta que corta a $\overrightarrow{OA}$ en el punto A' y a $\overrightarrow{OB}$ en el punto B', y sea $M' \in A'B'$. Si $l \parallel \overleftrightarrow{AB}$ y los puntos O, M y M' son colineales, probar que M' es el punto medio de $A'B'$. Inversamente, probar que si los puntos O, M y M' son colineales y M' es el punto medio de $A'B'$, entonces $l \parallel \overleftrightarrow{AB}$.

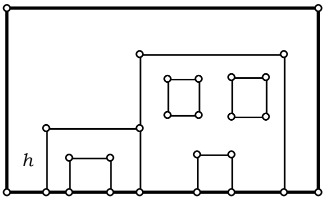
6.267. Sean l, m y n tres rectas concurrentes. Probar que la razón $\frac{d(P,m)}{d(P,n)}$ es una constante que no depende de la elección del punto P sobre la recta l.

6.268. Dividir un ángulo $\angle AOB$ no degenerado en dos partes, de tal forma que si P está en la semirrecta divisora, entonces $\frac{d(P,\overleftrightarrow{OA})}{d(P,\overleftrightarrow{OB})} = \frac{r}{s}$, en donde r y s son números reales positivos dados.

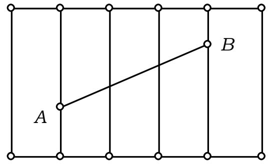
6.269. Una longitud de 19 m sobre un cierto terreno se encuentra representada por 5 cm en una hoja de papel. Hallar la distancia entre dos puntos del terreno cuya distancia en la hoja es de 13 cm.

6.270. Se tiene un marco rectangular de ancho constante en sus cuatro lados, ¿pueden ser el rectángulo que forma el marco y el rectángulo de su interior semejantes?

6.271. En la figura:

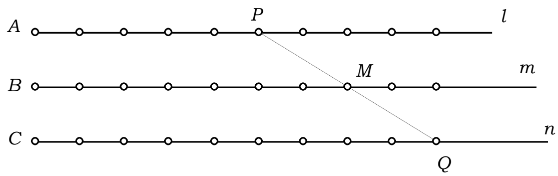


supongamos que tenemos una fotografía de una casa de dos pisos con una cochera de 2m de altura (es decir $h = 2$m). Calcular la altura original de la casa.



6.272. En una hoja de papel trazamos rectas paralelas que estén a la misma distancia una de otra, explicar porque al trazar un segmento de recta cuyos extremos estén sobre rectas diferentes, el segmento queda dividido en partes congruentes.

6.273. En la figura:



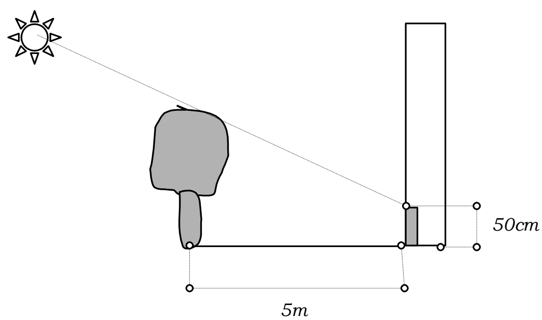
l, m y n son rectas paralelas tales que $d(l,m) = d(m,n)$ y cada una de ellas está dividida en segmentos congruentes de longitud 1. Si $P \in l$, $Q \in l$ y M es el punto de intersección de PQ y n, calcular la longitud de BM.

6.274. Tenemos un poste de 6 m de altura y una persona de 1.70 cm de altura. Si la sombra del poste mide 10 m de largo, ¿cuánto mide de largo la sombra de la persona?

6.275. Si una barda de 3 m de alto proyecta una sombra de 1m de largo y, al mismo tiempo, la sombra de un árbol es de 3 m de largo, calcular la altura del árbol.

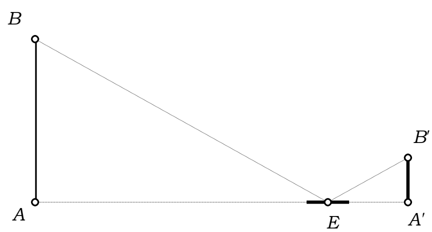
6.276. En la figura:

la distancia entre un árbol y un muro es de 5 m. Sabemos que la sombra del árbol cae sobre el muro y dicha sombra tiene 50 cm de altura. Si al mismo tiempo, la sombra de una persona de 1.70 m de altura proyectada sobre el suelo mide 2 m de largo, calcular la altura del árbol.

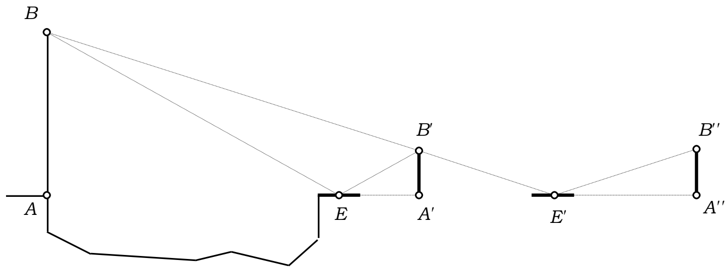


6.277[l-278]. A continuación describimos el método de Euclides para medir alturas usando un espejo:

Se coloca un espejo E sobre el suelo y el observador B' se sitúa donde se ve reflejado el punto B. Conociendo las longitudes de AE, EA' y A'B' se puede entonces conocer la altura AB. Explicar porque este método para calcular las alturas es correcto.



Cuando el pie de la altura que se desea medir no es accesible, Gerberto de Aurillac (930-1003) diseñó el siguiente método:



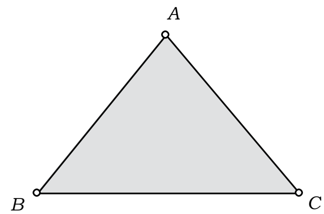
Primero se coloca un espejo sobre el suelo en un punto E y el observador B' se sitúa donde se ve reflejado el punto B. Posteriormente, se coloca el espejo en un segundo punto E', de tal forma que el observador se pueda situar en un punto B'' donde se puedan ver alineados B y B'. Con esto y conociendo las longitudes de A'B', EE', EA' y E'A'', se puede calcular la altura AB. Decir por qué con este procedimiento es posible calcular una altura, cuando la base de la misma sea inaccesible.

CAPÍTULO 7

ÁREAS Y PERÍMETROS

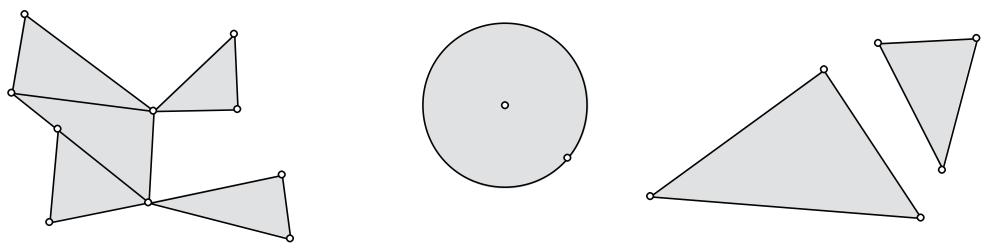
7.1. Áreas

7.1.1. Definición. Una *región triangular* es un conjunto formado por un triángulo y su interior.



región triangular
Figura 7.1

7.1.2. Definición. Una *región poligonal* (o simplemente región) es la unión de un número finito de regiones triangulares tales que para cualesquiera dos de ellas su intersección es un punto o un segmento.



región poligonal — no son regiones poligonales
Figura 7.2

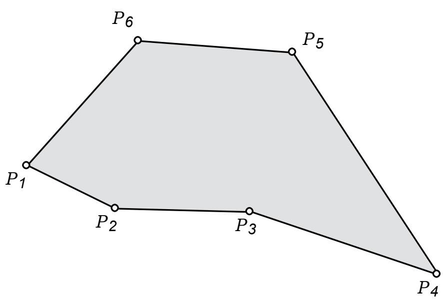


Figura 7.3

Es evidente que todo cuadrilátero es una región poligonal. Una región poligonal queda determinada por los vértices de los triángulos que constituyen sus regiones triangulares. Por lo cual, si $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_k$ son puntos en el plano que determinan una región poligonal, la cual será denotada por $P_1 P_2 P_3 \ldots P_k$, entonces diremos que $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_k$ son los vértices de dicha región poligonal y que los segmentos $\overline{P_1 P_2}, \overline{P_2 P_3}, \ldots, \overline{P_{k-1} P_k}$ y $\overline{P_k P_1}$ son sus lados. Para ejemplificar esto, veamos la región poligonal S de la figura 7.3, dicha región cumple que

$$S = \Delta P_1 P_2 P_3 \cup \Delta P_3 P_4 P_5 \cup \Delta P_5 P_3 P_6 \cup \Delta P_6 P_3 P_1$$
$$\cup\ int(\Delta P_1 P_2 P_3) \cup int(\Delta P_3 P_4 P_5) \cup int(\Delta P_5 P_3 P_6) \cup int(\Delta P_6 P_3 P_1).$$

Es evidente que si S_1, $S_2,\ldots$, S_{k-1} y S_k son regiones poligonales tales que cada una de ellas interseca a cualquier otra en a lo sumo un número finito de puntos y segmentos, entonces $S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_{k-1} \cup S_k$ es una región poligonal cuyos vértices y lados están contenidos en los vértices y lados de las regiones S_1, $S_2,\ldots$, S_{k-1} y S_k.

***AA* (Axioma de Área).** A toda región poligonal le corresponde un único número real positivo. A dicho número se le llamará *área* de la región poligonal S y será denotado por *are*(S).

El área de un triángulo se define como el área de la región triangular que determina. El área de cualquier triángulo ΔABC será denotada por *are*(ΔABC). De la misma manera, se define el área de un cuadrilátero.

***AC* (Axioma de Congruencia para Áreas).** Si $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$, entonces *are*($\Delta ABC$) = *are*($\Delta A'B'C'$).

En otras palabras, el Axioma AC nos dice que si dos triángulos son congruentes, entonces las regiones triangulares que ambos determinan tienen la misma área.

***ASA* (Axioma de la Suma de Áreas).** Supongamos que una región poligonal R es igual a la unión de dos regiones poligonales S y T tales que su intersección es no vacía y es a lo sumo un número finito de puntos y segmentos. Entonces, tenemos que *are*(R) = *are*(S) + *are*(T).

El Axioma de la Suma de Áreas, abreviado ASA, se puede extender de la siguiente forma:

7.1.3. Teorema. Sea R una región poligonal y supongamos que $R = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_{k-1} \cup S_k$, donde S_1, $S_2,\ldots$, S_{k-1} y S_k son regiones poligonales tales que cada una de ellas interseca a cualquier otra en a lo sumo un número finito de puntos y segmentos. Entonces

$$are(R) = are(S_1) + are(S_2) + \ldots + are(S_{k-1}) + are(S_k).$$

Prueba: Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $S_i \cap S_{i+1} \neq \varnothing$, para toda $i = 1, 2,..., k-1$. Usaremos inducción matemática para probar este teorema. Si $R = S_1 \cup S_2$, por el Axioma ASA, entonces *are*(R) = *are*(S_1) + *are*(S_2). Supongamos que el teorema se cumple para regiones que sean la unión de a lo más k regiones poligonales y que $R = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_{k-1} \cup S_k \cup S_{k+1}$, en donde S_1, $S_2,\ldots$, S_{k-1}, S_k y S_{k+1} son regiones poligonales tales que $S_i \cap S_{i+1}$ es a lo sumo un número finito de puntos y segmentos, para cada $i = 1, 2,..., k$. Si $T = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_{k-1} \cup S_k$, entonces T es una región poligonal y por hipótesis de inducción hallamos que

$$are(T) = are(S_1) + are(S_2) + \ldots + are(S_{k-1}) + are(S_k).$$

Sabemos que T y S_{n+1} son dos regiones poligonales cuya intersección es no vacía y es a lo sumo un número finito de puntos y segmentos. Como $R = T \cup S_{n+1}$, por el Axioma ASA, obtenemos que

$$are(R) = are(T) + are(S_{n+1}) = are(S_1) + are(S_2) + \ldots + are(S_{k-1}) + are(S_k) + are(S_{k+1}).$$

Así queda probado el teorema. ♣

***AU* (Axioma de la Unidad).** El área de un cuadrado $\square ABCD$ es $|AB|^2$.

Vale la pena observar que si $\square ABCD$ es un cuadrado, entonces

$$are(\square ABCD) = |AB|^2 = |BC|^2 = |CD|^2 = |DA|^2.$$

Esto es consecuencia del hecho de que los cuatro lados de un cuadrado son congruentes entre sí.

7.1.4. Teorema. Si $\square ABCD$ y $\square A'B'C'D'$ son dos rectángulos congruentes, entonces

$$are(\square ABCD) = are(\square A'B'C'D').$$

Prueba: De acuerdo con el Teorema 5.7.3, sabemos que

$$\Delta ABD \cong \Delta A'B'D' \text{ y } \Delta CDB \cong \Delta C'D'B'.$$

Según los Axiomas AC y ASA,

$$are(\square ABCD) = are(\Delta ABD) + are(\Delta CDB) = are(\Delta A'B'D') + are(\Delta C'D'B') = are(\square A'B'C'D'). \clubsuit$$

7.1.5. Teorema. El área de un rectángulo $\square ABCD$ es $|AB||BC|$.

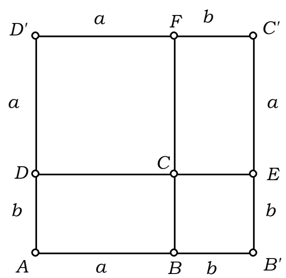


Figura 7.4

Prueba: Sea $\square ABCD$ un rectángulo y pongamos $a = |AB|$ y $b = |BC|$. Sobre la recta $\overleftrightarrow{AB}$ construimos un cuadrado $\square AB'C'D'$ cuyos lados tengan longitud $a + b$ y lo dividimos como lo muestra la figura de la izquierda. Dentro de este cuadrado observamos que

$$\square ABCD \cong \square EC'FC \text{ y } \square BB'EC \text{ y } \square DCFD'$$

son dos cuadrados con lados de longitud a y b, respectivamente. Por el Axioma de Unidad, vemos que

$$are(\square AB'C'D') = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 .$$

Por otra parte, el Teorema 7.1.4 y el Axioma *ASA* nos aseguran que

$$are(\square ABCD) = are(\square EC'FC) \text{ y}$$

$$are(\square AB'C'D') = are(\square EC'FC) + are(\square BB'EC) + are(\square ABCD) + are(\square DCFD') =$$

$$2are(\square ABCD) + a^2 + b^2 .$$

Igualando las dos identidades, hallamos que

$$2are(\square ABCD) + a^2 + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$are(\square ABCD) = ab = |AB||BC|. \clubsuit$$

7.1.6. Teorema. El área de un triángulo es la mitad del producto de la longitud de cualquiera de sus lados por la altura correspondiente.

Prueba: Sea ΔABC un triángulo. Consideremos el lado BC y la altura correspondiente $h_a = AH_a$. Sean L, M y N los puntos medios de los segmentos AH_a, AC y AB, respectivamente. De acuerdo con el Teorema del Segmento Medio (4.3.10), sabemos que L, M y N son colineales. Sean E y D las proyecciones de los puntos B y C sobre la recta $\overleftrightarrow{NM}$. Analicemos cada una de las posibles ubicaciones del punto H_a sobre la recta $\overleftrightarrow{BC}$ con respecto a los puntos B y C.

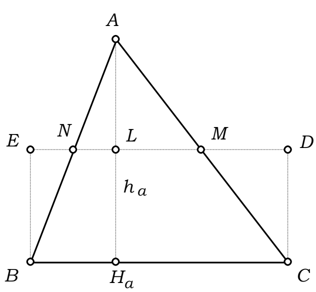


Figura 7.5

Caso I. $H_a \in BC - \{B, C\}$. Tenemos que $\square BCDE$ es un rectángulo y que $\Delta BNE \cong \Delta ANL$ y $\Delta MDC \cong \Delta MLA$, estas dos congruencias se siguen del criterio 3.6.3. Según los Axiomas AC y ASA y el Teorema 7.1.5,

$$are(\Delta ABC) = are(\square BCMN) + are(\Delta ANL) + are(\Delta MLA) =$$

$$are(\square BCMN) + are(\Delta BNE) + are(\Delta MDC) =$$

$$are(\square BCDE) = |BC||LH_a| = a\frac{h_a}{2} = \frac{ah_a}{2}.$$

Caso II. $H_a = B$. En este caso, tenemos que $h_a = AB$ y L es el punto medio de AB. Aplicando los Axiomas AC, ASA y el Teorema 7.1.5 hallamos que

$$are(\Delta ABC) = are(\square BCML) + are(\Delta AML) =$$
$$are(\square BCML) + are(\Delta CDM) = are(\square BCDL) = |BC||LB| =$$
$$a\frac{h_a}{2} = \frac{ah_a}{2}.$$

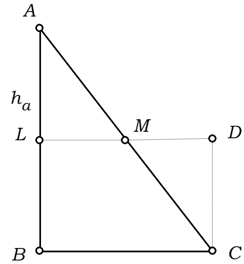


Figura 7.6

Caso III. El caso cuando $H_a = C$ se analiza de manera similar que el segundo.

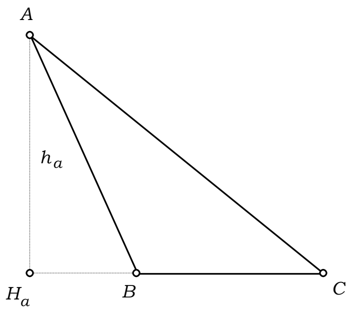


Figura 7.7

Caso IV. H_a precede a B sobre la recta $\overleftrightarrow{BC}$. Podemos aplicar el segundo caso a los triángulos rectángulos ΔAH_aB y ΔAH_aC, para obtener sus áreas,

$$are(\Delta AH_aC) = \frac{|H_aC|h_a}{2} \text{ y } are(\Delta AH_aB) = \frac{|H_aB|h_a}{2}.$$

De acuerdo con el Axioma ASA,

$$are(\Delta AH_aC) = are(\Delta AH_aB) + are(\Delta ABC)$$
$$\frac{|H_aC|h_a}{2} = \frac{|H_aB|h_a}{2} + are(\Delta ABC)$$
$$are(\Delta ABC) = \frac{|H_aC|h_a}{2} - \frac{|H_aB|h_a}{2}$$
$$= \frac{(|H_aC|-|H_aB|)h_a}{2} = \frac{|BC|h_a}{2}.$$

Caso V. C precede a H_a sobre la recta $\overleftrightarrow{BC}$. Este caso es totalmente análogo al anterior. ♣

Los siguientes dos corolarios son consecuencias directas del Teorema 7.1.6.

7.1.7. Corolario. El área de un triángulo rectángulo es igual a la mitad del producto de sus catetos.

7.1.8. Corolario. En todo triángulo ΔABC se cumple la relación $a h_a = b h_b = c h_c$.

7.1.9. Corolario. El área de un paralelogramo es el producto de la longitud de cualquiera de sus lados por la longitud de una de las alturas correspondientes.

Prueba: Sea $\square ABCD$ un paralelogramo. De acuerdo con el Teorema 5.3.3, sabemos $\Delta ABC \cong \Delta CDA$. Por el Axioma AC, obtenemos que $are(\Delta ABC) = are(\Delta CDA)$ y, entonces, por el Axioma *ASA* y el Teorema 7.1.6, hallamos que

$$are(\square ABCD) = are(\Delta ABC) + are(\Delta CDA) = 2are(\Delta ABC) = 2\frac{|AB|h}{2} = |AB|h,$$

en donde h es la altura del paralelogramo correspondiente al lado AB y el vértice C, pero h también resulta ser la altura del triángulo ΔABC correspondiente al vértice C. ♣

7.1.10. Teorema. El área de un trapecio es la mitad del producto de la suma de las longitudes de sus lados paralelos por la longitud de una de las alturas correspondientes a uno de dichos lados.

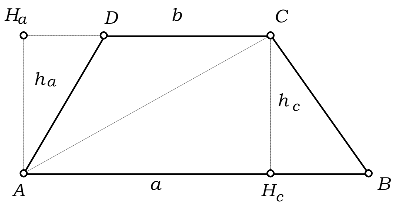


Figura 7.8

Prueba: Sea $\square ABCD$ un trapecio con $AB \| DC$ y sean h_a y h_c las alturas del vértice A al lado BD y del vértice C al lado AB, respectivamente. Por el Teorema 5.6.2, sabemos que $h_a = h_c$. De acuerdo con el Axioma *ASA* y el Teorema 7.1.6, concluimos que

$$are(\square ABCD) = \text{are}(\Delta ABC) + are(\Delta ACD) = \frac{ah_c}{2} + \frac{bh_a}{2} = \frac{h_c(a+b)}{2}. \ ♣$$

7.1.11. Definición. Decimos que dos regiones poligonales son *equivalentes* si tienen la misma área.

Del Axioma AC vemos que dos triángulos congruentes son equivalentes. De manera más general, tenemos el siguiente teorema:

7.1.12. Teorema. Si dos triángulos tienen un lado congruente y la altura correspondiente congruente, entonces son equivalentes.

Prueba: El resultado es consecuencia inmediata del Teorema 7.1.6. ♣

En el ejemplo de la derecha tenemos dos triángulos ΔABC y $\Delta A'BC$ que no son congruentes, pero que son equivalentes según el Teorema 7.1.12.

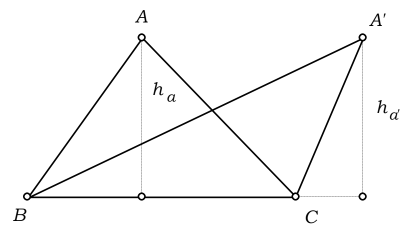


Figura 7.9

El resultado correspondiente al Teorema 7.1.12 para paralelogramos es el Problema 7.251.

7.1.13. Teorema. Si dos triángulos tienen una altura congruente, entonces la razón de sus áreas es igual a la razón de la longitud de los lados correspondientes a dichas alturas.

Prueba: Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos tales que $h_a \cong h_{a'}$. Según el Teorema 7.1.6, sabemos que

$$\frac{are(\Delta ABC)}{are(\Delta A'B'C')} = \frac{\frac{h_a a}{2}}{\frac{h_{a'} a'}{2}} = \frac{a}{a'}. \ ♣$$

A continuación, veremos que un paralelogramo es equivalente a un triángulo.

7.1.14. Teorema. Sean $\square ABCD$ un paralelogramo y M el punto medio de su lado CD. Si E es el punto de intersección de las semirrectas $\overrightarrow{AM}$ y $\overrightarrow{BC}$, entonces $are(\square ABCD) = are(\Delta EAB)$.

Prueba: Consideremos la siguiente figura:

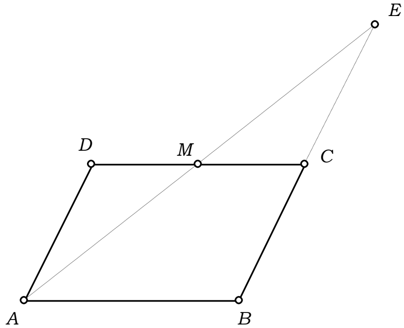


Figura 7.10

Los triángulos ΔADM y ΔECM tienen un lado congruente a saber $DM \cong CM$ y un ángulo congruente $\angle DMA \cong \angle CME$ (2.10.2). Ya que $\square ABCD$ es un paralelogramo, por el Teorema 5.3.1, sabemos que $\angle D \cong \angle B$, y como $\angle B$ y $\angle ECD$ son ángulos correspondientes, por el Teorema 3.4.6, hallamos $\angle B \cong \angle ECD$. Del segundo criterio de congruencia (3.2.7), se sigue que $\Delta AMD \cong \Delta EMC$. Por consiguiente, con base en el Axioma *ASA*, obtenemos que

$$are(\square ABCD) = are(\square ABCM) + are(\Delta AMD) = are(\square ABCM) + are(\Delta EMC) = are(\Delta EAB). \clubsuit$$

El siguiente resultado muestra, entre otras cosas, que los vértices de un trapecio determinan dos pares de triángulos equivalentes.

7.1.15. Teorema. Sea $\square ABCD$ un trapecio con $AB \parallel DC$. Entonces

$$are(\Delta ACB) = are(\Delta ADB) \text{ y } are(\Delta ACD) = are(\Delta DCB).$$

Prueba: Nuestros argumentos se basarán en la siguiente figura:

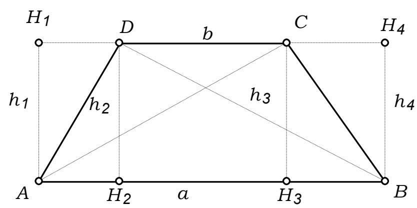


Figura 7.11

Sean h_1, h_2, h_3 y h_4 las alturas de los triángulos ΔACD, ΔADB, ΔACB y ΔDCB correspondientes a sus vértices A, D, C y B, respectivamente. De acuerdo con el Teorema 5.6.2, sabemos que

$$h_1 \cong h_2 \cong h_3 \cong h_4.$$

Por ello y el Teorema 7.1.6, vemos que

$$are(\Delta ACB) = \frac{ah_3}{2} = \frac{ah_2}{2} = are(\Delta ADB) \text{ y } are(\Delta ACD) = \frac{ah_1}{2} = \frac{ah_4}{2} = are(\Delta DCB). \clubsuit$$

El área de un rombo se puede calcular sabiendo las longitudes de sus diagonales:

7.1.16. Teorema. En todo rombo $\square ABCD$, se cumple que $are(\square ABCD) = \dfrac{|AC||DB|}{2}$.

Prueba: Sea O el punto de intersección de las diagonales de rombo. Por el Teorema 5.4.1, sabemos que $AC \perp DB$ y de aquí, por el Teorema 7.1.6, hallamos que

$$are(\square ABCD) = are(\Delta CDB) + are(\Delta ABD) = \frac{|DB||OC|}{2} + \frac{|DB||OA|}{2}$$
$$= \frac{(|OC| + |OA|)|DB|}{2} = \frac{|AC||DB|}{2}. \clubsuit$$

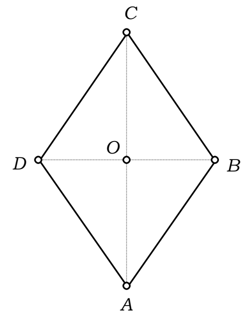


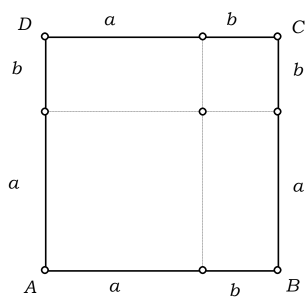
Figura 7.12

A continuación, describiremos algunas interpretaciones geométricas de tres identidades algebraicas conocidas.

7.1.17. Teorema. Sean a y b dos números reales positivos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
2. El área de un cuadrado de lado $a + b$ es igual a la suma de las áreas de los cuadrados de lados a y b, más dos veces el área del rectángulo cuyos lados son a y b.

Prueba:



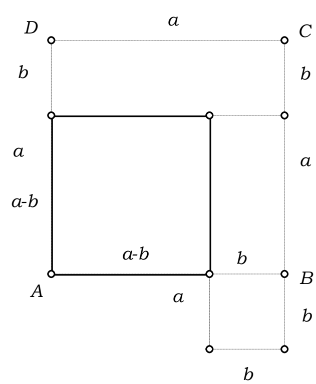
$\clubsuit$

Figura 7.13

7.1.18. Teorema. Sean a y b dos números reales positivos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
2. El área de un cuadrado de lado $a - b$ es igual a la suma de las áreas de los cuadrados de lados a y b, menos dos veces el área del rectángulo cuyos lados son a y b.

Prueba:



$\clubsuit$

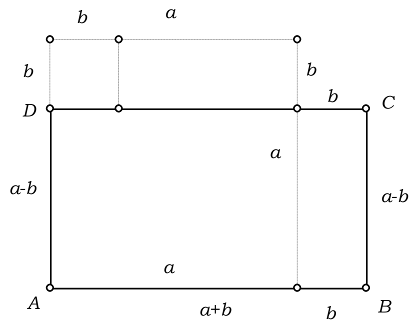
Figura 7.14

7.1.19. Teorema. Sean a y b dos números reales positivos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

2. El área de un rectángulo de lados $a + b$ y $a - b$ es igual a la diferencia de las áreas de los cuadrados de lados a y b.

Prueba:



♣

Figura 7.15

A continuación, damos una ilustración geométrica de algunas identidades algebraicas.

$$(x+a)(x+b) = x^2 + ax + bx + ab$$

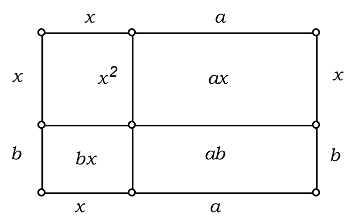


Figura 7.16

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

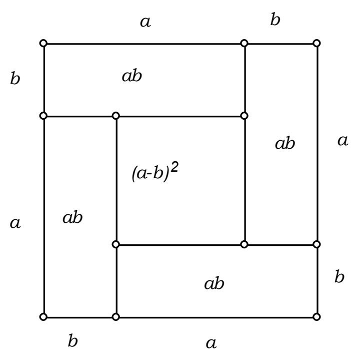


Figura 7.17

Usando la misma idea, el lector puede hacer las interpretaciones geométricas de las identidades algebraicas enlistadas en el Problema 7.371.

Para terminar esta sección, damos una demostración sin palabras de una identidad algebraica.

7.1.20. Teorema. Si a, b, x y y son números reales positivos, entonces

$$ax - by = \frac{1}{2}(a+b)(x-y) + \frac{1}{2}(x+y)(a-b).$$

Prueba [a-89]:

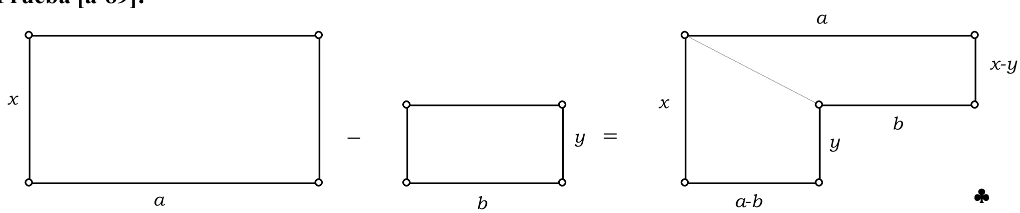


Figura 7.18

7.2. Perímetros

7.2.1. Definición. El *perímetro* de un triángulo ΔABC es el número

$$per(\Delta ABC) = a + b + c.$$

Si $\square ABCD$ es un cuadrilátero, entonces su *perímetro* es el número

$$per(\square ABCD) = |AB| + |BC| + |CD| + |DA|.$$

La prueba del siguiente enunciado es evidente de las definiciones de perímetro y congruencia.

7.2.2. Teorema. a. Si $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$, entonces $per(\Delta ABC) = per(\Delta A'B'C')$.
b. Si $\square ABCD \cong \square A'B'C'D'$, entonces $per(\square ABCD) = per(\square A'B'C'D')$.

Para triángulos y cuadriláteros semejantes, tenemos la siguiente relación.

7.2.3. Teorema. a. Si $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, entonces

$$\frac{per(\Delta ABC)}{per(\Delta A'B'C')} = \frac{|AB|}{|A'B'|}.$$

b. Si $\square ABCD \sim \square A'B'C'D'$, entonces

$$\frac{per(ABCD)}{per(A'B'C'D')} = \frac{|AB|}{|A'B'|}.$$

Prueba: Basta con demostrarlo para los triángulos. Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos semejantes. Pongamos $k = \dfrac{|AB|}{|A'B'|}$. Entonces, tenemos que $|AB| = k|A'B'|$, $|BC| = k|B'C'|$ y $|AC| = k|A'C'|$. De la definición de perímetro hallamos que

$$\frac{per(\Delta ABC)}{per(\Delta A'B'C')} = \frac{|AB|+|BC|+|AC|}{|A'B'|+|B'C'|+|A'C'|} = \frac{k(|A'B'|+|B'C'|+|A'C'|)}{|A'B'|+|B'C'|+|A'C'|} = k. \ \clubsuit$$

7.2.4. Definición. El *semiperímetro* de un triángulo ΔABC es el número $\dfrac{a+b+c}{2}$. Este número, cuando no hay confusión alguna, se denota usualmente con la letra s. El *semiperímetro* de un cuadrilátero $\square ABCD$ es el número

$$s = \frac{|AB|+|BC|+|CD|+|DA|}{2} = \frac{a+b+c+d}{2}.$$

Convenimos en que si un triángulo es denotado ya sea por $\Delta A'B'C'$ o por $\Delta(a',b',c')$, entonces su semiperímetro será denotado por $s' = \dfrac{a'+b'+c'}{2}$. Lo mismo para cuadriláteros.

7.2.5. Teorema. En todo cuadrilátero $\square ABCD$ se cumple la desigualdad $e+f>s$.

Prueba: Sea O el punto de intersección de las diagonales de nuestro cuadrilátero $\square ABCD$. De la Desigualdad del Triángulo (4.4.9) sabemos que
$a<|OA|+|OB|$, $b<|OB|+|OC|$, $c<|OC|+|OD|$ y $d<|OD|+|OA|$.
Por consiguiente,

$$2e+2f=|OA|+|OB|+|OB|+|OC|+|OC|+|OD|+|OD|+|OA| > a+b+c+d$$

$$e+f>s. \quad ♣$$

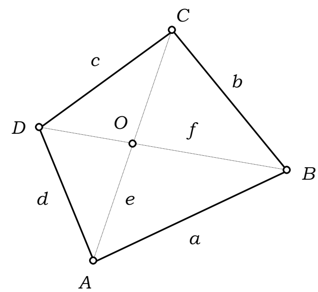
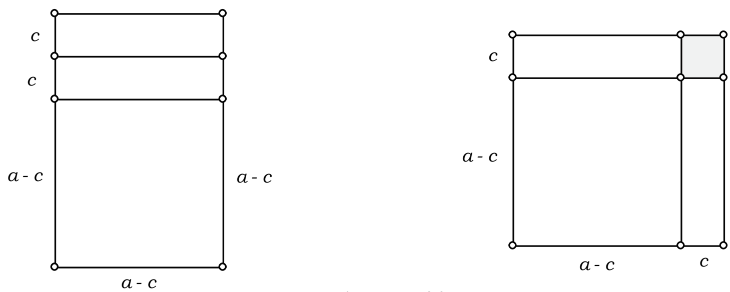


Figura 7.19

A continuación, daremos una demostración sin palabras de un resultado clásico.

7.2.6. Teorema. Si un rectángulo y un cuadrado tienen el mismo perímetro, entonces el cuadrado tiene mayor área que el rectángulo.

Prueba[a-34]:



♣

Figura 7.20

Finalizamos este capítulo con dos definiciones importantes.

7.2.7. Definición. Dado un triángulo ΔABC, definimos $s_a = s-a$, $s_b = s-b$ y $s_c = s-c$.

La noción de perímetro se puede extender a cualquier línea quebrada:

7.2.8. Definición. El *perímetro* de una línea quebrada $A_1A_2\ldots A_k$, con $k>2$ un número entero, es el número

$$per(A_1A_2\ldots A_k) = |A_1A_2|+|A_2A_3|+\ldots+|A_{k-1}A_k|.$$

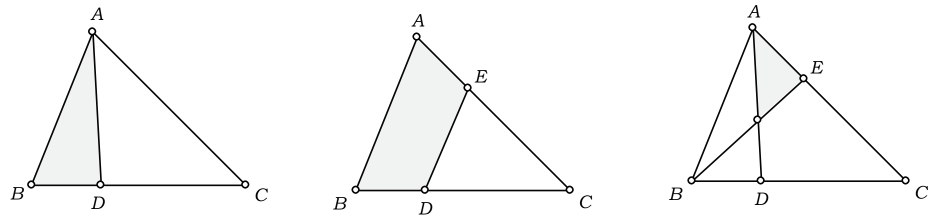
Problemas

7.1. Si del interior de una región poligonal quitamos una región triangular, ¿es una región poligonal lo que nos queda?

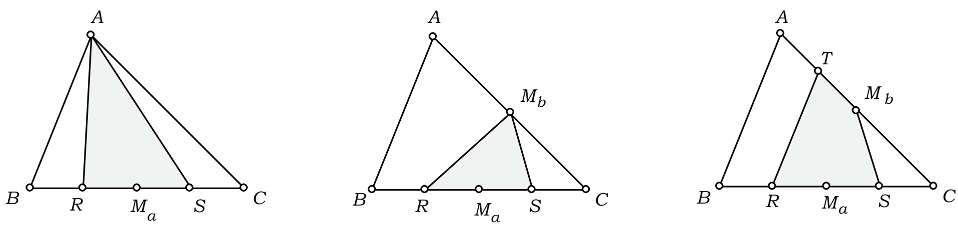
7.2. Si ΔABC y $\Delta A'B'C'$ son dos triángulos tales que $\Delta ABC \subseteq int(\Delta A'B'C')$, ¿pueden ΔABC y $\Delta A'B'C'$ ser congruentes?

7.3. Si $are(\Delta ABC) = are(\Delta A'BC)$, probar que o $\overleftrightarrow{AA'} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ o $\overleftrightarrow{BC}$ biseca a AA'.

7.4. En la figura: tenemos un triángulo ΔABC de área 100. En cada caso, determinar el área de la región sombreada:

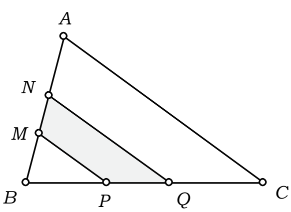


$3|BD| = |BC|$ y $3|AE| = |AC|$



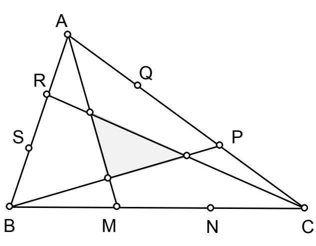
R es el punto medio de BM_a, S es el punto medio de M_aC y T es el punto medio de AM_a.

7.5. En la figura:



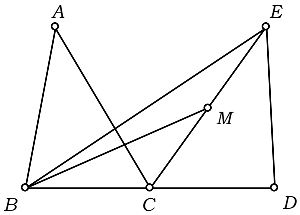
tenemos un triángulo ΔABC de área 20, $PM \parallel AC$ y $QN \parallel AC$. Si $|BP| : |PQ| : |QC| = 2 : 3 : 4$, calcular el área de la región sombreada.

7.6. En la figura:



ΔABC es un triángulo cualquiera y tenemos que M y N trisecan a BC, P y Q trisecan a AC y R y S trisecan a AB. Expresar el área del triángulo sombreado en función del área del triángulo original ΔABC.

7.7. En la figura:



ΔABC es un triángulo de área 20 y tenemos que M es el punto medio de CE, $BC \cong CD$ y $d(A, \overleftrightarrow{BD}) = d(E, \overleftrightarrow{BD})$. Calcular las áreas de los triángulos ΔEBD y ΔMBC.

7.8. Si la altura de un triángulo se duplica y el lado correspondiente no cambia, ¿qué tanto varía el área? Si un lado de un triángulo se duplica y la altura correspondiente no cambia, ¿qué tanto varía el área? Si se duplican la altura de un triángulo y el lado correspondiente, ¿qué tanto varía el área?

7.9. Si la distancia entre los puntos medios de dos lados de un triángulo equilátero es igual a 4, encontrar el área y el perímetro del triángulo.

7.10. Sea ΔABC un triángulo tal que $|AB| = 6$, $|AC| = 7$ y $h_c = 5$. Encontrar h_b.

7.11. Si $are(\Delta(a,b,c)) = 30$ y $\dfrac{a}{h_a} = \dfrac{3}{5}$, encontrar el valor numérico de a.

7.12. Sea $\Delta(a,8,4)$ un triángulo cuya área es 20. Calcular las longitudes de las alturas de los triángulos ΔABM_a y ΔAM_aC con respecto a los lados AB y AC, respectivamente.

7.13. Probar que dos triángulos semejantes con la misma área tienen que ser congruentes.

7.14. Probar que dos triángulos semejantes con el mismo perímetro tienen que ser congruentes.

7.15. Probar que todo triángulo es semejante a uno de área 1 y a otro de perímetro 1.

7.16. Dados un triángulo y dos números reales positivos p y q, ¿es posible encontrar un triángulo semejante al dado con perímetro p y área q?

7.17. Sea ΔABC un triángulo. Si $D \in BC$ y $\dfrac{|BD|}{|DC|} = p$, probar que $are(\Delta ABD) = p\, are(\Delta ADC)$.

7.18. Si $\Delta(a,b,c)$ es un triángulo de perímetro 27 tal que $\dfrac{a}{2} = \dfrac{b}{3} = \dfrac{c}{4}$, determinar las longitudes de cada uno de los lados del triángulo.

7.19. Sea $\Delta(a,b,c)$ un triángulo de perímetro 80 tal que $b = 10$ y $c = 20$. ¿Entre qué valores se encuentra a?

7.20. En un triángulo $\Delta(a,b,c)$ se tiene que su perímetro es igual a 30, $a = 5$ y la diferencia entre las longitudes de los dos lados restantes es 5. Hallar las longitudes de los tres lados del triángulo.

7.21. Sea $\Delta(a,b,c)$ un triángulo isósceles cuyo perímetro es igual a 40. Si $2b = a + c$. Hallar las longitudes de los tres lados del triángulo.

7.22. Si ΔABC es un triángulo tal que $per(\Delta ABC) = 40$ y $\Delta ABC \sim \Delta(3,4,5)$, calcular las longitudes de los lados del triángulo ΔABC.

7.23. Sea $\Delta(a,b,c)$ un triángulo tal que $a + b = 210$, $a + c = 320$ y $b + c = 500$. Calcular las longitudes de los lados del triángulo.

7.24. Sea $\Delta(a,b,c)$ un triángulo de perímetro 100. Si $a = \dfrac{3}{4}(b + c)$ y $b - c = \dfrac{100}{7}$. Calcular las longitudes de los lados del triángulo.

7.25. Si $are(\Delta(4,b,c)) = 16$ y $\Delta(4,b,c) \sim \Delta(2,b',c')$, encontrar el área del triángulo $\Delta(2,b',c')$.

7.26. Si $are(\Delta(a,b,3)) = 12$, $are(\Delta(a',b',c')) = 6$ y $\Delta(a,b,3) \sim \Delta(a',b',c')$, encontrar c'.

7.27. Supongamos que $\Delta(4,b,c) \sim \Delta(3,b',c')$. Si tenemos que $per(\Delta(a,b,c)) = 20$, calcular el perímetro del triángulo $\Delta(a',b',c')$.

7.28. Si $\Delta(8,9,10) \sim \Delta(a,b,c)$ y $per(\Delta(a,b,c)) = 136$, encontrar los valores numéricos de a, b y c.

7.29. Sean $\Delta(3,b,c)$ y $\Delta(5,b',c')$ dos triángulos semejantes. Si $are(\Delta(3,b,c)) + are(\Delta(5,b',c')) = 30$, encontrar el área de cada uno de los dos triángulos.

7.30. Supongamos que $\Delta(a,b,c) \sim \Delta(a',5,4)$ con razón de semejanza igual a $\frac{3}{5}$. Si $per(\Delta(a,b,c)) = 25$, calcular las longitudes de cada uno de los lados del triángulo $\Delta(a,b,c)$ y el valor numérico de a'.
7.31. Si dos triángulos son semejantes, uno de ellos tiene área igual a 64 y el otro tiene área igual a 81, encontrar la razón de semejanza que guardan dichos triángulos.
7.32. Si $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ con razón de semejanza igual a $\frac{3}{5}$ y $are(\Delta ABC) + are(\Delta A'B'C') = 34$, encontrar el área de cada uno de los triángulos.
7.33. Si $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ con razón de semejanza igual a $\frac{2}{3}$, $are(\Delta A'B'C') - are(\Delta ABC) = 10$ y $h_a = 4$, calcular el valor numérico de a, a' y $h_{a'}$.
7.34. En un triángulo isósceles, el lado diferente tiene longitud igual a la suma de las longitudes de los otros dos lados más 20. Si el perímetro del triángulo es 60, hallar las longitudes de los lados del triángulo.
7.35. En un triángulo, la longitud de un primer lado es 2 unidades más grande que la longitud de un segundo lado y la longitud del tercer lado es 3 unidades menos que la del primero. Si el perímetro del triángulo es 28, hallar las longitudes de los lados del triángulo.
7.36. En un triángulo, la longitud de un primer lado es igual a la mitad de la suma de las longitudes de los otros dos lados y la longitud de un segundo lado es el doble que la longitud del tercero. Si el perímetro del triángulo es igual a 45, hallar las longitudes de los lados del triángulo.
7.37. En el triángulo $\Delta(a,10,6)$ se tiene que $d(M_a, \overleftrightarrow{AB}) = 3$. Calcular $d(M_a, \overleftrightarrow{AC})$.
7.38. Encontrar las longitudes de los lados del triángulo que es semejante al triángulo $\Delta(10,9,5)$ y que también lo cuadruplica en área.
7.39. Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos isósceles tales que $AB \cong AC \cong A'B' \cong A'C'$. Si $h_a = \frac{a'}{2}$, probar que ambos triángulos tienen la misma área.
7.40. Si dos triángulos semejantes tienen perímetros 35 y 40 y uno de los lados del triángulo más pequeño tiene longitud 5, encontrar la longitud del lado correspondiente del triángulo grande.
7.41. Si dos triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ satisfacen que $\angle A$ y $\angle A'$ son suplementarios, $AB \cong A'B'$ y $AC \cong A'C'$, probar que $are(\Delta ABC) = are(\Delta A'B'C')$.
7.42. Encontrar la longitud de cada uno de los lados de un triángulo semejante al triángulo $\Delta(4,6,8)$ cuya área es $2\frac{1}{2}$ más grande que el área de este último triángulo.
7.43. Si un triángulo es dividido por una recta en dos triángulos con la misma área y perímetro, ¿debe ser un triángulo isósceles?
7.44. Sean ΔABC un triángulo y $D \in AB$ y $E \in AC$ tales que $DE \parallel BC$. Probar que $are(\Delta ABE) = are(\Delta ADC)$.
7.45. Sea ΔABC un triángulo. Sean D y E los puntos donde una recta paralela a $\overleftrightarrow{BC}$ corta a los lados AB y AC, respectivamente, y P el punto de intersección de BE y CD. Probar las siguientes identidades:
$are(\Delta DBC) = are(\Delta EBC)$, $are(\Delta DEB) = are(\Delta DEC)$, $are(\Delta BPD) = are(\Delta CPE)$ y $are(\Delta ABE) = are(\Delta ACD)$.
7.46. Sean ΔABC un triángulo y $P \in AB$. Encontrar un punto $Q \in BC$ tal que $are(\Delta APQ) = are(\Delta CAQ)$.
7.47. Sean ΔABC un triángulo, $D \in AB$ y $E \in AC$. Encontrar las dos posiciones de un punto $P \in \overleftrightarrow{BC}$ tal que $are(\Delta ADP) = are(\Delta APE)$.
7.48. Sea ΔABC un triángulo. Si $D \in \overleftrightarrow{BC} - BC$, satisface que $BC \cong CD$, probar que $are(\Delta ABC) = are(\Delta M_c BD)$.
7.49. Sean ΔABC un triángulo y $E \in \overrightarrow{AC}$ y $D \in \overrightarrow{AB}$ tales que $AB \cong AC \cong AE$. Si $P \in BC$ es arbitrario, probar que la suma $are(\Delta PAD) + are(\Delta PAE)$ es constante. ¿Es cierto el resultado si $P \in \overleftrightarrow{BC} - BC$?

7.50. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$. Sobre AB construimos un triángulo isósceles ΔABE equivalente a ΔABC, de tal forma que los puntos E y C estén un mismo semiplano determinado por $\overleftrightarrow{AB}$.

a. Probar que E no puede estar en el interior del triángulo ΔABC.

b. Si $b = 7$ y $c = 9$, calcular el área de la región triangular que comparten ambos triángulos.

7.51. En todo triángulo, probar que la longitud de cada uno de sus lados es menor que el semiperímetro del mismo.

7.52. En un triángulo isósceles, probar que la longitud del lado más grande es mayor que $\frac{1}{3}$ del perímetro del triángulo, y el lado más pequeño tiene longitud menor que $\frac{1}{3}$ del perímetro del triángulo.

7.53. La siguiente lista de identidades que se cumplen en cualquier triángulo $\Delta(a,b,c)$ es una recopilación realizada por J. S. Mackay en su artículo [a-105]:

1. $s - s_a = s_b + s_c = a$, $s - s_b = s_a + s_c = b$ y $s - s_c = s_a + s_b = c$.
2. $s + s_a = b + c$, $s + s_b = a + c$ y $s + s_c = a + b$.
3. $s_b - s_c = c - b$, $s_c - s_a = a - c$ y $s_a - s_b = b - a$.
4. $s + s_a + s_b + s_c = 2s$.
5. $s_a + s_b + s_c = s$.
6. $s^2 + s_a^2 + s_b^2 + s_c^2 = a^2 + b^2 + c^2$.
7. $s - s_a + s_b + s_c = 2a$, $s + s_a - s_b + s_c = 2b$ y $s - s_a + s_b - s_c = 2c$.
8. $s - s_b - s_c = s_a$, $s - s_a - s_c = s_b$ y $s - s_a - s_b = s_c$.
9. $ss_b - s_a s_c - s_a s_b + s_c s = a^2$, $ss_a - s_b s_c - s_a s_c + s_b s = c^2$ y $ss_c - s_a s_b - s_b s_c + s_a s = b^2$
10. $ss_a + ss_b + ss_c = s^2$.
11. $s_a s - s_a s_b - s_a s_c = s_a^2$: $s_b s - s_b s_a - s_b s_c = s_b^2$ y $s_c s - s_c s_a - s_c s_b = s_c^2$.
12. $ss_a + s_b s_c = bc$, $ss_b + s_a s_c = ac$ y $ss_c + s_a s_b = ab$.
13. $2(ss_a - s_b s_c) = b^2 + c^2 - a^2$, $2(ss_b - s_a s_c) = a^2 + c^2 - b^2$ y $2(ss_c - s_a s_b) = a^2 + b^2 - c^2$.
14. $4(s_a s_b + s_a s_c + s_b s_c) = 2(bc + ac + ab) - (a^2 + b^2 + c^2)$.
15. $4(s_b s_c - s_b s - s_c s) = 2(bc - ac - ab) - (a^2 + b^2 + c^2)$, $4(s_a s_c - s_a s - s_c s) = 2(ac - ab - bc) - (a^2 + b^2 + c^2)$ y $4(s_b s_c - s_a s - s_b s) = 2(ab - bc - ac) - (a^2 + b^2 + c^2)$.
16. $2(as_a + bs_b + cs_c) = 2(bc + ac + ab) - (a^2 + b^2 + c^2)$.
17. $2(as_b + bs_c + cs_a) = 2(as_c + bs_a + cs_b) = a^2 + b^2 + c^2$.
18. $bs_b + cs_c - as_a = 2s_b s_c$, $as_a + cs_c - bs_b = 2s_a s_c$ y $as_a + bs_b - cs_c = 2s_a s_b$.
19. $bs + cs_a - as_c = 2ss_a$, $cs + as_b - bs_a = 2ss_b$ y $as + bs_c - cs_b = 2ss_c$.
20. $s_a(b - c) + s_b(c - a) + s_c(a - b) = 0$.
21. $s_a^3 + s_b^3 + s_c^3 + 3abc = s^3$
22. $ss_a s_b s_c\left(\frac{1}{s_a} + \frac{1}{s_b} + \frac{1}{s_c} - \frac{1}{s}\right) = abc$.
23. $as_a^2 + bs_b^2 + cs_c^2 + 2s_a s_b s_c = abc$.
24. $4(as_a^2 + bs_b^2 + cs_c^2) = a^3 + b^3 + c^3 + 6abc - b^2c - c^2b - c^2a - a^2c - a^2b - b^2a$.
25. $as_a^2(b - c) + bs_b^2(c - a) + cs_c^2(a - b) = 0$.

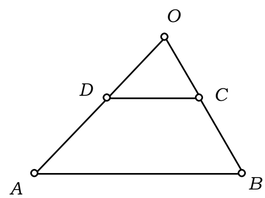
7.54. En los lados AB y AC del triángulo $\Delta(20,80,40)$ tomamos puntos D y E, respectivamente, tales que $DE \parallel BC$. Si $per(\square BCED) = 115$, calcular las longitudes de los lados del trapecio $\square BCED$.

7.55. Sean ΔABC un triángulo y $D \in AB$ y $E \in AC$ tales que $DE \parallel BC$ y $\dfrac{|AD|}{|DB|} = \dfrac{i}{j}$. Si F es la intersección de BC con la recta paralela a AB que pasa por E, encontrar $\dfrac{are(BFED)}{are(\Delta ABC)}$.

7.56. Sea ΔABC un triángulo de área 20. Sea l una recta paralela a BC que corta a AB, h_a y AC en los puntos B', H y C', respectivamente, de tal forma que $|AH| = \dfrac{2}{3} h_a$. Calcular el área del triángulo $\Delta AB'C'$.

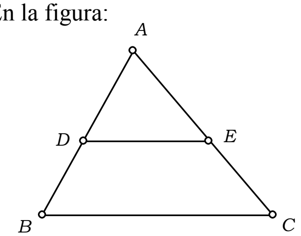
7.57. En el triángulo $\Delta(5,6,8)$ trazamos una recta paralela a su lado más grande que parta al triángulo en dos regiones poligonales de la misma área. Encontrar la proporción en que dicha recta corta a los lados más pequeños del triángulo.

7.58. En la figura:



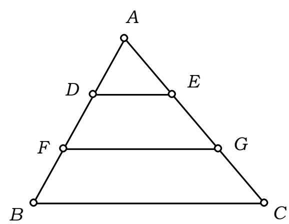
supongamos que $DC \parallel AB$, $|AB| = 2|DC|$, $|CB| = 2$ y $|DA| = 3$. Calcular $|OD|$, $|OC|$ y $\dfrac{are(\Delta ODC)}{are(ABCD)}$.

7.59. En la figura:



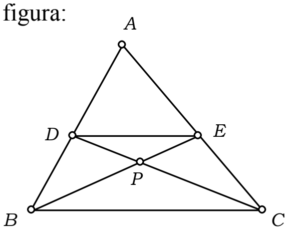
tenemos que $DE \parallel BC$ y $\dfrac{|AD|}{|DB|} = \dfrac{4}{5}$. Si $are(\Delta ADE) = 16$, encontrar el área del trapecio $\square BCED$.

7.60. En la figura:



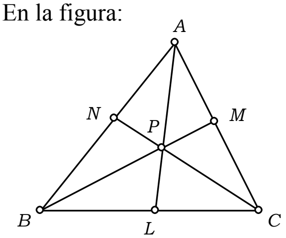
tenemos que $DE \parallel FG$ y $FG \parallel BC$. Si $AD \cong DF \cong FB$. Calcular $\dfrac{are(FGED)}{are(\Delta ABC)}$.

7.61. En la figura:



si $DE \parallel BC$ y $\dfrac{|AD|}{|DB|} = \dfrac{3}{4}$, calcular $\dfrac{are(\Delta DPE)}{are(\Delta PBC)}$.

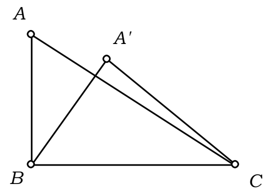
7.62. En la figura:



tenemos un triángulo ΔABC. Consideremos las áreas de los triángulos ΔPBL, ΔPLC, ΔPCM, ΔPMA, ΔPAN y ΔPNB. ¿Cuántas de estas áreas se nos deben de dar como mínimo para encontrar el área del triángulo original ΔABC?

7.63. En la figura:

si $\angle CBA$ es un ángulo recto y $AB \cong A'B$, probar que
$are(\Delta A'BC) < are(\Delta ABC)$.



7.64. Sea $P \in int(\Delta(5,4,3))$. Si las áreas de los triángulos ΔPBC, ΔPCA y ΔPAB están en la proporción 1:2:3. Determinar las distancias de P a cada uno de los lados del triángulo.

7.65. Sea ΔABC un triángulo rectángulo isósceles con ángulo recto $\angle A$. Si $P \in AB$ y $Q \in BC$ satisfacen que $\frac{|AP|}{|PB|} = \frac{|QC|}{|BQ|} = 2$. Comparar el perímetro del triángulo ΔBQP y el perímetro del cuadrilátero $\square PQCA$.

7.66. Sean ΔABC un triángulo y $P \in BC$, $Q \in AB$ y $R \in AC$ tales que $PR \parallel AB$ y $PQ \parallel AC$. Probar que $are(\Delta AQR)$ es la media geométrica de $are(\Delta QBP)$ y $are(\Delta RPC)$.

7.67. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$ tal que $a = 2c$. En el exterior del triángulo construimos un cuadrado $\square BCDE$ y dos triángulos equiláteros ΔABF y ΔACG.

a. Calcular las medidas de los ángulos $\angle B$ y $\angle C$.
b. Expresar $|AC|$ en función de a.
c. Expresar el área del triángulo en función de a.
d. Probar que $\overleftrightarrow{AF} \perp \overleftrightarrow{BE}$ y $\overleftrightarrow{AF} \perp \overleftrightarrow{CG}$.
e. Encontrar el área de los triángulos ΔFAG y ΔFBE en función de a.
f. Encontrar el área del cuadrilátero $\square DEFG$ en función de a.

7.68. Dado un número real positivo $t \in (0,1]$ y un triángulo ΔABC. Encontrar un punto $M \in BC$ tal que

$$\frac{are(\Delta ABM)}{are(\Delta ABC)} = t.$$

7.69. Sean ΔABC un triángulo y $D \in AB$ tal que $\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{3}{5}$. Calcular $\frac{are(\Delta ADC)}{are(\Delta ABC)}$ y $\frac{are(\Delta ADC)}{are(\Delta DBC)}$.

7.70. Sean ΔABC un triángulo y $D \in AB$ y $E \in AC$ tales que $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{1}{5}$ y $\frac{|CE|}{|EA|} = \frac{3}{4}$. Calcular

$$\frac{are(\Delta ADE)}{are(\Delta DEC)} \text{ y } \frac{are(\Delta ADE)}{are(\Delta ABC)}.$$

7.71. Sean ΔABC un triángulo y $D, E \in BC$. Si $|BD| = 3$, $|DE| = 4$ y $|EC| = 5$. Calcular

$$\frac{are(\Delta ABD)}{are(\Delta ADE)}, \frac{are(\Delta ABD)}{are(\Delta AEC)} \text{ y } \frac{are(\Delta ADE)}{are(\Delta ABC)}.$$

7.72. Sean ΔABC un triángulo, $D \in AB$ y $E \in AC$. Si $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{1}{3}$ y $\frac{|AE|}{|EC|} = \frac{1}{2}$, calcular

$$\frac{are(\Delta ADE)}{are(\Delta ADC)}, \frac{are(\Delta ADC)}{are(\Delta ABC)} \text{ y } \frac{are(\Delta ABC)}{are(\Delta ADE)}.$$

7.73. Sean ΔABC un triángulo y $D \in AB$ y $E \in AC$ tales que $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{1}{4} = \frac{|AE|}{|EC|}$. Calcular $\frac{are(\Delta ABC)}{are(BCED)}$.

7.74. Sean ΔABC un triángulo y $D \in AB$ y $E \in AC$ tales que $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{1}{2}$ y $\frac{|CE|}{|EA|} = \frac{3}{2}$. Probar que

$$\frac{are(\Delta ABC)}{are(BCED)} = \frac{15}{13}.$$

7.75. Sean ΔABC un triángulo y $P \in int(\Delta ABC)$. Si D es el punto de intersección de BC y $\overleftrightarrow{AP}$, E es el punto de intersección de AC y $\overleftrightarrow{BP}$, y F es el punto de intersección de AB y $\overleftrightarrow{CP}$, probar que $\dfrac{|AP|}{|AD|} + \dfrac{|BP|}{|BE|} + \dfrac{|CP|}{|CF|} = 2.$

7.76. Sea ΔABC un triángulo. Tomamos $P \in BC$ tal que $\dfrac{|BD|}{|BC|} = \dfrac{1}{5}$ y $Q \in AP$ tal que $\dfrac{|PQ|}{|QA|} = \dfrac{1}{3}$. Si $are(\Delta ABC) = 40$, calcular el área de los triángulos ΔQBC, ΔCQA y ΔAQB.

7.77. Sean ΔABC un triángulo y $D \in BC$. Probar que $are(\square A M_c D M_b) = \dfrac{are(\Delta ABC)}{2}$.

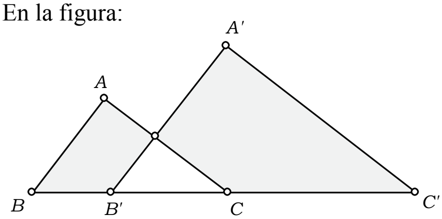
7.78. Sean ΔABC un triángulo y $D \in BC$. Por D trazamos rectas paralelas a AC y AB que corten a AB y AC en los puntos E y F, respectivamente. Prolongamos el segmento DF del lado de F hasta un punto G tal que $DG \cong AB$. Si completamos el paralelogramo $\square GFCH$, probar que $are(\square DFAE) = are(\square GFCH)$.

7.79. Tomamos un punto D en el lado BC del triángulo $\Delta(8,9,7)$ de tal forma que $|DC| = 5$. Por D trazamos rectas paralelas a AB y AC que corten a AC y AB en los puntos E y F, respectivamente. Calcular el perímetro del paralelogramo $\square DEAF$.

7.80. Sea ΔABC un triángulo. En el exterior del triángulo trazamos dos paralelogramos $\square ABPQ$ y $\square BCRS$ y sea T el punto de intersección de $\overleftrightarrow{PQ}$ y $\overleftrightarrow{RS}$. Sea $\square ACDE$ el paralelogramo en el exterior del triángulo dado cuyos lados CD y AE son paralelos y congruentes a TB. Probar que

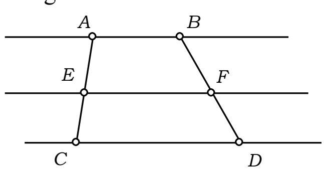
$$are(\square ACDE) = are(\square ABPQ) + are(\square BCRS).$$

7.81. En la figura:



tenemos dos triángulos congruentes a los triángulos $\Delta(5,4,3)$ y $\Delta(10,8,6)$. Si $|B'C| = 3$. Calcular el área de la región sombreada.

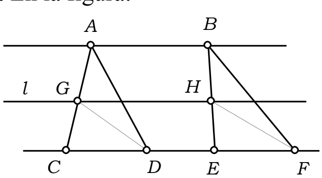
7.82. En la figura:



tenemos tres rectas paralelas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{EF}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ con A, E y C, y B, F y D formando dos hileras de puntos. Probar que

$$are(\square AEDF) = are(\square BECF).$$

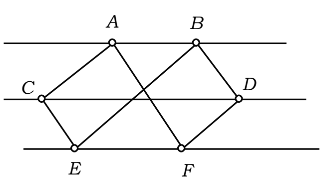
7.83. En la figura:



tenemos tres rectas paralelas $\overleftrightarrow{AB}$, l y $\overleftrightarrow{CF}$; y sean G y H los puntos de intersección de AC y BE con l, respectivamente. Si $CD \cong EF$, probar que

$$are(\Delta AGD) = are(\Delta BHF).$$

7.84. En la figura:



tenemos tres rectas paralelas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{EF}$ entre sí. Si $\overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{AF}$ y $\overleftrightarrow{BE} \parallel \overleftrightarrow{DF}$. Probar que

$$are(\square EFAC) = are(\square EFDB).$$

7.85. ¿Cuántos cuadriláteros hay semejantes a uno dado que tengan un perímetro dado?

7.86. ¿Cuántos cuadriláteros hay semejantes a uno dado que tengan una misma área dada?

7.87. Para los antiguos egipcios el área de un cuadrilátero $\square(a,b,c,d)$, estaba dado por la fórmula $\left(\frac{a+c}{2}\right)\left(\frac{b+d}{2}\right)$ ¿Es correcta la fórmula de los egipcios? ¿Si no lo es, cómo se compara con el área verdadera de un cuadrilátero?

7.88. Sea ΔABC un triángulo. Si $D \in AB$ y $E \in AC$. Probar que $per(\square ABED) < per(\Delta ABC)$.

7.89. Si un triángulo y un cuadrilátero comparten un lado y los otros tres lados del cuadrilátero yacen en el interior del triángulo, probar que el perímetro del cuadrilátero es menor que el perímetro del triángulo.

7.90. Probar que en todo cuadrilátero $\square ABCD$ se cumple que

$$e+f < per(\square ABCD) < 2(e+f).$$

7.91. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero. Probar las siguientes desigualdades:

a. $|AC| < \dfrac{per(ABCD)}{2}$ y $|BD| < \dfrac{per(ABCD)}{2}$.

b. $|AD| + |BC| < |AC| + |BD|$ y $|AB| + |CD| < |AC| + |BD|$.

c. $\dfrac{per(ABCD)}{2} < |AC| + |BD| < per(\square ABCD)$.

7.92. Sean $\square ABCD$ un cuadrilátero y $P \in int(\square ABCD)$. Probar las siguientes desigualdades:

a. $|AP| + |PB| < |AD| + |DC| + |CB|$.

b. $|AP| + |PB| + |PC| + |PD| < \dfrac{3}{2} per(\square ABCD)$.

c. $e+f \leq d(P,A) + d(P,B) + d(P,C) + d(P,D)$ ¿Bajo qué condiciones se da la igualdad?

7.93. Probar que en todo rectángulo $\square ABCD$ se cumple que $per(\square ABCD)^2 > 12\ are(\square ABCD)$.

7.94. Probar que si $\square ABCD$ y $\square A'B'C'D'$ son dos rectángulos tales que $\square A'B'C'D' \subseteq int(\square ABCD)$, entonces $per(\square A'B'C'D') \leq per(\square ABCD)$ (para ahondar más en este tema, el lector puede ver el artículo [a-176]).

7.95. ¿El rectángulo $\square(9,4,9,4)$ puede encajarse en el interior del rectángulo $\square(8,6,8,6)$?

7.96. Sean $\square ABCD$ un cuadrilátero y O el punto de intersección de sus diagonales. Probar que

$$are(\Delta OCD) = \frac{are(\Delta OAB)}{are(\Delta ODA)} are(\Delta OBC).$$

7.97. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero tal que $\angle A$ es un ángulo recto. Si $|AB| = 6$, $|BC| = 5$ y $|DC| = 8 = |AD|$, calcular el área del cuadrilátero.

7.98. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero en el cual la diagonal AC es bisecada perpendicularmente por la otra diagonal. Si M y N son los puntos medios de AB y AD, respectivamente, probar que el área del triángulo ΔCMN es igual a $\frac{3}{8}$ del área del cuadrilátero original.

7.99. Sean $\square ABCD$ un cuadrilátero, M el punto medio de AD y O el punto de intersección de sus diagonales. Por el punto M trazamos rectas paralelas a las diagonales que corten a AC y BD en los puntos P y Q, respectivamente. Expresar el área del paralelogramo $\square POQM$ como una fracción del área del cuadrilátero original.

7.100. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero. Si los puntos E y F trisecan a la diagonal AC, probar que

$$are(ABED) = are(BFDE) = are(DFBC).$$

7.101. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero cualquiera. Si l es una recta paralela a DB que interseca a $\overleftrightarrow{AB}$ en el punto P, probar que $are(\Delta ADP) = are(\square ABCD)$.

7.102. Sean $\square ABCD$ un cuadrilátero y L, M, N y O los puntos medios de AB, BC, CD y DA, respectivamente. Probar que $are(\square LMNO) = \dfrac{are(ABCD)}{2}$.

7.103. Sean $\square ABCD$ un cuadrilátero y $P \in DC$. Por D trazamos una recta paralela a $\overleftrightarrow{AP}$ y por C trazamos una recta paralela a $\overleftrightarrow{BP}$. Si estas rectas se cortan en el punto Q, probar que $are(\Delta QAB) = are(\square ABCD)$.

7.104. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero. Por C trazamos una recta paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ y por D una recta paralela a $\overleftrightarrow{AC}$, las cuales se cortan en el punto E. Probar que $are(\square ABCD) = are(\square ABCE)$.

7.105. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero. Si $\square ABDE$ es un paralelogramo, probar que el cuadrilátero $\square ABCD$ y el triángulo ΔACE son equivalentes.

7.106. Si por cada uno de los vértices de un cuadrilátero trazamos una recta paralela a la diagonal que no lo contiene, probar que el área del paralelogramo formado por dichas rectas es el doble del área del cuadrilátero original.

7.107. Sean $\square ABCD$ un cuadrilátero y O el punto de intersección de sus diagonales. Si $AO \cong OC$ probar que los triángulos ΔCDB y ΔABD son equivalentes.

7.108. Sean $\square ABCD$ un cuadrilátero y O el punto de intersección de sus diagonales. Si los triángulos ΔDAO y ΔOBC son equivalentes, probar que $AB \parallel CD$.

7.109. Si la diagonal de un cuadrilátero resulta estar en la bisectriz de los ángulos correspondientes, probar que dicha diagonal corta al cuadrilátero en dos triángulos equivalentes.

7.110. Probar que una diagonal de un cuadrilátero biseca a la segunda diagonal si y solo si dicha diagonal divide al cuadrilátero en dos triángulos equivalentes.

7.111. Si las diagonales de un cuadrilátero lo dividen en cuatro triángulos equivalentes entre sí, probar que el cuadrilátero tiene que ser un paralelogramo.

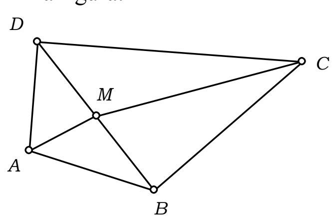
7.112. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero tal que $AB \cong AD$ y $BC \cong CD$. Expresar el área del cuadrilátero en función de e y f.

7.113. Si las diagonales de un cuadrilátero son perpendiculares, expresar el área del cuadrilátero en función de las longitudes de sus diagonales.

7.114. Si las diagonales de un cuadrilátero son perpendiculares y tienen longitudes 12 y 9, calcular el área del cuadrilátero.

7.115[l-288]. Si los segmentos que unen los puntos medios de los lados opuestos de un cuadrilátero son congruentes, expresar el área del cuadrilátero en función de las longitudes de sus diagonales.

7.116. En la figura:



tenemos un cuadrilátero $\square ABCD$. Si M es el punto medio de BD, probar que

$$are(\square ABCM) = \frac{are(ABCD)}{2}.$$

7.117. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero. Por el punto medio de cada diagonal trazamos una recta paralela a la otra diagonal. Sea O el punto donde dichas rectas paralelas se cortan.

a. Probar que $are(\square OABC) = are(\square OBCD) = are(\square OCDA) = are(\square ODAB) = \dfrac{are(ABCD)}{2}$.

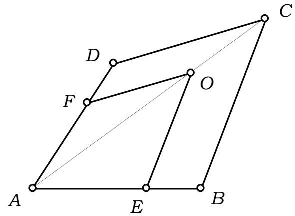
b. Comparar los triángulos ΔOAB y ΔOCD.

c. Comparar los triángulos ΔOBC y ΔODA.

d. Si M, N, P y Q son los puntos medios de AB, BC, CD y DA, respectivamente, probar que los cuadriláteros $\square OMBN$, $\square ONCP$, $\square OPDQ$ y $\square OQAM$ son equivalentes.

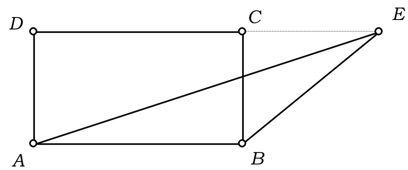
7.118. Si en un cuadrilátero de perímetro 30 un lado es el doble que su opuesto y el lado de mayor longitud es 2 unidades más grande que el lado más pequeño, hallar las longitudes de los lados del cuadrilátero.

7.119. En la figura:



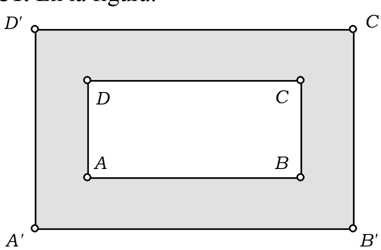
tenemos que $\square ABCD$ es un cuadrilátero, $FO \parallel DC$, $EO \parallel BC$ y $\frac{|AE|}{|EB|} = \frac{5}{6}$. Calcular $\frac{are(AEOF)}{are(ABCD)}$.

7.120. Calcular el área de un cuadrado cuyas diagonales tienen longitud 9.
7.121. Se tiene un cuadrado cuyos lados tienen longitud 2. Encontrar las dimensiones de los lados de un rectángulo cuya área y perímetro sean el doble que la del cuadrado original.
7.122. La longitud de uno de los lados de un cuadrado es 2 y un rectángulo de igual área que el cuadrado tiene perímetro 12. Encontrar las longitudes de los lados del rectángulo.
7.123. Si un cuadrado tiene área 16 y perímetro 20, encontrar las longitudes de los lados del cuadrado.
7.124. En la figura:



tenemos un rectángulo $\square ABCD$ y $E \in \overleftrightarrow{DC}$.
Probar que $are(\Delta EAB) = \frac{are(ABCD)}{2}$.

7.125. Sea $\square ABCD$ un rectángulo tal que $|AB| = 30$, y $|BC|$ es 20% menor que $|AB|$. Encontrar el perímetro del rectángulo.
7.126. Sea $\square ABCD$ un rectángulo tal que $|BC|$ es 25% menor que $|AB|$. Si $per(\square ABCD) = 70$, calcular las longitudes de los lados del rectángulo.
7.127. Si la base de un rectángulo se incrementa un 20% y su altura decrece, de tal forma que se mantiene el área, ¿en cuánto decreció la altura?
7.128. Si el largo de un rectángulo aumenta un 10% y el ancho aumenta un 5%, ¿en qué tanto por ciento aumenta su perímetro y su área?
7.129. Si los lados de un rectángulo se duplican , ¿cuánto se incrementa su área?
7.130. Sean $\square ABCD$ un rectángulo y $P \in AB$, $Q \in BC$, $R \in DC$ y $S \in AD$ tales que $|AP| = |PB|$, $|BQ| = |QC|$, $|CR| = 2|RD|$ y $|DS| = 2|SA|$. Probar que $72are(\square PQRS) = 37are(\square ABCD)$.
7.131. En la figura:



si $\square ABCD$ y $\square A'B'C'D'$ son dos rectángulos tales $|A'B'| = 5$, $|B'C'| = 3$ y $d(A, \overleftrightarrow{A'B'}) = d(B, \overleftrightarrow{A'B'}) = d(A, \overleftrightarrow{A'D'}) = d(B, \overleftrightarrow{B'C'}) = 1$, encontrar el área de la región poligonal sombreada y las longitudes de los lados del rectángulo $\square ABCD$.

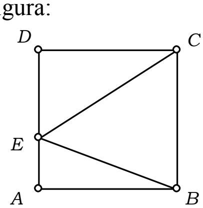
7.132. Consideremos la figura del ejercicio anterior. Supongamos que $\square ABCD$ y $\square A'B'C'D'$ son dos rectángulos tales que el área de la región poligonal sombreada es 20, $d(A, \overleftrightarrow{A'B'}) = d(B, \overleftrightarrow{A'B'}) = d(A, \overleftrightarrow{A'D'}) = d(B, \overleftrightarrow{B'C'}) = 1$ y $|A'B'| - |B'C'| = 4$. Encontrar las longitudes de cada uno de los lados de los dos rectángulos.
7.133. ¿Cuántos rectángulos hay cuyos lados sean números enteros positivos y su área sea igual a su perímetro?
7.134. ¿Cuántos rectángulos hay cuyos lados sean números naturales positivos y su área sea igual a su semiperímetro?
7.135. ¿Cuántos rectángulos hay que tengan un semiperímetro igual a 13 y lados de longitud un número entero positivo?
7.136. Si el semiperímetro de un rectángulo es 150 y la diferencia de sus lados es 20, hallar sus dimensiones.

7.137. Probar que dos cuadrados tienen la misma área si y solo si tienen el mismo perímetro. ¿Es cierta esta afirmación para los rectángulos?
7.138. Tenemos un cuadrado, el cual se puede dividir en 4 rectángulos congruentes entre sí y también en 9 cuadrados congruentes entre sí. ¿Quién tiene mayor perímetro entre uno de los rectángulos y uno de los cuadrados pequeños?
7.139. Se tiene un rectángulo cuyos lados tienen longitudes 140 y 273. Trazando paralelas a los lados del rectángulo lo dividimos en cuadrados congruentes cuyos lados tienen longitud igual a un número natural positivo. ¿Cuál es la máxima longitud que pueden alcanzar los lados de dichos cuadrados?
7.140. Si un rectángulo tiene 10 de perímetro y 16 de área, encontrar las longitudes de sus lados.
7.141. Sean $\square ABCD$ un cuadrado y $\square LMNO$ un rectángulo. Si $are(\square ABCD) = are(\square LMNO)$, probar que

$$per(\square ABCD) \leq per(\square LMNO).$$

7.142. Si un rectángulo $\square ABCD$ tiene la misma área que el triángulo $\Delta(5,4,3)$ y $|AB| = 3$, hallar el perímetro del rectángulo.
7.143. Dos veces el largo de un rectángulo es igual a tres veces su ancho más cuatro. Si seis veces el ancho es igual al perímetro del mismo rectángulo, encontrar las longitudes de los lados del rectángulo.
7.144. Sea $\square ABCD$ un rectángulo tal que $a = 4$ y $b = 5$. Si los lados del rectángulo se incrementan con un mismo número, de tal forma que se obtiene un nuevo rectángulo de área 40, encontrar las dimensiones del nuevo rectángulo.
7.145. Si incrementamos cada uno de los lados de un cuadrado en 2, se obtiene un nuevo cuadrado de área 9, ¿cuáles son las dimensiones del cuadrado inicial?
7.146. Si a uno de los lados de un cuadrado le quitamos 2 y al otro 3, nos queda un rectángulo de área r. Si a uno de sus lados del cuadrado le agregamos 5 y al otro le quitamos 2, nos queda un rectángulo de área s. Si $\frac{r}{s} = \frac{1}{2}$, calcular la longitud de cada uno de los lados del cuadrado.
7.147. Calcular las longitudes de los lados de un rectángulo de perímetro 100 y cuyos lados distintos están en la proporción $\frac{3}{2}$.
7.148. Sea $\square ABCD$ un rectángulo de perímetro 20. Si a su largo le quitamos 2 y a su ancho 3, y con estas nuevas dimensiones formamos un rectángulo $\square A'B'C'D'$, probar que $\frac{are(ABCD)}{are(A'B'C'D')} > 1$.
7.149. Dado un rectángulo de lados 2 y 10, ¿qué tanto se le tiene que aumentar a su base para que se obtenga un rectángulo de área 40?
7.150. Sea $\square ABCD$ un rectángulo tal que $|AB| = 2x$ y $|AB| = x - 2$. Si $per(\square ABCD) = 50$, hallar las longitudes de los lados del rectángulo y su área.
7.151. Si al área de un rectángulo le quitamos $\frac{1}{3}$ de la misma y a la restante le quitamos $\frac{2}{3}$, nos queda una superficie de 30. Calcular el área del triángulo inicial.
7.152. En un cierto rectángulo de perímetro 20 y lados a y b, se tiene que a decrece 3 unidades y b se incrementa 3 unidades. Si con estos cambios el área original se incrementa 4 unidades, encontrar las longitudes de los lados del rectángulo y su área.
7.153. Sea $\square ABCD$ un rectángulo. Si $per(\square ABCD) = 60$ y $are(\square ABCD) = 200$, calcular las longitudes de los lados del rectángulo.
7.154. Si en un rectángulo de lados a y b y área 16 se tiene que $a - b = 3$, encontrar las longitudes de los lados del rectángulo.
7.155. Si en un rectángulo de lados a y b y área 20 se tiene que a decrece dos unidades y b se incrementa 3 unidades y el área del nuevo rectángulo es igual al área del rectángulo original, encontrar las longitudes de los lados del rectángulo original.
7.156. Encontrar los lados a y b de un rectángulo cuya área es igual a $2a + 3b - 6ab$.

7.157. Probar que si un lado de un rectángulo tiene longitud igual a $\frac{1}{4}$ del perímetro, entonces el rectángulo tiene que ser un cuadrado.
7.158. Un lado de un rectángulo tiene longitud igual a 4 más que la longitud del lado de un cuadrado, y otro de sus lados tiene longitud igual a 1 menos que la longitud del mismo cuadrado. Si el rectángulo y el cuadrado tienen la misma área, encontrar las dimensiones de ambos.
7.159. La diferencia entre los lados de un rectángulo es de 8. Si aumentamos 2 a cada lado del rectángulo, se obtiene un nuevo rectángulo cuya área es de 120. Hallar las dimensiones de los lados del rectángulo original.
7.160. Si en un cierto rectángulo la diferencia entre las longitudes de dos de sus lados es 8 y su área es igual a 20, encontrar las longitudes de los lados del rectángulo.
7.161. Si a cada uno de los lados de un cuadrado se les aumenta 4, se obtiene un nuevo cuadrado de área 256, encontrar el área del cuadrado dado.
7.162. La diferencia de los lados de un rectángulo es de 10. Si a cada lado del rectángulo le quitamos 3, obtenemos un nuevo rectángulo de área 60. Hallar las dimensiones del rectángulo.
7.163. Entre todos los rectángulos de perímetro fijo p, encontrar las longitudes de los lados del que tenga mayor área.
7.164. Dado un rectángulo de lados 30 y 70. Encontrar las longitudes de los lados de un rectángulo semejante al dado cuyo perímetro sea igual a 60.
7.165. Se tienen dos rectángulos con el mismo perímetro y la misma área. Si los lados de uno de ellos tienen longitud 6 y 9, calcular las longitudes de los lados del segundo.
7.166. Se tiene un rectángulo de 12 de largo por 9 de ancho. Si se quiere aumentar el largo del rectángulo para que se duplique el área, ¿cuántas unidades se deben de aumentar al largo del rectángulo?
7.167. Si aumentamos 4 a cada uno de los lados de un cuadrado, se obtiene uno nuevo de área 18. Encontrar el área del cuadrado original.
7.168. Si un triángulo isósceles y un cuadrado tienen la misma base y la misma área, expresar la longitud de la altura correspondiente a la base del triángulo en función de la longitud de un lado del cuadrado.
7.169. Sean A, B y C tres puntos consecutivos y $a = |AB|$. Si el rectángulo de lados $\frac{a}{2}$ y $\frac{|BC|}{2}$ es equivalente al cuadrado de lado $|BC|$, expresar $|AC|$ en función de a.
7.170. Se tienen dos cuadrados en los cuales el lado de uno es 10 unidades menor que el doble del lado del otro. Si los perímetros de ambos cuadrados suman 68 unidades, encontrar las longitudes de los lados de cada uno de los dos cuadrados.
7.171. Se tienen dos cuadrados tales que un lado del primero tiene longitud $2x - 1$ y un lado del segundo tiene longitud $5x$, en donde x es un número real positivo. Si el perímetro del segundo cuadrado es 20 unidades más que el doble del perímetro del primero, hallar las longitudes de los lados de cada uno de los dos cuadrados.
7.172. En la figura:



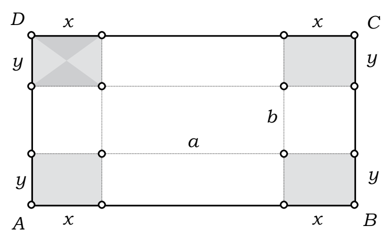
$\square ABCD$ es un cuadrado cuyos lados tienen longitud 4.

a. Encontrar $\dfrac{are(\Delta EBC)}{are(ABCD)}$.

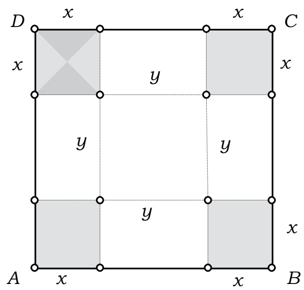
b. Encontrar el área de la región poligonal formada por los triángulos ΔBEA y ΔCDE.

7.173. En la figura:

$\square ABCD$ es un rectángulo de largo 10 y de ancho 5. El rectángulo del centro tiene un área de 18 y cada uno de los rectángulos sombreados de las esquinas tiene área igual a 2. Encontrar a, b, x y y.

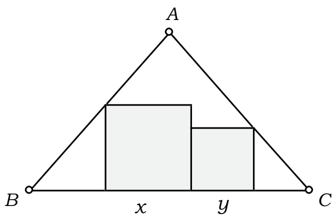


7.174. En la figura:



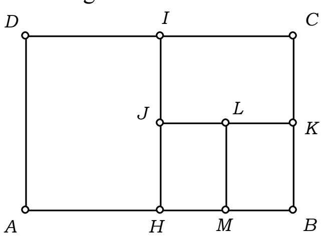
$\square ABCD$ es un rectángulo cuyos lados tienen 10 de longitud. Se quiere dividir este cuadrado, de tal forma que en las cuatro esquinas se tengan cuatro cuadrados de lado x, y en el centro se tenga un cuadrado de lado y. ¿Cuáles son los valores de x y y para que el cuadrado del centro tenga la misma área que los cuatro cuadrados de las esquinas?

7.175[a-167]. En la figura:



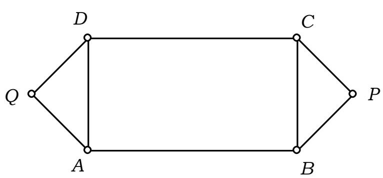
tenemos un triángulo isósceles ΔABC con $AB \cong AC$ y dos cuadrados inscritos en él cuyos lados tienen longitudes x y y. Si uno de los cuadrados se agranda, entonces el otro se achica. Probar que la suma $x + y$ permanece constante al agrandar cualquiera de ellos.

7.176. En la figura:



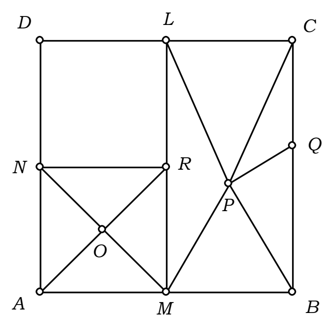
sea $\square ABCD$ un rectángulo de lados a y b. Si H es el punto medio de AB, I es el punto medio de DC, J es el punto medio de HI, K es el punto medio de BC, L es el punto medio de JK y M es el punto medio de HB, calcular el área del rectángulo $\square HMLJ$ en función de a y b.

7.177. En la figura:



tenemos un rectángulo $\square ABCD$ y dos triángulos isósceles congruentes ΔPCB y ΔQAD con $PB \cong PC$ y $QD \cong QA$. Si las alturas de dichos triángulos con respecto a sus vértices P y Q es igual a $\frac{|BC|}{2}$, $|PQ| = 10$ y el área de la región poligonal $ABPCDQ$ es igual a 40, calcular las longitudes de los lados del rectángulo.

7.178. En la figura:

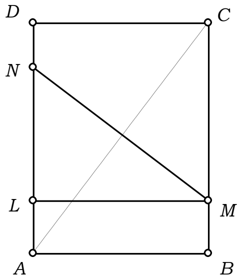


$\square ABCD$ es un cuadrado cuyos lados tienen longitud 2.
Supongamos lo siguiente:

a. M, N y L son los puntos medios de AB, AD y DC
b. $NR \parallel AB$,
c. los puntos M, R y L son colineales,
d. O es el punto de intersección de las diagonales del cuadrado $\square AMRN$,
e. ΔPMB es un triángulo equilátero y
f. $\angle BPQ$ es un ángulo recto.

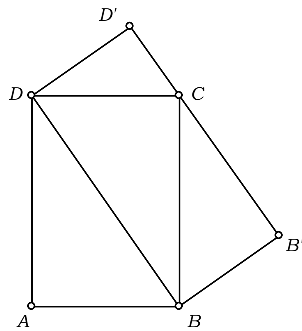
Hallar las áreas de los triángulos ΔOAM, ΔLNR, ΔPMB, ΔQPB, ΔPCL, ΔPLM, y ΔPQC.

7.179. En la figura:



tenemos que $\square ABCD$ es un rectángulo, $MN \perp AC$ y $AB \parallel LM$. Probar que $\dfrac{|AB|}{|AC|} = \dfrac{|LN|}{|NM|}$.

7.180. En la figura:



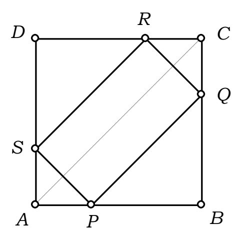
$\square ABCD$ y $\square BB'D'D$ son dos rectángulos. Probar que $are(\square ABCD) = are(\square BB'D'D)$.

7.181. Se tienen dos cuadrados tales que la suma de las longitudes de uno de sus lados es igual a 11 y la diferencia de sus perímetros es 20. Hallar las longitudes de los lados de cada uno de los dos cuadrados.

7.182. Si trazamos rectas paralelas y equidistantes a las diagonales de un cuadrado, probar que dichas rectas intersecan a los lados del mismo en puntos que forman los vértices de un paralelogramo cuyo perímetro es igual a la suma de las longitudes de las diagonales del cuadrado.

7.183. A un rectángulo dado se le corta un cuadrado de cada una de sus esquinas, de tal modo que el área restante es 100. Si los cuadrados juntos forman una región poligonal de área $\frac{1}{3}$ del área total del rectángulo, encontrar el área del rectángulo dado.

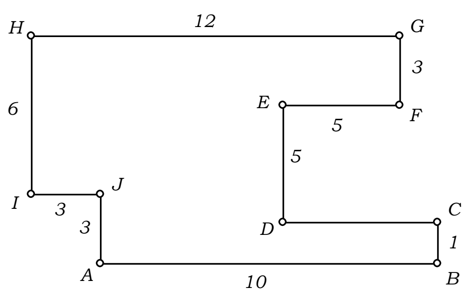
7.184. En la figura:



tenemos que $\square ABCD$ es un cuadrado y $AP \cong AS \cong CQ \cong CR$.
Probar las siguientes afirmaciones:

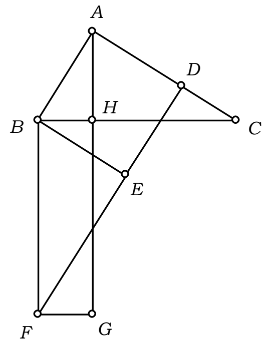
a. $\square PQRS$ es un rectángulo.
b. $per(\square PQRS) = 2|AC|$.
c. $\square ABCD$ y $\square PQRS$ tienen el mismo centro.

7.185. En la figura:



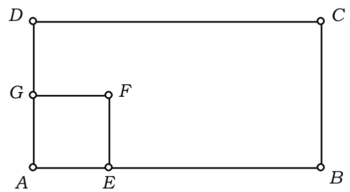
calcular el área de la región poligonal $ABCDEFGHIJ$ con los datos que se proporcionan en la figura.

7.186. En la figura:



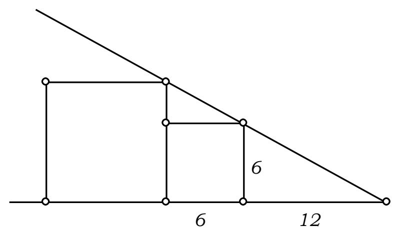
tenemos un triángulo rectángulo ΔABC con ángulo recto $\angle A$. Si $\square EDAB$ es un cuadrado y $\square FGHB$ resulta ser un rectángulo, probar que $are(\square EDAB) = are(\square FGHB)$.

7.187. En la figura:



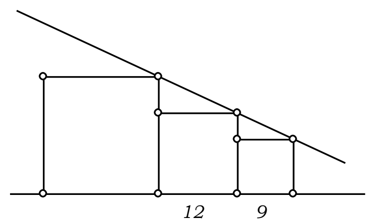
$\square ABCD$ es un rectángulo de área 40 y $\square AEFG$ es un cuadrado. Si $|AB| = 10$ y $|DG| = 2$, encontrar la longitud de un lado del cuadrado.

7.188. En la figura:



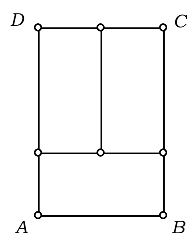
tenemos dos cuadrados. Con la información que se da en la figura: encontrar el área del cuadrado mayor.

7.189. En la figura:



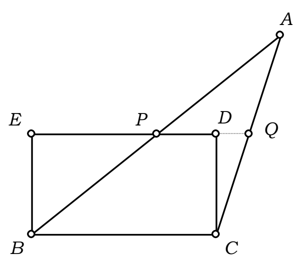
tenemos tres cuadrados. Con la información que se da en la figura: encontrar el área del cuadrado mayor.

7.190. En la figura:



el rectángulo $\square ABCD$ está dividido en tres rectángulos congruentes entre sí. Si el $are(\square ABCD) = 54$, calcular las longitudes de los lados del rectángulo $\square ABCD$.

7.191. En la figura:



tenemos un rectángulo $\square BCDE$ y un triángulo ΔABC cuya altura correspondiente al vértice A duplica al lado CD del rectángulo. Si $\overleftrightarrow{ED}$ corta a AB y AC en los puntos P y Q, respectivamente, calcular

$$\frac{are(\Delta APQ)}{are(\Delta ABC)} \text{ y } \frac{are(\Delta APQ)}{are(BCDE)}.$$

7.192. Probar que el área del cuadrado trazado sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles es igual a cuatro veces el área del triángulo.

7.193. Sobre el lado BC de un cuadrado $\square ABCD$ trazamos exteriormente un triángulo equilátero ΔECB. Si los lados del cuadrado tienen longitud 5 calcular el área del triángulo ΔCDE.

7.194. Sean $\square ABCD$ y $\square A'B'C'D'$ dos cuadrados. Probar que un lado de uno de estos cuadrados es conmensurable con un lado de otro cuadrado si y solo si existe un cuadrado $\square PQRS$ y dos números naturales positivos p y q tales que $are(\square ABCD) = p^2\, are(\square PQRS)$ y $are(\square A'B'C'D') = q^2\, are(\square PQRS)$.

7.195. Si las medidas a y b de los lados de un rectángulo y su área están en progresión geométrica, ¿qué relación hay entre a y b?

7.196. Sean $\square ABCD$ un cuadrado y $E \in AB$ tal que $3|AE| = 2|AB|$. Si $F \in EC$ satisface que $3|EF| = 2|EC|$, encontrar $\dfrac{are(ABCD)}{are(AEFD)}$.

7.197. Sea $\square ABCD$ un rectángulo y supongamos que $E \in AB$, $F \in BC$, $G \in CD$ y $H \in DA$ satisfacen que

$$\frac{|AE|}{|AB|} = \frac{|AH|}{|AD|} = \frac{|CF|}{|CB|} = \frac{|CG|}{|CD|} = k.$$

a. Probar que $\square EFGH$ es un paralelogramo.

b. Probar que si uno varía el valor de k, el perímetro de paralelogramo $\square EFGH$ permanece constante.

c. ¿Bajo qué condiciones es $\square EFGH$ un rectángulo?

7.198. Hallar la longitud de los lados del menor cuadrado que se pueda descomponer en rectángulos cuyas dimensiones sean 9 y 13.

7.199. ¿Es siempre posible formar un cuadrado colocando de alguna manera un cierto número de rectángulos congruentes a un rectángulo arbitrario dado?

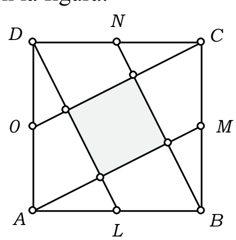
7.200. Se tiene un número k de cuadrados congruentes entre sí.

a. ¿Qué relación se debe cumplir para que con los k cuadrados se forme un rectángulo?

b. ¿Qué relación se debe cumplir para que con los k cuadrados se forme un cuadrado?

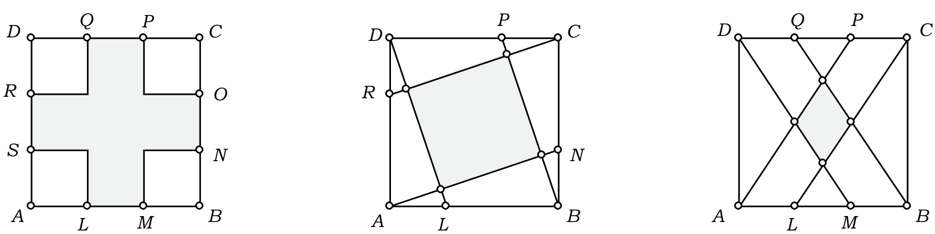
7.201. Dividir un rectángulo en tres rectángulos cuyas áreas estén en la proporción 2:3:4.

7.202. En la figura:



$\square ABCD$ es un cuadrado de lado 10 y L, M, N y O los puntos medios de AB, BC, CD y DA, respectivamente. Calcular el área del cuadrado sombreado.

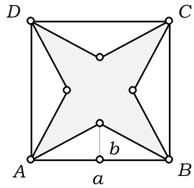
7.203. En la figura: $\square ABCD$ es un cuadrado de lado 4. En cada caso, determinar el área de la región sombreada:



los puntos L y M trisecan a AB, los puntos N y O trisecan a BC, los puntos P y Q trisecan a CD y los puntos R y S trisecan a DA.

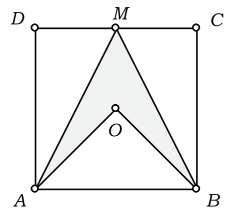
7.204. Dividir un cuadrado en k regiones triangulares equivalentes, en donde $k > 2$ es un número entero.

7.205. En la figura:



$\square ABCD$ es un cuadrado y los cuatro triángulos en su interior son isósceles y congruentes entre sí. Expresar el área de la región sombreada en función de a y b.

7.206. En la figura:



si O es el centro del cuadrado $\square ABCD$ y M es el punto medio de CD, calcular el área de la región sombreada si $|AB| = 2$.

7.207. Sobre cada uno de los lados de un cuadrado y hacia el exterior del mismo, se construye un triángulo isósceles cuya altura es la mitad de la longitud de uno de los lados del cuadrado. Probar que los vértices de estos triángulos isósceles forman un cuadrado cuya área duplica el área del cuadrado original.

7.208. Encontrar un punto sobre una de las diagonales de un cuadrado tal que al unirlo con tres de los vértices del mismo, el cuadrado quede dividido en tres regiones poligonales equivalentes.

7.209. Un rectángulo y un cuadrado tienen perímetro igual a 20. Si el área del rectángulo es igual a $\frac{2}{5}$ del área del cuadrado, calcular las longitudes de los lados del rectángulo.

7.210. Sean $\square ABCD$ un rectángulo y s, $r > 0$ dos números reales positivos. Encontrar una condición necesaria y suficiente para que el nuevo rectángulo de dimensiones $a + r$ y $b - 5$ tenga el área más grande que el rectángulo original.

7.211. Si uno de los lados de un rectángulo se duplica para formar un nuevo rectángulo con la misma área que el original, ¿qué cambios sufrió uno de los lados no congruente al duplicado?

7.212. ¿Cuál es el área de un cuadrado cuya área es la suma de las áreas de cuatro cuadrados congruentes entre sí de lado 3?

7.213. Sean $\square ABCD$ un cuadrado cuyos lados tienen longitud a y $r < a$ un número real positivo. Si a dos lados paralelos del cuadrado les quitamos r, y a los otros dos lados paralelos les agregamos r, ¿el área aumenta o disminuye?

7.214. Si a un rectángulo le sumamos a su largo el ancho, obtenemos un rectángulo, con la misma anchura, cuya área es igual a 400. Pero si a su largo le restamos el ancho, con la misma anchura, obtenemos un rectángulo cuya área es igual a 200. Encontrar las longitudes de los lados del rectángulo original.

7.215. Si a un rectángulo lo cortamos en dos rectángulos congruentes y uno de ellos es semejante al rectángulo original, ¿qué relación hay entre los lados del rectángulo original?

7.216. Cortar en dos un rectángulo de lados 9 y 4, de tal forma que con las dos piezas se pueda formar un cuadrado de lado 6.

7.217. Un rectángulo se puede cubrir con k rectángulos congruentes entre sí de área 40, y también dicho rectángulo se puede cubrir con $k - 1$ rectángulos congruentes entre sí de área 60. Encontrar el área del rectángulo.

7.218. Se tiene un rectángulo cuyas dimensiones son 27 y 45. Si cuadriculamos al rectángulo con rectas paralelas a sus lados, de tal modo que los cuadrados obtenidos sean del máximo tamaño posible, ¿qué dimensiones tienen dichos cuadrados? ¿Cuántos de ellos habrá?

7.219. Un rectángulo cuyos lados tienen longitudes 483 y 699, se puede descomponer en cuadrados congruentes entre sí cuyos lados tienen longitud igual a un número entero positivo. ¿Cuál es el mayor y el menor número de dichos cuadrados con las que se puede cubrir el rectángulo?

7.220. Se tiene un rectángulo de lados 21 y 76, ¿con cuántos rectángulos de lados 1 y 2 se puede cubrir el rectángulo original?

7.221. Sean □(5,*b*,5,*b*) y □(*a*',*b*',*a*',*b*') dos rectángulos semejantes tales que el área del primero es igual a 30 y la longitud de una de las diagonales del segundo es 9. Encontrar el área del segundo rectángulo.
7.222. Sea □(*a*,*b*,*a*,*b*) un rectángulo de área 15. Si la razón entre las áreas de este rectángulo y el rectángulo □($a + 5$,$b + 5$,$a + 5$,$b + 5$) es $\frac{16}{3}$, calcular las dimensiones del rectángulo original.
7.223. Sean □(*a*,*b*,*a*,*b*) un rectángulo y x un número real positivo. Encontrar una condición para que el rectángulo □($a + x$,$b + x$,$a + x$,$b + x$) duplique el área del rectángulo original.
7.224. Sea □(*a*,*b*,*a*,*b*) un rectángulo de área 20. Si *are*(□ (a +1,b +1,a +1,b +1)) = 40, calcular los valores numéricos de a y b.
7.225. Si un segmento de longitud 64 es dividido en dos segmentos, de tal forma que el cuadrado formado por una de dichas divisiones tiene área igual a 9 veces el área del cuadrado formado con el segundo segmento, encontrar las longitudes de ambas divisiones.
7.226. Se tiene un rectángulo que se quiere colorear de la siguiente manera: $\frac{1}{3}$ de su área de color verde, $\frac{1}{4}$ de su área de color azul, $\frac{1}{5}$ de su área de color rojo y la región restante de área 5 de color negro, ¿cuál es el área del rectángulo?
7.227. Se tienen dos rectángulos congruentes. Si a uno de ellos le quitamos una región poligonal de área 100 y al segundo le quitamos una región poligonal de área 40, entonces el área de la primera región poligonal obtenida es la mitad del área de la segunda región poligonal obtenida. Calcular el área de cada uno de los rectángulos.
7.228[Problem 137, π, μ, ε Journal 3 (1959-64), 473]. Se tiene un cuadrado □*ABCD* cuyos lados tienen longitud 1, y para cada número entero positivo $k > 1$, se tiene un cuadrado □$A_k B_k C_k D_k$ cuyos lados tienen longitud $\frac{1}{k}$.

a. Colocar todos los cuadrados pequeños □$A_k B_k C_k D_k$ dentro del cuadrado grande □*ABCD*, de tal forma que no se sobrepongan el uno con el otro.

b. ¿Cuál es el área de la región que cubren todos los cuadrados pequeños?

c. ¿Cuál es el área de la región del cuadrado grande que queda descubierta por los cuadrados pequeños?

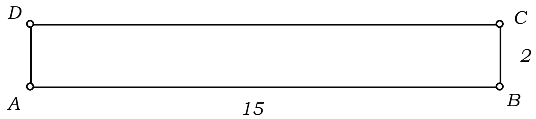
Una solución a este problema se encuentra en el libro [l-182, Problem 61, p. 157 –162].
7.229. Sea □*ABCD* un cuadrado y sean A_1, B_1, C_1 y D_1 los puntos medios de *AB*, *BC*, *CD* y *DA*, respectivamente. De manera inductiva, sean A_{k+1}, B_{k+1}, C_{k+1} y D_{k+1} los puntos medios de $A_k B_k$, $B_k C_k$, $C_k D_k$ y $D_k A_k$, respectivamente. Probar que

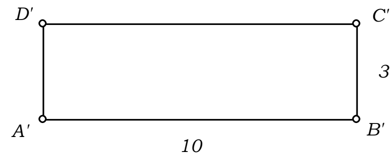
$$are(\square ABCD) = are(\square A_1 B_1 C_1 D_1) + ... + are(\square A_k B_k C_k D_k) + ...$$

7.230. Sea □$A_1 B_1 C_1 D_1$ un cuadrado con área igual a 1. De manera inductiva obtenemos un rectángulo □$A_{k+1} B_{k+1} C_{k+1} D_{k+1}$ tal que $are(\square A_{k+1} B_{k+1} C_{k+1} D_{k+1}) = 2are(\square A_k B_k C_k D_k)$, en donde $k > 1$ es un número entero positivo. Expresar el área del rectángulo □$A_k B_k C_k D_k$ en función de k, para cada número entero positivo k.
7.231. ¿Es posible seccionar un trapecio en tres partes, de tal forma que con dichas partes se pueda formar un cuadrado?
7.232. Dividir un rectángulo cuyo lado mayor es el doble de su lado menor en el menor número posible de partes para poder formar con ellas un cuadrado.
7.233[l-315]. Encontrar dos rectángulos con lados enteros tales que el área del primero sea igual a tres veces el área del segundo, y el perímetro del segundo sea igual a tres veces el perímetro del primero.
7.234. ¿Se puede dividir un cuadrado cualquiera en cuatro regiones poligonales equivalentes, pero no congruentes entre sí?

7.235. Sea $\square ABCD$ un rectángulo cuyos lados tienen longitudes 18 y 6 y $P \in AB$ tal que $|AM| = 8$. Trazando rectas paralelas a las diagonales del rectángulo formamos un paralelogramo teniendo a P como uno de sus vértices. Calcular el área del paralelogramo.

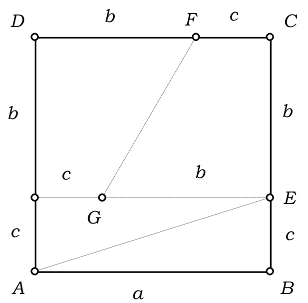
7.236. En la figura:





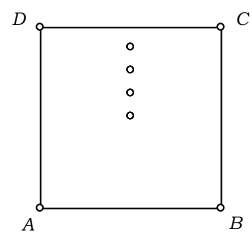
tenemos dos rectángulos $\square ABCD$ y $\square A'B'C'D'$ tales que $|AB| = 15$, $|BC| = 2$, $|A'B'| = 10$ y $|B'C'| = 3$. Dividir el rectángulo $\square A'B'C'D'$ en el menor número de piezas posible, de tal forma que con las piezas obtenidas se pueda cubrir el rectángulo $\square ABCD$ sin que ninguna de las piezas se solape una sobre otra.

7.237. En la figura:



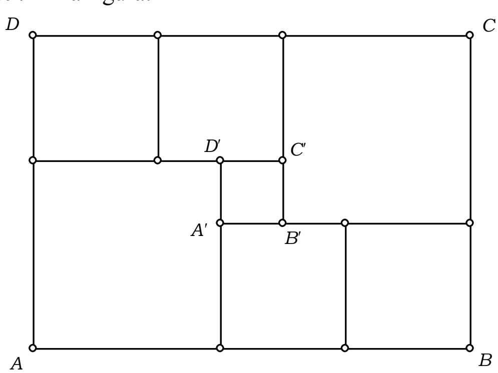
$\square ABCD$ es un cuadrado cuyos lados tienen longitud a y se encuentra dividido como lo muestra la figura. Tenemos que $a = b + c$. Dar una condición necesaria y suficiente, en términos de a, b y c para que los ángulos $\angle AEB$ y $\angle GFC$ sean suplementarios.

7.238. En la figura:



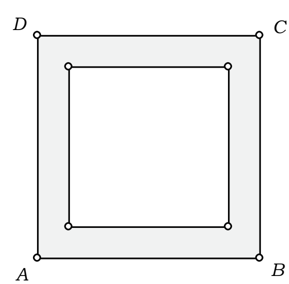
tenemos un cuadrado $\square ABCD$ y cuatro puntos alineados. Dividir el cuadrado en cuatro regiones equivalentes, de tal forma que cada región contenga un solo punto.

7.239. En la figura:



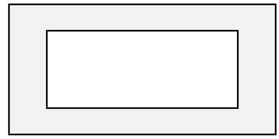
el rectángulo $\square ABCD$ está dividido en cuadrados. Si los lados del cuadrado más pequeño $\square A'B'C'D'$ tienen longitud 3, calcular las longitudes de los lados del rectángulo original y su área.

7.240. En la figura:



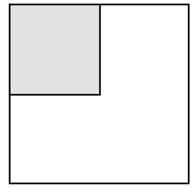
$\square ABCD$ es un cuadrado. Si el ancho de la región sombreada es 1 y su área es igual a 40, calcular la longitud de los lados del cuadrado interior.

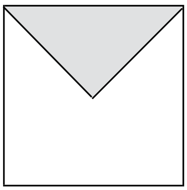
7.241. En la figura:



el rectángulo grande tiene área igual a 44 y el área de la región sombreada es igual a 26. Hallar las longitudes de los lados del rectángulo interior.

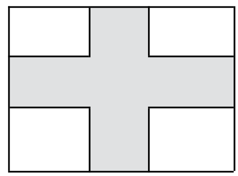
7.242[l-126]. Un señor heredó la cuarta parte de un terreno cuadrado a su viuda. Esta cuarta parte está sombreada en la figura de la derecha. La parte restante tiene que ser dividida entre sus cuatro hijos en partes iguales y que dichas partes tengan la misma forma. ¿Es posible hacerlo?





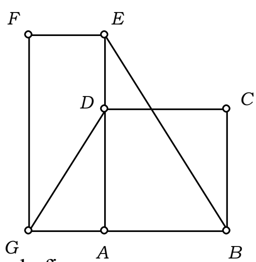
En su libro, D. Wells [l-315] propone el mismo problema, pero con la figura de la izquierda.

7.243[l-126, el estandarte de San Jorge].



A la derecha tenemos el estandarte de san Jorge, ¿cuánto debe medir la anchura de la cruz para que su superficie y la superficie de la parte restante tengan la misma área?

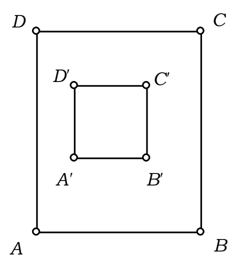
7.244. En la figura:



$\square ABCD$ es un cuadrado y $\square AEFG$ un rectángulo. Si ambos tienen la misma área, probar que

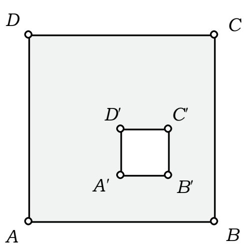
$$\Delta DGA \sim \Delta EAB.$$

7.245. En la figura:



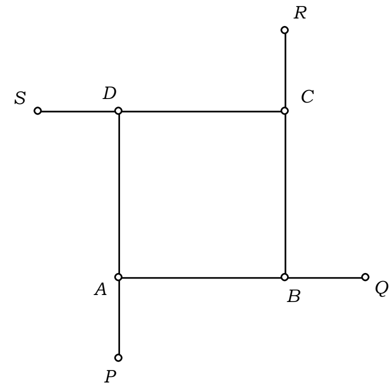
tenemos un rectángulo $\square ABCD$ y un cuadrado $\square A'B'C'D'$ tales que $d(A',AB) = 4$, $d(B',BC) = 3$, $d(C',CD) = 3$ y $d(D',DA) = 2$. Si $are(\square ABCD) = 48$, encontrar las longitudes de los lados del cuadrado.

7.246. En la figura:



se tienen dos cuadrados $\square ABCD$ y $\square A'B'C'D'$ tales que la proyección de A' sobre AB es el punto medio de AB, la proyección de C' sobre BC es el punto medio de BC y $|A'B'| = \dfrac{|AB|}{4}$. Dividir la región poligonal sombreada en cinco regiones congruentes.

7.247. En la figura:



tenemos un cuadrado $\square ABCD$ de lado 2 y $|BQ| = |CR| = |DS| = |AP| = 4$. Sabemos, por el Problema 5.342, que $\square PQRS$ es también un cuadrado. Encontrar el área del cuadrado $\square PQRS$.

7.248[I-225]. Tenemos una hoja de papel rectangular. Con solo tres dobleces de esta hoja, hallar el lado del cuadrado equivalente al rectángulo.

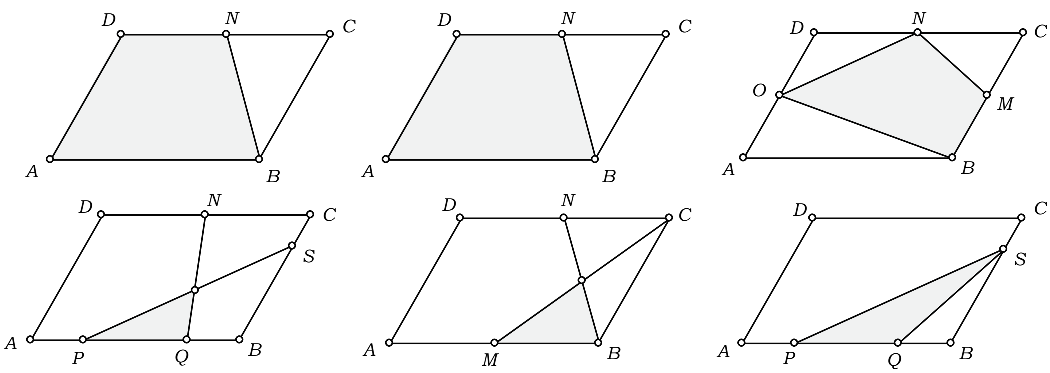
7.249[I-234]. Con cinco triángulos rectángulos congruentes y semejantes al triángulo $\Delta(\angle 90,\angle 30,\angle 60)$, formar un cuadrado permitiendo cortar a solo uno de los triángulos en dos.

7.250. Sea ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$. Si por un punto $P \in BC$ trazamos rectas paralelas a AB y AC, probar que el perímetro del paralelogramo que se forma es igual a $|AB| + |AC|$.

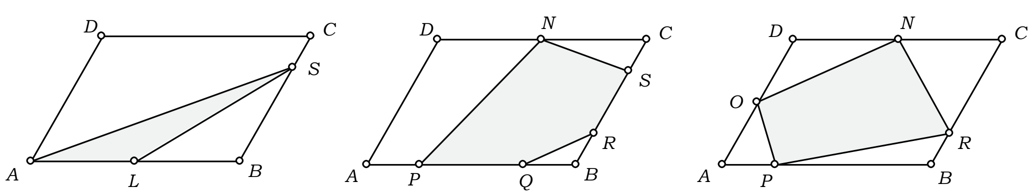
7.251. Probar que dos paralelogramos con un lado y la altura correspondiente congruentes tienen la misma área.

7.252. Dos alturas de un paralelogramo de perímetro 30 tienen longitudes 2 y 4. Calcular las longitudes de los lados del paralelogramo.

7.253. En la figura: tenemos un paralelogramo $\square ABCD$ de área 120. En cada caso, determinar el área de la región sombreada:



L, *M*, *N* y *O* son los puntos medios de *AB*, *BC*, *CD* y *AD*, respectivamente



los puntos *P* y *Q* trisecan a *AB* y los puntos *R* y *S* trisecan a *BC*.

7.254. Probar que dos paralelogramos tienen un lado congruente si y solo si la razón entre sus áreas es igual a la razón de sus alturas correspondientes a los lados en cuestión.

7.255. Teorema del Gnomon. Sean $\square ABCD$ un paralelogramo y $E \in AC$. Por E trazamos rectas paralelas a los lados del paralelogramo que corten a AB, BC, CD y DA en los puntos P, Q, R y S, respectivamente. Probar que los paralelogramos $\square PBQE$ y $\square SERD$ tienen la misma área.
7.256 [I-101]. Sean $\square ABCD$ un paralelogramo y $P \in int(\square ABCD)$. Por P trazamos rectas paralelas a los lados del paralelogramo que corten a AB, BC, CD y DA en los puntos E, F, G y H, respectivamente. Comparar el área del triángulo ΔPAC y las áreas de los paralelogramos $\square PEBF$ y $\square DHPG$.
7.257. Probar que una recta divide a un paralelogramo en dos regiones poligonales con la misma área si y solo si la recta pasa por el punto de intersección de las diagonales de dicho paralelogramo.
7.258. Si los lados de un paralelogramo se conservan y uno de sus ángulos se incrementa desde 0 a 180, ¿cómo cambia el área del paralelogramo con respecto a la variación de la medida de dicho ángulo?
7.259. Si $\square ABCD$ es un paralelogramo y $E \in BC$, probar que $are(\Delta DAE) = are(\Delta EAB) + are(\Delta ECD)$.
7.260. Si $\square ABCD$ es un paralelogramo y $P \in AB$, probar que la suma $are(\Delta ADP) + are(\Delta PCB)$ es una constante que no depende de la elección del punto P sobre el lado AB.

7.261. Sean $\square ABCD$ un paralelogramo, $E \in CD$ y P el punto de intersección de $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{AE}$. Probar las siguientes afirmaciones:

a. $are(\Delta ADP) = \dfrac{1}{2} are(\square ABCD)$.

b. $are(\Delta AEB) = \dfrac{1}{2} are(\square ABCD)$.

c. $are(\Delta BCE) = are(\Delta DEP)$.

7.262. Si $\square ABCD$ es un paralelogramo, $P \in AB$, $Q \in BC$ y R es el punto de intersección de $\overleftrightarrow{PQ}$ y $\overleftrightarrow{DC}$, probar que $are(\square APRD) = are(\square ABCD)$.
7.263. Sea $\square ABCD$ un paralelogramo.

a. Si $P \in AC$, probar que $are(\Delta ABP) = are(\Delta ADP)$.

b. Si $P \in \overleftrightarrow{AB}$ y $Q \in \overleftrightarrow{BC}$, probar que $are(\Delta PCD) = are(\Delta QAD)$.

7.264. Sean $\square ABCD$ un paralelogramo y $P \in int(\square ABCD)$. Probar que los siguientes enunciados:

a. $are(\Delta PAB) + are(\Delta PCD) = are(\Delta PAD) + are(\Delta PBC) = \dfrac{are(ABCD)}{2}$.

b. $are(\Delta PAB) < \dfrac{1}{2} are(\square ABCD)$.

c. La suma $are(\Delta PAB) + are(\Delta PCD)$ es una constante que no depende de la elección del punto P dentro del interior del paralelogramo.

d. Comparar el área del triángulo ΔPAC y la diferencia de las áreas de las regiones poligonales $PABC$ y $PADC$.

e. Comparar el área del triángulo ΔPAC y la diferencia de las áreas de los triángulos ΔPAB y ΔPAD.

7.265. Sean $\square ABCD$ un paralelogramo y $P \in ext(\square ABCD)$, ¿cuál es la relación entre el área del paralelogramo y las áreas de los triángulos ΔPAB y ΔPCD?
7.266. Sean $\square ABCD$ un paralelogramo y $P \in ext(\square ABCD)$, ¿cuál es la relación entre el área del triángulo ΔPAC y las áreas de los triángulos ΔPAB y ΔPAD?
7.267. Si O es el punto de intersección de las diagonales de un paralelogramo $\square ABCD$, probar que

$$are(\Delta ABO) = are(\Delta BCO) = are(\Delta CDO) = are(\Delta DAO) = \frac{1}{4} are(\square ABCD).$$

¿Es cierto este resultado para cualquier cuadrilátero?
7.268. Sea $\square ABCD$ un paralelogramo y M y N los puntos medios de AB y BC, respectivamente. Si P es el punto de intersección de AC y DN, y Q es el punto de intersección de AC y DM, probar que

$$24 are(\square MNPQ) = 5 are(\square ABCD).$$

7.269. Sean $\square ABCD$ un paralelogramo, M el punto medio de AB y N el punto medio de BC. Encontrar las fracciones $\dfrac{are(\Delta MBN)}{are(ABCD)}$ y $\dfrac{are(\Delta MDN)}{are(ABCD)}$.

7.270. Por cada uno de los vértices de un paralelogramo $\square ABCD$ trazamos rectas paralelas a sus diagonales formando un nuevo paralelogramo $\square PQRS$. Probar que $are(\Delta BRS) = are(\Delta DPQ) = are(\square ABCD)$.

7.271. Sean $\square ABCD$ un paralelogramo y $E \in BC$. Por E trazamos una recta paralela a AB que corte a AC en M y a AD en F. Probar que $are(\Delta AEF) = are(\Delta AMD)$.

7.272. Sean $\square ABCD$ un paralelogramo, y $T \in AC$. Por el punto T trazamos rectas paralelas a los lados del paralelogramo a los cuales corta en los puntos $P \in AB$, $Q \in BC$, $R \in CD$ y $S \in DA$. Probar las siguientes afirmaciones:

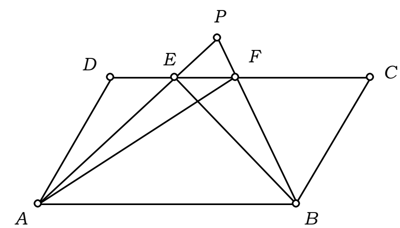
a. $are(\Delta TPQ) = are(\Delta TRS)$.
b. $PS \parallel QR$.
c. $PS \parallel BD$.
d. $are(\Delta CRQ) + are(\Delta CSP) = \dfrac{are(ABCD)}{2}$.

7.273. Sean $\square ABCD$ y $\square AEFG$ dos paralelogramos con el mismo ángulo $\angle A$ y $E \in AB$. Si $are(\square ABCD) = are(\square AEFG)$, probar que $DE \parallel FC$.

7.274. Sean $\square ABCD$ y $\square AEFG$ dos paralelogramos. Si $E \in BC$ y $D \in FG$, probar que los dos paralelogramos tienen la misma área.

7.275. Tenemos un paralelogramo $\square ABCD$ y los puntos medios M y N de BC y CD, respectivamente. Sean E y F los puntos de intersección de $\overleftrightarrow{AM}$ y $\overleftrightarrow{DC}$ y $\overleftrightarrow{AN}$ y $\overleftrightarrow{BC}$, respectivamente. Probar que el área del triángulo ΔAEF es $1\frac{1}{2}$ del área del paralelogramo original.

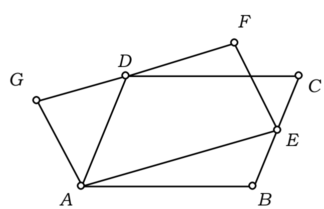
7.276. En la figura:



$\square ABCD$ es un paralelogramo. Probar que $are(\Delta AFP) = are(\Delta BPE)$.

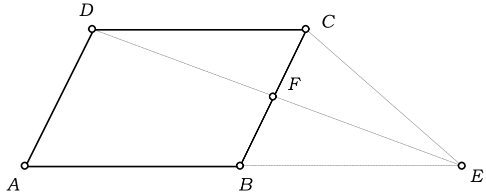
7.277. Unimos un punto fijo fuera de un paralelogramo con cada uno de los vértices del mismo. Probar que el área del triángulo que tiene al punto fijo como uno de sus vértices y a una de las diagonales del paralelogramo como uno de sus lados, es igual a la suma o a la diferencia de las áreas de los triángulos que tienen al punto fijo como uno de sus vértices, y uno de sus lados es uno de los lados del paralelogramo que tienen un punto en común con la diagonal en cuestión.

7.278. En la figura:



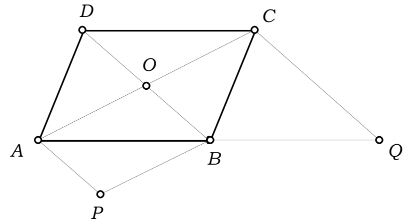
tenemos dos paralelogramos $\square ABCD$ y $\square AEFG$. Probar que $are(\square ABCD) = are(\square AEFG)$.

7.279. En la figura:



$\square ABCD$ es un paralelogramo y supongamos que D, E y F son colineales. Probar que los triángulos ΔABF y ΔCFE son equivalentes.

7.280. En la figura:



□*ABCD* es un paralelogramo, *CQ* ∥ *DB*, *DB* ∥*AP* y *AC* ∥*PB*.
Probar que *are*(□*APBD*) = *are*(□*OBQC*).

7.281. Sea □*ABCD* un paralelogramo tal que |*AB*| = 5, |*BC*| = 2 y la altura del vértice *D* con respecto al lado *AB* tiene longitud 1. Calcular la longitud de la altura del vértice *A* con respecto al lado *BC*.

7.282. Sea □*ABCD* un paralelogramo tal que |*AB*| = 8 y |*AD*| = 4. Si su altura del vértice *D* con respecto al lado *AB* tiene longitud 2, encontrar la longitud de la altura de *D* con respecto a *BC*.

7.283. Sean □*ABCD* un paralelogramo, y $P \in AC$. Si $\dfrac{|AP|}{|PC|} = p$, probar que

$$are(\Delta APB) = \frac{p}{2(p+1)}\, are(\square ABCD).$$

7.284. Si □*ABCD* es un paralelogramo y $E \in AB$ y $F \in DC$ satisfacen que $p = \dfrac{|BE|}{|EA|} = \dfrac{|DF|}{|FC|}$, probar que

$$\frac{are(ABCD)}{are(AECF)} = 1 + p.$$

7.285. Sean □*ABCD* un paralelogramo, $E \in AB$ y $F \in BC$. Si |*AE*| = 3, |*EB*| = 4, |*BF*| = 5 y |*FC*| = 6, calcular

$$\frac{are(EBFD)}{are(ABCD)}.$$

7.286. Si □*ABCD* es un paralelogramo y $P \in AB$ y $Q \in CB$ son tales que 2|*PB*| = |*AP*| y 2|*QC*| = |*QB*|, encontrar

$$\frac{are(APQCD)}{are(ABCD)}.$$

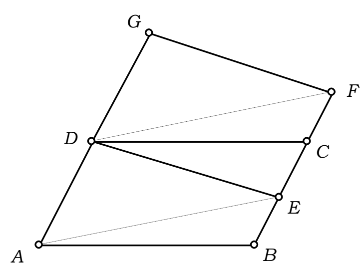
7.287. Sean □*ABCD* un paralelogramo y *O* el punto de intersección de sus diagonales. Si $|AO| = \dfrac{i}{j}|OC|$, en donde *i* y *j* son números enteros positivos, expresar $\dfrac{are(\Delta ACB)}{are(\Delta AOB)}$, $\dfrac{are(\Delta AOD)}{are(\Delta AOB)}$ y $\dfrac{are(\Delta ODC)}{are(\Delta AOD)}$ en función de los números *i* y *j*.

7.288. Sean □*ABCD* un paralelogramo; *M* el punto medio de *AB*; $P \in BC$ tales que $\dfrac{|BP|}{|PC|} = \dfrac{1}{2}$; *N* el punto medio de *DC*; y $Q \in DA$ tal que $\dfrac{|DQ|}{|QA|} = \dfrac{1}{2}$.

a. Probar que $\Delta AMQ \sim \Delta CNP$.

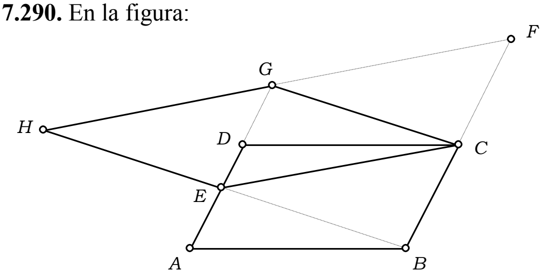
b. Calcular $\dfrac{are(ABCD)}{are(MPNQ)}$.

7.289. En la figura:



tenemos que □*ABCD* es un paralelogramo y $E \in BC$ es arbitrario.
Si *DF* ∥ *AE* y *DE* ∥ *GF*, probar que
are(□*ABCD*) = *are*(□*AEFD*) = *are*(□*DEFG*).

7.290. En la figura:

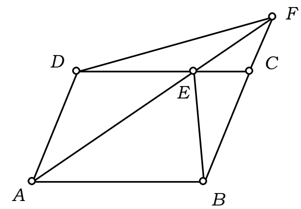


tenemos que $\square ABCD$ es un paralelogramo y $E \in AD$ es un punto cualquiera. Supongamos que $BE \parallel CG$ y $EC \parallel GF$, probar que

a. $\square ECGH$ es un paralelogramo y

b. $are(\square ABCD) = are(\square ECGH)$.

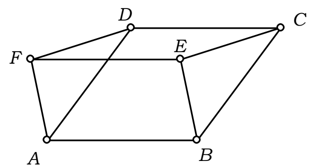
7.291. En la figura:



tenemos un paralelogramo $\square ABCD$ y los puntos B, C y F son colineales. Probar que

$are(\Delta AFD) = are(\Delta EAB)$ y $are(\Delta DEF) = are(\Delta EBC)$.

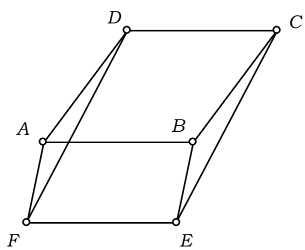
7.292. En la figura:



tenemos dos paralelogramos $\square ABCD$ y $\square ABEF$. Probar que

$are(\square FECD) = are(\square ABCD) - are(\square ABEF)$.

7.293. En la figura:



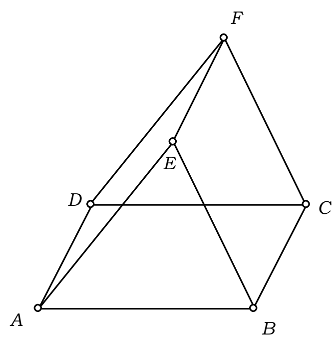
tenemos dos paralelogramos $\square ABCD$ y $\square FEBA$. Probar que

$are(\square FECD) = are(\square ABCD) + are(\square ABEF)$.

Si $\overleftrightarrow{AB}$ corta a EC en su punto medio, probar que

$are(\square ABCD) = are(\square FEBA)$.

7.294. En la figura:



tenemos tres paralelogramos $\square ABCD$, $\square BCFE$ y $\square AEFD$. Probar que $are(\square ABCD) = are(\square BCFE) + are(\square AEFD)$.

7.295. Probar que el área de un trapecio es igual al producto de la longitud de uno de sus lados no paralelos por la longitud de segmento cuyos puntos extremos son el punto medio del segundo lado no paralelo y la proyección de este esté sobre la recta que contiene al primer lado.

7.296. Sean $\square ABCD$ un trapecio con $AB \parallel DC$ y O el punto de intersección de sus diagonales. Probar que

a. $are(\Delta AOD) = are(\Delta BOC)$ y

b. dar un ejemplo en donde $are(\Delta AOB) > are(\Delta DOC)$.

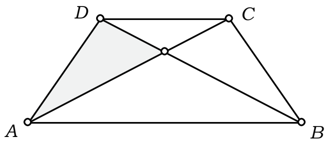
7.297. Probar que la recta que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio divide a este en dos trapecios equivalentes.

7.298. Sean $\square ABCD$ un trapecio con $AB \parallel CD$ y M el punto medio de BC. Probar que

$$are(\Delta DAM) = \frac{are(ABCD)}{2}.$$

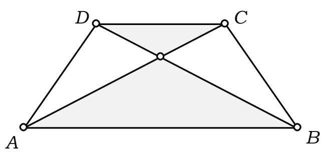
7.299. Sean $\square ABCD$ un trapecio tal que $AB \parallel CD$ y O el punto de intersección de sus diagonales. Si $are(\Delta OAB) = 9$ y $are(\Delta OCD) = 4$, encontrar el área de los triángulo ΔOBC y ΔODA.

7.300. En la figura:



$\square ABCD$ es un trapecio isósceles con $AB \parallel CD$. Si $|AB| = 12$, $|CD| = 5$ y la altura correspondiente a los lados paralelos es 4, calcular el área del triángulo sombreado.

7.301(MACK-SP). En la figura:



$\square ABCD$ es un trapecio con $AB \parallel CD$. Si $|AB| = 9$, $|CD| = 4$ y la altura correspondiente a los lados paralelos es 2, hallar la diferencia entre las alturas de los triángulos sombreados.

7.302. Sean $\square ABCD$ un trapecio con $AB \parallel DC$ y M y N los puntos medios de AB y CD, respectivamente. Probar que $are(\Delta APD) = are(\Delta BPC)$, para todo punto $P \in MN$.

7.303. Sean $\square ABCD$ un trapecio con $AB \parallel DC$ y M y N los puntos medios de BC y AD, respectivamente. Probar que $are(\square ABCD) = d(M, \overleftrightarrow{AD})b = d(N, \overleftrightarrow{BC})d$.

7.304. Sea $\square ABCD$ un trapecio tal que $AB \parallel CD$, $|AB| = 30$ y $|CD| = 10$. Si P es el punto de intersección de $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{AD}$ y $are(\Delta PDC) = 25$, encontrar el área del trapecio $\square ABCD$.

7.305. Sea $\square ABCD$ un trapecio con $AB \parallel CD$ y $CD < AB$. Trazamos una recta paralela a AD que pase por el punto medio de BC y corte a $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{DC}$ en los puntos E y F, respectivamente. Probar que

$$are(\square ABCD) = are(\square AEFD).$$

7.306 [I-288]. Sean $\square ABCD$ un trapecio y O el punto de intersección de sus diagonales. Probar que

$$are(\square ABCD) = \left(\sqrt{are(\Delta OAB)} + \sqrt{are(\Delta OCD)}\right)^2.$$

7.307. Sea $\square ABCD$ un trapecio tal que $AB \parallel CD$. Sean I el punto de intersección de las diagonales, J el punto de intersección de BC y AD, M el punto medio de AD, y H la proyección de M sobre $\overleftrightarrow{BC}$. Probar las siguientes afirmaciones:

a. Los triángulos ΔIAD y ΔIBC son equivalentes.
b. Los triángulos ΔJAC y ΔJBD son equivalentes.
c. El área del triángulo ΔJAC es la media geométrica de las áreas de los triángulos ΔJAB y ΔJCD.
d. Expresar el área del trapecio en función de $|BC|$ y $|MH|$.

7.308. Si $\square ABCD$ es un trapecio isósceles con $AB \parallel CD$ y $m(\angle A) = 45$, probar que $are(\square ABCD) = \dfrac{a^2 - c^2}{4}$.

7.309. Si $\square ABCD$ es un trapecio rectangular con $AB \parallel CD$ y $m(\angle A) = 45$, probar que $are(\square ABCD) = \dfrac{a^2 - c^2}{2}$.

7.310. Sea $\square ABCD$ un trapecio rectangular en $\angle A$ tal que $AB \parallel CD$. Si $AB > CD$, $|BC| = 6$ y las longitudes $|CD|$, $|DA|$ y $|AB|$ están en progresión aritmética de razón 2, calcular el área del trapecio.

7.311. Sean □*ABCD* un trapecio con *AB* || *CD*, *E* el punto de intersección de sus lados no paralelos y *h* la altura con respecto a sus lados paralelos. Probar que $are(\Delta EDC) = \dfrac{d^2h}{2|a-d|}$ y $are(\Delta EDC) = \dfrac{a^2h}{2|a-d|}$.

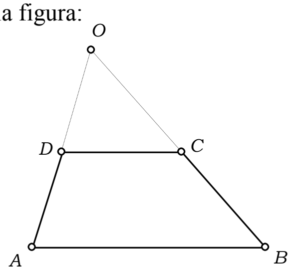
7.312. Sea □*ABCD* un trapecio con *AB* || *CD*. Por *D* trazamos una recta paralela a $\overleftrightarrow{BC}$ que corte a $\overleftrightarrow{AB}$ en el punto *E*. Si *M* es el punto medio de *AE*, probar que $are(\Delta CMB) = \dfrac{are(ABCD)}{2}$.

7.313. El área de un cierto trapecio es igual al área del rectángulo cuyos lados tienen longitud igual a la longitud de los lados paralelos del trapecio. Si triplicamos la longitud del lado paralelo menor, vemos que es igual a la suma de la longitud del lado paralelo mayor más 3 veces la longitud de la altura correspondiente a dichos lados. Si dicha altura tiene longitud 20, calcular las longitudes de los lados paralelos del trapecio.

7.314. Sea □*ABCD* un trapecio con *AB* || *DC*. Si $P \in AB$ y $Q \in BC$ satisfacen que *PQ* || *AC*, probar que

$$are(\Delta ADP) = are(\Delta AQC).$$

7.315. En la figura:



□*ABCD* es un trapecio con *AB* || *DC*, |*DC*| = 10, |*AB*| = 40 y *O* es el punto de intersección de las rectas que contienen los lados no paralelos. Si la altura del triángulo Δ*OAB* con respecto a *AB* es 16, encontrar la altura del trapecio con respecto a sus lados paralelos y su área.

7.316. Sean □*ABCD* un trapecio con *AB* || *DC* y *O* el punto de intersección de sus diagonales. Si $\dfrac{|DO|}{|OB|} = \dfrac{3}{5}$, calcular $\dfrac{|OA|}{|AC|}$, $\dfrac{are(\Delta DOC)}{are(\Delta AOD)}$ y $\dfrac{are(\Delta DOC)}{are(\Delta AOB)}$.

7.317. Sean □*ABCD* un trapecio con *AB* || *DC* y *O* el punto de intersección de sus diagonales. Si $\dfrac{|DO|}{|OB|} = \dfrac{4}{3}$,

a. probar que $\dfrac{|OC|}{|OA|} = \dfrac{are(\Delta DOC)}{are(\Delta AOB)}$ y

b. calcular $\dfrac{are(\Delta DOC)}{are(\Delta AOB)}$.

7.318. Tenemos un trapecio isósceles □*ABCD* tal que *a* = 10, *b* = 15 y *c* = 4. Si *O* es el punto de intersección de sus diagonales, calcular el área del triángulo Δ*OAB*.

7.319. De un cierto trapecio sabemos que sus lados paralelos tienen longitudes 10 y 3 y la altura correspondiente tiene longitud 4. Calcular el área del cuadrilátero formado por los puntos medios de los lados del trapecio.

7.320. Si □*ABCD* es un cuadrado y □*ABEF* es un rombo, ¿quién de los dos cuadriláteros tiene mayor área?

7.321. Probar que entre todos los paralelogramos cuyas diagonales son constantes, el rombo es el de mayor área.

7.322. Si una diagonal de un rombo excede a la otra por 4 y su área es igual a 80, encontrar las longitudes de sus diagonales.

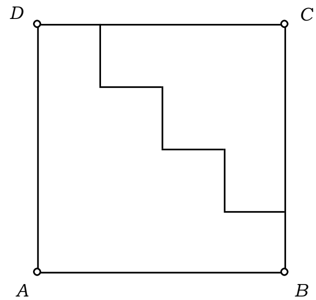
7.323. Probar que en todo rombo □*ABCD* se cumple la identidad

$$\frac{e+f}{2} = \sqrt{a^2 + are(ABCD)}.$$

7.324. Sean *e* y *f* las diagonales de un rombo que tiene la misma área que un cuadrado de lado *a*. Probar que *a* es la media geométrica de $\dfrac{e}{2}$ y *f*.

7.325. Un rombo es equivalente a un cuadrado de lado a. Si una diagonal del rombo es el doble que la otra, expresar el lado del rombo en función de a.
7.326. ¿Cuál es el área de un rombo cuyas diagonales duplican las diagonales de otro rombo cuya área es 90?
7.327. Si un rombo tiene área igual a 100 y una de sus diagonales tiene longitud 12, encontrar la longitud de la segunda diagonal del rombo.
7.328 [I-288]. Si el área de un rombo es de 4 y la suma de las longitudes de sus diagonales es igual a 5, encontrar las longitudes de los lados del rombo.
7. 329. En la figura:

tenemos un cuadrado $\square ABCD$ cuyos lados tienen longitud a y una línea quebrada que une los vértices B y D formada por segmentos congruentes. Con solo ver el dibujo, probar que el perímetro de la línea quebrada es el igual $2a$.

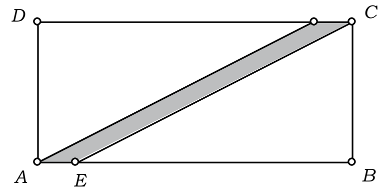


7.330. De una hoja rectangular de papel de 85 cm de largo por 1 m de ancho, ¿cuántos rectángulos de 5 cm por 3 cm se pueden obtener?
7.331. Si recortamos una tira de 2 cm de ancho en cada orilla de una hoja de papel rectangular, obtenemos una hoja rectangular cuya superficie es la mitad de la hoja original. Pero si solo recortamos una tira del mismo ancho en solo dos lados opuestos de la hoja, obtenemos un cuadrado. Encontrar las dimensiones de la hoja de papel original.
7.332. De una hoja rectangular de cartulina de 80 cm de largo por 40 cm de ancho, recortamos un cuadrado de 20 cm de lado y un trapecio cuyos lados paralelos tienen longitudes 60 cm y 20 cm y la altura respectiva tiene longitud 30 cm, ¿cuál es la superficie de la cartulina restante?
7.333. Una hoja de papel rectangular se ha cortado en 50 cuadrados cuyos lados tienen longitud de 1 cm. Si la razón entre los lados de la hoja es igual a 2, encontrar las dimensiones de los lados de la hoja.
7.334 [I-279]. Cortar en tres pedazos una tira de papel de forma rectangular de tal manera que el área de una de las piezas sea igual a la diferencia de las áreas de las dos piezas restantes.
7.335. Si al plegar consecutivamente un pliego de cartulina rectangular por la mitad 10 veces, obtenemos un rectángulo cuyos lados miden 4 cm y 2 cm, hallar las dimensiones del pliego de cartulina.
7.336. Se tiene una cuerda que puede rodear un cierto cuadrado. Si a dicha cuerda le agregamos 20 m más, entonces podemos rodear un cuadrado cuya área es 225 m^2 más que el área del primer cuadrado, ¿cuál es el largo de la cuerda?
7.337. Si una colcha rectangular de ancho a y de largo b se encoge 10% a lo ancho y 20% a lo largo, encontrar el porcentaje perdido en el área de la colcha.
7.338. ¿Es posible cubrir un tablero de ajedrez con fichas de dominó cuyo tamaño sea igual a dos cuadros del tablero? Si al tablero de ajedrez le quitamos dos cuadrados blancos de las esquinas, ¿es posible cubrir al tablero restante con fichas de dominó?
7.339. Si las 7 piezas de un tangram chino forman un cuadrado de 20 cm de lado, calcular el área de cada una de las piezas del tangram.
7.340. Con las piezas de un tangram chino de 20 cm de lado formar rectángulos.
a. ¿Cuántos rectángulos puedes formar?
b. Calcular el perímetro del rectángulo más grande.
c. Calcular el área del rectángulo más pequeño.
7.341. ¿Puedes combinar todas las piezas de dos tangrams chinos para formar un cuadrado?

7.342. Se tiene un cuadro rectangular de 3 m de largo por 2 m de ancho, al cual se le quiere poner un marco cuya superficie sea igual a 1 m^2 y que tenga una medida fija a todo su largo. ¿Cuáles son las posibles medidas del marco?
7.343. Una alfombra cuadrada cubre el centro de una habitación y cada uno de sus lados se separa 20 cm de la pared. Si la alfombra cubre la mitad del piso de la habitación, encontrar las dimensiones de la alfombra.
7.344. Se tienen dos alfombras rectangulares con la misma superficie. Una de ellas cubre el ancho de una habitación pero a lo largo cada lado se separa 20 cm de la pared, la otra se separa 15 cm a lo largo y 10 cm a lo ancho de las paredes de dicha habitación. ¿Cuál es la relación entre las dimensiones del piso de la habitación?
7.345. Se tiene una habitación rectangular de 4 m de largo por 9 m de ancho. Se quiere cubrir el piso de dicha habitación, con mosaicos cuadrados de 60 cm de lado, ¿cuántos mosaicos se necesitarán?
7.346. Se tiene una habitación con un piso cuadrado. Se quiere cubrir dicho piso con losetas cuadradas de las mismas dimensiones, ¿para qué números enteros k se puede cubrir el piso con exactamente k losetas?
7.347[o-1]. El piso de una habitación se puede cubrir con k losetas cuadradas de las mismas dimensiones. Si cubrimos el piso con losetas cuadradas más pequeñas, se necesitarían 76 más. Sabiendo que las dimensiones de las losetas son números enteros positivos, encontrar el valor de k.
7.348[o-1]. El piso de una habitación está cubierto con losetas cuadradas de las mismas dimensiones. El largo de la habitación es de i losetas y el ancho de j losetas. ¿Cuántas formas puede tener el piso de la habitación si la mitad de las losetas están colocadas en las orillas del piso?
7.349. ¿Cuántas tablas de 30 cm de largo por 2.40 m de ancho se necesitan para entarimar una habitación de 10 m de largo por 5 m de ancho?
7.350. El piso de una habitación requirió de 300 mosaicos de 25 cm de largo por 50 cm de ancho. Si al colocar 70 mosaicos perdieron $\frac{1}{4}$ de su superficie y otros 30 perdieron la mitad, calcular la superficie del suelo de la habitación.
7.351. Se tiene un terreno rectangular de 20 m de largo por 30 m de ancho. En el centro de este terreno se quiere construir una piscina rectangular que tenga 200 m^2 de superficie, de tal modo que cada lado de la piscina sea paralelo a un lado del terreno y que los límites de la piscina estén a la misma distancia de los límites del terreno. ¿Cuáles son las dimensiones del largo y del ancho de la piscina?
7.352. Cuatro ciudades forman un cuadrilátero y solo hay una carretera que las une. La carretera de la ciudad A a la ciudad B es de 70 km, la de la ciudad B a la ciudad C es de 100 km y la de la ciudad A a la ciudad D es de 45 km. Si un automóvil tarda 4 horas a una velocidad constante de 80 km por hora en salir de una ciudad y pasar por cada una de las otras y regresar a la misma ciudad donde partió, ¿cuánto mide la carretera que va de la ciudad D a la ciudad C?
7.353. Dos jardines cubren una superficie rectangular de 500 m^2. Si al primero le quitamos una superficie de 150 m^2 y al segundo le agregamos una superficie de 150 m^2, entonces las superficies obtenidas son iguales. Hallar las áreas de cada uno de los dos jardines.
7.354. Un jardín cuadrado está cercado por un muro de 40 cm de espesor. Si el área determinada por el espesor del muro es de 100 m^2, calcular las dimensiones del jardín.
7.355. Si un patio cuadrado tiene en cada una de sus cuatro orillas un pasillo de 1 metro de ancho y en el centro un jardín cuya área es 20 m^2 más grande que el área total del pasillo, encontrar las áreas del patio, del jardín y del pasillo.
7.356. Se tiene un jardín rectangular cuyo ancho es $\frac{3}{2}$ su largo. Dicho jardín está rodeado por un sendero de 1.50 m de ancho. Si el interior rectangular del jardín tiene 300 m de perímetro, calcular las superficies del jardín y su interior.
7.357. Un albañil tiene que medir un terreno rectangular de 7 m por 9 m. Por descuido olvidó su cinta métrica, pero dispone de una cuerda larga y sabe que una habitación mide 5 m por 3 m. ¿Es posible que el albañil logre medir dicho terreno?

7.358. Se tiene un terreno rectangular bardeado, excepto la puerta de entrada, con una maya de 214 m de largo y en uno de los lados menores del terreno hay una puerta de 4 m de ancho. Si el lado más grande mide 10 m más que el doble del lado más pequeño, encontrar las dimensiones de los lados del terreno.

7.359. Un campesino tiene un terreno rectangular de 700m de largo por 300m de ancho. Por dicho terreno, pasará una carretera tal y como se indica en la figura. Si $|AE| = 6$m y el terreno tiene un costo de \$50,000 pesos, ¿cuánto dinero recibirá el campesino por el terreno cedido?



7.360. Se desea dividir un terreno rectangular cuyo perímetro es 140 m en tres terrenos rectangulares. Se quiere que el ancho del más grande sea el triple del ancho del más pequeño, y que el ancho del siguiente sea el doble del ancho del más pequeño. Si el terreno tiene 10 m de largo, encontrar las dimensiones de cada uno de los terrenos.

7.361. El largo de un terreno rectangular es de 22 m. Si a su largo y ancho le sumamos 6 m, obtenemos una superficie de 336 m^2. Calcular las dimensiones del terreno.

7.362. Un terreno rectangular tiene una superficie de 700 m^2. Si al ancho le quitamos 10 m, obtenemos una nueva superficie de 500 m^2. Calcular las dimensiones del terreno.

7.363. Un terreno rectangular tiene una superficie de 500 m^2. Si a su largo le aumentan 10 m, obtenemos una nueva superficie de 600 m^2. Calcular las dimensiones del terreno.

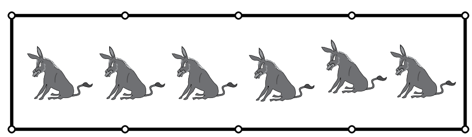
7.364. Un señor tiene un terreno rectangular de 100 m de largo por 80 m de ancho. Le quiere dejar a su hijo, dentro de esta propiedad, un terreno que represente el 20 % de todo el terreno, ¿cuál es la superficie del terreno que le quiere dejar a su hijo?

7.365. El largo de un terreno es 3 veces más grande que su ancho. Si el terreno está bardeado con una malla de 1.50 m de altura y la superficie de la malla es igual a 300 m^2, encontrar las dimensiones del terreno.

7.366. Un terreno de forma triangular está representado por el triángulo ΔABC en una hoja de papel cuyas dimensiones son 6 cm, 4 cm y 5 cm. Si la escala es 1 por 100 m, ¿cuál es la superficie del terreno triangular?

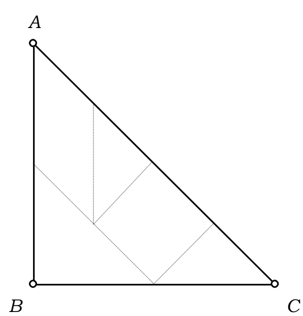
7.367. Una persona tiene una piscina cuadrada con un árbol grande en cada esquina. El propietario quiere duplicar el tamaño de su piscina sin tumbar los árboles, ¿crees que el propietario pueda hacerlo?

7.368. Un granjero tiene un corral rectangular cercado por 10 piezas de forma rectángular del mismo tamaño. En su corral tiene a seis burros que caben justamente. El granjero ha comprado otros seis burros y necesita agrandar su corral, ¿cuál es el mínimo número de piezas que necesita para duplicar su corral?



7.369. En la figura:

tenemos un triángulo rectángulo isósceles ΔABC. Copiarlo en una hoja de papel y recortarlo por las líneas punteadas. Con las piezas obtenidas, formar un cuadrado.



7.370 [I-55]. Sea □$ABCD$ un cuadrilátero. Si $A' \in AB$, $B' \in BC$, $C' \in CD$ y $D' \in DA$ satisfacen la relación

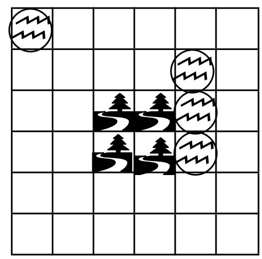
$$x = \frac{|AA'|}{|AB|} = \frac{|BB'|}{|BC|} = \frac{|CC'|}{|CD|} = \frac{|DD'|}{|DA|},$$

probar que $\dfrac{are(A'B'C'D')}{are(ABCD)} = 2x^2 - 2x + 1$.

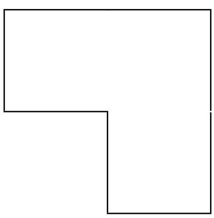
7.371. Mediante una figura geométrica ilustrar la veracidad de cada una de las siguientes identidades algebraicas:

a. $x(a + b + c + d) = xa + xb + xc + xd$, b. $(a + b)^2 = a(a + b) + b(a + b)$, c. $(ax)^2 = a^2x^2$,
d. $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$, e. $(a + b)(2a + b) = 2a^2 + 3ab + b^2$, f. $(a - b)(2a - b) = 2a^2 - 3ab + b^2$,
g. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ y h. $(a + b)(x + y + z) = ax + ay + az + bx + by + bz$.

7.372. Luis compró un terreno cuadrado con cuatro árboles y cuatro lagos dispuestos como lo muestra la figura. Pero Luis quiere dividir su terreno en cuatro partes iguales, de tal forma que cada una de las partes tenga un árbol y un lago. ¿Es posible hacer dicha división?



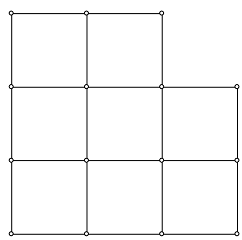
7.373. En la figura:



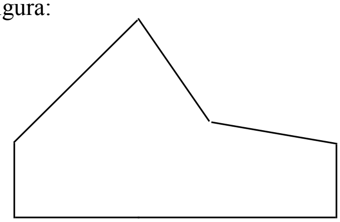
dividir la figura de la izquierda en cuatro regiones congruentes.

7.374. En la figura:

hacer dos cortes en la figura de la derecha, de tal forma que se tengan cuatro piezas y con ellas se pueda formar un cuadrado.

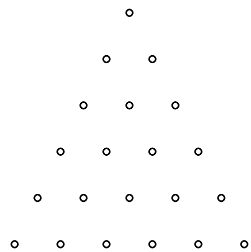


7.375. En la figura:



hacer un solo corte a la figura: de tal forma que con las piezas que resulten se pueda formar un cuadrado.

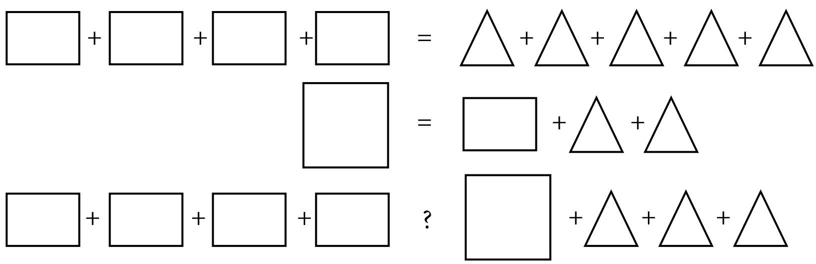
7.376. En la figura:



un camino del punto de la parte superior del triángulo hacia un punto de la parte inferior es una trayectoria que va conectando un punto de una de las filas con un punto de la fila de abajo. ¿Cuántos caminos hay que conecten el punto de la parte superior del triángulo con cada uno de los puntos de la parte inferior?

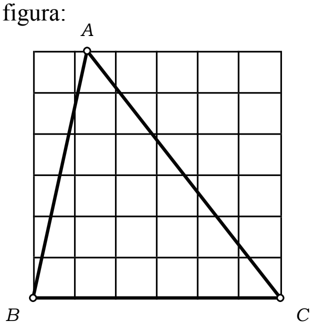
7.377 [I-271]. En un desfile militar, una banda estaba tocando en la ceremonia militar. Al principio los músicos formaron un cuadrado, es decir, había el mismo número de filas que de columnas. De repente cambiaron la formación, formando un rectángulo, el cual tenía 5 columnas más que la formación anterior. ¿Cuántos músicos había?

7.378. En la figura:



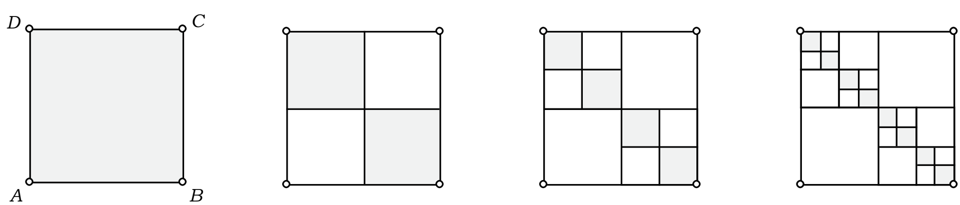
Encontrar el valor de ? entre los símbolos " < ", " = " y " > ".

7.379. En la figura:



calcular el número de cuadraditos que puedan caber en el triángulo ΔABC.

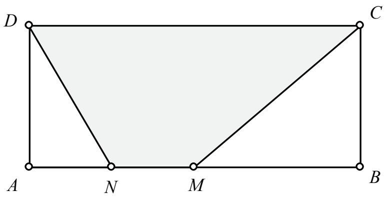
7.380(CESESP-81). En la figura:



tenemos un cuadrado $\square ABCD$ de lado a. Si en cada caso dividimos los lados de cada uno de los cuadrados obtenidos a la mitad, probar que la suma de las áreas de los cuadrados sombreados de cada caso converge al número $2a^2$.

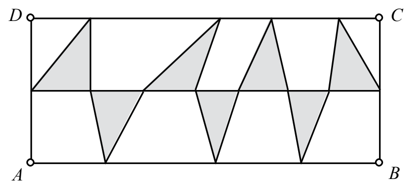
7.381. Si la base de un triángulo se incrementa un 10 % y la altura correspondiente se incrementa un 20 %, ¿qué porcentaje se incrementa el área del triángulo?

7.382. En la figura:



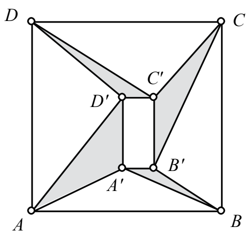
tenemos un rectángulo $\square ABCD$, M es el punto medio de AB y N es el punto medio de AM. Encontrar la proporción entre las áreas de la región sombreada y la región no sombreada.

7.383. En la figura



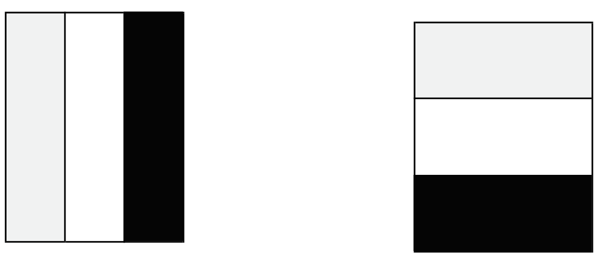
¿qué porcentaje del rectángulo no ha sido cubierta por los triángulos sombreados?

7.384. En la figura:

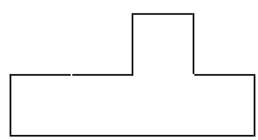


tenemos un cuadrado $\square ABCD$ de lado 16 y un rectángulo $\square A'B'C'D'$ de lados 2 y 4. Hallar el área de la región sombreada.

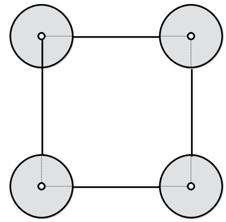
7.385 [I-271]. Tenemos dos banderas tricolores cuyos lados miden 9 y 12 y tienen los mismos colores. Cada una de sus partes coloreadas ocupa un tercio de su superficie. Cortar la bandera de la izquierda en cuatro piezas, de tal forma que con ellas se forme la bandera de la derecha.



7.386 [I-271 los azulejos de Alfagonia] ¿Cuál es la mínima cantidad de azulejos de la forma que se muestra a la derecha que se necesita para cubrir un piso rectangular?



7.387. En la figura:



tenemos cuatro monedas que están colocadas en los vértices de un cuadrado. Mover solamente dos de estas monedas, de tal forma que sean los vértices de un nuevo cuadrado cuya área sea la mitad del área del cuadrado original.

7.388 [l-208, El Grupo de Areas] Sean $\square(a,b,a,b)$ y $\square(c,d,c,d)$ dos rectángulos cualquiera. Decimos

$$\square(a,b,a,b) \approx \square(c,d,c,d)$$

si tienen la misma área, es decir, si $ab = cd$.

a. Probar que $\approx$ es una relación de equivalencia entre la clase de todos los rectángulos.

Dado un rectángulo $\square(a,b,a,b)$, el símbolo

$$[a,b] = \{ \square(c,d,c,d) : \square(c,d,c,d) \text{ es un rectángulo y } \square(a,b,a,b) \approx \square(c,d,c,d)\}$$

denotará la clase de equivalencia de $\square(a,b,a,b)$, la cual consiste del conjunto de rectángulos que tienen la misma área que $\square(a,b,a,b)$. Pongamos

$$G = \{ [a,b] : a \text{ y } b \text{ son números reales positivos } \}.$$

Dadas dos clases de equivalencia $[a,b]$ y $[c,d]$ definimos $[a,b] + [c,d] = [e,f]$, en donde $\square(e,f,e,f)$ satisface que

$$are(\square(a,b,a,b)) + are(\square(c,d,c,d)) = are(\square(e,f,e,f)).$$

Una forma de encontrar la suma es la siguiente: Dados $[a,b]$, $[c,d] \in G$, encontramos tres números reales positivos e, x y y tales que $ab = ex$ y $cd = ey$. Claramente vemos que $[a,b] + [c,d] = [e,x + y]$.

b. Probar que la adición + está bien definida.

Probar las siguientes afirmaciones:

c. $[a,b] + ([c,d] + [e,f]) = ([a,b] + [c,d]) + [e,f]$, para cada $[a,b]$, $[c,d]$, $[e,f] \in G$.

d. $[a,b] + [c,d] = [c,d] + [a,b]$, para cada $[a,b]$, $[c,d] \in G$.

Si t es un número real positivo y $[a,b] \in G$, entonces definimos $t[a,b] = [ta,b]$.

e. Probar que la operación escalar $t[a,b]$ está bien definida.

Probar las siguientes identidades:

f. $(s + t)[a,b] = s[a,b] + t[a,b]$, para cada $[a,b] \in G$ y cada par de números reales positivos s y t.

g. $s(t[a,b]) = st[a,b]$, para cada $[a,b] \in G$ y cada par de números reales positivos s y t.

h. $t([a,b] + [c,d]) = t[c,d] + t[a,b]$, para cada $[a,b]$, $[c,d] \in G$ y cada número real positivo t.

CAPÍTULO 8

GEOMETRÍA DEL TRIÁNGULO

En este capítulo utilizaremos la siguiente notación y terminología:

Sea ΔABC un triángulo cualquiera. Convenimos en la sección 4.5 que H_a, H_b y H_c denotarán los pies de las alturas del triángulo y los segmentos $h_a = AH_a$, $h_b = BH_b$ y $h_c = CH_c$ denotarán sus alturas. Las proyecciones de uno de los lados del triángulo sobre otro de sus lados serán denotadas por $p_a = BH_a$, $p_b = CH_b$, $p_c = AH_c$, $q_a = H_aC$, $q_b = H_bA$ y $q_c = H_cB$.

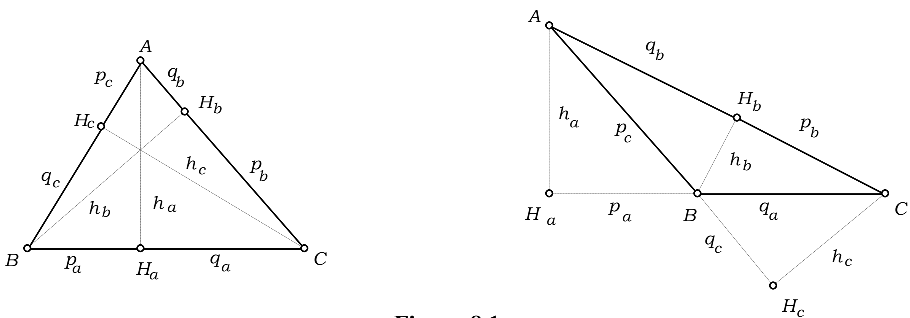


Figura 8.1

Los puntos B_a, B_b y B_c denotan las intersecciones de las bisectrices de los ángulos $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$ con los lados BC, AC y AB, respectivamente, y se les llama los *pies de las bisectrices*. Las *bisectrices* del triángulo ΔABC son los segmentos $b_a = AB_a$, $b_b = BB_b$ y $b_c = CB_c$.

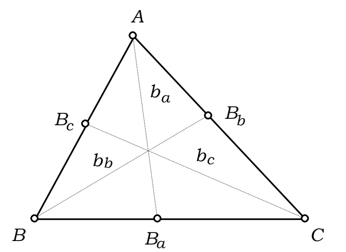


Figura 8.2

En la sección 4.3, introdujimos los símbolos M_a, M_b y M_c para denotar los puntos medios de BC, AC y AB, respectivamente. A los segmentos $m_a = AM_a$, $m_b = BM_b$ y $m_c = CM_c$ se les llama las *medianas* del triángulo ΔABC.

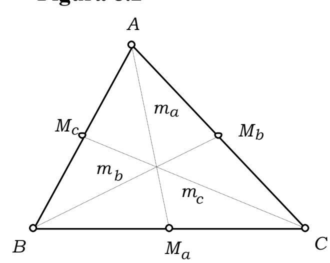


Figura 8.3

Los símbolos h_a, h_b, h_c, b_a, b_b y b_c m_a, m_b y m_c también harán referencia a las longitudes de las alturas, de las bisectrices y de las medianas que cada uno de ellos representa. En cualquier triángulo ΔABC, las rectas

$\overleftrightarrow{AH_a}$, $\overleftrightarrow{BH_b}$ y $\overleftrightarrow{CH_c}$ también serán llamadas las alturas del triángulo, las semirrectas $\overrightarrow{AB_a}$, $\overrightarrow{BB_b}$ y $\overrightarrow{BH_c}$ algunas veces serán llamadas las bisectrices del triángulo, y las rectas $\overleftrightarrow{AM_a}$, $\overleftrightarrow{BM_b}$ y $\overleftrightarrow{CM_c}$ serán llamadas, de manera conveniente, las medianas del triángulo.

Las *mediatrices* del triángulo ΔABC son las mediatrices t_a, t_b y t_c de sus lados *BC*, *AC* y *AB*, respectivamente.

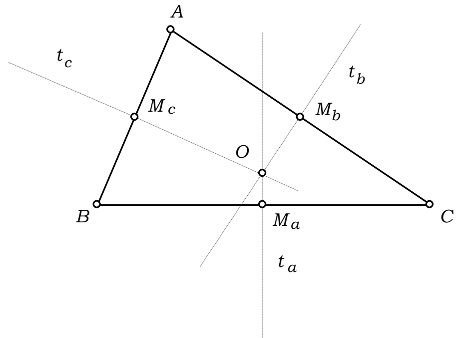


Figura 8.4

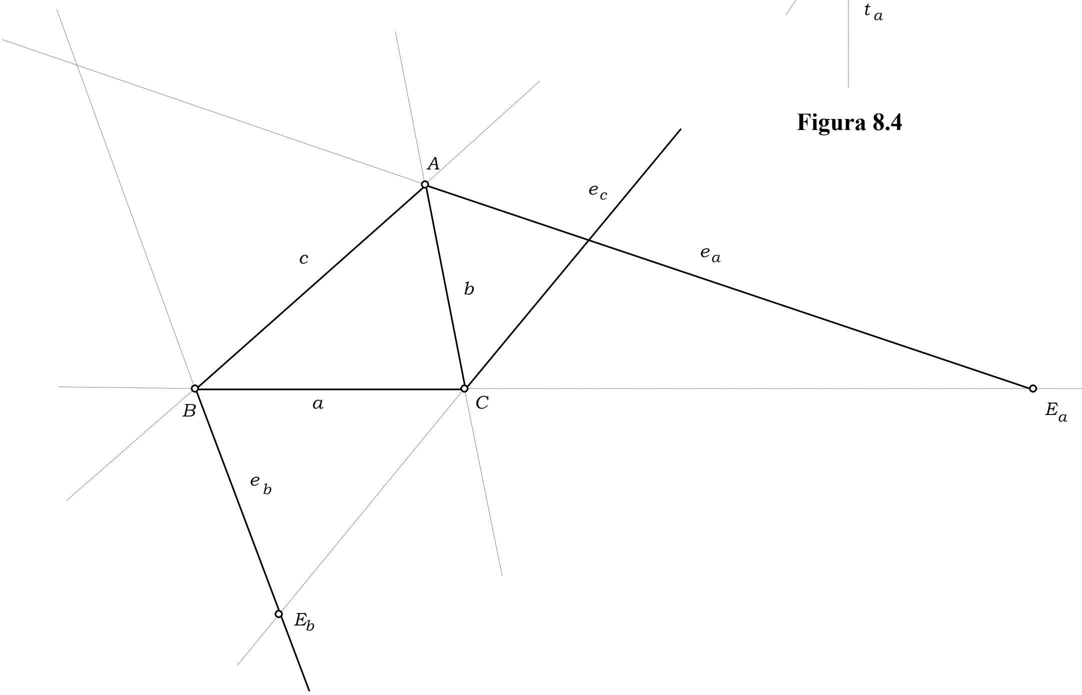


Figura 8.5

La bisectriz del ángulo exterior adyacente al ángulo $\angle A$ será denotada por e_a; la bisectriz del ángulo exterior adyacente al ángulo $\angle B$ será denotada por e_b; y la bisectriz del ángulo exterior adyacente al ángulo $\angle C$ será denotada por e_c. Por cada vértice de un triángulo, hay dos ángulos exteriores que son opuestos y como las bisectrices de dichos ángulos forman una recta (Teorema 2.12.5), en algunos casos los símbolos e_a, e_b y e_c, sin confusión alguna, representarán también a dichas rectas. El punto de intersección, en caso de que exista, de e_a, e_b y e_c con las rectas $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{AB}$ serán denotados por E_a, E_b y E_c, respectivamente. Siguiendo con el abuso de notación, e_a, e_b y e_c también denotarán los segmentos AE_a, BE_b y CE_c, respectivamente. El contexto dará al lector el significado de nuestros símbolos, ya sea recta, semirrecta o segmento.

8.1. Teoremas básicos.

8.1.1. Lema. Sea ΔABC un triángulo rectángulo con hipotenusa c. Entonces la altura h_c determina dos triángulos rectángulos $\Delta H_c BC$ y $\Delta H_c CA$ semejantes a ΔABC.

Prueba: Sabemos que los ángulos $\angle C$, $\angle BH_cC$ y $\angle CH_cA$ son rectos. Por consiguiente,

$$90 = m(\angle CBH_c) + m(\angle H_cCB) = m(\angle ACH_c) + m(\angle H_cAC) = m(\angle H_cCB) + m(\angle ACH_c).$$

De aquí se sigue que $m(\angle ACH_c) = m(\angle CBH_c)$ y $m(\angle H_cCB) = m(\angle H_cAC)$. En otros términos, $\angle ACH_c \cong \angle CBH_c$ y $\angle H_cCB \cong \angle H_cAC$. Esto nos dice que los triángulos ΔH_cBC y ΔH_cCA tienen sus ángulos correspondientes congruentes. Así, por el criterio 6.2.6, $\Delta H_cBC \sim \Delta H_cCA$. Por otra parte, sabemos que $\angle A = \angle H_cAC \cong \angle H_cCB$. Por ello, los triángulos ΔH_cBC y ΔABC tienen sus ángulos correspondientes congruentes. De acuerdo con el primer criterio de semejanza (6.2.6), hallamos que $\Delta H_cBC \sim \Delta ABC$. ♣

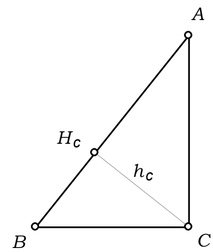


Figura 8.6

8.1.2. Teorema. Sea $\Delta(a,b,c)$ un triángulo rectángulo con hipotenusa c. Entonces, se cumplen las siguientes identidades:

1. $a^2 = cq_c$ y $b^2 = cp_c$.
2. **(Teorema de Pitágoras)** $a^2 + b^2 = c^2$.
3. $ab = ch_c$.
4. $h_c^{\,2} = p_c q_c$.
5. $a^2 + b^2 = (p_c + q_c)^2$.
6. $a^2 - b^2 = q_c^{\,2} - p_c^{\,2}$.
7. $\dfrac{b^2}{a^2} = \dfrac{p_c}{q_c}$.

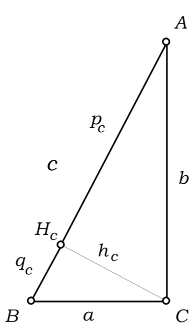


Figura 8.7

Prueba: Basemos nuestros argumentos en la figura 8.7.

1. Consideremos el cateto BC. Por el lema anterior, sabemos que $\Delta ABC \sim \Delta H_cBC$ y, por ello, $\dfrac{a}{c} = \dfrac{q_c}{a}$. Es decir, $a^2 = cq_c$. De manera similar se prueba que $b^2 = cp_c$ (en cuyo caso usamos la semejanza $\Delta ABC \sim \Delta H_cCA$).

2. Del primer inciso se sigue que

$$a^2 + b^2 = cq_c + cp_c = c(q_c + p_c) = c^2.$$

3. De la semejanza $\Delta ABC \sim \Delta H_cBC$ también obtenemos la identidad $\dfrac{a}{h_c} = \dfrac{c}{b}$. Es decir, $ab = ch_c$.

4. Puesto que $\Delta H_cBC \sim \Delta H_cCA$, hallamos que $\dfrac{q_c}{h_c} = \dfrac{h_c}{p_c}$. Lo cual implica la identidad $h_c^{\,2} = p_c q_c$.

5. Del primer inciso vemos que $a^2 + b^2 = cq_c + cp_c = c(q_c + p_c) = (q_c + p_c)(q_c + p_c) = (q_c + p_c)^2$.

6. De la primera cláusula se sigue que $a^2 - b^2 = cq_c - cp_c = c(q_c - p_c) = (q_c + p_c)(q_c - p_c) = {q_c}^2 - {p_c}^2$.

7. Se obtiene directamente de la identidad del primer inciso. ♣

Las propiedades de las cláusulas 1, 4 y 6 del teorema anterior tienen la siguiente interpretación:

La primera de estas cláusulas quiere decir que, en todo triángulo rectángulo, cada cateto es la media geométrica de su proyección sobre la hipotenusa y la hipotenusa; la cuarta cláusula dice que, en todo triángulo rectángulo, la altura correspondiente a la hipotenusa, es la media geométrica de las proyecciones de los catetos sobre la misma; y en la sexta cláusula tenemos que, la diferencia de los cuadrados de los catetos de un triángulo rectángulo. es igual a la diferencia de los cuadrados de las proyecciones de estos sobre la hipotenusa.

La segunda cláusula corresponde al célebre teorema que se le atribuye a Pitágoras: en la quinta sección de este capítulo daremos otra demostración del Teorema de Pitágoras y se discutirán algunas de sus generalizaciones y aplicaciones.

8.1.3. Teorema. Si $\Delta(a,b,c)$ un triángulo rectángulo con hipotenusa c, entonces

$$\frac{1}{h_c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

Prueba: Del segundo y tercer inciso del Teorema 8.1.2 se obtiene como resultado que

$$a^2 b^2 = c^2\ h_c^2 = (a^2 + b^2)\, h_c^2$$

$$\frac{1}{h_c^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}. \ ♣$$

8.1.4. Teorema(45-45-90). En todo triángulo rectángulo isósceles, la longitud de la hipotenusa es $\sqrt{2}$ veces la longitud de un cateto.

Prueba: Sea $\Delta(a,b,c)$ un triángulo rectángulo isósceles con hipotenusa c. De acuerdo con el Teorema de Pitágoras (8.1.2 (2)),

$$c^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$c = \sqrt{2}\, a. \ ♣$$

8.1.5. Teorema(30-60-90). En todo triángulo rectángulo $\Delta(30,60,90)$, la longitud de la hipotenusa es el doble de la longitud del cateto más pequeño y la longitud del segundo cateto es $\sqrt{3}$ veces la longitud del cateto menor.

Prueba: Sea $\Delta(\angle 30, \angle 60, \angle 90)$ un triángulo rectángulo con hipotenusa c y $a < b$. Consideremos la siguiente figura:

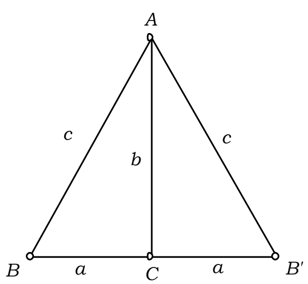


Figura 8.8

Supongamos que $\Delta ABC \cong \Delta AB'C$, $m(\angle A) = 30$, $m(\angle B) = m(\angle B')$ $= 60$ y $m(\angle C) = 90$. Entonces, tenemos que $\Delta ABB'$ es un triángulo equilátero (Corolario 4.3.5). Por ello, $c = a + a = 2a$. Ahora, el Teorema de Pitágoras 8.1.2 (2) nos garantiza la identidad

$$c^2 = 4a^2 = a^2 + b^2.$$

Por lo tanto, $b = \sqrt{3}\, a$. ♣

El teorema anterior tiene su recíproco que es el siguiente.

8.1.6. Teorema. En un triángulo rectángulo, si la hipotenusa es el doble que uno de los catetos, entonces el ángulo opuesto a dicho cateto mide 30.

Prueba: Sea ΔABC un triángulo rectángulo con hipotenusa c tal que $c = 2b$. Prolongamos AC hasta un punto A', de tal forma que $AC \cong CA'$ (ver figura 8.9). Los triángulos rectángulos ΔABC y $\Delta A'BC$ tienen un cateto en común que es BC y $AC \cong CA'$. De acuerdo con el criterio 3.6.4, $\Delta ABC \cong \Delta A'BC$. Por consiguiente, $AB \cong BA'$. Como $|AB| = c = 2b = 2|AC| = |AC| + |CA'| = |AA'|$, por el Teorema 1.8.1, hallamos que $AB \cong AA'$. Por consiguiente, $\Delta ABA'$ es un triángulo equilátero y, por lo tanto, $m(\angle A)= m(\angle A'BA) = m(\angle A') = 60$. Ya que BC es la bisectriz del ángulo $\angle A'BA$, se tiene entonces que $m(\angle B) = m(\angle CBA) = 30$. ♣

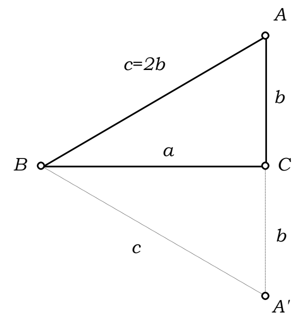


Figura 8.9

8.1.7. Teorema. Un cateto y la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles son inconmensurables.

Prueba: Sea ΔABC un triángulo rectángulo isósceles tal que $\angle A$ es recto y $AB \cong AC$. Del Teorema 4.3.1 hallamos que $p_a = q_a = \frac{a}{2}$.

De acuerdo con el Teorema 8.1.2 (1), concluimos que

$$b^2 = c^2 = a\,p_a = a\frac{a}{2} = \frac{a^2}{2}$$

$$\frac{b^2}{a^2} = 2$$

$$\frac{b}{a} = \sqrt{2}\,.$$

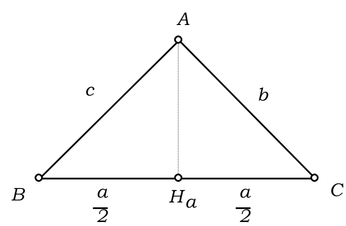


Figura 8.10

Como $\sqrt{2}$ es irracional, deducimos que a y b no pueden ser conmensurables. ♣

Una consecuencia directa del teorema anterior es la siguiente.

8.1.8. Corolario. La diagonal de un cuadrado no es conmensurable con ninguno de sus lados.

A continuación, damos los criterios de semejanza para triángulos rectángulos. Veremos que dichos criterios son consecuencia de los tres criterios generales de semejanza para triángulos (6.2.6, 6.2.10 y 6.2.12).

8.1.9. Primer Criterio de Semejanza de Triángulos Rectángulos (*A*). Si un ángulo agudo de un triángulo rectángulo es congruente a un ángulo agudo de otro triángulo rectángulo, entonces ambos triángulos son semejantes.

Prueba: Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos rectángulos tales que $\angle A$ y $\angle A'$ son ángulos rectos y $\angle B \cong \angle B$. Según el Teorema 4.3.4,

$$m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) = 180 = m(\angle A') + m(\angle B') + m(\angle C')$$
$$90 + m(\angle B) + m(\angle C) = 90 + m(\angle B') + m(\angle C')$$
$$m(\angle C) = m(\angle C')$$
$$\angle C \cong \angle C'.$$

Así, por el primer criterio de semejanza de triángulos (6.2.6), $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. ♣

8.1.10. Segundo Criterio de Semejanza de Triángulos Rectángulos (*CC*). Si los catetos de un triángulo rectángulo son proporcionales a los catetos de otro triángulo rectángulo, entonces ambos triángulos son semejantes.

Prueba: Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos rectángulos tales que $\angle A$ y $\angle A'$ son ángulos rectos y $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$. Pongamos $\frac{b}{b'} = k$. Por el Teorema de Pitágoras (8.1.2 (2)), sabemos que

$$a^2 = b^2 + c^2 \text{ y } a'^2 = b'^2 + c'^2.$$

De donde se sigue que

$$a^2 = b^2 + c^2 = (kb')^2 + (kc')^2 = k^2(b'^2 + c'^2) = k^2 a'^2 = (ka')^2$$
$$a^2 = (ka')^2$$
$$a = ka'$$
$$\frac{a}{a'} = k.$$

De acuerdo con el tercer criterio de semejanza de triángulos (6.2.12), concluimos que $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. ♣

8.1.11. Tercer Criterio de Semejanza de Triángulos Rectángulos (*HC*). Si la hipotenusa y un cateto de un triángulo rectángulo son proporcionales a la hipotenusa y un cateto de otro triángulo rectángulo, entonces los triángulos son semejantes.

Prueba: Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos rectángulos con ángulos rectos $\angle A$ y $\angle A'$ y supongamos que $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$. Pongamos $\frac{a}{a'} = k$. Del Teorema de Pitágoras (8.1.2 (2)) hallamos que

$$a^2 = b^2 + c^2 \text{ y } a'^2 = b'^2 + c'^2.$$

Por consiguiente,

$$c^2 = a^2 - b^2 = (ka')^2 - (kb')^2 = k^2(a'^2 + b'^2) = k^2 c'^2 = (kc')^2$$
$$c^2 = (kc')^2$$
$$c = kc'$$
$$\frac{c}{c'} = k.$$

La conclusión se sigue del criterio de semejanza 6.2.12. ♣

8.1.12. Teorema. Un triángulo ΔABC es isósceles con $AB \cong AC$ si y solo si $h_a = m_a = b_a$.

Prueba: La necesidad es una consecuencia inmediata del Teorema 4.3.1.

Suficiencia. Supongamos que $h_a = m_a$. De aquí podemos deducir que $t_a = m_a$. Según el Teorema 4.2.2, obtenemos que $AB \cong AC$. ♣

8.1.13. Teorema. Si ΔABC es un triángulo isósceles con $AB \cong AC$, entonces

$$m(\angle A) = 2m(\angle CBH_b) = 2m(\angle H_cCB).$$

Prueba: Sabemos, por el Teorema 4.3.4, que $m(\angle CBH_b) + m(\angle C) = 90$ y $m(\angle A) + 2m(\angle C) = 180$. Por ello,

$$m(\angle A) + 2m(\angle C) = 2(m(\angle CBH_b) + 2m(\angle C))$$
$$m(\angle A) = 2m(\angle CBH_b).$$

De manera análoga, se demuestra la identidad restante. ♣

8.1.14. Teorema. En todo triángulo equilátero se cumple que $h_a = h_b = h_c = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$

Prueba: Sea ΔABC un triángulo equilátero.
Empleando el Teorema 8.1.2 (2),

$$a^2 = h_a{}^2 + \frac{a^2}{4}$$

$$h_a{}^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$h_a = \frac{\sqrt{3}}{2}a. \clubsuit$$

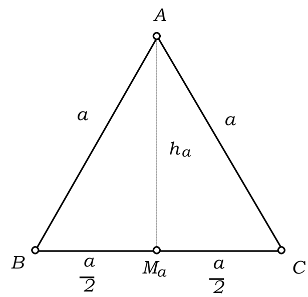


Figura 8.11

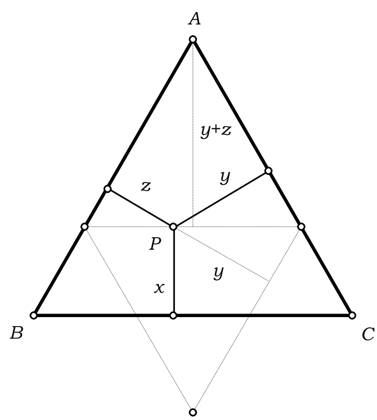
8.1.15. Teorema de Viviani. Si ΔABC es un triángulo equilátero, entonces

$$d(P,AB) + d(P,BC) + d(P,CA) = h_a = h_b = h_c,$$

para todo punto $P \in int(\Delta ABC)$.

Prueba (J. Tanton [a-165]): Sin palabras.

$x = d(P,BC)$
$y = d(P,AC)$
$z = d(P,AB)$



♣

Figura 8.12

El Teorema de Viviani también se cumple si el punto yace en el exterior del triángulo (Problema 8.419).

Las siguientes identidades fueron establecidas por R. Lecchusi y D. Price y aparecen en la nota [a-164].

8.1.16. Teorema. En todo triángulo rectángulo $\Delta(a,b,c)$ con hipotenusa a se cumple que

$$\frac{a^2}{a} = \frac{b^2}{q_a} = \frac{c^2}{p_a} \text{ y } \frac{are(\Delta ABC)}{a^2} = \frac{are(\Delta AH_aC)}{b^2} = \frac{are(\Delta ABH_a)}{c^2}.$$

Prueba: De acuerdo con el Teorema 8.1.2 (1), sabemos que $b^2 = a\,q_a$ y $c^2 = a\,p_a$. De donde hallamos que

$$\frac{a^2}{a} = \frac{b^2}{q_a} = \frac{c^2}{p_a}.$$

Con respecto a las áreas, vemos que

$$\frac{are(\Delta ABC)}{a^2} = \frac{h_a a}{2a^2} = \frac{h_a q_a}{2aq_a} = \frac{are(\Delta AH_aC)}{b^2} = \frac{h_a p_a}{2ap_a} = \frac{are(\Delta ABH_a)}{c^2}. \clubsuit$$

8.1.17. Teorema. En todo triángulo ΔABC se cumple que

$$\Delta ABC \sim \Delta M_a M_b M_c \cong \Delta A M_b M_c \cong \Delta M_a B M_c \cong \Delta M_a M_b C.$$

Prueba: Es suficiente con probar que $\Delta ABC \sim \Delta M_a M_b M_c \cong \Delta A M_c M_b$.

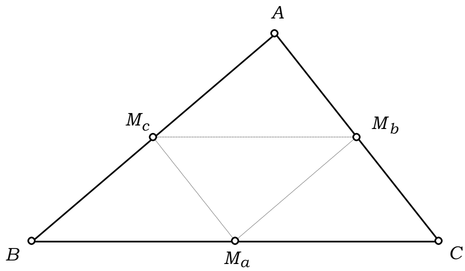


Figura 8.13

Primero probaremos que $\Delta M_a M_b M_c \cong \Delta A M_b M_c$. Según el Teorema del Segmento Medio (4.3.10), $A M_b \cong M_a M_c$ y $A M_c \cong M_a M_b$. De acuerdo con el tercer criterio de congruencia (3.2.12), hallamos que $\Delta M_a M_b M_c \cong \Delta A M_b M_c$. Ahora probaremos la semejanza $\Delta ABC \sim \Delta A M_b M_c$. De nueva cuenta, por el Teorema 4.3.10, se tiene que $BC \parallel M_c M_b$. En vista del Corolario 6.2.7, $\Delta ABC \sim \Delta A M_b M_c$. ♣

8.1.18. Teorema. Sean l una recta y P un punto fuera de ella. Si $r > d(P,l)$, entonces existen dos únicos puntos $A, B \in l$ tales que $|PA| = |PB| = r$.

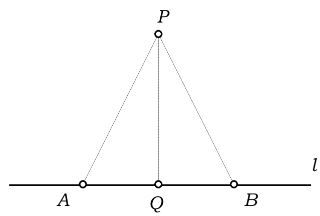


Figura 8.14

Prueba: Sea Q la proyección de P sobre l. Por definición, sabemos que $PQ \perp l$. Pongamos $b = d(P,l) = |PQ|$ y $a = \sqrt{r^2 - b^2}$. De la hipótesis vemos que a está bien definido. De acuerdo con el Corolario 1.10.6, existen dos únicos puntos $A, B \in l$ tales que Q es el punto medio de AB y $|AQ| = |QB| = a$. Sabemos, además, que los triángulos ΔPAQ y ΔPBQ son triángulos rectángulos con hipotenusas PA y PB, respectivamente. Aplicando el Teorema de Pitágoras, 8.1.2 (2), nos encontramos con que

$$|PA|^2 = b^2 + a^2 = b^2 + r^2 - b^2 = r^2 \text{ y } |PB|^2 = b^2 + a^2 = b^2 + r^2 - b^2 = r^2.$$

Por consiguiente, $|PA| = |PB| = r$. Esto prueba que A y B son los puntos que estamos buscando. Veamos ahora que dichos puntos son únicos. Para esto, supongamos que existe un tercer punto $C \in l - \{A, B\}$ tal que $|PC| = r$. Obviamente, $C \neq Q$. Como ΔPBQ es un triángulo rectángulo, por el Teorema 8.1.2 (2), $|PC|^2 = r^2 = |PQ|^2 + |CQ|^2 = b^2 + |CQ|^2$. De aquí, hallamos que $|CQ| = \sqrt{r^2 - b^2} = a$, pero esto contradice el Corolario 1.10.6, ya que supusimos $A \neq C \neq B$ y $C \in l$. ♣

8.2. Trigonometría

Dado que la trigonometría es un tema demasiado amplio, aquí solo daremos una pequeña introducción de las cuestiones básicas que se emplearán en el libro. Principalmente, nos enfocaremos en las relaciones trigonométricas entre las seis partes de un triángulo. Los libros [l-181] y [l-209] ofrecen un amplio y detallado estudio de la trigonometría.

Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle B$.

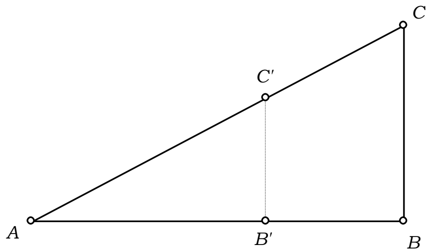


Figura 8.15

Si $B' \in AB$ y $C' \in AC$ satisfacen que $BC \parallel B'C'$, entonces

$$\frac{|BC|}{|AC|} = \frac{|B'C'|}{|AC'|}$$

(esto es por el Teorema 6.2.5). De aquí podemos ver que la razón $\frac{|BC|}{|AC|}$ depende esencialmente del ángulo $\angle A$. A dicha razón se le conoce como el *seno* del ángulo agudo $\angle A$ y se denota usualmente por

$$\text{sen}\angle A = \frac{|BC|}{|AC|}.$$

El seno de un ángulo agudo es, por tanto, la razón que hay entre el cateto opuesto a dicho ángulo y la hipotenusa, ambos de un triángulo rectángulo que contiene al ángulo en cuestión como uno de sus ángulos agudos. De manera muy similar, para cualquier ángulo agudo $\angle A$ definimos (ver la figura 8.15):

el *coseno* de $\angle A$ es $\cos\angle A = \dfrac{|AB|}{|AC|} = \dfrac{cateto - adyacente}{hipotenusa}$,

la *tangente* de $\angle A$ es $\tan\angle A = \dfrac{|BC|}{|AB|} = \dfrac{cateto - opuesto}{cateto - adyacente}$,

la *cotangente* de $\angle A$ es $\cot\angle A = \dfrac{|AB|}{|BC|} = \dfrac{cateto - adyacente}{cateto - opuesto}$,

la *secante* de $\angle A$ es $\sec\angle A = \dfrac{|AC|}{|AB|} = \dfrac{hipotenusa}{cateto - adyacente}$ y

la *cosecante* de $\angle A$ es $\csc\angle A = \dfrac{|AC|}{|BC|} = \dfrac{hipotenusa}{cateto - opuesto}$.

Antes de proceder a definir las funciones trigonométricas de cualquier ángulo, primero definimos las correspondientes a los ángulos rectos y llanos:

$$\text{sen}\angle 90 = 1,\quad \cos\angle 90 = 0,\quad \tan\angle 90 = \infty,\quad \cot\angle 90 = 0,\quad \sec\angle 90 = \infty,\quad \csc\angle 90 = 1,$$

$$\text{sen}\angle 180 = 0,\quad \cos\angle 180 = -1,\quad \tan\angle 180 = 0,\quad \cot\angle 180 = -\infty,\quad \sec\angle 180 = -1 \text{ y } \csc\angle 180 = \infty.$$

Para un ángulo obtuso cualquiera $\angle\alpha$ definimos:

$$\text{sen}(\angle 180 - \angle\alpha) = \text{sen}\angle\alpha,\qquad \cos(\angle 180 - \angle\alpha) = -(\cos\angle\alpha),$$

$$\tan(\angle 180 - \angle\alpha) = -(\tan\angle\alpha),\qquad \cot(\angle 180 - \angle\alpha) = -(\cot\angle\alpha),$$

$$\sec(\angle 180 - \angle\alpha) = -(\sec\angle\alpha) \quad \text{y} \quad \csc(\angle 180 - \angle\alpha) = \csc\angle\alpha.$$

De esta manera, quedan definidas las funciones trigonométricas de un ángulo arbitrario. En cualquier libro de trigonometría, el lector puede ver cómo se definen, de manera periódica, las funciones trigonométricas en todo número real. Los valores de algunos de los ángulos más comunes son:

$$\text{sen}\angle 30 = \frac{1}{2},\quad \text{sen}\angle 45 = \frac{\sqrt{2}}{2},\quad \text{sen}\angle 60 = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad \text{sen}\angle 120 = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos\angle 30 = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos\angle 45 = \frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos\angle 60 = \frac{1}{2},\quad \cos\angle 120 = -\frac{1}{2},$$

$$\tan\angle 30 = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \tan\angle 45 = 1, \quad \tan\angle 60 = \sqrt{3}, \quad \tan\angle 120 = -\sqrt{3},$$

$$\cot\angle 30 = \sqrt{3}, \quad \cot\angle 45 = 1, \quad \cot\angle 60 = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \cot\angle 120 = -\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\sec\angle 30 = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad \sec\angle 45 = \sqrt{2}, \quad \sec\angle 60 = 2, \quad \sec\angle 120 = -2,$$

$$\csc\angle 30 = 2, \quad \csc\angle 45 = \sqrt{2}, \quad \csc\angle 60 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \text{y} \quad \csc\angle 120 = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

En el siguiente teorema, resumimos las fórmulas trigonométricas básicas más importantes. El lector interesado en los detalles de las demostraciones de dichas fórmulas puede consultar cualquier libro de trigonometría básica.

8.2.1. Teorema (Fórmulas Trigonométricas Básicas).

1. Las relaciones entre los ángulos negativos y positivos son las siguientes:

$$\text{sen}(-\angle\alpha) = -\text{sen}\angle\alpha, \qquad \cos(-\angle\alpha) = \cos\angle\alpha,$$
$$\tan(-\angle\alpha) = -\tan\angle\alpha, \qquad \cot(-\angle\alpha) = -\cot\angle\alpha,$$
$$\sec(-\angle\alpha) = \sec\angle\alpha \quad \text{y} \quad \csc(-\angle\alpha) = -\csc\angle\alpha.$$

2. Si $\angle\alpha$ es un ángulo agudo, entonces

$$\text{sen}(\angle 90 - \angle\alpha) = \cos\angle\alpha, \qquad \text{sen}(\angle 90 + \angle\alpha) = \cos\alpha,$$
$$\cos(\angle 90 - \angle\alpha) = \text{sen}\angle\alpha, \qquad \cos(\angle 90 + \angle\alpha) = -\text{sen}\angle\alpha,$$
$$\tan(\angle 90 - \angle\alpha) = \cot\angle\alpha, \qquad \tan(\angle 90 + \angle\alpha) = -\cot\angle\alpha,$$
$$\cot(\angle 90 - \angle\alpha) = \tan\angle\alpha, \qquad \cot(\angle 90 + \angle\alpha) = -\tan\angle\alpha,$$
$$\sec(\angle 90 - \angle\alpha) = \csc\angle\alpha, \qquad \sec(\angle 90 + \angle\alpha) = -\csc\angle\alpha,$$
$$\csc(\angle 90 - \angle\alpha) = \sec\angle\alpha, \qquad \csc(\angle 90 + \angle\alpha) = \sec\angle\alpha,$$
$$\text{sen}(\angle 180 - \angle\alpha) = \text{sen}\angle\alpha, \qquad \text{sen}(\angle 180 + \angle\alpha) = -\text{sen}\angle\alpha,$$
$$\cos(\angle 180 - \angle\alpha) = -\cos\angle\alpha, \qquad \cos(\angle 180 + \angle\alpha) = -\cos\angle\alpha,$$
$$\tan(\angle 180 - \angle\alpha) = -\tan\angle\alpha, \qquad \tan(\angle 180 + \angle\alpha) = \tan\angle\alpha,$$
$$\cot(\angle 180 - \angle\alpha) = -\cot\angle\alpha, \qquad \cot(\angle 180 + \angle\alpha) = \cot\angle\alpha,$$
$$\sec(\angle 180 - \angle\alpha) = -\sec\angle\alpha, \qquad \sec(\angle 180 + \angle\alpha) = -\sec\angle\alpha,$$
$$\csc(\angle 180 - \angle\alpha) = -\csc\angle\alpha, \qquad \csc(\angle 180 + \angle\alpha) = -\csc\angle\alpha,$$
$$\text{sen}(\angle 360 - \angle\alpha) = -\text{sen}\angle\alpha, \qquad \text{sen}(\angle 360 + \angle\alpha) = \text{sen}\angle\alpha,$$
$$\cos(\angle 360 - \angle\alpha) = \cos\angle\alpha, \qquad \cos(\angle 360 + \angle\alpha) = \cos\angle\alpha,$$
$$\tan(\angle 360 - \angle\alpha) = -\tan\angle\alpha, \qquad \tan(\angle 360 + \angle\alpha) = \tan\angle\alpha,$$
$$\cot(\angle 360 - \angle\alpha) = -\cot\angle\alpha, \qquad \cot(\angle 360 + \angle\alpha) = \cot\angle\alpha,$$
$$\sec(\angle 360 - \angle\alpha) = \sec\angle\alpha, \qquad \sec(\angle 360 + \angle\alpha) = \sec\angle\alpha,$$
$$\csc(\angle 360 - \angle\alpha) = -\csc\angle\alpha \quad \text{y} \quad \csc(\angle 360 + \angle\alpha) = \csc\angle\alpha.$$

3. Si $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ son dos ángulos tales que $m(\angle\alpha) + m(\angle\beta) \leq 180$, entonces

$$\text{sen}(\angle\alpha + \angle\beta) = \text{sen}\angle\alpha\cos\angle\beta + \cos\angle\alpha\text{sen}\angle\beta,$$
$$\cos(\angle\alpha + \angle\beta) = \cos\angle\alpha\cos\angle\beta - \text{sen}\angle\alpha\text{sen}\angle\beta \ \text{y}$$
$$\tan(\angle\alpha + \angle\beta) = \frac{\tan\angle\alpha + \tan\angle\beta}{1 - \tan\angle\alpha\angle\beta}.$$

4. Si $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ son dos ángulos tales que $\angle\alpha \geq \angle\beta$, entonces

$$\text{sen}(\angle\alpha - \angle\beta) = \text{sen}\angle\alpha\cos\angle\beta - \cos\angle\alpha\text{sen}\angle\beta,$$
$$\cos(\angle\alpha - \angle\beta) = \cos\angle\alpha\cos\angle\beta + \text{sen}\angle\alpha\text{sen}\angle\beta \ \text{y}$$
$$\tan(\angle\alpha + \angle\beta) = \frac{\tan\angle\alpha - \tan\angle\beta}{1 + \tan\angle\alpha\angle\beta}.$$

5. Si $\angle\alpha$ es un ángulo cualquiera, entonces

$$(\text{sen}\angle\alpha)^2 + (\cos\angle\alpha)^2 = 1, \quad (\sec\angle\alpha)^2 = 1 + (\tan\angle\alpha)^2 \quad \text{y} \quad (\csc\angle\alpha)^2 = 1 + (\cot\angle\alpha)^2.$$

6. Si $\angle\alpha$ es un ángulo cualquiera, entonces

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}2\angle\alpha &= 2\operatorname{sen}\angle\alpha\cos\angle\alpha,\\
\cos2\angle\alpha &= (\cos\angle\alpha)^2-(\operatorname{sen}\angle\alpha)^2,\\
\cos2\angle\alpha &= 2(\cos\angle\alpha)^2-1,\\
\cos2\angle\alpha &= 1-2(\operatorname{sen}\angle\alpha)^2 \text{ y}\\
\tan2\angle\alpha &= \frac{2\tan\angle\alpha}{1-(\tan\angle\alpha)^2}.
\end{aligned}$$

7. Si $\angle\alpha$ es un ángulo cualquiera, entonces

$$\begin{aligned}
\tan\frac{\angle\alpha}{2} &= \frac{\operatorname{sen}\angle\alpha}{1+\cos\angle\alpha},\\
\tan\frac{\angle\alpha}{2} &= \frac{1-\cos\angle\alpha}{\operatorname{sen}\angle\alpha},\\
(\tan\frac{\angle\alpha}{2})^2 &= \frac{1-\cos\angle\alpha}{1+\cos\angle\alpha},\\
2(\operatorname{sen}\frac{\angle\alpha}{2})^2 &= 1-\cos\angle\alpha \text{ y}\\
2(\cos\frac{\angle\alpha}{2})^2 &= 1+\cos\angle\alpha.
\end{aligned}$$

8. Si $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ son dos ángulos arbitrarios, entonces

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\angle\alpha+\operatorname{sen}\angle\beta &= 2\operatorname{sen}\frac{\angle\alpha+\angle\beta}{2}\cos\frac{\angle\alpha-\angle\beta}{2},\\
\operatorname{sen}\angle\alpha-\operatorname{sen}\angle\beta &= 2\operatorname{sen}\frac{\angle\alpha-\angle\beta}{2}\cos\frac{\angle\alpha+\angle\beta}{2},\\
\cos\angle\alpha+\cos\angle\beta &= 2\cos\frac{\angle\alpha+\angle\beta}{2}\cos\frac{\angle\alpha-\angle\beta}{2},\\
\cos\angle\alpha-\cos\angle\beta &= 2\operatorname{sen}\frac{\angle\alpha+\angle\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\angle\alpha-\angle\beta}{2},\\
\tan\angle\alpha+\tan\angle\beta &= \frac{\operatorname{sen}(\angle\alpha+\angle\beta)}{\cos\angle\alpha\cos\angle\beta} \text{ y}\\
\tan\angle\alpha-\tan\angle\beta &= \frac{\operatorname{sen}(\angle\alpha-\angle\beta)}{\cos\angle\alpha\cos\angle\beta}.
\end{aligned}$$

9. Si $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ son dos ángulos cualesquiera, entonces

$$\begin{aligned}
(\operatorname{sen}\angle\alpha)^2-(\operatorname{sen}\angle\beta)^2 &= \operatorname{sen}(\angle\alpha+\angle\beta)\operatorname{sen}(\angle\alpha-\angle\beta),\\
(\cos\angle\alpha)^2-(\cos\angle\beta)^2 &= \operatorname{sen}(\angle\alpha+\angle\beta)\operatorname{sen}(\angle\alpha-\angle\beta) \text{ y}\\
(\cos\angle\alpha)^2-(\operatorname{sen}\angle\beta)^2 &= \cos(\angle\alpha+\angle\beta)\cos(\angle\alpha-\angle\beta).
\end{aligned}$$

10. Si $\angle\alpha$ es un ángulo cualquiera, entonces

$$\operatorname{sen}\angle\alpha = \frac{\tan\angle\alpha}{\sqrt{1+(\tan\angle\alpha)^2}} = \sqrt{1-(\cos\angle\alpha)^2} = \frac{1}{\sqrt{1+(\cot\angle\alpha)^2}} = \frac{\sqrt{(\sec\angle\alpha)^2-1}}{\sec\angle\alpha} = \frac{1}{\csc\angle\alpha},$$

$$\cos\angle\alpha = \sqrt{1-(\operatorname{sen}\angle\alpha)^2} = \frac{1}{\sqrt{1+(\tan\angle\alpha)^2}} = \frac{\cot\angle\alpha}{\sqrt{1+(\cot\angle\alpha)^2}} = \frac{1}{\sec\angle\alpha} = \frac{\sqrt{(\csc\angle\alpha)^2-1}}{\csc\angle\alpha},$$

$$\tan\angle\alpha = \frac{\operatorname{sen}\angle\alpha}{\sqrt{1-(\operatorname{sen}\angle\alpha)^2}} = \frac{\sqrt{1-(\cos\angle\alpha)^2}}{\cos\angle\alpha} = \frac{1}{\cot\angle\alpha} = \sqrt{(\sec\angle\alpha)^2-1} = \frac{1}{\sqrt{(\csc\angle\alpha)^2-1}},$$

$$\cot\angle\alpha = \frac{\sqrt{1-(\text{sen}\angle\alpha)^2}}{\text{sen}\angle\alpha} = \frac{1}{\tan\angle\alpha} = \frac{\cos\angle\alpha}{\sqrt{1-(\cos\angle\alpha)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(\sec\angle\alpha)^2-1}} = \sqrt{(\csc\angle\alpha)^2-1},$$

$$\sec\angle\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-(\text{sen}\angle\alpha)^2}} = \sqrt{1+(\tan\angle\alpha)^2} = \frac{1}{\cos\angle\alpha} = \frac{\sqrt{1+(\cot\angle\alpha)^2}}{\cot\angle\alpha} = \frac{\csc\angle\alpha}{\sqrt{(\csc\angle\alpha)^2-1}} \text{ y}$$

$$\csc\angle\alpha = \frac{1}{\text{sen}\angle\alpha} = \frac{\sqrt{1+(\tan\angle\alpha)^2}}{\tan\angle\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1-(\cos\angle\alpha)^2}} = \sqrt{1+(\cot\angle\alpha)^2} = \frac{\sec\angle\alpha}{\sqrt{(\sec\angle\alpha)^2-1}}.$$

Más adelante daremos demostraciones geométricas de algunas de las identidades del teorema anterior.

8.2.2. Teorema. En los siguientes cuadros damos las fórmulas para la solución de triángulos rectángulos: Supongamos que ΔABC es un triángulo rectángulo con hipotenusa c.

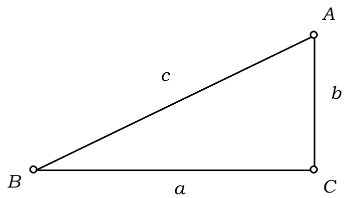


Figura 8.16

Dados	Encontrar	Fórmula
a, $\angle A$	$\angle B$, b, c	$\angle B = \angle 90 - \angle A$ $b = a\cot\angle A$ $c = \dfrac{a}{\text{sen}\angle A} = a\csc\angle A$
a, $\angle B$	$\angle A$, b, c	$\angle A = \angle 90 - \angle B$ $b = a\tan\angle B$ $c = \dfrac{a}{\cos\angle B} = a\sec\angle B$
c, $\angle A$	$\angle B$, a, b	$\angle B = \angle 90 - \angle A$ $a = c\,\text{sen}\angle A$ $b = c\cos\angle A$
a, b	$\angle A$, $\angle B$, c	$\tan\angle A = \dfrac{a}{b}$ $\tan\angle B = \dfrac{b}{a}$ $c = \sqrt{a^2+b^2}$
a, c	$\angle A$, $\angle B$, b	$\text{sen}\angle A = \dfrac{a}{c}$ $\cos\angle B = \dfrac{a}{c}$ $b = \sqrt{c^2-a^2}$

8.2.3. Teorema. Para la solución de triángulos no rectángulos tenemos las siguientes fórmulas:
Supongamos que ΔABC es un triángulo sin ángulo recto.

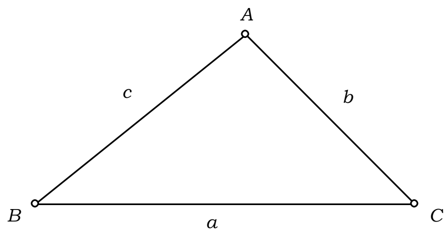


Figura 8.17

Dados	Encontrar	Fórmula
$a, b, \angle C$	$\angle A, \angle B, c$	$\tan\frac{\angle A-\angle B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{\angle C}{2}$ $\angle A = (\angle 90 - \frac{\angle C}{2}) + \frac{\angle A-\angle B}{2}$ $\angle B = (\angle 90 - \frac{\angle C}{2}) - \frac{\angle A-\angle B}{2}$ $c = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\angle C}$
$c, \angle A, \angle B$	$\angle C, a, b$	$\angle C = \angle 180 - (\angle A + \angle B)$ $a = \frac{c}{\operatorname{sen}\angle C}\operatorname{sen}\angle A$ $b = \frac{c}{\operatorname{sen}\angle C}\operatorname{sen}\angle B$
$a, b, \angle A$	$\angle B, \angle C, c$	$\operatorname{sen}\angle B = \frac{b}{a}\operatorname{sen}\angle A$ $\angle C = \angle 180 - (\angle A + \angle B)$ $c = \frac{a}{\operatorname{sen}\angle A}\operatorname{sen}\angle C$
a, b, c	$\angle A, \angle B, \angle C$	$\cos\angle A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ $\cos\angle B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ $\angle C = \angle 180 - (\angle A + \angle B)$

8.2.4. Teorema de las Proyecciones. En todo triángulo ΔABC se cumplen las siguientes identidades:

$$a = c\cos\angle B + b\cos\angle C,$$
$$b = c\cos\angle A + a\cos\angle C \text{ y}$$
$$c = a\cos\angle B + b\cos\angle A.$$

Prueba: Basta con demostrar la primera igualdad, las dos restantes se demuestran de forma análoga. Supongamos primero que $\angle B$ es un ángulo agudo.

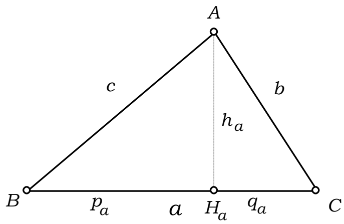


Figura 8.18

Tenemos entonces que

$$\cos\angle B = \frac{p_a}{c} \text{ y } \cos\angle C = \frac{q_a}{b}.$$

De aquí se sigue la identidad

$$a = p_a + q_a = c\cos\angle B + b\cos\angle C.$$

Si $\angle B$ es un ángulo recto, el resultado es inmediato de la definición.
Ahora supongamos que $\angle B$ es obtuso.

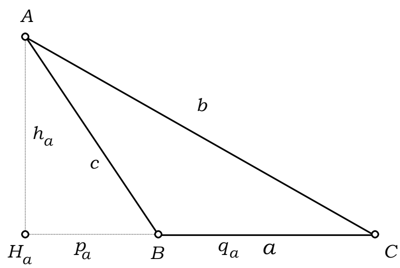


Figura 8.19

En este caso sabemos que

$$\cos(180 - \angle B) = -\cos\angle B = \frac{p_a}{c} \text{ y } \cos\angle C = \frac{q_a}{b}.$$

De donde hallamos que

$$a = a - q_a + q_a = -(q_a - a) + q_a = -p_a + q_a$$
$$= c\cos\angle B + b\cos\angle C. \clubsuit$$

8.2.5. Teorema. En todo triángulo se cumplen las siguientes afirmaciones:
1. El cuadrado del lado opuesto a un ángulo agudo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble del producto de uno de estos lados por la proyección del otro sobre él.
2. El cuadrado del lado opuesto a un ángulo obtuso es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, más el doble del producto de uno de estos lados por la proyección del otro sobre él.

Prueba: 1. Supongamos que $\angle A$ es un ángulo agudo.

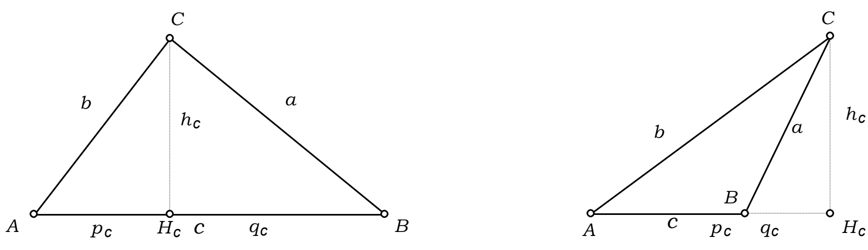


Figura 8.20

Según el Teorema 8.1.2 (2), sabemos que

$$h_c^2 = b^2 - p_c^2 = a^2 - q_c^2$$
$$a^2 - b^2 = q_c^2 - p_c^2.$$

Como $q_c^2 = (c - p_c)^2 = c^2 - 2c\,p_c + p_c^2$, se sigue que

$$a^2 = b^2 + q_c^2 - p_c^2 = b^2 + c^2 - 2c\,p_c + p_c^2 - p_c^2 = b^2 + c^2 - 2c\,p_c.$$

2. Supongamos que $\angle A$ es obtuso.

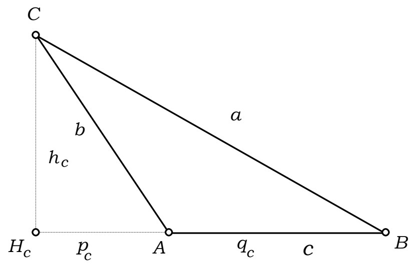


Figura 8.21

Como en el caso anterior, comenzamos de la identidad

$$a^2 - b^2 = q_c^2 - p_c^2 .$$

Ya que $q_c = c + p_c$, vemos entonces que

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + q_c^2 - p_c^2 \\ &= b^2 + (c+p)^2 - p_c^2 \\ &= b^2 + c^2 + 2c\,p_c + p_c^2 - p_c^2 \\ &= b^2 + c^2 + 2c\,p_c . \clubsuit \end{aligned}$$

8.2.6. Corolario. Sea ΔABC un triángulo arbitrario.

1. El ángulo $\angle A$ es agudo si y solo si $a^2 < b^2 + c^2$.
2. El ángulo $\angle A$ es obtuso si y solo si $a^2 > b^2 + c^2$.
3. El ángulo $\angle A$ es recto si y solo si $a^2 = b^2 + c^2$.

Prueba: La necesidad del enunciado del tercer inciso es el Teorema de Pitágoras (8.1.2 (2)). Las necesidades de los enunciados de los incisos primero y segundo son consecuencia de teorema anterior. Procedemos solamente a probar las suficiencias de los tres enunciados.

1. Supongamos que $a^2 < b^2 + c^2$. Si $\angle A$ no es agudo, entonces $\angle A$ es recto u obtuso. Pero no puede ser recto porque contradice el Teorema de Pitágoras (8.1.2 (2)) y si fuera obtuso, por la condición necesaria del inciso 2, tendríamos la desigualdad $a^2 > b^2 + c^2$, la cual contradice nuestra suposición. Por consiguiente, $\angle A$ es agudo.

2. Supongamos que $a^2 > b^2 + c^2$. Si $\angle A$ no es obtuso, entonces $\angle A$ tendría que ser recto o agudo. Pero sabemos que no puede ser recto y si fuera agudo, por la necesidad del inciso 1, se cumpliría que $a^2 < b^2 + c^2$, lo cual es imposible. Por lo tanto, $\angle A$ debe ser obtuso.

3. Supongamos que $a^2 = b^2 + c^2$ y que $\angle A$ no es recto. Entonces, $\angle A$ es agudo u obtuso. Pero por las condiciones necesarias de los incisos primero y segundo, una de las desigualdades

$$a^2 < b^2 + c^2 \text{ o } a^2 > b^2 + c^2$$

debe cumplirse, pero esto no es posible. Así que $\angle A$ debe ser un ángulo recto. ♣

El tercer enunciado del Corolario 8.2.6 prueba que el recíproco del Teorema de Pitágoras se cumple. Posteriormente, daremos una demostración más geométrica de esta implicación (8.5.2).

8.2.7. Corolario. Si en un triángulo $\Delta(a,b,c)$ se cumple que $c^2 = b^2 + ac$, entonces el ángulo $\angle C$ es obtuso.

Prueba: Supongamos, que $\angle C$ no es obtuso. De nuestra hipótesis podemos ver que el ángulo $\angle C$ no puede ser recto. Así solo nos queda la posibilidad de que el ángulo $\angle C$ sea agudo. De acuerdo con el corolario anterior, hallamos que

$$\begin{gathered} b^2 + ac = c^2 < a^2 + b^2 \\ c < a. \end{gathered}$$

Por otro lado, la igualdad $b^2 = c(c - a)$ implica que $0 < c - a$, lo cual es imposible. Con esto se demuestra el corolario. ♣

8.2.8. Teorema (Ley de los Cosenos). En todo triángulo ΔABC se cumplen las siguientes identidades:

$$\cos\angle A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

$$\cos\angle B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \text{ y}$$

$$\cos\angle C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

Prueba: Basta con probar la primera igualdad. Consideremos primero el caso en que $\angle A$ es un ángulo agudo.

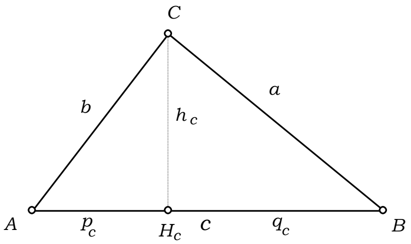


Figura 8.22

Según el Teorema 8.2.5, obtenemos que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cp_c.$$

Sabemos que $\cos\angle A = \frac{p_c}{b}$ y al sustituirlo vemos que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cp_c = b^2 + c^2 - 2cb\cos\angle A$$

$$\cos\angle A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

Si $\angle A$ es recto, tenemos que $\cos\angle A = 0$ y, por el Teorema 8.1.2 (2), concluimos que $0 = b^2 + c^2 - a^2$.

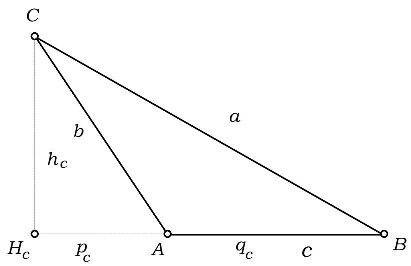


Figura 8.23

Supongamos ahora que $\angle A$ es obtuso. Aplicando el Teorema 8.2.5, encontramos que

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cp_c \text{ y}$$

como $\cos(180 - \angle A) = -\cos\angle A = \frac{p_c}{b}$, obtenemos que

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cp_c = b^2 + c^2 - 2cb\cos\angle A$$

$$\cos\angle A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}. \clubsuit$$

Una relación muy bonita que se deduce directamente del la Ley de los Cosenos (8.2.8) es la siguiente.

8.2.9. Corolario. En todo triángulo ΔABC se cumple que

$$\frac{\cos\angle A}{a} + \frac{\cos\angle B}{b} + \frac{\cos\angle C}{c} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}.$$

La siguiente prueba de la Ley de los Senos partiendo de la Ley de los Cosenos es tomada del libro [l-181].

8.2.10. Teorema (Ley de los Senos). En todo triángulo ΔABC se cumple que

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\angle A} = \frac{b}{\operatorname{sen}\angle B} = \frac{c}{\operatorname{sen}\angle C}.$$

Prueba: Por la Ley de los Cosenos, sabemos que $\cos\angle A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$. De donde se sigue que

$$(\operatorname{sen}\angle A)^2 = 1 - (\cos\angle A)^2 = \frac{4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}$$
$$= \frac{(2bc-(b^2+c^2-a^2))(2bc+(b^2+c^2-a^2))}{4b^2c^2}$$
$$= \frac{(2bc-b^2-c^2+a^2)(2bc+b^2+c^2-a^2)}{4b^2c^2}$$
$$= \frac{(a^2-(b-c)^2)((b+c)^2-a^2)}{4b^2c^2}$$
$$= \frac{(a-b+c)(a+b-c)(b+c+a)(b+c-a)}{4b^2c^2}$$
$$= \frac{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{4b^2c^2}.$$

Esto prueba la igualdad

$$\frac{(\operatorname{sen}\angle A)^2}{a^2} = \frac{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{4a^2b^2c^2}.$$

Por otra parte, sabemos que

$$(\operatorname{sen}\angle B)^2 = 1 - (\cos\angle B)^2 = \frac{4a^2c^2 - (a^2+c^2-b^2)^2}{4a^2c^2}$$
$$= \frac{(2ac-(a^2+c^2-b^2))(2ac+(a^2+c^2-b^2))}{4a^2c^2}$$
$$= \frac{(2ac-a^2-c^2+b^2)(2ac+a^2+c^2-b^2)}{4a^2c^2}$$
$$= \frac{(b^2-(-2ac+a^2+c^2))((2ac+a^2+c^2)-b^2)}{4a^2c^2}$$
$$= \frac{(b^2-(a-c)^2)((a+c)^2-b^2)}{4a^2c^2}$$
$$= \frac{(b-a+c)(b+a-c)(a+c-b)(a+c+b)}{4a^2c^2}$$
$$= \frac{(a+b+c)(a+c-b)(c+b-a)(a+b-c)}{4a^2c^2}.$$

De aquí, obtenemos la identidad

$$\frac{(\operatorname{sen}\angle B)^2}{b^2} = \frac{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{4a^2b^2c^2}.$$

Igualando, llegamos a que

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\angle A} = \frac{b}{\operatorname{sen}\angle B}.$$

De manera completamente similar se justifica la igualdad $\dfrac{a}{\operatorname{sen}\angle A} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\angle C}$. ♣

Veamos a continuación que las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente de la mitad de cada uno de los ángulos de un triángulo se pueden expresar en términos de las longitudes de los lados del mismo triángulo.

8.2.11. Teorema (Fórmulas de Briggs). En todo triángulo ΔABC se cumplen las siguientes identidades:

$$\operatorname{sen}\frac{\angle A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},$$

$$\operatorname{sen}\frac{\angle B}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}} \text{ y}$$

$$\operatorname{sen}\frac{\angle C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}.$$

Prueba: Como ya se ha hecho costumbre solo estableceremos la primera identidad. En cualquier triángulo tenemos, por la Ley de los Cosenos (8.2.8), que $\cos\angle A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ y, con base en una de las fórmulas del Teorema 8.2.1 (7), hallamos que

$$2(\operatorname{sen}\frac{\angle A}{2})^2 = 1-\cos\angle A = 1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{2bc-(b^2+c^2-a^2)}{2bc} = \frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc} =$$

$$\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc} = \frac{(a+(b-c))(a-(b-c))}{2bc} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$$

$$(\operatorname{sen}\frac{\angle A}{2})^2 = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc} = \frac{a-b+c}{2}\,\frac{a+b-c}{2}\,\frac{1}{bc} = \frac{(s-b)(s-c)}{bc}$$

$$\operatorname{sen}\frac{\angle A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}.\ \clubsuit$$

8.2.12. Teorema (Fórmulas de Briggs). En todo triángulo ΔABC se cumplen las siguientes identidades:

$$\cos\frac{\angle A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},$$

$$\cos\frac{\angle B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}} \text{ y}$$

$$\cos\frac{\angle C}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}.$$

Prueba: Es suficiente con demostrar la primera identidad. Según la Ley de los Cosenos (8.2.8) y una de las fórmulas del Teorema 8.2.1 (7), obtenemos que

$$2(\cos\frac{\angle A}{2})^2 = 1+\cos\angle A = 1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{2bc+(b^2+c^2-a^2)}{2bc} = \frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc} =$$

$$\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc} = \frac{((b+c)+a)((b+c)-a)}{2bc} = \frac{(a+b+c)(b+c-a)}{2bc}$$

$$(\cos\frac{\angle A}{2})^2 = \frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4bc} = \frac{a+b+c}{2}\,\frac{b+c-a}{2}\,\frac{1}{bc} = \frac{s(s-a)}{bc}$$

$$\cos\frac{\angle A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.\ \clubsuit$$

Mediante las fórmulas de los dos teoremas anteriores, podemos obtener directamente la expresión de la tangente de la mitad de un ángulo de un triángulo en función de las longitudes de sus lados.

8.2.13. Teorema (Fórmulas de Briggs). En todo triángulo ΔABC se cumplen las siguientes identidades:

$$\tan\frac{\angle A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}},$$

$$\tan\frac{\angle B}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}} \quad \text{y}$$

$$\tan\frac{\angle C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.$$

Prueba: Aplicando las fórmulas de los Teoremas 8.2.11 y 8.2.12 hallamos que

$$\tan\frac{\angle A}{2} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\angle A}{2}}{\cos\frac{\angle A}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}{\frac{s(s-a)}{bc}}} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.$$

De manera completamente similar, se establecen las dos identidades restantes. ♣

También el seno de un ángulo de un triángulo se puede expresar en términos de las longitudes de los lados del mismo triángulo.

8.2.14. Teorema. En todo triángulo ΔABC se cumplen las siguientes identidades:

$$\operatorname{sen}\angle A = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

$$\operatorname{sen}\angle B = \frac{2}{ac}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{y}$$

$$\operatorname{sen}\angle C = \frac{2}{ab}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Prueba: Como consecuencia de una de las fórmulas del Teorema 8.2.1 (6) y de las identidades de los Teoremas 8.2.11 y 8.2.12, tenemos que

$$\operatorname{sen}\angle A = 2\operatorname{sen}\frac{\angle A}{2}\cos\frac{\angle A}{2} = 2\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Las igualdades que faltan se demuestran de forma análoga. ♣

A continuación, daremos una cota inferior y una cota superior para la suma de los cosenos de los ángulos de un triángulo (este resultado aparece como el Problema No. 1997.4 en la revista Math. Gazette 81 No. 492 (1997), 474-475).

8.2.15. Teorema. En todo triángulo ΔABC se cumple la desigualdad

$$1 < \cos\angle A + \cos\angle B + \cos\angle C \le \frac{3}{2}.$$

Prueba (T. Madarasz): De la desigualad del Triángulo (4.4.9) sabemos que

$$0 < (b+c-a)(a+c-b)(a+b-c) = (ab^2 + ac^2 - a^3) + (a^2b + bc^2 - b^3) + (a^2c + b^2c - c^3) - 2abc$$

$$1 < \frac{a(b^2+c^2-a^2)}{2abc} + \frac{b(a^2+c^2-b^2)}{2abc} + \frac{c(a^2+b^2-c^2)}{2abc}$$

$$= \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \cos\angle A + \cos\angle B + \cos\angle C.$$

Así, queda demostrada la primera desigualdad. Para probar la segunda, partimos de las desigualdades

$$a^2 \geq a^2-(b-c)^2,\ b^2 \geq b^2-(c-a)^2 \text{ y } c^2 \geq c^2-(a-b)^2.$$

De donde se sigue que

$$a^2b^2c^2 \geq (a^2-(b-c)^2)(b^2-(c-a)^2)(c^2-(a-b)^2) =$$
$$(a-b+c)(a+b-c)(b-c+a)(b+c-a)(c-a+b)(c+a-b) = (b+c-a)^2(c+a-b)^2(a+b-c)^2$$
$$abc \geq (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$
$$3abc \geq (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) + 2abc =$$
$$(ab^2+ac^2-a^3)+(a^2b+bc^2-b^3)+(a^2c+b^2c-c^3)-2abc+2abc =$$
$$a(b^2+c^2-a^2)+b(a^2+c^2-b^2)+c(a^2+b^2-c^2)$$
$$\frac{3}{2} \geq \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \cos\angle A + \cos\angle B + \cos\angle C. \clubsuit$$

Daremos a continuación una demostración de una de las identidades trigonométricas más conocidas.

8.2.16. Teorema. Para todo ángulo $\angle\alpha$, se cumple la identidad $(\text{sen}\angle\alpha)^2 + (\cos\angle\alpha)^2 = 1$.

Prueba[a-40]: Primero consideremos el caso en que $\angle\alpha$ es agudo. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle C$ y tal que $\angle A \cong \angle\alpha$. Entonces, tenemos que

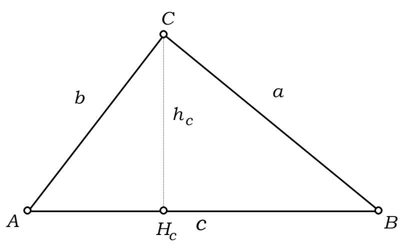


Figura 8.24

$$\text{sen}\angle A = \frac{h_c}{b},\ \cos\angle B = \frac{H_cB}{a} \text{ y}$$
$$\text{sen}\angle B = \frac{h_c}{a} \text{ y } \cos\angle A = \frac{AH_c}{b}.$$

De aquí podemos ver que

$$\text{sen}\angle A\cos\angle B + \text{sen}\angle B\cos\angle A = \frac{h_c}{b}\frac{H_cB}{a} + \frac{h_c}{a}\frac{AH_c}{b} = \frac{h_c}{ab}(H_cB + AH_c) = \frac{h_cc}{ab}.$$

Por el Teorema 8.2.1 (2), sabemos que

$$\text{sen}\angle B = \text{sen}(\angle 90 - \angle A) = \cos\angle A \text{ y } \cos\angle B = \cos(\angle 90 - \angle A) = \text{sen}\angle A.$$

Sustituyendo, llegamos a la igualdad

$$(\text{sen}\angle A)^2 + (\cos\angle A)^2 = \frac{h_cc}{ab},$$

y como $are(\Delta ABC) = \frac{ah_c}{2} = \frac{ab}{2}$, podemos concluir que

$$(\text{sen}\angle A)^2 + (\cos\angle A)^2 = 1.$$

Si $\angle\alpha$ es un ángulo recto, por definición, tenemos que $\text{sen}\angle 90 = 1$ y $\cos\angle 90 = 0$. Es claro que en este caso se cumple la identidad $(\text{sen}\angle\alpha)^2 + (\cos\angle\alpha)^2 = 1$.

Finalmente, supongamos que el ángulo $\angle\alpha$ es obtuso. Por definición, sabemos que $\text{sen}(\angle 180 - \angle a) = \text{sen}\angle a$ y $\cos(\angle 180 - \angle a) = -\cos\angle a$. Como $\angle 180 - \angle a$ es un ángulo agudo, podemos aplicar el primer caso al ángulo $\angle 180 - \angle a$ para obtener la relación

$$(\text{sen}\angle\alpha)^2 + (\cos\angle\alpha)^2 = (\text{sen}\angle\alpha)^2 + (-\cos\angle\alpha)^2 = (\text{sen}(\angle 180 - \angle a))^2 + (\cos(\angle 180 - \angle a))^2 = 1. \clubsuit$$

8.2.17. Teorema [a-59]. En todo triángulo ΔABC se cumple la igualdad

$$a^2 = ((b - c)\cos\frac{\angle A}{2})^2 + ((b+c)\operatorname{sen}\frac{\angle A}{2})^2.$$

Si $\angle\alpha$ es el ángulo opuesto al cateto $(b + c)\operatorname{sen}\frac{\angle A}{2}$ del triángulo rectángulo $\Delta(|b - c|\cos\frac{\angle A}{2}, (b + c)\operatorname{sen}\frac{\angle A}{2}, a)$, entonces $\tan\angle\alpha = \frac{b+c}{|b-c|}\tan\frac{\angle A}{2}$.

Prueba:

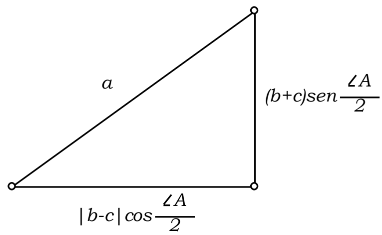


Figura 8.25

Como $\angle A < 180$, obtenemos que $\frac{\angle A}{2} < 90$ y, por ello, sen $\frac{\angle A}{2}$ y cos $\frac{\angle A}{2}$ son números positivos. De acuerdo con la Ley de los Cosenos (8.2.8), hallamos que $a^2 = b^2 + c^2 - 2cb\cos\angle A$. Según el Teorema 8.2.1,

$(\operatorname{sen}\frac{\angle A}{2})^2 + (\cos\frac{\angle A}{2})^2 = 1$ y $(\cos\frac{\angle A}{2})^2 - (\operatorname{sen}\frac{\angle A}{2})^2 = \cos\angle A$.

Sustituyendo,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cb\cos\angle A =$$

$$(b^2 + c^2)((\operatorname{sen}\frac{\angle A}{2})^2 + (\cos\frac{\angle A}{2})^2) - 2cb((\cos\frac{\angle A}{2})^2 - (\operatorname{sen}\frac{\angle A}{2})^2) =$$

$$(b - c)^2(\cos\frac{\angle A}{2})^2 + (b + c)^2(\operatorname{sen}\frac{\angle A}{2})^2 = ((b - c)\cos\frac{\angle A}{2})^2 + ((b + c)\operatorname{sen}\frac{\angle A}{2})^2.$$

De la definición de la tangente vemos que $\tan\angle\alpha = \dfrac{(b+c)\operatorname{sen}\frac{\angle A}{2}}{|b-c|\cos\frac{\angle A}{2}} = \dfrac{b+c}{|b-c|}\tan\frac{\angle A}{2}$. ♣

La demostración sin palabras del siguiente teorema es de B. Bold [a-15].

8.2.18. Teorema. Para todo ángulo agudo $\angle\alpha$, se cumplen las identidades

$$\operatorname{sen}2\angle\alpha = 2\operatorname{sen}\angle\alpha\cos\angle\alpha \quad \text{y} \quad \cos\frac{\angle\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\angle\alpha}{2}}.$$

Prueba:

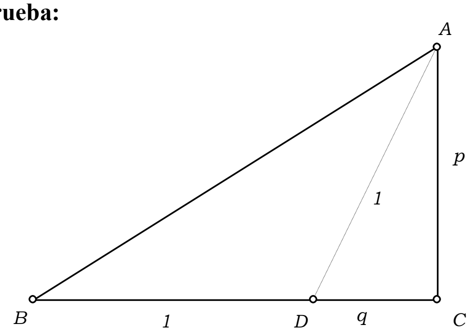


Figura 8.26

$m(\angle ACD) = 90$, $\angle BAD \cong \angle\alpha \cong \angle DBA$.

$|BD| = |AD| = 1$.

$p^2 + q^2 = 1$.

$$|AB| = \sqrt{p^2 + (q+1)^2} = \sqrt{p^2 + 1 + 2q + q^2} = \sqrt{2+2q}.$$

$\operatorname{sen}2\angle\alpha = p$, $\cos2\angle\alpha = q$.

$$2\text{sen}\angle\alpha\cos\angle\alpha = 2\frac{p}{\sqrt{2+2q}}\frac{1+q}{\sqrt{2+2q}} = \frac{2p(1+q)}{2+2q} = p = \text{sen}2\angle\alpha.$$

$\angle BAD \cong \dfrac{\angle\alpha}{2} \cong \angle DBA$, $\text{sen}\angle\alpha = p$, $\cos\angle\alpha = q$.

$$\cos\frac{\angle\alpha}{2} = \frac{1+q}{\sqrt{2+2q}}$$

$$(\cos\frac{\angle\alpha}{2})^2 = \frac{(1+q)^2}{2+2q} = \frac{1+q}{2} = \frac{1+\cos\angle\alpha}{2}$$

$$\cos\frac{\angle\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\angle\alpha}{2}}. \clubsuit$$

8.2.19. Teorema [a-118]. En cualquier triángulo rectángulo ΔABC con ángulo recto $\angle C$ se cumplen las identidades

$$\tan\frac{\angle A}{2} = \frac{c-b}{a} \text{ y } \tan\frac{\angle B}{2} = \frac{c-a}{b}.$$

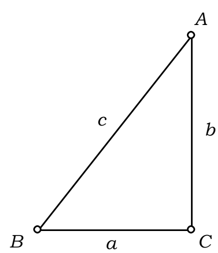


Figura 8.27

Prueba: Según una de las fórmulas del Teorema 8.2.1 (7), sabemos que

$$\tan\frac{\angle A}{2} = \frac{\text{sen}\angle A}{1+\cos\angle A} = \frac{\frac{a}{c}}{1+\frac{b}{c}} = \frac{a}{c+b} \text{ y } \tan\frac{\angle B}{2} = \frac{\text{sen}\angle B}{1+\cos\angle B} = \frac{\frac{b}{c}}{1+\frac{a}{c}} = \frac{b}{c+a}.$$

De acuerdo con el Teorema de Pitágoras (8.1.2 (2)), se tiene la igualdad $a^2 + b^2 = c^2$. Por consiguiente,

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c-b)(c+b) \qquad b^2 = c^2 - a^2 = (c-a)(c+a)$$

$$\frac{a}{c+b} = \frac{c-b}{a}, \qquad \text{y} \qquad \frac{b}{c+a} = \frac{c-a}{b}.$$

Por lo tanto,

$$\tan\frac{\angle A}{2} = \frac{c-b}{a} \text{ y } \tan\frac{\angle B}{2} = \frac{c-a}{b}. \clubsuit$$

El siguiente resultado nos dice cómo calcular el seno y el coseno de un ángulo de medida 15 mediante una división adecuada de un triángulo rectángulo, la idea original de este procedimiento es de R. J. Clarke [a-29].

8.2.20. Teorema. sen$\angle 15 = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ y cos$\angle 15 = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$.

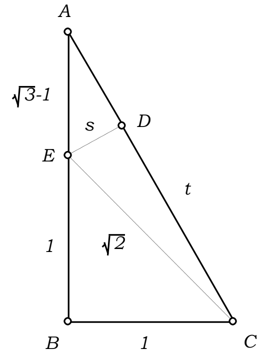


Figura 8.28

Prueba: En la figura 8.28, tenemos un triángulo rectángulo ΔABC tal que $m(\angle A) = 30$, $m(\angle C) = 60$, $|BC| = |BE| = 1$, $|AC| = 2$ y $ED \perp AC$. De aquí podemos ver que $m(\angle ACE) = 15$ y sen$\angle A = \dfrac{s}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{1}{2}$. Como consecuencia, obtenemos que $s = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$. Por otra parte, sabemos que cos$\angle A = \dfrac{2-t}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Por consiguiente,

$$t = 2 - (\sqrt{3}-1)\cos\angle A = 2 - (\sqrt{3}-1)\frac{\sqrt{3}}{2} = 2 - \frac{3-\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

De aquí deducimos las identidades deseadas

$$\text{sen}\angle ACE = \frac{s}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \text{ y } \cos\angle 15 = \frac{t}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}. \clubsuit$$

El teorema que enunciamos enseguida es una modificación de un resultado de A. J. G. May [a-112].

8.2.21. Teorema. Si $2\angle\theta$ es un ángulo agudo y tan$\angle\theta = k$, entonces $\Delta(1, \dfrac{2k}{1-k^2}, \dfrac{1+k^2}{1-k^2})$ es un triángulo rectángulo en el cual el ángulo agudo opuesto al cateto de longitud $\dfrac{2k}{1-k^2}$ es igual a $2\angle\theta$.

Prueba: Del Teorema 8.2.1 (6) hallamos que tan$2\angle\theta = \dfrac{2\tan\angle\theta}{1-(\tan\angle\theta)^2}$. Por consiguiente, tan$2\angle\theta = \dfrac{2k}{1-k^2}$. Puesto que

$$1^2 + \left(\frac{2k}{1-k^2}\right)^2 = \frac{1-2k^2+k^4+4k^2}{(1-k^2)^2} = \frac{1+2k^2+k^4}{(1-k^2)^2} = \left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2,$$

por el Teorema 8.2.6 (3) se sigue que $\Delta(1, \dfrac{2k}{1-k^2}, \dfrac{1+k^2}{1-k^2})$ es un triángulo rectángulo. Como tan$2\angle\theta = \dfrac{2k}{1-k^2}$, tenemos entonces que el ángulo agudo opuesto al cateto de longitud $\dfrac{2k}{1-k^2}$ es igual a $2\angle\theta$. ♣

8.3. Cevianas

8.3.1. Definición. Una *ceviana* de un triángulo es un segmento que une uno de sus vértices con un punto de la recta que contiene al lado opuesto de dicho vértice.

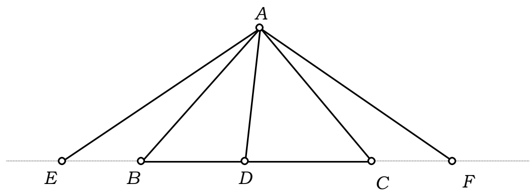


Figura 8.29

En la figura 8.29, AD, AE y AF son ejemplos de cevianas del triángulo ΔABC. Las alturas, las bisectrices y las medianas de un triángulo son los ejemplos más conocidos de cevianas.

El Teorema 4.3.11 se puede reescribir de la siguiente manera dentro del contexto de cevianas:

8.3.2. Teorema. Toda recta media de un triángulo corta en su punto medio a toda ceviana que pasa por el vértice opuesto al lado paralelo a dicha recta media.

En la figura 8.30, l es la recta media del triángulo ΔABC que es paralela a BC y corta a las cevianas AD, AE y AF en sus puntos medios L, M y N, respectivamente.

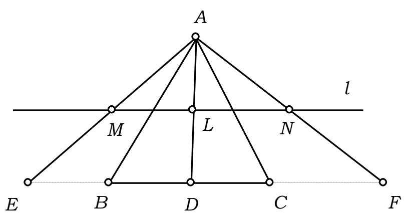


Figura 8.30

8.3.3. Teorema de la Razón Cruzada. Sea ΔABC un triángulo. Para todo punto D sobre la recta $\overleftrightarrow{BC}$, se cumple la identidad

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{c\,\text{sen}\,\angle BAD}{b\,\text{sen}\,\angle DAC}.$$

Prueba: Fijemos un punto $D \in \overleftrightarrow{BC}$. Analicemos cada uno de los tres casos posibles por separado:
Caso I. $D \in BC$.

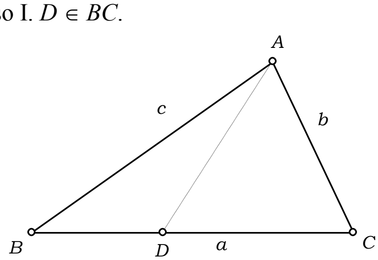


Figura 8.31

Por la Ley de los senos (8.2.10), hallamos que

$$\frac{c}{\text{sen}\,\angle ADB} = \frac{|BD|}{\text{sen}\,\angle BAD} \text{ y } \frac{b}{\text{sen}\,\angle CDA} = \frac{|DC|}{\text{sen}\,\angle DAC}.$$

De donde se sigue que

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{c\dfrac{\text{sen}\,\angle BAD}{\text{sen}\,\angle ADB}}{b\dfrac{\text{sen}\,\angle DAC}{\text{sen}\,\angle CDA}} = \frac{c\,\text{sen}\,\angle BAD}{b\,\text{sen}\,\angle DAC},$$

ya que $\text{sen}\angle ADB = \text{sen}(\angle 180 - \angle ADB) = \text{sen}\,\angle CDA$ (8.2.1).

Caso II. C precede a D sobre la recta $\overleftrightarrow{BC}$.

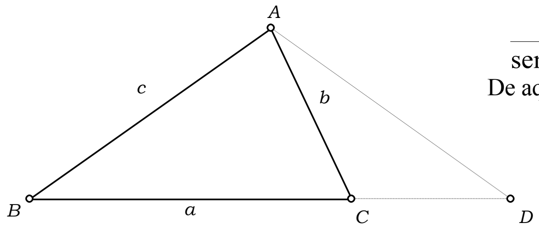


Figura 8.32

Otra vez, aplicando la Ley de los Senos (8.2.10), vemos que $\dfrac{c}{\operatorname{sen}\angle ADB}=\dfrac{|BD|}{\operatorname{sen}\angle BAD}$ y $\dfrac{b}{\operatorname{sen}\angle ADB}=\dfrac{|DC|}{\operatorname{sen}\angle DAC}$.
De aquí,

$$\frac{|BD|}{|DC|}=\frac{c\dfrac{\operatorname{sen}\angle BAD}{\operatorname{sen}\angle ADB}}{b\dfrac{\operatorname{sen}\angle DAC}{\operatorname{sen}\angle ADB}}=\frac{c\operatorname{sen}\angle BAD}{b\operatorname{sen}\angle DAC}.$$

Caso III. D precede a B sobre la recta $\overleftrightarrow{BC}$.

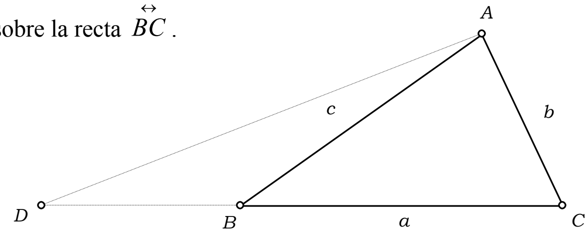


Figura 8.33

Procediendo como en los dos casos anteriores, obtenemos que $\dfrac{c}{\operatorname{sen}\angle BDA}=\dfrac{|BD|}{\operatorname{sen}\angle BAD}$ y $\dfrac{b}{\operatorname{sen}\angle BDA}=\dfrac{|DC|}{\operatorname{sen}\angle DAC}$. Por consiguiente, $\dfrac{|BD|}{|DC|}=\dfrac{c\dfrac{\operatorname{sen}\angle BAD}{\operatorname{sen}\angle BDA}}{b\dfrac{\operatorname{sen}\angle DAC}{\operatorname{sen}\angle BDA}}=\dfrac{c\operatorname{sen}\angle BAD}{b\operatorname{sen}\angle DAC}$. ♣

El lector puede consultar el libro [l-188] para ver algunas generalizaciones del Teorema de la Fórmula de la Razón Cruzada.

8.3.4. Teorema de la Bisectriz Interior. La bisectriz de un triángulo divide al lado opuesto en segmentos proporcionales a los lados adyacentes. Recíprocamente, si en un triángulo ΔABC tenemos un punto $D\in BC$ que satisfaga la identidad $\dfrac{|BD|}{|DC|}=\dfrac{c}{b}$, entonces $\overrightarrow{AD}$ es la bisectriz del ángulo $\angle A$.

Prueba: Por el Teorema de la Razón Cruzada (8.3.3), sabemos que $\dfrac{|BB_a|}{|B_aC|}=\dfrac{c\operatorname{sen}\angle BAB_a}{b\operatorname{sen}\angle B_aAC}=\dfrac{c}{b}$. Para el recíproco, supongamos que $D\in BC$ y $\dfrac{|BD|}{|DC|}=\dfrac{c}{b}$. Por la primera parte del teorema, tenemos que $\dfrac{|BB_a|}{|B_aC|}=\dfrac{|BD|}{|DC|}=\dfrac{c}{b}$. Del Lema 6.1.8 vemos que $B_a=D$ y, por tanto, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB_a}$ es la bisectriz del ángulo $\angle A$. ♣

8.3.5. Teorema de la Bisectriz Exterior. La bisectriz del ángulo exterior adyacente al ángulo $\angle A$ de un triángulo ΔABC es paralela al lado opuesto, o bien, satisface que $\dfrac{|BE_a|}{|E_aC|}=\dfrac{c}{b}$. Recíprocamente, si $D\in\overleftrightarrow{BC}-BC$ y $\dfrac{|BD|}{|DC|}=\dfrac{c}{b}$, entonces $\overrightarrow{AD}$ es la bisectriz del ángulo exterior del triángulo ΔABC adyacente a $\angle A$.

Prueba: Para la posición de E_a sobre la recta $\overleftrightarrow{BC}$ hay dos posibilidades: una es que C preceda a E_a y la otra es que E_a preceda a B.

Figura 8.34

Supongamos primero que C preceda a E_a. Por C trazamos una recta paralela a AE_a que corte al lado AB en el punto E. Entonces, por el Teorema 6.1.13, $\frac{|BE_a|}{|E_aC|} = \frac{|AB|}{|EA|} = \frac{c}{|EA|}$. Por otro lado, sabemos que $\angle CEA \cong \angle E_aAF$ (3.4.6) y $\angle ACE \cong \angle CAE_a$ (3.4.4). Pero como $\overrightarrow{AE_a}$ es la bisectriz del ángulo $\angle CAF$, $\angle CAE_a \cong \angle E_aAF$. Lo cual implica que $\angle CEA \cong \angle ACE$. Según el Teorema 3.2.9, el triángulo ΔEAC resulta ser isósceles con $EA \cong AC$. De donde se sigue que $\frac{|BE_a|}{|E_aC|} = \frac{c}{b}$. Para el caso en que E_a preceda a B, trazamos una recta paralela a AE_a que pase por B y corte a AC en el punto E (ver figura 8.34) y razonamos como en el primer caso.

Para el recíproco, supongamos que $D \in \overleftrightarrow{BC} - BC$ y que $\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{c}{b}$. Si $b = c$, tendríamos que $BD \cong DC$, lo cual es imposible. Por ello, debemos tener que $b \neq c$. Por el Teorema 4.3.3, hallamos que la bisectriz del ángulo exterior adyacente a $\angle A$ debe corta a la recta $\overleftrightarrow{BC}$. De acuerdo con la primera parte del teorema, sabemos que $\frac{|BE_a|}{|E_aC|} = \frac{c}{b} = \frac{|BD|}{|DC|}$. Como $D \in \overleftrightarrow{BC} - BC$, en virtud del Lema 6.1.9, concluimos que $D = E_a$. ♣

El siguiente teorema es consecuencia inmediata del Teorema 2.12.3.

8.3.6. Teorema. En todo triángulo ΔABC se cumple que $b_a \perp e_a$, $b_b \perp e_b$ y $b_c \perp e_c$.

8.3.7. Teorema [a-150]. El cuadrado de la longitud de una bisectriz de un triángulo es igual al producto de las longitudes de los lados adyacentes, menos el producto de las longitudes de los segmentos en que queda dividido el lado opuesto por dicha bisectriz.

Prueba:

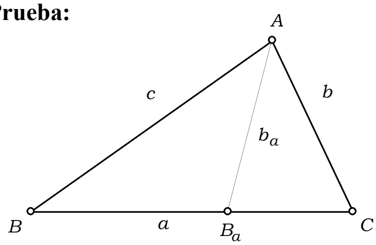


Figura 8.35

Por el Teorema de la Bisectriz Interior (8.3.4), sabemos que

$$\frac{b}{|B_aC|} = \frac{c}{|BB_a|},$$

y por la Ley de los Cosenos (8.2.8), hallamos que

$$\cos\angle BAB_a = \frac{c^2 + b_a{}^2 - |BB_a|^2}{2cb_a} \text{ y}$$

$$\cos\angle B_aAC = \frac{b_a{}^2 + b^2 - |B_aC|^2}{2bb_a}.$$

Igualando obtenemos que

$$\frac{c^2 + b_a{}^2 - |BB_a|^2}{2cb_a} = \frac{b_a{}^2 + b^2 - |B_aC|^2}{2bb_a}$$

$$b(c^2 + b_a{}^2 - |BB_a|^2) = c(b_a{}^2 + b^2 - |B_aC|^2)$$

$$b_a{}^2(b-c) = bc(b-c) - (c|B_a\mathrm{C}|^2 - b|BB_a|^2).$$

Pero como

$c|B_aC|^2 - b|BB_a|^2 = c|B_aC||B_aC| - b|BB_a||BB_a| = b|BB_a||B_aC| - c|B_aC||BB_a| = |BB_a||B_aC|(b-c)$,

tenemos entonces que

$$b_a{}^2(b-c) = bc(b-c) - |B_aB||B_aC|(b-c)$$

$$b_a{}^2 = bc - |B_aB||B_aC|. \;\clubsuit$$

8.3.8. Teorema. Si ΔABC es un triángulo rectángulo en $\angle C$, entonces

$$|AB_b| = \frac{cb}{a+c},\quad |CB_b| = \frac{ab}{a+c} \;\text{ y }\; b_b = a\sqrt{\frac{2c}{a+c}}.$$

Prueba: Pongamos $x = |CB_b|$. Según el Teorema de la Bisectriz Interior (8.3.4), $\dfrac{b-x}{c} = \dfrac{x}{a}$. De donde hallamos que $ab - ax = xc$ y, por ello,

$$x = \frac{ab}{a+c} = |CB_b|.$$

De acuerdo con el Teorema de Pitágoras (8.1.2 (2)),

$$b_b = \sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2b^2}{(a+c)^2}} = \frac{a}{a+c}\sqrt{(a+c)^2 + b^2} =$$

$$\frac{a}{a+c}\sqrt{a^2 + 2ac + c^2 + b^2} = \frac{a}{a+c}\sqrt{2c^2 + 2ac}$$

$$= a\sqrt{\frac{2c}{a+c}}.$$

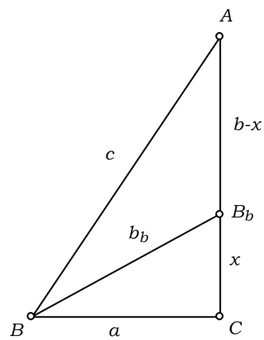


Figura 8.36

Finalmente, obtenemos que

$$|AB_b| = b - x = b - \frac{ab}{a+c} = \frac{ba + bc - ab}{a+c} = \frac{cb}{a+c}. \;\clubsuit$$

La relación entre cualquier ceviana de un triángulo y los lados del mismo está dada por el siguiente teorema.

8.3.9. Teorema (Fórmula de la Ceviana). Sean ΔABC un triángulo y $d = AD$ una de sus cevianas tal que $D \in \overleftrightarrow{BC}$. Entonces, se cumple una de las siguientes identidades:

1. $d^2 = b^2p + c^2q - a^2pq$ si $D \in BC$,
2. $d^2 = b^2p - c^2q + a^2pq$ si $C \in BD$ y
3. $d^2 = c^2q - b^2p + a^2pq$ si $B \in DC$,

en donde $p = \dfrac{|BD|}{a}$ y $q = \dfrac{|DC|}{a}$.

Prueba: Pongamos $e = |BD|$ y $f = |DC|$. Hay tres posibles ubicaciones de los puntos B, C y D que serán consideradas separadamente. Primero consideremos el caso cuando $D \in BC$.

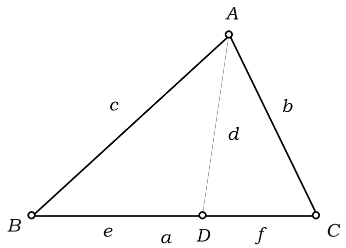


Figura 8.37

De acuerdo con la Ley de los Cosenos (8.2.8), sabemos que

$$\cos\angle ADB = \frac{d^2+e^2-c^2}{2de} = -\cos\angle CDA = -\frac{d^2+f^2-b^2}{2df}$$

$$f(d^2+e^2-c^2) = e(b^2-d^2-f^2)$$

$$d^2(e+f) = eb^2+fc^2-ef^2-fe^2$$

$$d^2 = b^2p+c^2q-\frac{ef(e+f)}{a}$$

$$d^2 = b^2p+c^2q-ef$$

$$d^2 = b^2p+c^2q-a^2pq.$$

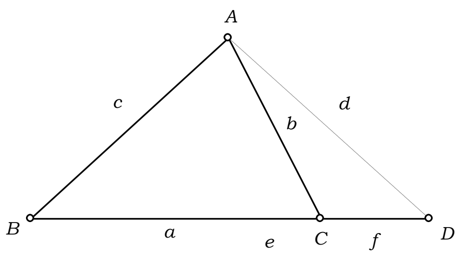


Figura 8.38

Supongamos ahora que $C \in BD$. Aplicando el caso anterior al triángulo ΔABD y a su ceviana AC, obtenemos que

$$b^2 = \frac{|BC|}{|BD|}d^2 + \frac{|DC|}{|BD|}c^2 - |BD|^2\frac{|BC|}{|BD|}\frac{|DC|}{|BD|}$$

$$|BD|b^2 = |BC|d^2 + |DC|c^2 - |BD||BC||DC|$$

$$ad^2 = |BD|b^2 - |DC|c^2 + a|BD||DC|$$

$$d^2 = \frac{|BD|}{a}b^2 - \frac{|DC|}{a}c^2 + |BD||DC|$$

$$d^2 = b^2p - c^2q + a^2pq.$$

De igual modo, se demuestra que si $B \in DC$, entonces $d^2 = c^2q - b^2p + a^2pq$. ♣

El siguiente resultado se le atribuye a M. Stewart.

8.3.10. Teorema de Stewart. Sean ΔABC un triángulo y $d = AD$ una ceviana, con $D \in BC$. Entonces

$$b^2e + c^2f = a(d^2+ef),$$

en donde $e = |BD|$ y $f = |DC|$.

Prueba: De la Fórmula de la Ceviana (8.3.9) sabemos que

$$d^2 = b^2p + c^2q - a^2pq,$$

en donde $p = \frac{e}{a}$ y $q = \frac{f}{a}$. Sustituyendo hallamos que

$$d^2 = b^2\frac{e}{a} + c^2\frac{f}{a} - a^2\frac{e}{a}\frac{f}{a}$$

$$d^2 = b^2\frac{e}{a} + c^2\frac{f}{a} - ef$$

$$ad^2 = b^2e + c^2f - aef$$

$$b^2e + c^2f = ad^2 + aef = a(d^2+ef).$$ ♣

Una fórmula interesante parecida a la del Teorema de Pitágoras se encuentra en la nota de L. Hoehn [a-73] y se puede enunciar de la siguiente manera.

8.3.11. Teorema. Sean ΔABC un triángulo isósceles con $b = c$ y d una de sus cevianas con puntos extremos A y D. Si $D \in BC$, entonces $b^2 = d^2 + |BD||DC|$.

Prueba: De la Fórmula de la Ceviana (8.3.9) sabemos que

$$d^2 = \frac{|BD|}{a}b^2 + \frac{|DC|}{a}c^2 - |BD||DC| = \frac{b^2}{a}(|BD|+|DC|) - |BD||DC| = b^2 - |BD||DC|.$$

Por lo tanto, $b^2 = d^2 + |BD||DC|$. ♣

G. Darvasi [a-35] generalizó el resultado de L. Hoehn tal y como lo enunciamos a continuación.

8.3.12. Teorema. Sean ΔABC un triángulo y $D \in \overleftrightarrow{BC}$ tal que $AD \cong AC$. Pongamos $e = |BD|$.
1. Si $b > c$, entonces $b^2 = c^2 + ae$.
2. Si $b < c$, entonces $c^2 = b^2 + ae$.

Prueba: Los dos supuestos casos se ilustran en la siguiente figura:

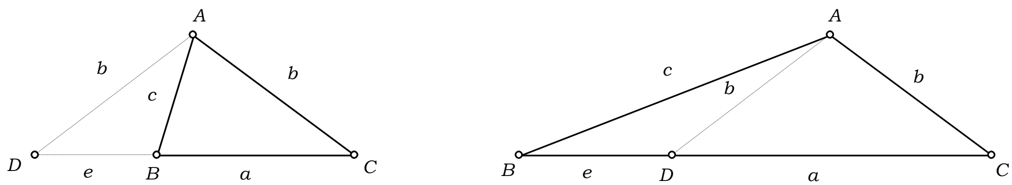


Figura 8.39

Las identidades se siguen directamente aplicando el Teorema 8.3.9 al triángulo ΔADC. La identidad del segundo inciso se sigue directamente del teorema anterior. ♣

El siguiente resultado aparece como el problema número 20.8 en la revista Math. Spectrum 21, no. 1, (1988 – 89), p. 31.

8.3.13. Teorema. Sean ΔABC un triángulo y $D \in BC$. Si $d = |AD|$, entonces $d^2 = bc - |BD||DC|$ si y solo si $b = c$ o $d = b_a$.

Prueba: *Necesidad*(A. Sarkar). Pongamos $e = |BD|$ y $f = |DC|$. Por la Ley de los Cosenos (8.2.8) aplicada a los triángulos ΔABD y ΔADC, hallamos que

$$c^2 = e^2 + d^2 + 2ed\cos\angle ADB \text{ y}$$
$$b^2 = f^2 + d^2 + 2fd\cos\angle CDA.$$

Como $\angle ADB$ y $\angle CDA$ son suplementarios,

$$\cos\angle ADB = -\cos\angle CDA.$$

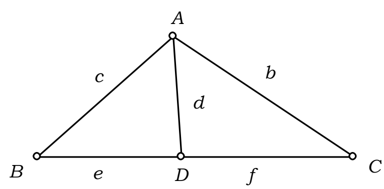


Figura 8.40

De aquí se sigue que

$$fc^2 = fe^2 + fd^2 + f2ed\cos\angle ADB \text{ y}$$
$$eb^2 = ef^2 + ed^2 - e2fd\cos\angle ADB.$$

Al sumar ambas identidades vemos que

$$fc^2 + eb^2 = fe^2 + fd^2 + ef^2 + ed^2.$$

Sabemos por suposición que $d^2 = bc - ef$. Sustituyendo obtenemos como resultado que

$$fc^2 + eb^2 = fe^2 + f(bc - ef) + ef^2 + e(bc - ef) = f\,bc + ebc$$
$$fc^2 + eb^2 - f\,bc - ebc = 0$$
$$(b - c)(eb - fc) = 0.$$

De aquí podemos deducir que $b = c$ o $eb = fc$. Si $eb = fc$, por el inverso del Teorema de la Bisectriz Interior (8.3.4), concluimos que $d = b_a$.

Suficiencia. Es consecuencia directa de los Teoremas 8.3.4, 8.3.9 y 8.3.11. ♣

A continuación, veremos que las longitudes de las medianas, las bisectrices y las alturas de un triángulo se pueden obtener por medio de las longitudes de los lados del triángulo. Empezamos con las medianas.

8.3.14. Teorema. En todo triángulo ΔABC se cumplen las identidades

$$m_a = \sqrt{\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}a^2},$$
$$m_b = \sqrt{\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}b^2} \text{ y}$$
$$m_c = \sqrt{\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{4}c^2}.$$

Prueba: Solo probaremos la primera igualdad. Según la Fórmula de la Ceviana (8.3.9), hallamos que $m_a^2 = b^2 p + c^2 q - a^2 pq$, en donde $p = \frac{|BM_a|}{a}$ y $q = \frac{|M_aC|}{a}$. Pero como $p = q = \frac{1}{2}$, al sustituir obtenemos que

$$m_a^2 = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}a^2$$

y, por consiguiente, $m_a = \sqrt{\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}a^2}$. ♣

Para las bisectrices de un triángulo, tenemos las siguientes fórmulas.

8.3.15. Teorema. En todo triángulo ΔABC se cumplen las identidades

$$b_a = 2\frac{\sqrt{bcs(s-a)}}{b+c},$$
$$b_b = 2\frac{\sqrt{acs(s-b)}}{a+c} \text{ y}$$
$$b_c = 2\frac{\sqrt{abs(s-c)}}{a+b}.$$

Prueba: De acuerdo con la Fórmula de la Ceviana (8.3.9), tenemos que $b_a^2 = b^2 p + c^2 q - a^2 pq$, en donde $p = \frac{|BB_a|}{a}$ y $q = \frac{|B_aC|}{a}$. Por el Teorema de la Bisectriz Interior (8.3.4), sabemos que $\frac{c}{b} = \frac{|BB_a|}{|B_aC|}$. Lo cual nos asegura que $\frac{c}{b} = \frac{p}{q}$. Como $p + q = 1$, se tiene que $p + \frac{pb}{c} = 1$ y de aquí vemos que $p = \frac{c}{b+c}$. Similarmente, se establece la identidad $q = \frac{b}{b+c}$. Ahora hacemos algunas sustituciones,

$$b_a^2 = b^2\frac{c}{b+c} + c^2\frac{b}{b+c} - a^2\frac{c}{b+c}\frac{b}{b+c} = \frac{cb^2}{b+c} + \frac{bc^2}{b+c} - \frac{cba^2}{(b+c)^2} =$$
$$\frac{cb^2(b+c) + bc^2(b+c) - cba^2}{(b+c)^2} = \frac{cb(b^2 + bc + cb + c^2 - a^2)}{(b+c)^2}$$
$$= \frac{bc((b+c)^2 - a^2)}{(b+c)^2} = \frac{bc(b+c+a)(b+c-a)}{(b+c)^2} = \frac{4bcs(s-a)}{(b+c)^2}.$$

Por lo tanto, $b_a = 2\frac{\sqrt{bcs(s-a)}}{b+c}$. De manera muy similar, se establecen las identidades restantes. ♣

Usando la Fórmula de la Ceviana (8.3.9), D. C. Kay [l-192] da una elegante deducción de la fórmula para las alturas de un triángulo, pero solo considerando el caso cuando $H_a \in BC$. Para una demostración completa, usando esta misma idea, se necesitaría considerar al menos tres casos posibles y saber cuándo hay que reemplazar a p por q o a q por p. Aquí daremos una demostración estándar sin necesidad de considerar casos.

8.3.16. Teorema. En todo triángulo ΔABC se cumplen las identidades

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,,$$

$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \text{ y}$$

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,.$$

Prueba: Es suficiente con probar la última fórmula. Empleando el Teorema 8.2.5, observamos que si $\angle A$ es agudo, entonces $a^2 = b^2 + c^2 - 2c\,p_c$, y que si $\angle A$ es obtuso, entonces $a^2 = b^2 + c^2 + 2cp_c$. Por otra parte, aplicando el Teorema de Pitágoras (8.1.2 (2)), sabemos, en ambos casos, que $h_c^2 = b^2 - p_c^2$. Despejando, obtenemos que $p_c = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c}$ o $p_c = \dfrac{a^2-c^2-b^2}{2c}$. Pero en ambos casos, se cumple que

$$p_c^2 = \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)^2.$$

Es decir, el valor de p_c^2 no depende de la medida del ángulo $\angle A$. Por consiguiente,

$$h_c^2 = b^2 - p_c^2 = b^2 - \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)^2 = \frac{4c^2b^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{4c^2} =$$

$$\frac{(2cb+(b^2+c^2-a^2))(2cb-(b^2+c^2-a^2))}{4c^2} = \frac{((b+c)^2-a^2)(a^2-(b-c)^2)}{4c^2} =$$

$$\frac{(b+c-a)(b+c+a)(a-b+c)(a+b-c)}{4c^2}\,.$$

Pero como

$$a+b+c=2s,\ b+c-a=2(s-a),\ a+c-b=2(s-b) \text{ y } a+b-c=2(s-c),$$

hallamos entonces que

$$h_c^2 = \frac{2s2(s-a)2(s-b)2(s-c)}{4c^2} = \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{c^2}$$

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,. \ \clubsuit$$

Con una aplicación de las fórmulas dadas en el Teorema 8.3.16, se obtiene el recíproco del Teorema de la Desigualdad del Triángulo (4.4.9) que a continuación enunciamos y probamos.

8.3.17. Teorema. Si a, b y c son números reales positivos tales que $a + b > c$, $a + c > b$ y $b + c > a$, entonces existe un triángulo cuyos lados tienen longitudes a, b y c.

Prueba: Podemos suponer, sin perder generalidad, que $b \leq a$ y $c \leq a$. Pongamos

$$h = \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,,$$

este número está bien definido, ya que la hipótesis nos garantiza las desigualdades $s > a$, $s > b$ y $s > c$. Primero probaremos que $h \leq b$ y $h \leq c$. En efecto,

$$h^2 = \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{a^2} = \frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{4a^2} =$$

$$\frac{(b+c-a)(a+b-c)(a+b+c)(a-b+c)}{4a^2} = \frac{(b^2-(b+c)^2)((a+c)^2-b^2)}{4a^2}$$

$$= \frac{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2} = b^2 - \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right)^2 \leq b^2.$$

Por tanto, $h \leq b$. De manera completamente similar, se tiene que

$$h^2 = \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{a^2} = \frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{4a^2} =$$

$$\frac{(b+c-a)(a-b+c)(a+b+c)(a+b-c)}{4c^2} = \frac{(c^2-(b-a)^2)((a+b)^2-c^2)}{4a^2}$$

$$= \frac{4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2}{4a^2} = c^2 - \left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)^2 \leq c^2.$$

Por ello, $h \leq c$. Tiene ahora sentido definir $p = \sqrt{c^2-h^2}$ y $q = \sqrt{b^2-h^2}$. Si $p = 0$, entonces tenemos que

$$h^2 = c^2 - \left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)^2 = c^2$$

y, por tanto, $a^2 + c^2 = b^2$. En este caso, sobre una recta l ubicamos dos puntos B y C, de tal forma que $|BC| = a$ y, posteriormente, trazamos una recta m perpendicular a l en el punto B y sobre ella ubicamos un tercer punto A que satisfaga $|AB| = c$.

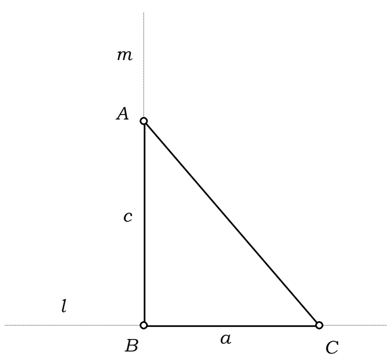


Figura 8.41

El triángulo ΔABC es un triángulo rectángulo con ángulo recto $\angle B$. Según el Teorema de Pitágoras (8.1.2 (2)), se cumple que $a^2 + c^2 = |AC|^2$ y como $a^2 + c^2 = b^2$, hallamos que $|AC| = b$. Esto testifica que ΔABC es el triángulo deseado. Si se cumple que $q = 0$, mediante un argumento muy similar probamos que a, b y c son los lados de un triángulo rectángulo con hipotenusa c.

Supongamos entonces que $p \neq 0 \neq q$. Ahora bien,

$$p + q = \sqrt{c^2-h^2} + \sqrt{b^2-h^2} = \sqrt{c^2 - \left(c^2 - \left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)^2\right)} + \sqrt{b^2 - \left(b^2 - \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right)^2\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right)^2} =$$

$$\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}=\frac{2a^2}{2a}=a.$$

Sobre una recta l ubicamos dos puntos B y C, de tal forma que $|BC| = a$ y marcamos el punto $H \in BC$ que divide a BC, de tal forma que $|BH| = p$ y $|HC| = q$. Trazamos una recta m perpendicular a l en el punto H y sobre la misma colocamos un tercer punto A tal que $|AH| = h$.

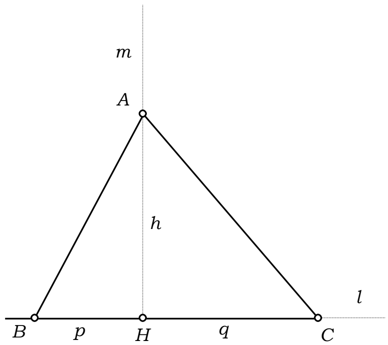


Figura 8.42

Tenemos así dos triángulos rectángulos ΔABH y ΔAHC con hipotenusas AB y AC, respectivamente. De acuerdo con el Teorema de Pitágoras (8.1.2 (2)),

$$p^2+h^2=|AB|^2 \text{ y } q^2+h^2=|AC|^2.$$

De donde se sigue que

$$|AB|^2=p^2+h^2=(\sqrt{c^2-h^2})^2+h^2=c^2 \text{ y}$$
$$|AC|^2=q^2+h^2=(\sqrt{b^2-h^2})^2+h^2=b^2.$$

Por lo tanto, $|BC| = a$, $|AC| = b$ y $|AC| = c$. Esto prueba que ΔABC es el triángulo deseado. ♣

Veamos ahora que también se cumple el inverso del Teorema 5.1.14.

8.3.18. Teorema. Si a, b, c y d son números reales positivos tales que

$$a < b + c + d,\ b < a + c + d,\ c < a + b + d \text{ y } d < a + b + c,$$

entonces existe un cuadrilátero cuyos lados tienen longitudes a, b, c y d.

Prueba: De nuestra hipótesis deducimos las desigualdades

$a - b < c + d$, $b - a < c + d$, $c - d < a + b$ y $d - c < a + b$.

Consideremos dos casos:

Caso I. $a + b \leq c + d$. Por consiguiente,

$$a - b < a + b \leq c + d,$$
$$b - a < a + b \leq c + d,$$
$$c - d < a + b \leq c + d \text{ y}$$
$$d - c < a + b \leq c + d.$$

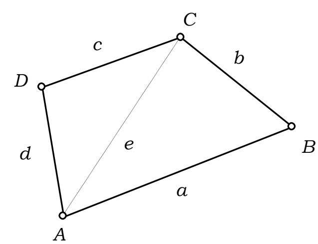


Figura 8.43

Caso II. $c + d \leq a + b$. De donde obtenemos que

$$a - b < c + d \leq a + b,$$
$$b - a < c + d \leq a + b,$$
$$c - d < c + d \leq a + b \text{ y}$$
$$d - c < c + d \leq a + b.$$

En ambos casos, podemos encontrar un número real positivo e tal que

$$a - b < e < c + d,\ b - a < e < c + d,\ c - d < e < a + b,\ d - c < e.$$

Por lo cual,

$$a < b + e,\ b < a + e,\ e < a + b,\ c < d + e,\ d < c + e \text{ y } e < c + d.$$

Aplicando la construcción del Teorema 8.3.17, obtenemos que a, b y e, y c, d y e son los lados de dos triángulos. Sean ΔABC y ΔDAC dichos triángulos. Si colocamos los triángulos ΔABC y ΔDAC como lo muestra la figura 8.43, encontramos que $\square ABCD$ es el cuadrilátero requerido. ♣

A continuación, enunciamos una de las propiedades de los triángulos rectángulos que está muy relacionada con los círculos.

8.3.19. Teorema. Si ΔABC es un triángulo rectángulo en $\angle A$, entonces

$$AM_a \cong BM_a \cong M_aC.$$

Prueba: Según el Teorema 8.1.2 (2) y la primera fórmula del Teorema 8.3.14, sabemos que

$$m_a = \sqrt{\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}a^2} = \sqrt{\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}.$$

Es decir,

$$|AM_a| = \frac{a}{2} = |BM_a| = |M_aC|.$$

$$AM_a \cong BM_a \cong M_aC. \clubsuit$$

En el trabajo de D. W. Stover [a-162] podemos encontrar muchas aplicaciones de los criterios de semejanza de triángulos. Una de ellas relaciona la proporción en que quedan divididas dos cevianas de un triángulo por su punto de intersección como a continuación veremos.

8.3.20. Teorema [a-162]. Sean ΔABC un triángulo, $P \in BC$, $Q \in AB$ y R el punto de intersección de AP y CQ. Si $p = |AQ|$, $q = |QB|$, $r = |BP|$ y $t = |PC|$, entonces

$$\frac{|CR|}{|RQ|} = \frac{tc}{pr} \text{ y } \frac{|AR|}{|RP|} = \frac{pa}{qt}.$$

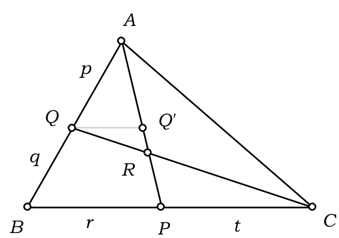


Figura 8.44

Prueba: Tracemos una recta paralela a BC que pase por Q y corte a la ceviana AP en el punto Q'. Por el primer criterio de semejanza de triángulos (6.2.6), hallamos que

$$\Delta RPC \sim \Delta RQ'Q \text{ y } \Delta ABP \sim \Delta AQ'Q.$$

Por lo tanto,

$$\frac{|CR|}{|RQ|} = \frac{|PC|}{|QQ'|} = \frac{|PC|}{|BP|}\frac{|BP|}{|QQ'|} = \frac{|PC|}{|BP|}\frac{|AB|}{|AQ|} = \frac{tc}{pr}.$$

Es claro que con un argumento completamente similar podemos establecer la segunda identidad. ♣

Del libro [l-26] tomamos el resultado siguiente.

8.3.21. Teorema. Sean ΔABC un triángulo, $D \in AC$ y $E \in AB$. Si F es el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos $\angle DBA$ y $\angle ACE$, entonces

$$2m(\angle BFC) = m(\angle BDC) + m(\angle BEC).$$

Prueba: Sea P el punto de intersección de BC y la recta $\overleftrightarrow{AF}$.
Del Teorema 4.3.8 sabemos que

$$m(\angle BDC) = m(\angle A) + m(\angle DBA) \text{ y}$$
$$m(\angle BEC) = m(\angle A) + m(\angle ACE).$$

Por ello,

$$m(\angle BDC) + m(\angle BEC) = 2m(\angle A) + m(\angle DBA) + m(\angle ACE).$$

Por otro lado, con base en los Teoremas 2.8.4 y 4.3.8,

$$m(\angle BFC) = m(\angle BFP) + m(\angle PFC) =$$
$$m(\angle BAP) + m(\angle FBA) + m(\angle PAC) + m(\angle ACF) =$$
$$m(\angle A) + \frac{m(\angle DBA)}{2} + \frac{m(\angle ACE)}{2}.$$

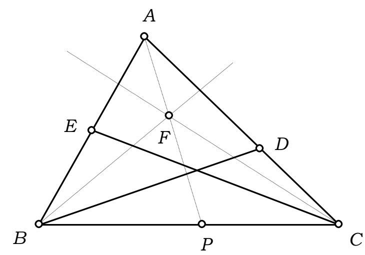


Figura 8.45

De aquí vemos que $2m(\angle BFC) = m(\angle BDC) + m(\angle BEC)$. ♣

A continuación, presentamos el clásico Teorema de Steiner-Lehmus. La prueba que daremos está basada en la dada originalmente por F. G. Hesse en 1874 y con algunas modificaciones de D. Beran [a-12].

8.3.22. Teorema (Steiner-Lehmus). Si dos bisectrices de un triángulo son congruentes, entonces el triángulo es isósceles.

Prueba (D. Beran): Sea ΔABC un triángulo en el que se cumple la congruencia $b_b \cong b_c$.

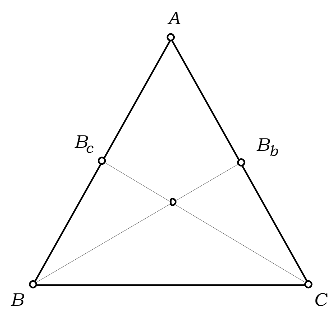


Figura 8.46

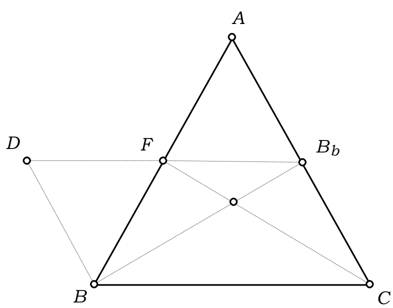


Figura 8.47

Por el punto B_b trazamos una recta que corte a AB en el punto F, de tal modo que $m(\angle F B_b B) = \dfrac{m(\angle C)}{2}$ y sobre la misma recta colocamos un punto D tal que $D B_b \cong BC$. Por el Teorema 3.2.6, tenemos que $\Delta B B_b D \cong \Delta B_c CB$ y de aquí se sigue que $DB \cong B_c B$ y $\angle B_b BD \cong \angle B B_c C$. Sabemos que en los triángulos ΔDBC y $\Delta D B_b C$ se cumple la congruencia $D B_b \cong BC$ y que ambos comparten el lado DC. Además tenemos que

$$m(\angle CBD) = m(\angle B_b BD) + m(\angle CB B_b) = m(\angle B B_c C) + \frac{m(\angle CBF)}{2} =$$
$$m(\angle A) + \frac{m(\angle C)}{2} + \frac{m(\angle B)}{2} = m(\angle A) + m(\angle B_b BF) + m(\angle D B_b B) =$$
$$m(\angle B B_b C) + m(\angle D B_b B) = m(\angle D B_b C).$$

De donde se deduce que $\angle CBD \cong \angle D B_b C$. Por otra parte, sabemos que

$$m(\angle CBD) = m(\angle A) + \frac{m(\angle C)}{2} + \frac{m(\angle B)}{2} = \frac{m(\angle A)}{2} + \frac{m(\angle A)+m(\angle B)+m(\angle C)}{2} = \frac{m(\angle A)}{2} + 90.$$

Así hemos probado que los triángulos ΔDBC y $\Delta D B_b C$ tienen un ángulo obtuso congruente. De acuerdo con el Corolario 3.5.3, obtenemos que $\Delta DBC \cong \Delta D B_b C$. En consecuencia, $DB \cong B_b C$ y, por ello, $B_b C \cong B_c B$. Así, el criterio 3.2.12 nos asegura que $\Delta B_b BC \cong \Delta B_c BC$. De aquí hallamos que $\angle B \cong \angle C$. Según el Teorema 3.2.9, ΔABC es un triángulo isósceles. ♣

Si reemplazamos las mediatrices y las alturas por las bisectrices en el enunciado del Teorema de Steiner-Lehmus, se obtiene el siguiente resultado:

8.3.23. Teorema. Para un triángulo ΔABC, las siguientes condiciones son equivalentes:
1. $b = c$.
2. $m_b = m_c$.
3. $h_b = h_c$.

Prueba: 1 $\Rightarrow$ 2. Supongamos $b = c$. Por las fórmulas del Teorema 8.3.14, hallamos que

$$m_b = \sqrt{\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}b^2} = \sqrt{\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{4}c^2} = m_c.$$

2 $\Rightarrow$ 1. Si $m_b = \sqrt{\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}b^2} = \sqrt{\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{4}c^2} = m_c$ (8.3.14), entonces

$$\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}b^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{4}c^2$$

$$\frac{3}{4}c^2 = \frac{3}{4}b^2$$

$$c^2 = b^2$$

$$c = b.$$

1 $\Rightarrow$ 3. Supongamos que $b = c$. Según las fórmulas del Teorema 8.3.16,

$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = h_c.$$

3 $\Rightarrow$ 1. Si $h_b = h_c$, entonces, por las fórmulas del Teorema 8.3.16, encontramos que

$$\frac{2}{b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\frac{2}{b} = \frac{2}{c}$$

$$b = c.$$ ♣

La siguiente generalización del Teorema de Steiner–Lhemus aparece en artículo [a-28]. La idea principal de la demostración es bastante ingeniosa y se puede resumir como sigue:

8.3.24. Teorema (F. Chorlton). Sea ΔABC un triángulo en el cual $\angle B > \angle C$. Si $L \in AC$ y $M \in AB$ son tales que $BL \geq CM$ y $\dfrac{m(\angle CBL)}{m(\angle LBA)} = \dfrac{m(\angle MCB)}{m(\angle ACM)}$, entonces $BM > CL$.

Prueba:

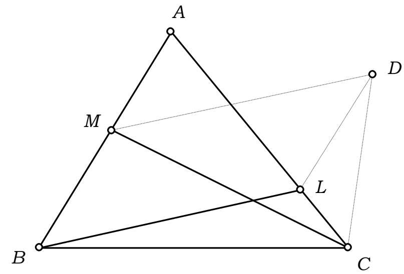


Figura 8.48

Tracemos una recta paralela a BL que pase por el punto M y otra recta paralela a AB que pase por el punto L y corte a la recta anterior en el punto D. Formamos de esta manera un paralelogramo $\square BLDM$. Pongamos

$$t = \frac{m(\angle CBL)}{m(\angle LBA)} = \frac{m(\angle MCB)}{m(\angle ACM)}.$$

Entonces,

$$m(\angle CBL) = tm(\angle LBA) \text{ y } m(\angle MCB) = tm(\angle ACM).$$

De nuestra hipótesis hallamos que

$$\begin{gathered} m(\angle B) > m(\angle C) \\ m(\angle CBL) + m(\angle LBA) > m(\angle MCB) + m(\angle ACM) \\ tm(\angle LBA) + m(\angle LBA) > tm(\angle ACM) + m(\angle ACM) \\ (t+1)m(\angle LBA) > (t+1)m(\angle ACM) \\ m(\angle LBA) > m(\angle ACM). \\ \angle LBA > \angle ACM. \end{gathered}$$

Por suposición, sabemos que $BL \geq CM$. De donde se deduce que $MD \geq CM$. Usando el Teorema 4.4.2, llegamos a la desigualdad

$$\begin{gathered} m(\angle DCM) \geq m(\angle MDC) \\ m(\angle DCA) + m(\angle ACM) \geq m(\angle MDL) + m(\angle LDC) \\ m(\angle DCA) + m(\angle ACM) \geq m(\angle LBA) + m(\angle LDC) \end{gathered}$$

Pero como $m(\angle LBA) > m(\angle ACM)$, se sigue entonces que $m(\angle DCA) > m(\angle LDC)$. Así, por el Teorema 4.4.3, concluimos que $LD \cong BM > LC$. ♣

Sea ΔABC un triángulo en el cual se cumple la congruencia $BB_b \cong CB_c$. Claramente vemos que

$$\frac{m(\angle CBB_b)}{m(\angle B_bBA)} = \frac{m(\angle B_cCB)}{m(\angle ACB_c)} = 1.$$

Supongamos que $\angle B > \angle C$. Por el teorema anterior, sabemos que $BB_c > CB_b$. De acuerdo con el Teorema 4.4.2, hallamos que $\angle B_cCB < \angle CBB_b$. Pero, por otro lado, tenemos que

$$\begin{gathered} m(\angle B) > m(\angle C) \\ 2m(\angle CBB_b) > 2m(\angle B_cCB) \\ m(\angle CBB_b) > m(\angle B_cCB) \\ \angle CBB_b > \angle B_cCB, \end{gathered}$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\angle B \leq \angle C$. También si suponemos que $\angle B < \angle C$ se llega a una contradicción similar. Debemos tener entonces que $\angle B \cong \angle C$. Por lo tanto, ΔABC tiene que ser un triángulo isósceles.

La siguiente propiedad de las cevianas aparece en el libro [l-26].

8.3.25. Teorema. Sean ΔABC un triángulo, $D \in AC$ y $E \in AB$. Entonces, $|FE| + |FD| < |AE| + |AD|$, en donde F es el punto de intersección de BD y CE.

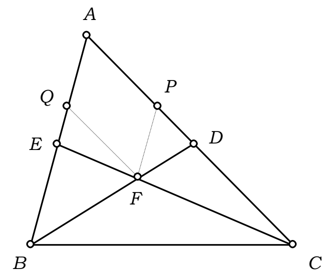


Figura 8.49

Prueba: Por el punto F trazamos rectas paralelas a AB y a AC que corten a AC y AB en los puntos P y Q, respectivamente. De este modo formamos un paralelogramo $\square QFPA$. De acuerdo con el Teorema 5.3.1, encontramos que $AQ \cong PF$ y $AP \cong QF$. Por la Desigualdad del Triángulo (4.4.8), obtenemos que

$$|FE| < |EQ| + |QF| \text{ y } |FD| < |PD| + |PF|.$$

Así,

$$|FE| + |FD| < |EQ| + |QF| + |PD| + |PF| = |EQ| + |AP| + |PD| + |AQ| = |AE| + |AD|. \clubsuit$$

A continuación, veremos que las mediatrices, las bisectrices y las alturas de un triángulo son concurrentes.

8.3.26. Teorema. Las mediatrices de los lados de un triángulo son concurrentes.

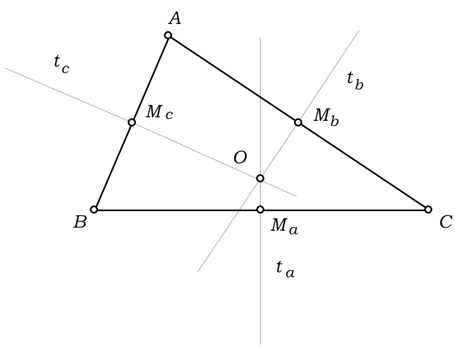


Figura 8.50

Prueba: Sean ΔABC un triángulo y t_a, t_b y t_c sus mediatrices. Sea O el punto de intersección de las mediatrices t_a y t_b. Probaremos que $O \in t_c$. El Teorema de la Mediatriz (4.2.2) nos asegura que $OB \cong OC$ y $OC \cong OA$. Por ello, $OB \cong OA$. De acuerdo con el Teorema 4.2.2, sabemos que el punto O yace en la mediatriz de AB, es decir, $O \in t_c$. Por lo tanto, las mediatrices t_a, t_b y t_c concurren en el punto O. ♣

El punto de intersección de las mediatrices de un triángulo será denotado por O y se le llamará el *circuncentro* del triángulo. Por ser el circuncentro la intersección de las tres mediatrices del triángulo, basándonos en el Teorema de la Mediatriz (4.2.2), se obtiene el siguiente resultado.

8.3.27. Corolario. El circuncentro de un triángulo es equidistante de los tres vértices del triángulo.

El circuncentro de un triángulo puede estar localizado ya sea en su interior o en su exterior como lo muestran los siguientes ejemplos:

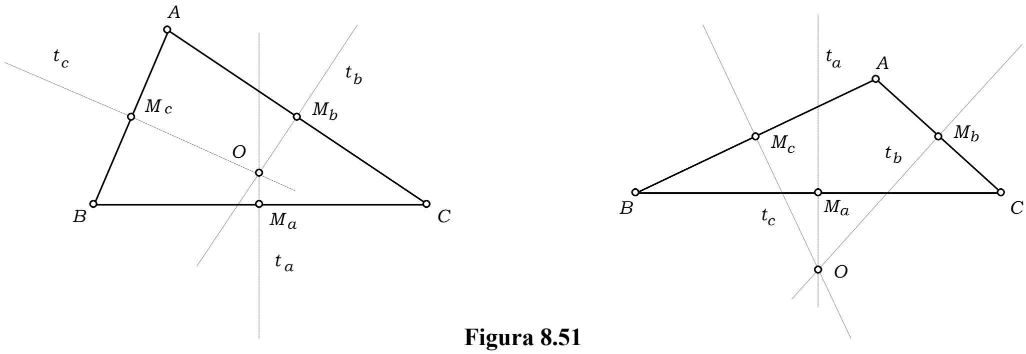


Figura 8.51

Sin embargo, cuando el circuncentro se encuentra sobre uno de los lados del triángulo, se obtiene la siguiente caracterización de los triángulos rectángulos.

8.3.28. Teorema. Un triángulo es rectángulo si y solo si su circuncentro yace sobre uno de sus lados.

Prueba: Sea ΔABC un triángulo.

Necesidad. Supongamos que $\angle A$ es un ángulo recto. Por el Teorema 8.3.19, sabemos que $AM_a \cong BM_a \cong M_aC$. Según el Teorema de la Mediatriz (4.2.2), $M_a \in t_c$ y $M_a \in t_a$. Por lo tanto, M_a resulta ser el circuncentro del triángulo.

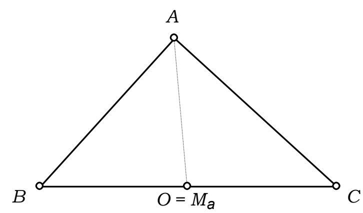


Figura 8.52

Suficiencia. Supongamos que el circuncentro O del triángulo ΔABC es un punto del lado BC. Como $|BO| = |CO|$, hallamos que $O = M_a$. Ya que los triángulos ΔM_aAB y ΔM_aAC son isósceles (8.3.27), sabemos que $\angle B = \angle M_aBA \cong \angle BAM_a$ y $\angle C = \angle ACM_a \cong \angle M_aAC$. De donde se sigue que

$$180 = m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) = m(\angle BAM_a) + m(\angle M_aAC) + m(\angle B) + m(\angle C) = 2m(\angle B) + 2m(\angle C)$$

$$180 = 2m(\angle B) + 2m(\angle C)$$

$$90 = m(\angle B) + m(\angle C) = m(\angle BAM_a) + m(\angle M_aAC) = m(\angle A).$$

Esto prueba que $\angle A$ es un ángulo recto. ♣

8.3.29. Teorema. Las bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo son concurrentes y el punto de concurrencia es equidistante de los tres lados del triángulo.

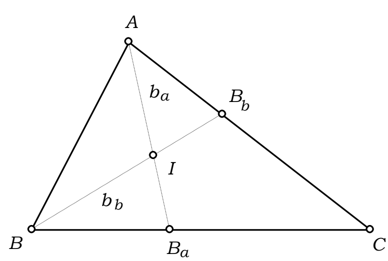


Figura 8.53

Prueba: Sean ΔABC un triángulo y I el punto de intersección de sus bisectrices b_a y b_b. Según el Teorema 4.7.9, sabemos que

$$d(I,\overleftrightarrow{BC}) = d(I,\overleftrightarrow{BA}) \text{ y } d(I,\overleftrightarrow{AB}) = d(I,\overleftrightarrow{AC}).$$

Pero como $d(I,\overleftrightarrow{BA}) = d(I,\overleftrightarrow{AB})$, tenemos entonces que $d(I,\overleftrightarrow{BC}) = d(I,\overleftrightarrow{AC})$. De acuerdo con el mismo Teorema 4.7.9, vemos que el punto I yace sobre la bisectriz del ángulo $\angle ACB$, es decir, $I \in b_c$. Esto demuestra que las bisectrices de los ángulos interiores de triángulo ΔABC concurren en el punto I. Ya que I es el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos del triángulo, según el Teorema 4.7.9, el punto I resulta ser equidistante de los tres lados del triángulo. ♣

El punto de intersección de las bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo será denotado por I y se le llamará el *incentro* del triángulo. El siguiente corolario es una consecuencia de los Teoremas 2.2.9 y 2.2.12.

8.3.30. Corolario. El incentro de un triángulo siempre se encuentra en el interior del mismo.

Una primera propiedad interesante del incentro de un triángulo es la siguiente.

8.3.31. Teorema [a-171]. Si I es el incentro del triángulo ΔABC, entonces

$$\frac{|AI|}{|IB_a|} = \frac{b+c}{a}, \quad \frac{|BI|}{|IB_b|} = \frac{a+c}{b} \quad \text{y} \quad \frac{|CI|}{|IB_c|} = \frac{a+b}{c}.$$

Prueba: Es suficiente con probar la primera identidad. Aplicando el Teorema de la Bisectriz Interior (8.3.4) dos veces, hallamos que

$$\frac{c}{|BB_a|} = \frac{b}{|B_aC|} \text{ y } \frac{|BB_a|}{|IB_a|} = \frac{c}{|AI|}.$$

Como resultado de esto, obtenemos que

$$\frac{|AI|}{|IB_a|} = \frac{c}{|BB_a|} = \frac{b}{|B_aC|} = \frac{b+c}{|BB_a|+|B_aC|} = \frac{b+c}{a}. \text{ ♣}$$

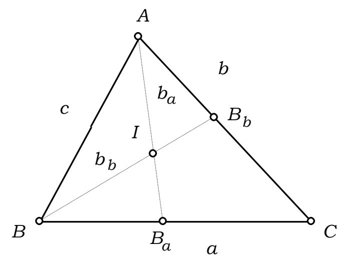


Figura 8.54

8.3.32. Teorema. La bisectriz de un ángulo interior y las bisectrices de los ángulos exteriores opuestos a dicho ángulo interior de un triángulo son concurrentes, y dicho punto de concurrencia es equidistante de las tres rectas que contienen a los lados del triángulo.

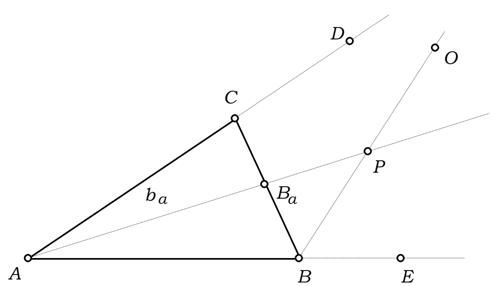


Figura 8.55

Prueba: Sean ΔABC un triángulo y P el punto de intersección de $\overleftrightarrow{AB_a}$ y la bisectriz $\overrightarrow{BO}$ del ángulo exterior $\angle EBC$ del triángulo ΔABC adyacente al ángulo $\angle B$. Según el Teorema 4.7.9, sabemos que

$$d(P, \overleftrightarrow{AB}) = d(P, \overleftrightarrow{AC}) \text{ y } d(P, \overleftrightarrow{AB}) = d(P, \overleftrightarrow{BC}).$$

Así, hallamos que $d(P, \overleftrightarrow{AC}) = d(P, \overleftrightarrow{BC})$. Pero como $\overrightarrow{CB} \subseteq \overleftrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{CD} \subseteq \overleftrightarrow{AC}$, se sigue entonces que $d(P, \overrightarrow{CB}) = d(P, \overrightarrow{CD})$. De acuerdo con el Teorema 4.7.9, el punto P tiene que estar en la bisectriz del ángulo $\angle BCD$. Esto prueba que $\overrightarrow{CP}$ es la bisectriz del ángulo $\angle BCD$ y, por lo tanto, las tres bisectrices $\overrightarrow{AB_a}$, $\overrightarrow{BP}$ y $\overrightarrow{CP}$ concurren en el punto P. También queda establecido que P es equidistante de las tres rectas que contienen a los lados del triángulo. ♣

Cada triángulo tiene cuatro puntos de concurrencia asociados con sus bisectrices interiores y exteriores: uno de ellos es I y cada uno de los tres restantes se obtiene al intersecar una bisectriz de uno de sus ángulos interiores con las bisectrices de sus ángulos exteriores opuestos a dicho ángulo. Estos tres puntos serán denotados por los símbolos I_a, I_b y I_c y se les llamaran los *excentros* del triángulo.

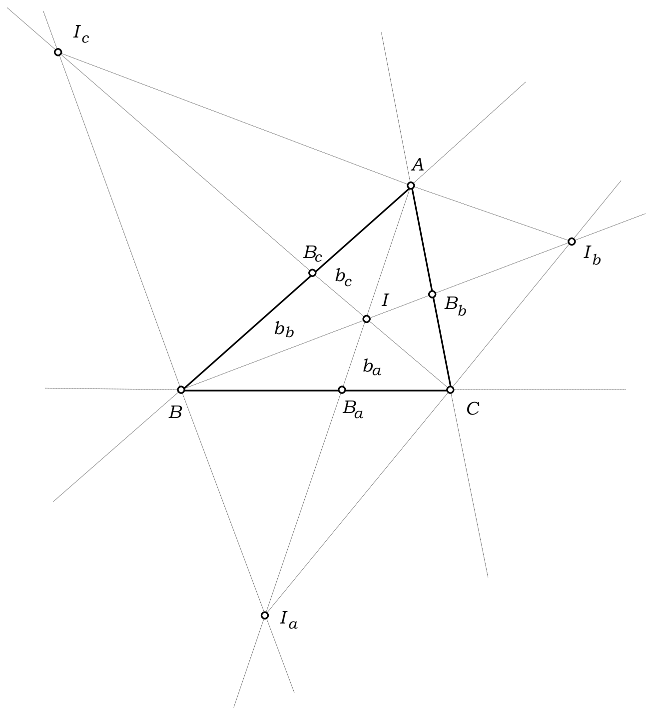


Figura 8.56

8.3.33. Teorema. Las alturas de un triángulo son concurrentes.

Prueba: Sea ΔABC un triángulo. Por cada uno de los vértices del triángulo ΔABC, trazamos una recta paralela al lado opuesto. Sean A', B' y C' los puntos de intersección de estas rectas:

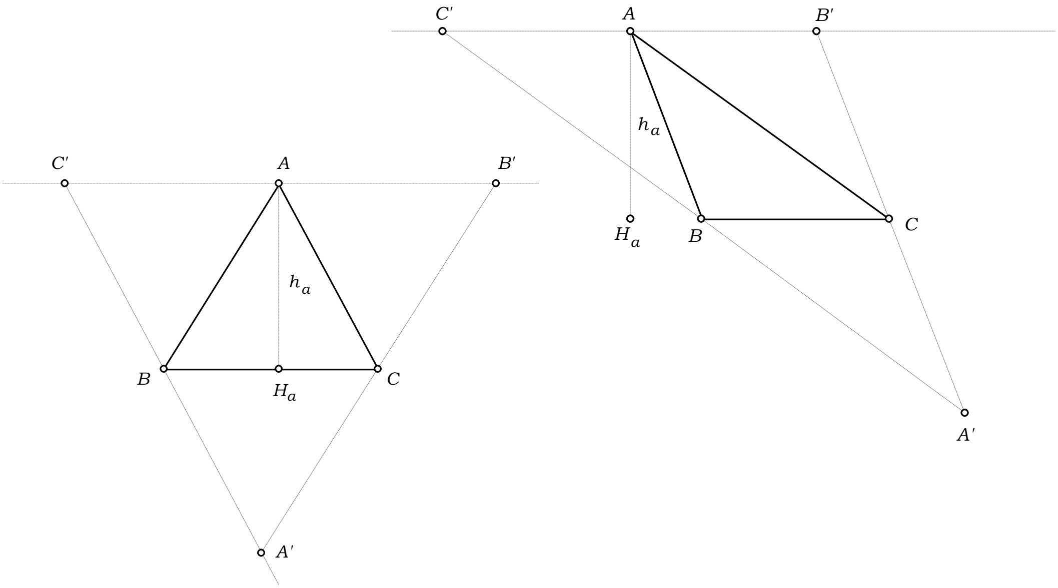
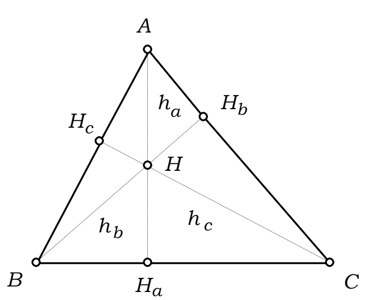


Figura 8.57

Tenemos entonces que □$BCAC$’ y □BCB’A son paralelogramos, pues sus lados opuestos son paralelos. En virtud del Teorema 5.3.1, $BC \cong AB$’ y $BC \cong C$’A y, por ello, AB’ $\cong$ C’A. Es decir, A es el punto medio del segmento C’B’. Por otra parte, sabemos que $BC \parallel C$’B’ y $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AH_a}$. Así, el Teorema 3.7.2 nos garantiza que C’B’$\perp \overleftrightarrow{AH_a}$. Resumiendo, tenemos que A es el punto medio de C’B’ y C’B’$\perp$ $\overleftrightarrow{AH_a}$. Es decir $\overleftrightarrow{AH_a}$ es la mediatriz de lado C’B’ del triángulo Δ A’B’C’. De manera análoga, podemos demostrar que $\overleftrightarrow{BH_b}$ y $\overleftrightarrow{CH_c}$ son las mediatrices de los lados C’A’ y A’B’, respectivamente, del triángulo Δ A’B’C’. De acuerdo con el Teorema 8.3.26, sabemos que las mediatrices $\overleftrightarrow{AH_a}$, $\overleftrightarrow{BH_b}$ y $\overleftrightarrow{CH_c}$ del triángulo ΔA’B’C’ son concurrentes. Es decir, las alturas $\overleftrightarrow{AH_a}$,$\overleftrightarrow{BH_b}$ y $\overleftrightarrow{CH_c}$ del triángulo son concurrentes. ♣

Al punto de intersección de las tres alturas de un triángulo se le llama *ortocentro* y, será denotado por la letra H. El ortocentro de un triángulo puede estar localizado ya sea en el interior o en el exterior del mismo:



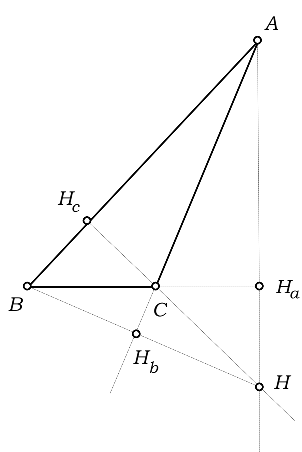


Figura 8.58

8.3.34. Teorema. Las medianas de un triángulo son concurrentes y, el punto de concurrencia está situado a $\frac{2}{3}$ de la longitud de cada una de las medianas a partir del vértice correspondiente.

Prueba: Sea ΔABC un triángulo. Sea G el punto de intersección de las medianas m_a y m_b. Por el Teorema 8.3.20, sabemos que

$$\frac{|BG|}{|GM_b|} = \frac{|BM_a|b}{|AM_b||M_aC|} = \frac{b}{|AM_b|} = 2 \text{ y}$$

$$\frac{|AG|}{|GM_a|} = \frac{|AM_b|a}{|CM_b||BM_a|} = \frac{a}{|BM_a|} = 2.$$

Por consiguiente,

$$|GM_b| = \frac{1}{3}|BM_b| \text{ y } |GM_a| = \frac{1}{3}|AM_a|.$$

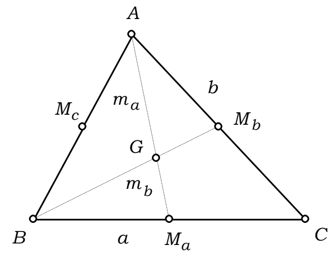


Figura 8.59

Si ahora tomamos en cuenta el punto de intersección de m_a y m_c, el cual denotamos por G', y aplicamos el razonamiento anterior hallamos que

$$|G' M_a| = \frac{1}{3}|AM_a| \text{ y } |G' M_c| = \frac{1}{3}|CM_c|.$$

Aplicando el Lema 6.1.8, encontramos que $G = G'$. Por lo tanto, las tres medianas del triángulo concurren en el punto G y además tenemos que $|AG| = \frac{2}{3} m_a$. Similarmente, se demuestra que $|BG| = \frac{2}{3} m_b$ y $|CG| = \frac{2}{3} m_c$. ♣

Al punto de intersección de las medianas de un triángulo se le llamará el *centro de gravedad* del triángulo. Podemos ver claramente que el centro de gravedad de un triángulo siempre se encuentra en su interior. El centro de gravedad de un triángulo se denotará generalmente por la letra G. Al centro de gravedad también se le conoce como centroide o también como baricentro.

Veamos a continuación una de las propiedades más sobresalientes del centro de gravedad.

8.3.35. Teorema. Si por el centro de gravedad G de un triángulo ΔABC trazamos una recta l que corte a los lados AB y AC del triángulo, entonces $d(A,l) = d(B,l) + d(C,l)$.

Prueba: Sean P, Q, R y S las proyecciones de los puntos B, C, M_a y A sobre la recta l, respectivamente, y D y E los puntos de intersección de AB y l, y AC y l, respectivamente. Analicemos primero el caso cuando las rectas l y $\overleftrightarrow{BC}$ sean paralelas:

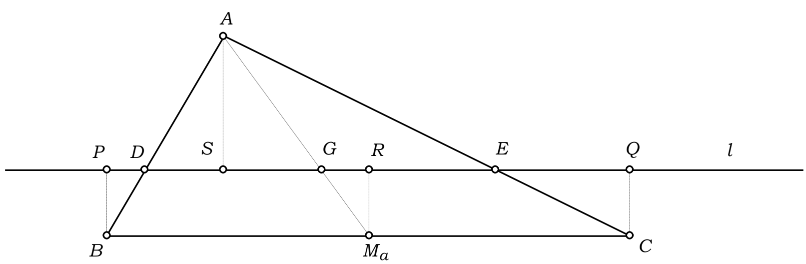


Figura 8.60

Sabemos que $\Delta ASG \sim \Delta M_a RG$ (esto es cierto gracias al Teorema 8.1.9) y, por consiguiente,

$$\frac{|AS|}{|RM_a|} = \frac{|AG|}{|GM_a|} = \frac{2|GM_a|}{|GM_a|} = 2.$$

De aquí vemos que $d(A,l) = |AS| = 2|RM_a|$. Pero también sabemos que $PB \cong RM_a \cong QC$ (5.3.1). Por lo tanto,

$$d(A,l) = 2|RM_a| = |PB| + |QC| = d(B,l) + d(C,l).$$

Procedemos a considerar el caso cuando l no sea paralela a $\overleftrightarrow{BC}$. Sea F el punto de intersección de $\overleftrightarrow{BC}$ y l.

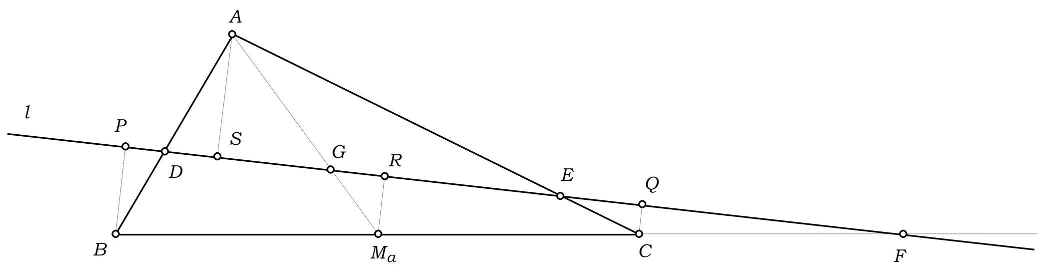


Figura 8.61

Según el primer criterio de semejanza para triángulo rectángulos (8.1.9), $\Delta ASG \sim \Delta M_a RG$. Por consiguiente,

$$\frac{|AS|}{|RM_a|} = \frac{|AG|}{|GM_a|} = \frac{2|GM_a|}{|GM_a|} = 2.$$

Así, hallamos que $d(A,l) = |AS| = 2|RM_a|$. De acuerdo con el Teorema de Tales (6.2.5),

$$\frac{|RM_a|}{|QC|} = \frac{|RF|}{|QF|} \text{ y } \frac{|RM_a|}{|PB|} = \frac{|RF|}{|PF|}.$$

Sumando y sustituyendo, obtenemos las identidades

$$d(B,l) + d(C,l) = |PB| + |QC| = \frac{|RM_a||PF|}{|RF|} + \frac{|RM_a||QF|}{|RF|} =$$

$$\frac{|RM_a||PR|}{|RF|} + \frac{|RM_a||RF|}{|RF|} + \frac{|RM_a||QF|}{|RF|} =$$

$$\frac{|RM_a||RF|}{|RF|} + \frac{|RM_a||RQ|}{|RF|} + \frac{|RM_a||QF|}{|RF|} =$$

$$\frac{|RM_a||RF|}{|RF|} + \frac{|RM_a||RF|}{|RF|} = 2|RM_a| = d(A,l). \clubsuit$$

Una consecuencia inmediata del teorema anterior es la siguiente propiedad de las medianas.

8.3.36. Corolario. En todo triángulo, cada mediana es equidistante de los vértices por los que no pasa.

Prueba: Sea ΔABC un triángulo. Aplicando el Teorema 8.3.35 a la recta $\overleftrightarrow{M_cC}$, hallamos la identidad

$$d(A,\overleftrightarrow{M_cC}) = d(B,\overleftrightarrow{M_cC}) + d(C,\overleftrightarrow{M_cC}) = d(B,\overleftrightarrow{M_cC}),$$

esta última identidad es cierta pues $d(C,\overleftrightarrow{M_cC}) = 0$. De la misma manera, se establecen las identidades

$$d(B,\overleftrightarrow{M_aA}) = d(C,\overleftrightarrow{M_aA}) \text{ y } d(A,\overleftrightarrow{M_bB}) = d(C,\overleftrightarrow{M_bB}). \clubsuit$$

8.3.37. Teorema [I-164]. Sea ΔABC un triángulo equilátero. Si l es una recta que pasa por el circuncentro O del triángulo, entonces $d(A,l)^2 + d(B,l)^2 + d(C,l)^2$ es una constante que no depende de la elección de la recta l.

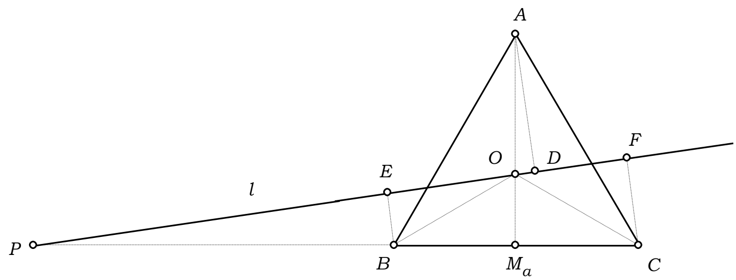


Figura 8.62

Prueba: Con base en el Teorema 8.3.29, tiene sentido escribir $t = |OA| = |OB| = |OC|$. Sean D, E y F las proyecciones de A, B y C sobre la recta l, respectivamente. Supongamos que l y $\overleftrightarrow{BC}$ se cortan en el punto P. Sabemos que $m(\angle CBO) = 30$. Por ello, $m(\angle OBP) = 150$. De acuerdo con el Teorema 4.3.4, vemos que

$$m(\angle EOB) = 180 - (m(\angle BPE) + 150) = 30 - m(\angle BPE).$$

Como $\operatorname{sen}\angle EOB = \dfrac{|BE|}{t}$, se sigue que $|BE| = t\operatorname{sen}\angle EOB = R\operatorname{sen}(\angle 30 - \angle BPE)$. Por el Teorema 4.3.4, tenemos que $\angle DOA \cong \angle POM_a \cong \angle 90 - \angle BPE$. De donde encontramos que $\operatorname{sen}\angle DOA = \dfrac{|AD|}{t} = \operatorname{sen}(\angle 90 - \angle BPE)$ $= \cos\angle BPE$. Por lo cual, $|AD| = t\cos\angle BPE$. Según el Teorema 4.3.8, $\angle M_a OF \cong \angle 90 + \angle BPE$. Pero como $m(\angle M_a OC) = 60$, encontramos que

$$m(\angle COF) = m(\angle M_a OF) - m(\angle M_a OC) = 90 + m(\angle BPE) - 60 = 30 + m(\angle BPE).$$

Así, llegamos a que $\operatorname{sen}\angle COF = \dfrac{|CF|}{t} = \operatorname{sen}(\angle 30 + \angle BPE)$. Haciendo las sustituciones correspondientes, obtenemos que

$$d(A,l)^2 + d(B,l)^2 + d(C,l)^2 = |AD|^2 + |BE|^2 + |CF|^2 =$$
$$t^2((\cos\angle BPE)^2 + (\operatorname{sen}(\angle 30 - \angle BPE))^2 + (\operatorname{sen}(\angle 30 + \angle BPE))^2).$$

Pero, por el Problema 8.241, sabemos que

$$(\cos\angle BPE)^2 + (\operatorname{sen}(\angle 30 - \angle BPE))^2 + (\operatorname{sen}(\angle 30 + \angle BPE))^2 = \frac{3}{2}.$$

Por lo tanto,

$$d(A,l)^2 + d(B,l)^2 + d(C,l)^2 = t^2\frac{3}{2}. \clubsuit$$

En general, las alturas de un triángulo no son los lados de otro triángulo: de las relaciones del Corolario 7.1.8, podemos ver que una condición necesaria para que las alturas de un triángulo sean los lados de otro triángulo es el cumplimiento de las desigualdades

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{b} + \frac{1}{c},\ \frac{1}{b} < \frac{1}{a} + \frac{1}{c} \text{ y } \frac{1}{c} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

De aquí observamos que las alturas del triángulo isósceles $\Delta(1,3,3)$ no pueden formar otro triángulo. Las bisectrices de un triángulo en general tampoco son los lados de un triángulo: Si $b = c$, entonces tenemos que

$$b_a = 2\frac{\sqrt{bcs(s-a)}}{b+c} > b_b + b_c = 2\frac{\sqrt{acs(s-b)}}{a+c} + 2\frac{\sqrt{abs(s-c)}}{a+b}$$

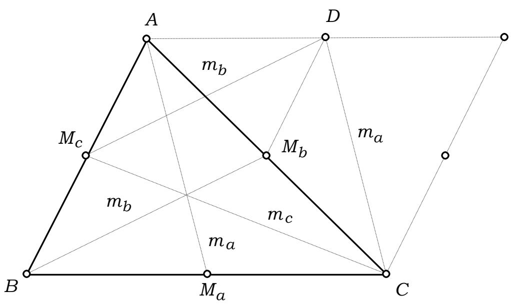
$$2\,\frac{\sqrt{c^2 s(s-a)}}{2c} = \sqrt{s(s-a)} > 8\,\frac{\sqrt{acs(s-b)}}{a+c}$$

$$\sqrt{s-a} > \frac{8\sqrt{ac(s-b)}}{a+c}.$$

Como un caso particular ponemos a = 4, b = c = 3 y s = 5. En este caso, tenemos que $\sqrt{s-a} = 1 < \frac{8\sqrt{ac(s-b)}}{a+c} = \frac{8\sqrt{24}}{7}$. Lo cual se traduce a decir que las bisectrices del triángulo isósceles $\Delta(4,3,3)$ no pueden formar los lados de un triángulo. Contrario a todo esto, las medianas de un triángulo sí son los lados de un triángulo.

8.3.38. Teorema. En todo triángulo ΔABC, m_a , m_b y m_c son las longitudes de los lados de un triángulo.

Prueba: Nuestra demostración sin palabras está basada en un argumento geométrico dado en [a-79].



El triángulo deseado es $\Delta M_c CD$. ♣

Figura 8.63

8.3.39. Teorema. Para un triángulo ΔABC, las siguientes afirmaciones son equivalentes:
1. $b = c$.
2. $m_a = h_a$.
3. $m_a = b_a$.
4. $b_a = h_a$.

Prueba: 1 $\Rightarrow$ 2. Supongamos que $b = c$. Según las fórmulas del Teorema 8.3.14,

$$m_a = \sqrt{\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}a^2} = \sqrt{b^2 - \frac{1}{4}a^2},$$

y, por otra parte, con base en el Teorema 8.3.16, sabemos que

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)^2} = \frac{2}{a}\sqrt{\left(\frac{2b+a}{2}\right)\left(\frac{2b-a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right)^2} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{2b+a}{2}\right)\left(\frac{2b-a}{2}\right)} = \sqrt{\frac{4b^2-a^2}{4}} = \sqrt{b^2 - \frac{1}{4}a^2} = m_a .$$

2 $\Rightarrow$ 1. Por la fórmula del Teorema 8.3.14 y la fórmula que aparece en la demostración del Teorema 8.3.16 aplicada a h_a , sabemos que

$$m_a^2 = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}a^2 = h_a^2 = \frac{4a^2c^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2}{4a^2}$$

$$2a^2b^2 + 2a^2c^2 - a^4 = 4a^2c^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2$$
$$(a^2 - b^2 + c^2)^2 = a^4 - 2a^2b^2 + 2a^2c^2$$
$$a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 2a^2c^2 - 2c^2b^2 + c^4 = a^4 - 2a^2b^2 + 2a^2c^2$$
$$b^4 - 2c^2b^2 + c^4 = (b-c)^2 = 0.$$
$$b = c.$$

$1 \Rightarrow 3$. En la demostración de la primera implicación vimos que
$$m_a = \sqrt{\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}a^2} = \sqrt{b^2 - \frac{1}{4}a^2}.$$
Por otro lado, en virtud de las fórmulas 8.3.15, tenemos que
$$b_a = 2\frac{\sqrt{bcs(s-a)}}{b+c} = \frac{\sqrt{b^2s(s-a)}}{b} = \sqrt{\left(\frac{2b+a}{2}\right)\left(\frac{2b-a}{2}\right)} = \sqrt{\frac{4b^2-a^2}{4}} = \sqrt{b^2 - \frac{1}{4}a^2} = m_a.$$

$3 \Rightarrow 1$. Si $m_a = b_a$, por el Teorema 8.3.14 y la demostración del Teorema 8.3.15, entonces se cumplen las identidades
$$m_a^2 = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}a^2 = b_a^2 = \frac{bc}{(b+c)^2}[(b+c)^2 - a^2]$$
$$(b+c)^2\left(\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}a^2\right) = bc[(b+c)^2 - a^2]$$
$$(b+c)^2\left(\frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}\right) = bc(b+c)^2 - bca^2$$
$$(b+c)^2(2b^2 + 2c^2 - a^2 - 4bc) = -4bca^2$$
$$(b+c)^2(2(b-c)^2 - a^2) = -4bca^2$$
$$2(b+c)^2(b-c)^2 - (b+c)^2a^2 = -4bca^2$$
$$2(b+c)^2(b-c)^2 = a^2b^2 + 2a^2bc + a^2c^2 - 4bca^2 = a^2b^2 - 2a^2bc + a^2c^2 = a^2(b-c)^2.$$
Si $b \neq c$, entonces $2(b+c)^2 = a^2$ y, por ello, $b + c = \dfrac{a}{\sqrt{2}} < a$, pero esto contradice la Desigualdad del Triángulo (4.4.9). Por lo tanto, $b = c$.

$1 \Rightarrow 4$. De las implicaciones $1 \Rightarrow 2$ y $1 \Rightarrow 3$ se sigue directamente la igualdad $m_a = b_a = h_a$.

$4 \Rightarrow 1$. Supongamos que se cumple la igualdad $b_a = h_a$. Lo cual quiere decir, usando las fórmulas de los Teoremas 8.3.15 y 8.3.16, que
$$2\frac{\sqrt{bcs(s-a)}}{b+c} = \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$\frac{bcs(s-a)}{(b+c)^2} = \frac{1}{a^2}s(s-a)(s-b)(s-c)$$
$$\frac{bcs(s-a)}{(b+c)^2} = \frac{1}{a^2}s(s-a)(s-b)(s-c)$$
$$a^2bc = (b+c)^2(s-b)(s-c)$$
$$a^2bc = (b+c)^2\left(\frac{a+c-b}{2}\right)\left(\frac{a+b-}{2}\right)$$
$$(b+c)^2(b-c)^2 = a^2(b+c)^2 - 4a^2bc$$
$$(b+c)^2(b-c)^2 = a^2(b-c)^2.$$
De acuerdo con la Desigualdad del Triángulo (4.4.9), debemos tener que $(b-c)^2 = 0$. Es decir, $b = c$. ♣

Una demostración bastante geométrica de las equivalencias del Teorema 8.3.39 yace en el artículo de W. M. Waters Jr. [a-172].

8.3.40. Teorema. Sea ΔABC un triángulo. El ángulo formado por las bisectrices de los ángulos interiores $\angle B$ y $\angle C$ es siempre obtuso y tiene medida $90 + \dfrac{m(\angle A)}{2}$, y el ángulo formado por las bisectrices de los ángulos exteriores del triángulo adyacentes a $\angle B$ y $\angle C$ es siempre agudo y tiene medida $90 - \dfrac{m(\angle A)}{2}$.

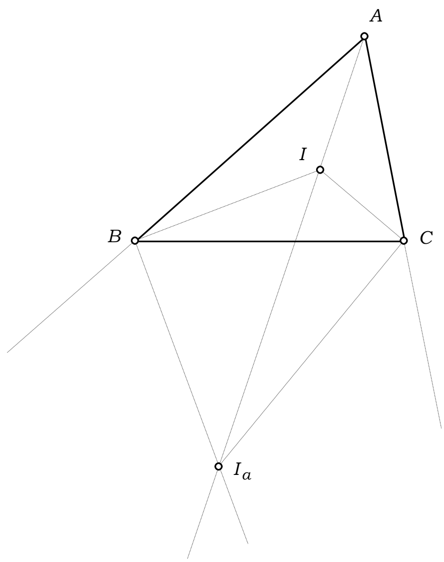


Figura 8.64

Prueba: De acuerdo con el Teorema 4.3.4,

$$m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) = 180.$$

Como consecuencia se obtiene la identidad

$$\frac{m(\angle A)}{2} + \frac{m(\angle B)}{2} + \frac{m(\angle C)}{2} = 90.$$

Por otra parte, sabemos que

$$m(\angle BIC) = 180 - \frac{m(\angle B)}{2} - \frac{m(\angle C)}{2} = 180 - (90 + \frac{m(\angle A)}{2}) = 90 + \frac{m(\angle A)}{2}.$$

Ahora, consideremos el cuadrilátero $\square IBI_aC$ (ver la figura 8.64). El Teorema 2.12.3 nos garantiza que los ángulos $\angle I_aBI$ y $\angle ICI_a$ son rectos. De este resultado y del Teorema 5.1.13 se siguen las identidades

$$360 = m(\angle I_aBI) + m(\angle CI_aB) + m(\angle ICI_a) + m(\angle BIC) = 180 + m(\angle CI_aB) + m(\angle BIC)$$

$$m(\angle CI_aB) + m(\angle BIC) = 180$$

$$m(\angle CI_aB) = 180 - m(\angle BIC) = 180 - (90 + \frac{m(\angle A)}{2}) = 90 - \frac{m(\angle A)}{2}. \clubsuit$$

Una propiedad interesante sobre las proyecciones de un vértice de un triángulo sobre sus bisectrices es el siguiente teorema que aparece en el libro [l-18].

8.3.41. Teorema. Sea ΔABC un triángulo. Si P y Q son las proyecciones de A sobre las bisectrices b_b y b_c, respectivamente, entonces $PQ \parallel BC$.

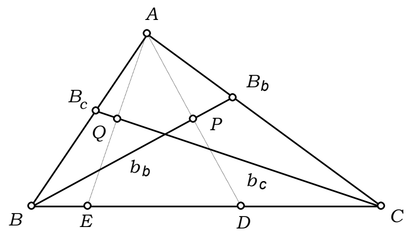


Figura 8.65

Prueba: Prolongamos los segmentos AP y AQ hasta que corten a BC en los puntos D y E, respectivamente. Según el Teorema 8.3.39, sabemos que los triángulos ΔCAE y ΔBDA son isósceles, y b_c y b_b son las medianas correspondientes a los vértices C y B, respectivamente. Pero esto quiere decir que P y Q son los puntos medios de los lados AD y AE de los triángulos ΔBDA y CAE, respectivamente. Si aplicamos el Teorema del Segmento Medio (4.3.10) al triángulo ΔAED, concluimos que $PQ \parallel ED$ y, por lo tanto, $PQ \parallel BC$. ♣

8.3.42. Teorema. En todo triángulo ΔABC se cumple la igualdad

$$m(\angle B_a A H_a) = \frac{|m(\angle B) - m(\angle C)|}{2}.$$

Prueba: Si $B_a = H_a$, por el Teorema 8.3.39, tenemos entonces que ΔABC es un triángulo isósceles con $\angle B \cong \angle C$ y la identidad se cumple de manera trivial. Supongamos pues que $B_a \neq H_a$ y, sin perder generalidad, supongamos también que $\angle B < \angle C$.

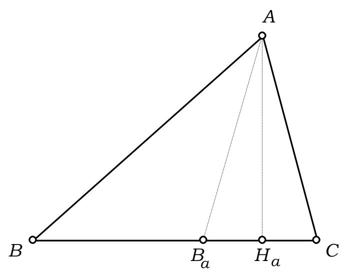


Figura 8.66

Aplicando el Teorema 4.3.4 y dividiendo entre dos, hallamos que

$$\frac{m(\angle A)}{2} + \frac{m(\angle B)}{2} + \frac{m(\angle C)}{2} = 90$$

y de aquí se obtiene la igualdad

$$\frac{m(\angle A)}{2} = 90 - \frac{m(\angle B)}{2} - \frac{m(\angle C)}{2}.$$

También se cumple, basándonos en el Teorema 4.3.8, la igualdad

$$m(\angle H_a B_a A) = \frac{m(\angle A)}{2} + m(\angle B) = 90 - \frac{m(\angle B)}{2} - \frac{m(\angle C)}{2} + m(\angle B) = 90 + \frac{m(\angle B) - m(\angle C)}{2}.$$

Por ser $\Delta B_a A H_a$ un triángulo rectángulo, sabemos que

$$m(\angle B_a A H_a) = 90 - m(\angle H_a B_a A) = 90 - 90 - \frac{m(\angle B) - m(\angle C)}{2} = \frac{m(\angle C) - m(\angle B)}{2}. \clubsuit$$

El siguiente teorema aparece en el libro de M. N. Aref y W. Wernick [l-18, Solved Problem 1.4].

8.3.43. Teorema. En todo triángulo ΔABC se cumple que

$$\angle M_b M_a M_c \cong \angle M_b H_a M_c,$$
$$\angle M_c M_b M_a \cong \angle M_c H_b M_a \text{ y}$$
$$\angle M_a M_c M_b \cong \angle M_a H_c M_b.$$

Prueba: Es suficiente con establecer la primera congruencia. Supongamos primero que $\angle B$ y $\angle C$ son agudos. Sabemos, por el Teorema del Segmento Medio (4.3.10), que $M_c M_a \parallel AC$ y $M_a M_b \| AB$. Lo cual significa que $\square A M_c M_a M_b$ es un paralelogramo. De acuerdo con el Teorema 5.3.1, obtenemos que $\angle A \cong \angle M_b M_a M_c$. Por otro lado, $\Delta AB H_a$ y $\Delta A H_a C$ son triángulos rectángulos y por el Teorema 8.3.19, $M_c H_a \cong M_c A$ y $H_a M_b \cong M_b A$. Por ello, $\Delta M_c H_a A$ y $\Delta H_a M_b A$ son triángulos isósceles. En vista del Teorema 3.2.9, hallamos que

$$\angle A H_a M_c \cong \angle M_c A H_a \text{ y } \angle M_b H_a A \cong \angle H_a A M_b.$$

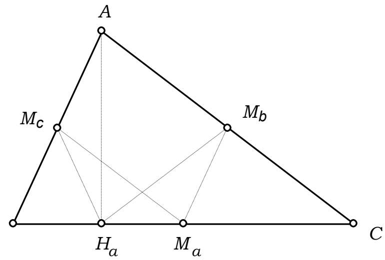


Figura 8.67

Aplicando el Teorema de Adición de Ángulos (2.8.1), llegamos a que

$$m(\angle A) = m(\angle M_c A H_a) + m(\angle H_a A M_b) = m(\angle A H_a M_c) + m(\angle M_b H_a A) = m(\angle M_b H_a M_c)$$
$$\angle A \cong \angle M_b H_a M_c.$$

Por lo tanto, $\angle M_b M_a M_c \cong \angle M_b H_a M_c$. Para el caso cuando uno de los ángulos $\angle B$ o $\angle C$ sea obtuso, basta con seguir un argumento completamente similar y, al final usar el Teorema de Sustracción de Ángulos (2.8.2) en lugar del Teorema de Adición de Ángulos (2.8.1). ♣

El resultado que a continuación enunciamos se encuentra en el libro [l-20].

8.3.44. Teorema. Sea ΔABC un triángulo. Si $D \in \overleftrightarrow{BC}$ y E y F son las proyecciones de los vértices B y C sobre la recta $\overleftrightarrow{AD}$, respectivamente, entonces $M_a E \cong M_a F$.

Prueba: Fijemos un punto $D \in \overleftrightarrow{BC}$. Basta considerar el caso cuando $D \in BC$. Prolongamos BE y CF hasta unos puntos R y S, respectivamente, tales que $BE \cong ER$ y $CF \cong FS$ (ver figura 8.68). Según el Teorema 8.3.39, sabemos que los triángulos ΔASC y ΔABR son isósceles. Como consecuencia de esto, obtenemos que $\angle SAF \cong \angle FAC$ y $\angle BAE \cong \angle EAR$. De acuerdo con el Teorema 2.8.2, hallamos que $\angle BAS \cong \angle CAR$. Como además tenemos que $AB \cong AR$ y $AS \cong AC$, el primer criterio de congruencia de triángulos (3.2.6) nos garantiza que $\Delta BAS \cong \Delta RAC$. Por lo cual, $BS \cong RC$. De acuerdo con el Teorema 4.3.10,

$$|M_a E| = \frac{|RC|}{2} = \frac{|BS|}{2} = |M_a F|. \clubsuit$$

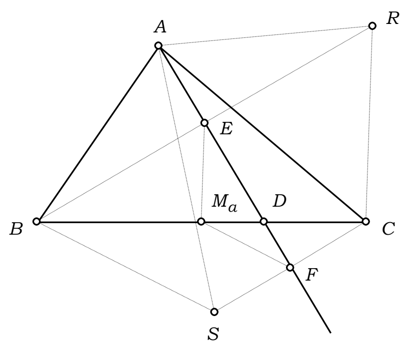


Figura 8.68

8.3.45. Teorema. Sea ΔABC un triángulo. Trazamos rectas paralelas a BC por los puntos I y I_c que corten a AB y AC en los puntos D_1 y D_2 y E_1 y E_2, respectivamente. Entonces,

$$|D_1E_1| = |BD_1| + |CE_1| \text{ y } |D_2E_2| = ||BD_2| - |CE_2||.$$

Prueba: Sabemos que $\angle ICB \cong \angle ACI$. Por el Teorema 3.4.4, tenemos que $\angle ICB \cong \angle CIE_1$. De acuerdo con el Teorema 3.2.9, ΔCIE_1 es un triángulo isósceles. Por consiguiente, $IE_1 \cong CE_1$. De manera similar, podemos probar que ΔD_1BI es un triángulo isósceles, y como consecuencia, obtenemos que $ID_1 \cong BD_1$. Por lo cual,

$$|D_1E_1| = |ID_1| + |IE_1| = |BD_1| + |CE_1|.$$

Aplicando un argumento análogo al anterior, podemos también probar que ΔE_2I_cC y ΔD_2I_cB son triángulos isósceles. De donde deducimos que $I_cE_2 \cong CE_2$ y $I_cD_2 \cong BD_2$. Por lo tanto,

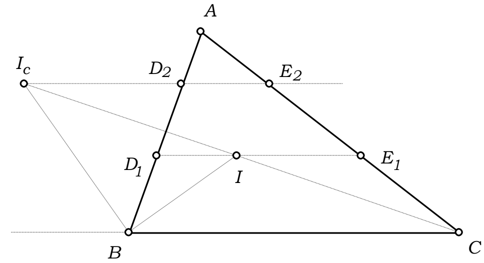


Figura 8.69

$$|D_2E_2| = |I_cE_2| - |I_cD_2| = |CE_2| - |BD_2| = ||BD_2| - |CE_2||. \clubsuit$$

8.3.46. Teorema. En todo triángulo ΔABC se cumplen que las siguientes identidades:

$$|AH| = 2|OM_a|,$$
$$|BH| = 2|OM_b| \text{ y}$$
$$|CH| = 2|OM_c|.$$

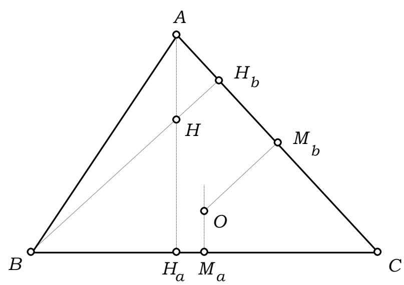


Figura 8.70

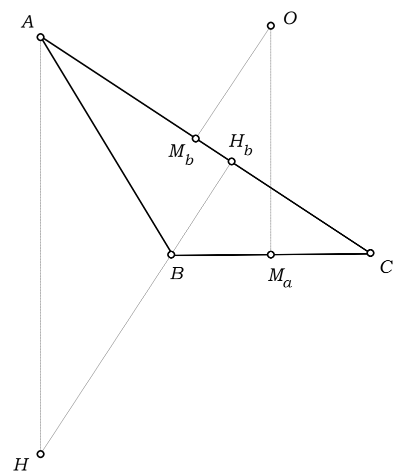


Figura 8.71

Prueba: Por el Teorema del Segmento Medio (4.3.10), sabemos que $AB \parallel M_aM_b$, $AH_a \parallel OM_a$ y $BH \parallel OM_b$. Según el Corolario 6.2.7, $\Delta HAB \sim \Delta OM_aM_b$. De donde se obtiene la relación

$$\frac{|BH|}{|OM_b|} = \frac{|AB|}{|M_aM_b|} = \frac{|AH|}{|OM_a|}.$$

Del Teorema 4.3.10 hallamos que $\dfrac{|AB|}{|M_aM_b|} = 2$. Por consiguiente, $|BH| = 2|OM_b|$ y $|AH| = 2|OM_a|$. De manera completamente similar, se establece la igualdad $|CH| = 2|OM_c|$. ♣

8.4. Teoremas sobre el área de un triángulo

8.4.1. Teorema. En todo triángulo se cumplen las siguientes relaciones:

$$are(\Delta ABC) = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen}\angle A,$$

$$are(\Delta ABC) = \frac{1}{2} ac \operatorname{sen}\angle B \text{ y}$$

$$are(\Delta ABC) = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen}\angle C.$$

Prueba: Consideremos la siguiente figura:

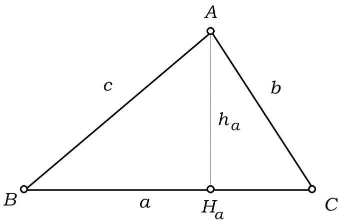


Figura 8.72

Probemos solamente la segunda igualdad. Según el Teorema 7.1.6, sabemos que

$$are(\Delta ABC) = \frac{1}{2} a\, h_a .$$

Por la definición, sen $\angle B = \dfrac{h_a}{c}$ y al sustituir hallamos que

$$are(\Delta ABC) = \frac{1}{2} ac\operatorname{sen}\angle B. \clubsuit$$

El siguiente resultado es una consecuencia directa del teorema anterior y del Corolario 7.1.9.

8.4.2. Corolario. En todo paralelogramo $\square ABCD$, se cumple la identidad $are(\square ABCD) = bc \operatorname{sen}\angle A$.

La fórmula que a continuación damos es una de las más fascinantes de la Geometría Euclidiana.

8.4.3. Teorema (Fórmula de Herón). Si ΔABC es un triángulo, entonces

$$are(\Delta ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} .$$

Prueba: De las fórmulas del Teorema 8.3.16 y el Teorema 7.1.6 vemos que

$$are(\Delta ABC) = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} a \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} .$$

A continuación, daremos otra demostración de la Fórmula de Herón ideada por M. S. Klamkin [a-87] y que no recurre a las fórmulas del Teorema 8.3.16:

$$are(\Delta ABC) = \frac{1}{2} bc\operatorname{sen}\angle A \qquad (8.4.1)$$

$$16are(\Delta ABC)^2 = 4b^2c^2(\operatorname{sen}\angle A)^2$$

$$16are(\Delta ABC)^2 = 4b^2c^2(1-(\cos\angle A)^2) \qquad (8.2.1\ (5))$$

$$16are(\Delta ABC)^2 = 4b^2c^2\left(1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2\right) \qquad (8.2.8)$$

$$16are(\Delta ABC)^2 = 4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2$$

$$16are(\Delta ABC)^2 = (2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)$$

$$are(\Delta ABC)^2 = \frac{1}{16}(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)$$
$$are(\Delta ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\ . \clubsuit$$

8.4.4. Teorema. Las áreas de dos triángulos que tienen un ángulo congruente son proporcionales a los productos de las longitudes de los lados que forman dichos ángulos.

Prueba: Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos tales que $\angle A \cong \angle A'$. La demostración no dependerá del tipo de ángulo que sea $\angle A$.

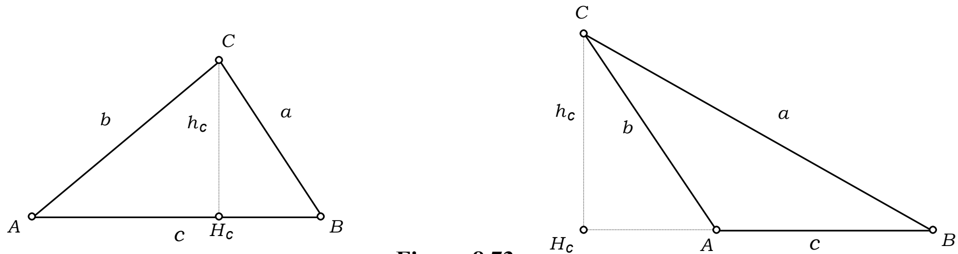


Figura 8.73

Consideremos los triángulos rectángulos ΔCH_cA y $\Delta C'H_{c'}A'$. Por el Corolario 4.3.6, ambos triángulos tienen sus ángulos correspondientes congruentes y así, según el primer criterio de semejanza (8.1.9), $\Delta CH_cA \sim \Delta C'H_{c'}A'$. Como consecuencia de esto, tenemos que $\frac{h_c}{h_{c'}} = \frac{b}{b'}$ y si sustituimos el valor en las áreas, de acuerdo con el Teorema 7.1.6, hallamos que

$$\frac{are(\Delta ABC)}{are(\Delta A'B'C')} = \frac{\frac{1}{2}ch_c}{\frac{1}{2}c'h_{c'}} = \frac{ch_c}{c'h_{c'}} = \frac{cb}{c'b'}\ . \clubsuit$$

8.4.5. Corolario. Si $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, entonces $\frac{are(\Delta ABC)}{are(\Delta A'B'C')} = \frac{a^2}{a'^2} = \frac{b^2}{b'^2} = \frac{c^2}{c'^2}$.

Prueba: Por hipótesis, sabemos que $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ y según el Teorema 8.4.4,

$$\frac{are(\Delta ABC)}{are(\Delta A'B'C')} = \frac{ab}{a'b'} = \frac{ca}{c'a'} = \frac{cb}{c'b'}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{are(\Delta ABC)}{are(\Delta A'B'C')} = \frac{a^2}{a'^2} = \frac{b^2}{b'^2} = \frac{c^2}{c'^2}\ . \clubsuit$$

8.4.6. Teorema. En todo triángulo ΔABC se cumplen las identidades

$$are(\Delta ABC) = 4are(\Delta M_a M_b M_c) = 4are(\Delta A M_b M_c) = 4are(\Delta M_a B M_c) = 4are(\Delta M_a M_b C).$$

Prueba: De acuerdo con el Teorema 8.1.17, sabemos que

$$\Delta ABC \sim \Delta M_a M_b M_c \cong \Delta A M_b M_c \cong \Delta M_a B M_c \cong \Delta M_a M_b C.$$

Por consiguiente,

$$are(\Delta M_a M_b M_c) = are(\Delta A M_b M_c) = are(\Delta M_a B M_c) = are(\Delta M_a M_b C)$$

y de aquí obtenemos que

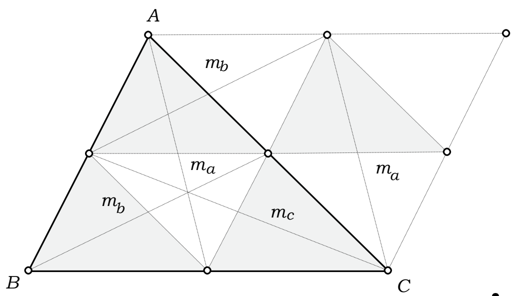
$$are(\Delta ABC) = are(\Delta M_a M_b M_c) + are(\Delta A M_b M_c) + are(\Delta M_a B M_c) + are(\Delta M_a M_b C) =$$

$$4are(\Delta M_a M_b M_c) = 4are(\Delta A M_b M_c) = 4are(\Delta M_a B M_c) = 4are(\Delta M_a M_b C). \clubsuit$$

La demostración del siguiente teorema nos ofrece un elegante argumento sin usar palabra alguna.

8.4.7. Teorema[a-79]. En todo triángulo ΔABC, se cumple la identidad $\dfrac{are(\Delta(m_a, m_b, m_c))}{are(\Delta ABC)} = \dfrac{3}{4}$.

Prueba:



♣

Figura 8.74

8.4.8. Teorema. Sea ΔABC un triángulo. Si $P \in int(\Delta ABC)$ y M es el punto de intersección de $\overrightarrow{AP}$ y BC, entonces

$$\frac{are(\Delta PBC)}{are(\Delta ABC)} = \frac{|PM|}{|AM|}.$$

Prueba: Consideremos la altura AH_a del triángulo ΔABC. Si $M = H_a$, entonces PM y AM son las alturas de los triángulos ΔBPC y ΔABC, respectivamente, y por ello, $\dfrac{are(\Delta PBC)}{are(\Delta ABC)} = \dfrac{|PM|}{|AM|}$. Supongamos pues que $M \neq H_a$. Tracemos una recta paralela a BC que pase por P y corte a AH_a en el punto Q:

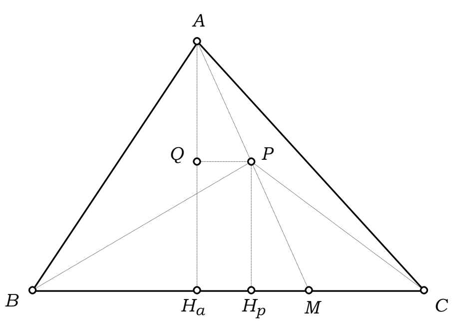


Figura 8.75

Sea H_p la altura del triángulo ΔBPC con respecto a su vértice P. Entonces, $QH_a \cong H_pP$, pues H_aH_pPQ es un rectángulo. De acuerdo con los Teoremas 6.1.13 y 7.1.6, hallamos que

$$\frac{are(\Delta PBC)}{are(\Delta ABC)} = \frac{\frac{1}{2}|QH_a|}{\frac{1}{2}|AH_a|} = \frac{\frac{1}{2}|PH_a|}{\frac{1}{2}|AH_a|} = \frac{|QH_a|}{|AH_a|}$$

$$= \frac{|PM|}{|AM|}. \clubsuit$$

8.4.9. Corolario. Si G es el centro de gravedad del triángulo ΔABC, entonces

$$are(\Delta ABC) = 3are(\Delta GBC) = 3are(\Delta GCA) = 3are(\Delta GAB).$$

Prueba: Por el Teorema 8.3.34, sabemos que $|AG| = \frac{2}{3}|AM_a|$ y, por el teorema anterior, encontramos que

$$\frac{are(\Delta GBC)}{are(\Delta ABC)} = \frac{|GM_a|}{|AM_a|} = \frac{\frac{1}{3}|AM_a|}{|AM_a|} = \frac{1}{3}. \clubsuit$$

8.4.10. Teorema. Dado un triángulo ΔABC, si $t = \frac{per(\Delta ABC)}{are(\Delta ABC)}$, entonces

$$a + b - c = \frac{4}{t}(\csc\angle C + \cot\angle C).$$

Prueba: Según la Ley de los Cosenos (8.2.8), sabemos que se cumple la identidad

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle C$$
$$a^2 + b^2 - c^2 = 2ab\cos\angle C$$
$$a^2 + 2ab + b^2 - c^2 = 2ab + 2ab\cos\angle C = 2ab(1 + \cos\angle C)$$
$$(a+b)^2 - c^2 = 2ab(1 + \cos\angle C)$$
$$(a + b + c)(a + b - c) = 2ab(1 + \cos\angle C).$$

De acuerdo con el Teorema 8.4.1, $are(\Delta ABC) = \frac{1}{2}ab\operatorname{sen}\angle C$. Sustituyendo vemos que

$$a + b - c = \frac{4}{t\operatorname{sen}\angle C}(1 + \cos\angle C)$$
$$a + b - c = \frac{4}{t}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\angle C} + \frac{\cos\angle C}{\operatorname{sen}\angle C}\right)$$
$$a + b - c = \frac{4}{t}(\csc\angle C + \cot\angle C). \clubsuit$$

8.4.11. Corolario [a-11]. En un triángulo ΔABC, su área y su perímetro son iguales si y solo si

$$a + b - c = 4(\csc\angle C + \cot\angle C).$$

Prueba: *Necesidad*. Si $1 = \frac{per(\Delta ABC)}{are(\Delta ABC)}$, por el teorema anterior, tenemos entonces que

$$a + b - c = 4(\csc\angle C + \cot\angle C).$$

Suficiencia. Supongamos que $a + b - c = 4(\csc\angle C + \cot\angle C)$. Según el Teorema 8.4.10, sabemos que

$$a + b - c = \frac{4}{t}(\csc\angle C + \cot\angle C) = 4(\csc\angle C + \cot\angle C).$$

De aquí se sigue la igualdad $1 = t = \frac{a+b+c}{are(\Delta ABC)}$. $\clubsuit$

8.4.12. Corolario [a-11]. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle C$. Entonces, el área y el perímetro del triángulo ΔABC son iguales si y solo si $a + b - c = 4$.

Usando el resultado del corolario anterior podemos encontrar dos triángulos rectángulos diferentes con área y perímetro iguales:

Figura 8.76

W. Sierpinski menciona el siguiente resultado en su libro [l-291 p. 36].

8.4.13. Teorema. Dos triángulos rectángulos con la misma área e hipotenusas congruentes son congruentes.

Prueba: Supongamos que ΔABC y $\Delta A'B'C'$ son dos triángulos rectángulos en $\angle C$ y $\angle C'$, respectivamente, con la misma área y $c = c'$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $a > b$. De acuerdo con el Teorema 8.1.2 (2), sabemos que

$$c^2 = a^2 + b^2 = c'^2 = a'^2 + b'^2$$

y de nuestra suposición hallamos que

$$are(\Delta ABC) = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}a'b' = are(\Delta A'B'C')$$

$$ab = a'b'.$$

Usando esta igualdad, vemos que

$$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2$$
$$a^2 + 2ab' + b^2 = a'^2 + 2\,a'b' + b'^2$$
$$(a + b)^2 = (a' + b')^2$$
$$a + b = a' + b'$$

y

$$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2$$
$$a^2 - 2ab' + b^2 = a'^2 - 2\,a'b' + b'^2$$
$$(a - b)^2 = (a' - b')^2$$
$$a - b = \pm(a' - b').$$

De donde obtenemos que $a = a'$ y $b = b'$ o $a = b'$ y $b = a'$. Por lo tanto, $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$. ♣

El siguiente resultado aparece en artículo de R. W. Prielipp [a-129].

8.4.14. Teorema. Dos triángulos rectángulos con la misma área y el mismo perímetro son congruentes.

Prueba: Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos rectángulos en $\angle C$ y $\angle C'$, respectivamente, con la misma área y el mismo perímetro. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $a > b$. Según el Corolario 8.4.12, sabemos que

$$a + b - c = 4 = a' + b' - c',$$

Pero como

$$a + b + c = a' + b' + c',$$

tenemos entonces la igualdad $c = c'$. La congruencia $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ se sigue del teorema anterior. ♣

El enunciado del teorema anterior no se cumple para cualquier triángulo en general, inclusive para triángulos con lados de longitud un número entero positivo. En efecto, los triángulos isósceles

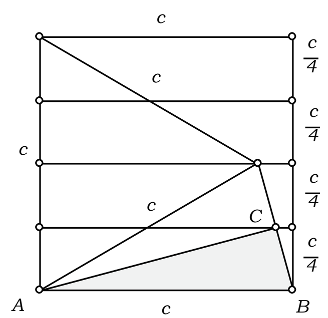
Figura 8.77

tienen la misma área (= 210) y el mismo perímetro (= 98), pero no pueden ser semejantes, puesto que los triángulos ΔABD y $\Delta A'B'D'$ no son semejantes. El árbitro del artículo [a-129] dio un método para generar un número infinito de parejas de triángulos isósceles Heronianos (triángulos cuyos lados tienen longitud igual a un número entero positivo) no semejantes con la misma área y el mismo perímetro.

El siguiente resultado es de K. Pinter [a-127] y su verificación es un argumento sin palabras.

8.4.15. Teorema (K. Pinter). El área de un triángulo rectángulo $\Delta(a,b,c)$ con hipotenusa c es igual a $\dfrac{c^2}{8}$ si y solo si uno de sus ángulos agudos tiene medida igual a 15.

Prueba:



♣

Figura 8.78

La primera identidad trigonométrica del Teorema 8.2.1 (4) se puede obtener mediante el uso de áreas de ciertos triángulos tal y como lo sugirió S. L. Greitzer [a-61]:

8.4.16. Teorema. Si $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ dos ángulos agudos tales que $\angle\beta \le \angle\alpha$, entonces
$\operatorname{sen}(\angle\alpha - \angle\beta) = \operatorname{sen}\angle\alpha\cos\angle\beta - \cos\angle\alpha\operatorname{sen}\angle\beta$ y $\cos(\angle\alpha - \angle\beta) = \cos\angle\beta\cos\angle\alpha + \operatorname{sen}\angle\alpha\operatorname{sen}\angle\beta$.

Prueba (S. L. Greitzer): Sean ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle C$ y $D \in BC$ tal que $\angle A \cong \angle\alpha$ y $\angle DAC \cong \angle\beta$. Pongamos $d = |AD|$. Consideremos la siguiente figura:

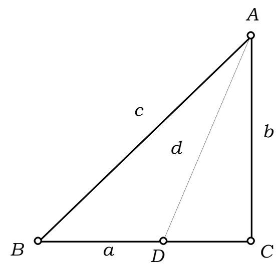


Figura 8.79

De la figura podemos cerciorarnos que se cumplen las identidades

$$are(\Delta ABD) = are(\Delta ABC) - are(\Delta ADC)$$

$$\frac{1}{2} cd \operatorname{sen}(\angle\alpha - \angle\beta) = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen}\angle\alpha + \frac{1}{2} db \operatorname{sen}\angle\beta \qquad (8.4.1).$$

$$cd \operatorname{sen}(\angle\alpha - \angle\beta) = bc \operatorname{sen}\angle\alpha + db \operatorname{sen}\angle\beta$$

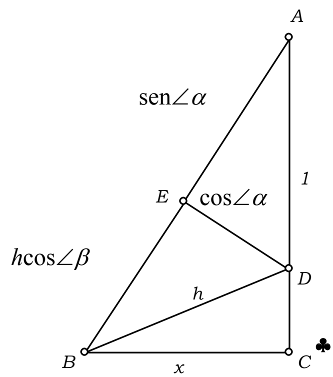
$$\operatorname{sen}(\angle\alpha - \angle\beta) = \frac{b}{d} \operatorname{sen}\angle\alpha + \frac{b}{c} \operatorname{sen}\angle\beta.$$

Pero como $\cos\angle\beta = \frac{b}{d}$ y $\cos\angle\alpha = \frac{b}{c}$, hallamos que

$$\operatorname{sen}(\angle\alpha - \angle\beta) = \operatorname{sen}\angle\alpha \cos\angle\beta - \cos\angle\alpha \operatorname{sen}\angle\beta.$$

Para demostrar la segunda identidad, daremos la elegante prueba sin palabras de L. M. Smiley [a-152] que además contiene una demostración similar a la de la primera identidad:

$$\angle\alpha \cong \angle CBA,\ \angle\beta \cong \angle DBE,$$
$$m(\angle ACB) = 90,\ m(\angle BED) = 90$$
$$h = \frac{\cos\angle\alpha}{\operatorname{sen}\angle\beta}$$
$$x = h\cos(\angle\alpha - \angle\beta) = (\operatorname{sen}\angle\alpha + h\cos\angle\beta)\cos\angle\alpha$$
$$\cos(\angle\alpha - \angle\beta) = \cos\angle\beta\cos\angle\alpha + \operatorname{sen}\angle\alpha\operatorname{sen}\angle\beta.$$



♣

Figura 8.80

El siguiente resultado puede encontrarse en el libro [147, p. 139] y en el artículo [a-116].

8.4.17. Teorema de Vecten. Dado un triángulo ΔABC cualquiera, construimos sobre sus lados BC, AC y BA los cuadrados $\square PQCB$, $\square ACRS$ y $\square BATW$ con lados a, b y c, respectivamente. Entonces

$$are(\Delta ABC) = are(\Delta CEF) = are(\Delta AGH) = are(\Delta BID).$$

Prueba: Por los Teoremas 8.2.1 (2) y 8.4.1, tenemos que

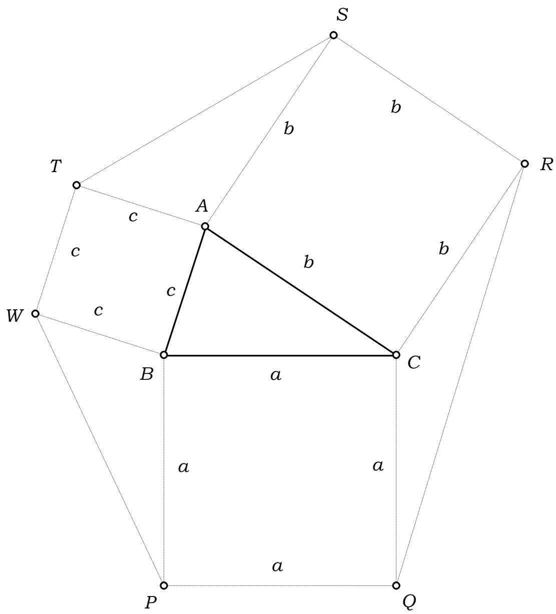


Figura 8.81

$are(\Delta ABC) = \dfrac{1}{2}bc\text{sen}\angle A = \dfrac{1}{2}bc\text{sen}(180 - \angle A)$

$= \dfrac{1}{2}bc\text{sen}(\angle SAT) = are(\Delta AST)$,

$are(\Delta ABC) = \dfrac{1}{2}ac\text{sen}\angle B = \dfrac{1}{2}ac\text{sen}(180 - \angle B)$

$= \dfrac{1}{2}ac\text{sen}(\angle WBP) = are(\Delta BWP)$ y

$are(\Delta ABC) = \dfrac{1}{2}ab\text{sen}\angle C = \dfrac{1}{2}ab\text{sen}(180 - \angle C)$

$= \dfrac{1}{2}ab\text{sen}(\angle QCR) = are(\Delta CQR)$. ♣

La siguiente caracterización de los triángulos rectángulos mediante su área y semiperímetro apareció en [l-56, Ex. 116] y, posteriormente, en [a-110].

8.4.18. Teorema. $\Delta(a,b,c)$ es un triángulo rectángulo con hipotenusa c si y solo si

$$are(\Delta(a,b,c)) = s(s - c).$$

Prueba: *Necesidad*. Supongamos que $\Delta(a,b,c)$ es un triángulo rectángulo con hipotenusa c. De acuerdo con el Teorema de Pitágoras (8.1.2 (2)), hallamos que

$$are(\Delta(a,b,c)) = \frac{ab}{2} = \frac{c^2 - (a^2 + b^2 + 2ab)}{4} = \frac{c^2 - (a+b)^2}{4} = \frac{(c-(a+b))(c+a+b)}{4} = s(s - c).$$

Suficiencia. Supongamos que $are(\Delta(a,b,c)) = s(s - c)$. Según la fórmula de Herón (8.4.3), sabemos que

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = s(s - c)$$

$$s(s - a)(s - b)(s - c) = s^2(s - c)^2$$

$$(s - a)(s - b) = s(s - c)$$

$$(b + c - a)(a + c - b) = (a + b + c)(a + b - c)$$

$$(c + (b - a)(c - (b - a)) = ((a + b) + c)((a + b) - c))$$

$$c^2 - (b - a)^2 = (a + b)^2 - c^2$$

$$c^2 - b^2 + 2ab - a^2 = a^2 + 2ab + b^2 - c^2$$

$$2c^2 = 2a^2 + 2b^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

De acuerdo con el Recíproco del Teorema de Pitágoras (8.2.6 (3)), concluimos que $\Delta(a,b,c)$ es un triángulo rectángulo con hipotenusa c. ♣

8.4.19. Teorema. Si $\square ABCD$ es un cuadrilátero y $\angle\alpha$ uno de los ángulos formados por sus diagonales, entonces $are(\square ABCD) = \frac{1}{2}ef\text{sen}\angle\alpha$.

Prueba. Sean $\square ABCD$ un cuadrilátero y O el punto de intersección de sus diagonales e y f. Por el Teorema

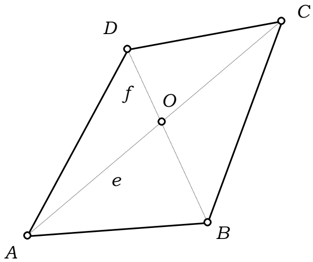


Figura 8.82

8.4.1, sabemos que $are(\Delta OAB) = \frac{1}{2}|AO||OB|\text{sen}\angle AOB$, $are(\Delta OBC) = \frac{1}{2}|OB||OC|\text{sen}\angle BOC$, $are(\Delta OCD) = \frac{1}{2}|OC||OD|\text{sen}\angle COD$ y $are(\Delta ODA) = \frac{1}{2}|OD||OA|\text{sen}\angle DOA$. Por consiguiente, tenemos que

$$are(\square ABCD) = are(\Delta OAB) + are(\Delta OBC) + are(\Delta OCD) + are(\Delta ODA)$$
$$= \frac{1}{2}(|AO||OB|\text{sen}\angle AOB + |OB||OC|\text{sen}\angle BOC + |OC||OD|\text{sen}\angle COD + |OD||OA|\text{sen}\angle DOA).$$

Tenemos que $\angle AOB \cong \angle COD$ y $\angle BOC \cong \angle DOA$, por ser opuestos por el vértice (2.10.2). De las fórmulas del Teorema 8.2.1 (2) vemos que $\text{sen}\angle AOB = \text{sen}\angle BOC$ y $\text{sen}\angle COD = \text{sen}\angle DOA$. Así, encontramos que

$$are(\square ABCD) = \frac{1}{2}(|AO||OB| + |OB||OC| + |OC||OD| + |OD||OA|)\text{sen}\angle\alpha =$$
$$\frac{1}{2}((|OB| + |OD|)|OA| + (|OB| + |OD|)|OC|)\text{sen}\angle\alpha = \frac{1}{2}ef\text{sen}\angle\alpha,$$

en donde $\angle\alpha$ representa a cualquiera de los ángulos $\angle AOB$ y $\angle BOC$. ♣

J. Harries [a-66] observó que la fórmula del Teorema 8.4.19 también se cumple para cuadriláteros no convexos.

R. A. Johnson en su libro [l-188] presentó una generalización para cualquier cuadrilátero, encontrada por Bretscheider, de la famosa fórmula de Brahmagupta (la cual nos da el área de un cuadrilátero que se puede inscribir en un círculo en términos de la longitud de sus lados, Teorema 9.9.15). Pero el autor no dio demostración alguna de ella. Años más tarde, B. Greenberg publica una prueba de dicha fórmula en su artículo [a-60]. A continuación, presentamos la fórmula de Bretscheider y la prueba de Greenberg.

8.4.20. Teorema (Fórmula de Bretscheider). Si $\square ABCD$ es un cuadrilátero, entonces

$$are(\square ABCD) = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd(\cos\angle\alpha)^2},$$

en donde $\angle\alpha$ es un ángulo tal que $2m(\angle\alpha)$ es la suma de las medidas de dos ángulos opuestos del cuadrilátero.

Prueba (Greenberg): Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero. Según la Ley de los Cosenos (8.2.8), sabemos que

$|AC|^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\angle D$ y $|AC|^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle B$.

Al igualar obtenemos que

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle B = c^2 + d^2 - 2cd\cos\angle D$$
$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2(ab\cos\angle B - cd\cos\angle D).$$

Por otra parte, sabemos que

$$are(\square ABCD) = are(\Delta ABC) + are(\Delta DAC)$$
$$4are(\square ABCD) = 4(are(\Delta ABC) + are(\Delta DAC))$$
$$4are(\square ABCD) = 4(\frac{ab\,\text{sen}\angle B}{2} + \frac{cd\,\text{sen}\angle D}{2}).$$

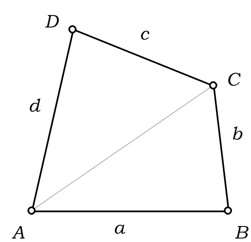


Figura 8.83

Sea $\angle\alpha$ un ángulo tal que $2m(\angle\alpha) = m(\angle B) + m(\angle D)$. De ambas identidades deducimos que

$$16are(\square ABCD)^2 + (a^2+b^2-c^2-d^2)^2 = 16\left(\frac{ab\operatorname{sen}\angle B}{2}+\frac{cd\operatorname{sen}\angle D}{2}\right)^2 + 4(ab\cos\angle B - cd\cos\angle D)^2$$
$$= 4((ab\operatorname{sen}\angle B + cd\operatorname{sen}\angle D)^2 + (ab\cos\angle B - cd\cos\angle D)^2) = 4(a^2b^2(\operatorname{sen}\angle B)^2 + 2abcd\operatorname{sen}\angle B\operatorname{sen}\angle D +$$
$$c^2d^2(\operatorname{sen}\angle D)^2 + a^2b^2(\cos\angle B)^2 - 2abcd\cos\angle B\cos\angle D + c^2d^2(\cos\angle D)^2)$$
$$= 4(a^2b^2((\operatorname{sen}\angle B)^2 + (\cos\angle B)^2) + 2abcd(\operatorname{sen}\angle B\operatorname{sen}\angle D - \cos\angle B\cos\angle D) + c^2d^2((\operatorname{sen}\angle D)^2 + (\cos\angle D)^2))$$
$$= 4(a^2b^2 + c^2d^2 - 2abcd(\cos(\angle B + \angle D))$$
$$= 4(a^2b^2 + c^2d^2 - 2abcd\cos 2\angle\alpha)$$
$$= 4(a^2b^2 + c^2d^2 - 2abcd(2(\cos\angle\alpha)^2 - 1))$$
$$= 4((a^2b^2 + c^2d^2 + 2abcd - 4abcd(\cos\angle\alpha)^2)$$
$$= 4((ab+cd)^2 - 4abcd(\cos\angle\alpha)^2)$$
$$= 4(ab+cd)^2 - 16abcd(\cos\angle\alpha)^2.$$

Por ello,

$$16are(\square ABCD)^2 = 4(ab+cd)^2 - 16abcd(\cos\angle\alpha)^2 - (a^2+b^2-c^2-d^2)^2$$
$$= [2(ab+cd) + (a^2+b^2-c^2-d^2)][2(ab+cd) - (a^2+b^2-c^2-d^2)] - 16abcd(\cos\angle\alpha)^2$$
$$= [(a+b)^2 - (c-d)^2][(c+d)^2 - (a-b)^2] - 16abcd(\cos\angle\alpha)^2$$
$$= (a+b+c-d)(a+b+d-c)(a+c+d-b)(b+c+d-a) - 16abcd(\cos\angle\alpha)^2$$
$$= (2s-2d)(2s-2c)(2s-2b)(2s-2a) - 16abcd(\cos\angle\alpha)^2$$
$$= 16(s-d)(s-c)(s-b)(s-a) - 16abcd(\cos\angle\alpha)^2.$$

Por lo tanto,

$$16are(\square ABCD)^2 = 16(s-d)(s-c)(s-b)(s-a) - 16abcd(\cos\angle\alpha)^2$$
$$are(\square ABCD)^2 = (s-d)(s-c)(s-b)(s-a) - abcd(\cos\angle\alpha)^2$$
$$are(\square ABCD) = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd(\cos\angle\alpha)^2}. \ \clubsuit$$

Mediante el Teorema 8.4.1, es posible ver que el área de un trapecio se puede expresar en función de las longitudes de tres de sus lados y el seno de uno de sus ángulos:

8.4.21. Teorema. Si $\square ABCD$ es un trapecio con $AB \parallel BC$, entonces

$$are(\square ABCD) = \frac{(a+c)d}{2}\operatorname{sen}\angle A = \frac{(a+c)b}{2}\operatorname{sen}\angle B.$$

Prueba: Probaremos la primera identidad solamente. Sea $h = DH$ la altura correspondiente a lado AB y el vértice D del trapecio $\square ABCD$.

Figura 8.84

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\angle A$ es un ángulo agudo, pues de otra forma aplicamos la identidad $\operatorname{sen}(\angle A) = \operatorname{sen}(\angle 180 - \angle A)$. Según el Teorema 8.4.1 y el hecho de que $h = d\operatorname{sen}\angle A$, hallamos que

$$are(\square ABCD) = are(\Delta DAB) + are(\Delta BCD) = \frac{ad}{2}\operatorname{sen}\angle A + \frac{hc}{2} = \frac{ad}{2}\operatorname{sen}\angle A + \frac{dc}{2}\operatorname{sen}\angle A = \frac{(a+c)d}{2}\operatorname{sen}\angle A. \ \clubsuit$$

8.4.22. Teorema. Si $\square ABCD$ es un trapecio isósceles con $AB \parallel CD$, entonces

$$are(\square ABCD) = |AC|^2 \operatorname{sen}\angle BAC \operatorname{sen}(\angle 90 - \angle BAC).$$

Prueba: Sin perder generalidad, supongamos que $CD < AB$. Sean H_a y H_c las proyecciones de A y C sobre las rectas que contienen a los lados CD y AB, respectivamente. De acuerdo con el Teorema 5.3.3, $AH_a \cong CH_c$. Pongamos $h = |AH_a|$. Fijamos nuestra atención en los triángulos ΔCH_cB y ΔAH_aD. Del Teorema 5.6.6 hallamos que $\angle A \cong \angle B$. Por el Teorema 3.4.4, sabemos que $\angle A \cong \angle H_aDA$. Por ello, $\angle B \cong \angle H_aDA$. Según el criterio de congruencia (3.6.2), obtenemos que

$$\Delta CH_cB \cong \Delta AH_aD.$$

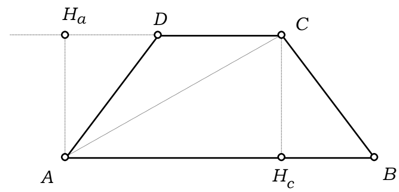


Figura 8.85

De aquí se sigue la igualdad

$$are(\square ABCD) = are(\square AH_cCD) + are(\Delta CH_cB) = are(\square AH_cCD) + are(\Delta AH_aD) = are(\square AH_cCH_a).$$

Como $\square AH_cCH_a$ es un rectángulo y AC es una de sus diagonales, por el Teorema 7.1.5,

$$are(\square AH_cCH_a) = |AH_c||CH_a| = |AH_c|h.$$

Por otro lado, sabemos que

$$\operatorname{sen}(\angle ACH_c) = \operatorname{sen}(\angle 90 - \angle BAC) = \frac{|AH_c|}{|AC|} \text{ y } \operatorname{sen}\angle BAC = \frac{h}{|AC|}.$$

Sustituyendo, encontramos que

$$are(\square ABCD) = are(\square AH_cCH_a) = |AH_c|h == |AC|\operatorname{sen}\angle BAC|AC|\operatorname{sen}(\angle 90 - \angle BAC). \clubsuit$$

8.5. El Teorema de Pitágoras

Quizá el teorema de geometría euclidiana que más mención e importancia ha tenido a través de los siglos es sin duda alguna el Teorema de Pitágoras (el libro de P. M. González Urbaneja [l-161] ofrece una biografía completa de Pitágoras y una breve historia sobre su famoso teorema). El lector puede encontrar más de 250 demostraciones diferentes de este célebre teorema en el libro [l-211]. Aún se siguen publicando nuevas pruebas del mismo teorema. Una de las pruebas más originales e ingeniosas se le atribuye al Presidente Garfield (1876) de los Estados Unidos de América del Norte, a esta se le conoce como la configuración del Presidente Garfield ([a-58] es un interesante artículo sobre la historia de esta prueba). A continuación, explicaremos la configuración del Presidente Garfield.

8.5.1. Teorema de Pitágoras. Si $\Delta(a,b,c)$ es un triángulo rectángulo con catetos a y b e hipotenusa c, entonces $c^2 = a^2 + b^2$.

Prueba(Garfield): Coloquemos dos triángulos congruentes a $\Delta(a,b,c)$ como se muestra en la siguiente figura:

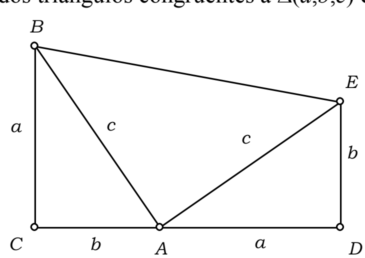


Figura 8.86

Tenemos entonces que el trapecio $\square BCDE$ es la unión de los triángulos rectángulos ΔCAB, ΔADE y ΔAEB. Lo cual implica, por el Teorema 7.1.10, que

$$are(\square BCDE) = are(\Delta CAB) + are(\Delta ADE) + are(\Delta AEB)$$
$$\frac{1}{2}(a+b)(a+b) = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2$$
$$(a+b)(a+b) = ab + ab + c^2$$
$$a^2 + ab + ab + b^2 = ab + ab + c^2$$
$$a^2 + b^2 = c^2 . ♣$$

En el Corolario 8.2.6 (3) vimos que el recíproco del Teorema de Pitágoras también se cumple. Pero la mayoría de las demostraciones conocidas se basan en el mismo Teorema de Pitágoras. A continuación, daremos una prueba del recíproco sin usar dicho teorema.

8.5.2. Reciproco del Teorema de Pitágoras. Si $\Delta(a,b,c)$ es un triángulo en el cual $c^2 = a^2 + b^2$, entonces $\Delta(a,b,c)$ es un triángulo rectángulo con catetos a y b e hipotenusa c.

Pueba[a-Rosen]: De la hipótesis deducimos que $c > a$ y de la igualdad $b^2 = c^2 - a^2 = (c + a)(c - a)$ obtenemos que $\frac{c+a}{b} = \frac{b}{c-a}$.

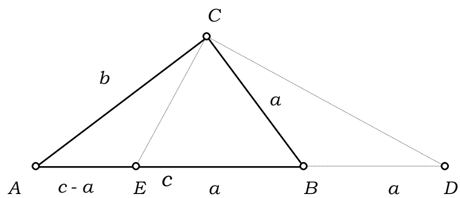


Figura 8.87

En la figura 8.87, se tiene que los triángulos ΔDCB y ΔEBC son isósceles. Por consiguiente, $\angle BEC \cong \angle ECB$ y $\angle CDB \cong \angle BCD$. Además, $m(\angle CBE) = 2m(\angle CDB)$. Consideremos ahora los triángulos ΔADC y ΔACE. Estos dos triángulos tienen en común al ángulo $\angle A$ y como se cumple la identidad $\frac{c+a}{b} = \frac{b}{c-a}$, con base en el Teorema 6.2.10, se obtiene que $\Delta ADC \sim \Delta ACE$. De esta semejanza obtenemos que $\angle CDA = \angle CDB \cong \angle ACE$. Finalmente,

$$2m(\angle ECB) + 2m(\angle CDB) = 180$$
$$m(\angle ECB) + m(\angle CDB) = 90$$
$$m(\angle ECB) + m(\angle ACE) = 90$$
$$m(\angle ACB) = 90.$$

Con ésto probamos que $\angle C$ es un ángulo recto y, por lo tanto, $\Delta(a,b,c)$ es un triángulo rectángulo con hipotenusa c y catetos a y b. ♣

8.5.3. Corolario. Si a, b y c son tres números reales positivos tales que $c^2 = a^2 + b^2$, entonces a, b y c son las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo de hipotenusa c.

Prueba: Basta con probar que a, b y c son los lados de un triángulo. De nuestra suposición hallamos las desigualdades $a^2 < c^2 = a^2 + b^2$ y $b^2 < c^2 = a^2 + b^2$. Como resultado de esto, vemos que $a < c < b + c$ y $b < c < a + c$. De la igualdad

$$c^2 = a^2 + b^2 < a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$$

se sigue que $c < a + b$. Así, por el Teorema 8.3.17, a, b y c son las longitudes de los lados de un triángulo. Según el recíproco del Teorema de Pitágoras, dicho triángulo es un triángulo rectángulo. ♣

A continuación, damos otra prueba del Teorema de Pitágoras.

Prueba Dinámica del Teorema de Pitágoras:

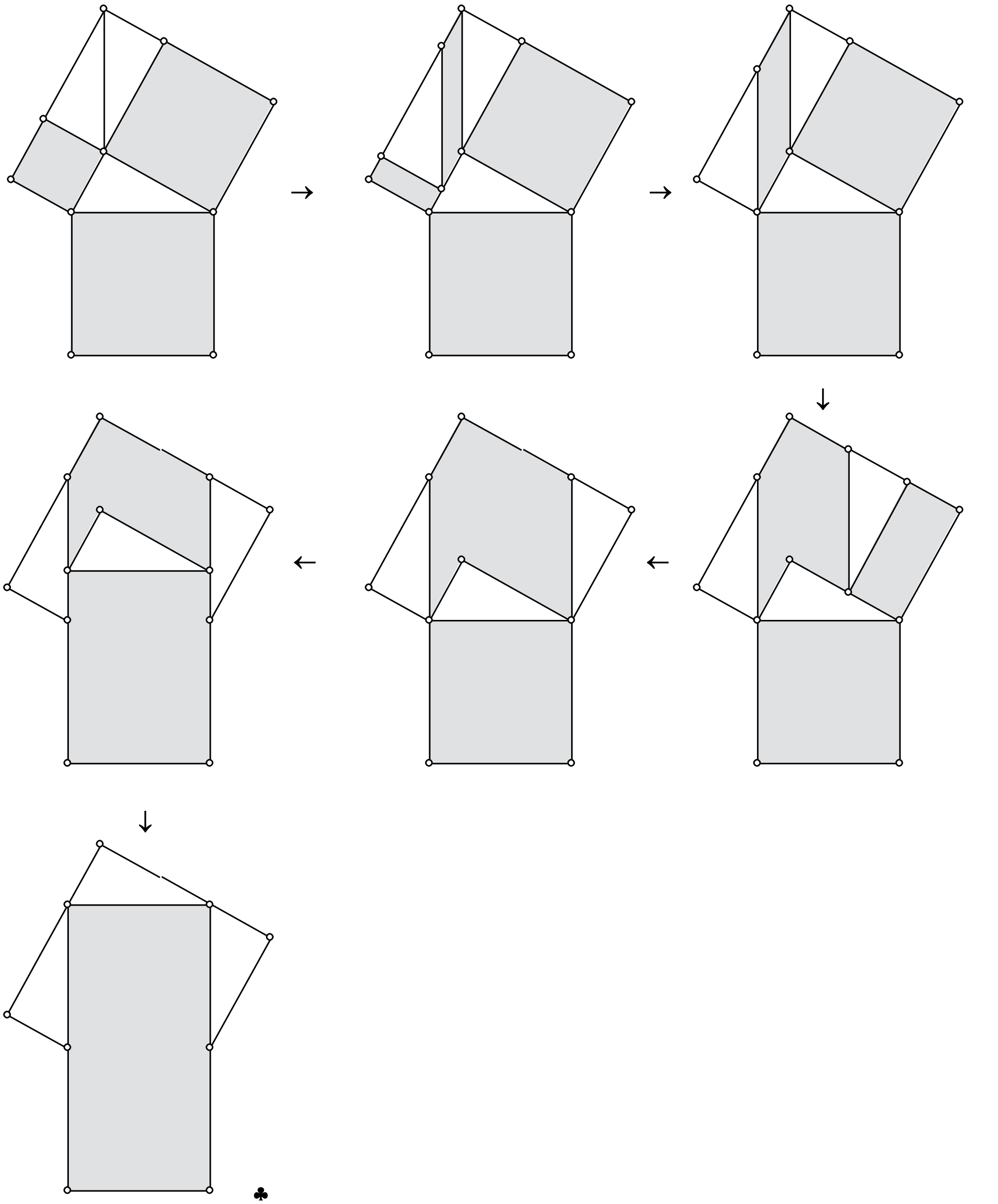


Figura 8.88

Una prueba del Teorema de Pitágoras, mediante dobleces de una hoja cuadrada de papel, se ilustra en el libro [l-Ka, p. 42-43].

Veamos que la cuarta identidad enunciada en el Teorema 8.1.2 caracteriza los triángulos rectángulos:

8.5.4. Corolario. Un triángulo ΔABC es rectángulo en $\angle C$ si y solo si $h_c^2 = p_c\, q_c$.

Prueba: La necesidad se estableció en el Teorema 8.1.2 (4).
Suficiencia. Supongamos que $h_c^2 = p_c\, q_c$.
Primero supongamos que el ángulo $\angle A$ no sea agudo.
Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= h_c^2 + q_c^2 + h_c^2 + (q_c - c)^2 \\ &= 2h_c^2 + 2q_c^2 - 2q_c c + c^2 \\ &= 2h_c^2 + 2q_c^2 - 2q_c(q_c - p_c) + c^2 \\ &= 2h_c^2 + 2q_c^2 - 2q_c^2 - 2p_c q_c + c^2 \\ &= c^2. \end{aligned}$$

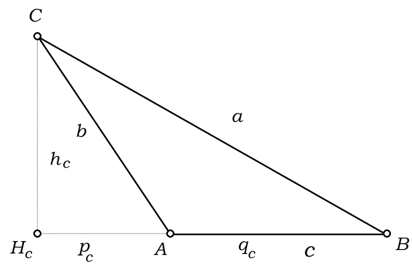


Figura 8.89

De acuerdo con el recíproco del Teorema de Pitágoras (8.5.2), el ángulo $\angle C$ tiene que ser recto, pero ésto es una contradicción. Por ello, debemos de tener que $\angle A$ es un ángulo agudo. Así encontramos que

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= h_c^2 + q_c^2 + h_c^2 + p_c^2 \\ &= 2h_c^2 + q_c^2 + p_c^2 \\ &= 2p_c q_c + q_c^2 + p_c^2 \\ &= (p_c + q_c)^2 \\ &= c^2. \end{aligned}$$

Según el Teorema 8.5.2, el ángulo $\angle C$ es recto. ♣

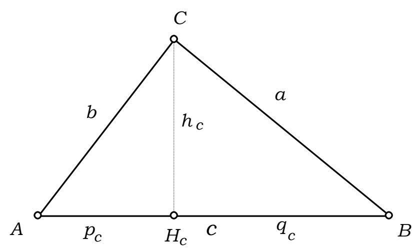


Figura 8.90

8.5.5. Teorema. Si la longitud de un lado de un triángulo isósceles es igual a $\sqrt{2}$ veces la longitud de uno de los otros dos lados, entonces el ángulo opuesto al primer lado es recto.

Prueba: Sea ΔABC un triángulo isósceles con $b = c$ y $a = \sqrt{2}\, b$. Entonces, $a^2 = 2b^2 = b^2 + b^2 = b^2 + c^2$ y por el Teorema 8.5.2, ΔABC es un triángulo rectángulo con hipotenusa a, es decir, $\angle A$ es un ángulo recto. ♣

Mediante la configuración del Presidente Garfield es posible dar demostraciones puramente geométricas de algunos resultados clásicos de las matemáticas. Daremos una muestra de ello en los siguientes teoremas. Nuestro lema principal que no ayudará en esta tarea es el siguiente.

8.5.6. Lema. En la siguiente figura,

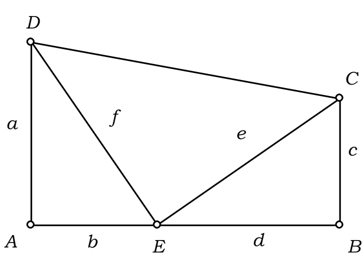


Figura 8.91

si los ángulos $\angle EAD$ y $\angle CBE$ son rectos, entonces se cumple la identidad

$$\operatorname{sen}\angle CED = \frac{ad+bc}{\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}}.$$

Prueba: Según el Teorema 7.1.10, sabemos que el área del trapecio $\square ABCD$ es igual a

$$are(\square ABCD) = \frac{1}{2}(b+d)(a+c) = are(\Delta AED) + are(\Delta CED) + are(\Delta EBC)$$

$$are(\square ABCD) = \frac{1}{2}(b+d)(a+c) = \frac{1}{2}ab + are(\Delta CED) + \frac{1}{2}dc.$$

Empleando el Teorema 8.4.1, hallamos que $are(\Delta CED) = \frac{1}{2}ef \operatorname{sen}\angle CED$ y de aquí se sigue que

$$are(\square ABCD) = \frac{1}{2}(b+d)(a+c) = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ef \operatorname{sen}\angle CED + \frac{1}{2}dc$$

$$(b+d)(a+c) = ab + ef \operatorname{sen}\angle CED + dc$$

$$ba + da + bc + dc = ab + ef \operatorname{sen}\angle CED + dc$$

$$da + bc = ef \operatorname{sen}\angle CED$$

$$\operatorname{sen}\angle CED = \frac{da+bc}{ef}.$$

Por hipótesis, sabemos que ΔDAE y ΔEBC son triángulos rectángulos y por el Teorema de Pitágoras (8.5.1),

$$e = \sqrt{c^2+d^2} \text{ y } f = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Haciendo las sustituciones correspondientes llegamos a que

$$\operatorname{sen}\angle CED = \frac{ad+bc}{\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}}. \;\clubsuit$$

M. Dostor (Nouvelles Annales de Mathématiques 1869, 433, ver también [l-143, Th. 340] y [a-Gen]) dió la siguiente generalización del Teorema de Pitágoras en el contexto de semejanza de triángulos:

Si $\Delta(a,b,c)$ y $\Delta(a',b',c')$ son dos triángulos rectángulos semejantes con hipotenusas c y c', respectivamente, entonces $cc' = aa' + bb'$.

En el próximo teorema, veremos que el inverso de este resultado también se cumple.

8.5.7. Teorema. Sean $\Delta(a,b,c)$ y $\Delta(a',b',c')$ dos triángulos rectángulos con hipotenusas c y c', respectivamente. Entonces, $\Delta(a,b,c) \sim \Delta(a',b',c')$ si y solo si $cc' = aa' + bb'$.

Prueba: *Necesidad*. Coloquemos los triángulos como muestra la figura 8.92.

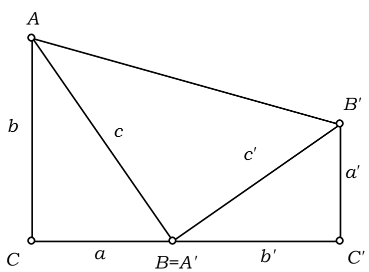


Figura 8.92

Como $\Delta(a,b,c) \sim \Delta(a',b',c')$, $\angle C = \angle BCA \cong \angle B'C'B$ y $\angle B = \angle ABC \cong \angle BB'C'$. Se sigue entonces que

$$m(\angle ABC) + m(\angle C'BB') = 90.$$

Lo cual implica que $m(\angle B'BA) = 90$. Según el Lema 8.5.6,

$$1 = \operatorname{sen}\angle 90 = \operatorname{sen}\angle B'BA = \frac{aa'+bb'}{cc'}$$

$$cc' = aa' + bb'.$$

Suficiencia. De acuerdo con el Lema 8.5.6 y nuestra suposición, sabemos que

$$\operatorname{sen}\angle B'BA = \frac{aa'+bb'}{cc'} = 1.$$

Esto significa que el ángulo $\angle B'BA$ es recto. Como resultado de esto, se obtiene la identidad

$$m(\angle ABC) + m(\angle C'BB') = 90 = m(\angle BB'C') + m(\angle C'BB') = m(\angle ABC) + m(\angle CAB).$$

Lo cual implica que

$$m(\angle ABC) = m(\angle BB'C') \text{ y } m(\angle C'BB') = m(\angle CAB).$$

Pero esto nos garantiza las congruencias

$$\angle ABC \cong \angle BB'C' \text{ y } \angle C'BB' \cong \angle CAB.$$

Finalmente, del criterio 8.1.9, se sigue la relación $\Delta(a,b,c) \sim \Delta(a',b',c')$. ♣

A. Weiner [a-Wein] usó la Configuración del Presidente Garfield para dar, de manera muy elegante, pruebas geométricas de la primera identidad trigonométrica de 8.2.1 (3) y de dos desigualdades matemáticas clásicas. De hecho, las dos pruebas anteriores están inspiradas en las ideas de Weiner. Modificando un poco las ideas originales de Weiner, probaremos los mismos resultados principales del artículo [a-Wein].

8.5.8. Teorema. Si $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ son dos ángulos agudos tales que $m(\angle\alpha + \angle\beta) \leq 180$, entonces

$$\operatorname{sen}(\angle\alpha + \angle\beta) = \operatorname{sen}\angle\alpha \cos\angle\beta + \operatorname{sen}\angle\beta \cos\angle\alpha.$$

Prueba(Weiner): En la siguiente figura, pongamos $e = f = 1$, $\angle\alpha \cong \angle BAC$, $\angle\beta \cong \angle DAE$, $a = \operatorname{sen}\angle\alpha$, $b = \cos\angle\alpha$, $c = \operatorname{sen}\angle\beta$ y $d = \cos\angle\beta$:

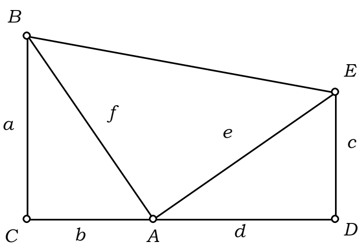


Figura 8.93

Según el Lema 8.5.6, sabemos que

$$\operatorname{sen}\angle EAB = \frac{ad+bc}{\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}} = ad + bc$$
$$= \operatorname{sen}\angle\alpha \cos\angle\beta + \operatorname{sen}\angle\beta \cos\angle\alpha,$$

ya que $a^2 + b^2 = 1 = c^2 + d^2$. Por otro lado, sabemos que

$$\operatorname{sen}\angle EAB = \operatorname{sen}(180 - (\angle\alpha + \angle\beta)) = \operatorname{sen}(\angle\alpha + \angle\beta).$$

Así, obtenemos que

$$\operatorname{sen}(\angle\alpha + \angle\beta) = \operatorname{sen}\angle\alpha \cos\angle\beta + \operatorname{sen}\angle\beta \cos\angle\alpha.$$

Esto demuestra el teorema. ♣

8.5.9. Teorema(La Desigualdad de Cauchy-Schwartz). Si a, b, c y d son cuatro números reales positivos, entonces

$$(bc + ad)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2).$$

Prueba(Weiner): La prueba se basa en la siguiente configuración:

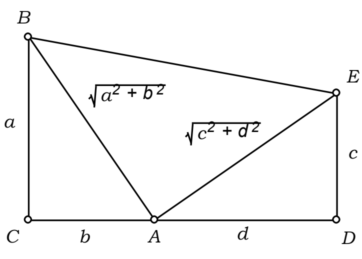


Figura 8.94

Del Lema 8.5.6 se sigue directamente que

$$\operatorname{sen}\angle EAB = \frac{ad+bc}{\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}} \leq 1$$
$$ad + bc \leq \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$$
$$(ad+bc)^2 \leq (a^2+b^2)(c^2+d^2). \text{ ♣}$$

8.5.10. Teorema. Si a y b son dos números reales positivos, entonces $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}$.

Prueba(Weiner): En la figura 8.95, tenemos que

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

$$a + b = |CD| \leq |BE| = c\sqrt{2} = \sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a + b \leq \sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2 + b^2}{2}. \clubsuit$$

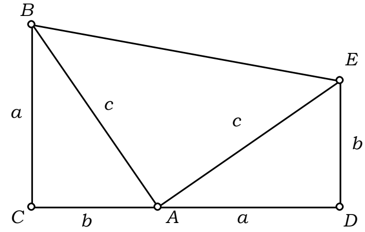


Figura 8.95

El siguiente teorema, atribuido a Pappus (300-?, d. c.), representa una generalización del Teorema de Pitágoras (el lector puede encontrar más información sobre este teorema en el libro [l-143, p. 740-741]).

8.5.11. Teorema de Pappus. Sea ΔABC un triángulo. Supongamos que se tienen dos paralelogramos $\square ACDE$ y $\square CBFG$ construidos sobre los lados AC y CB del triángulo ΔABC. Si H es el punto de intersección de las rectas $\overleftrightarrow{ED}$ y $\overleftrightarrow{FG}$, entonces $are(\square ACDE) + are(\square CBFG) = are(\square PQBA)$, en donde $\square PQBA$ es el paralelogramo construido sobre el lado AB del triángulo ΔABC con $\overleftrightarrow{PA} \parallel \overleftrightarrow{CH}$ y $PA \cong CH$.

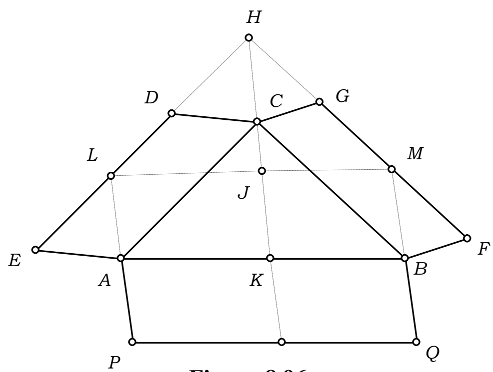


Figura 8.96

Prueba: Sean L el punto de intersección de DE y $\overleftrightarrow{PA}$, y M el punto de intersección de GF y la recta $\overleftrightarrow{QB}$. Tenemos entonces que los cuadriláteros $\square PQAB$ y $\square ABML$ son paralelogramos y no es difícil ver que son congruentes y, por ello, tienen la misma área. Sean J y K los puntos de intersección de $\overleftrightarrow{CH}$ con LM y AB, respectivamente. Según el Problema 7.251, encontramos la igualdad

$$are(\square ACDE) = are(\square ACHL) = are(\square AKJL) \text{ y } are(\square CBFG) = are(\square CBMH) = are(\square KBMJ).$$

Como $\square PQBA \cong \square ABML$, se sigue que

$$are(\square ACDE) + are(\square CBFG) = are(\square PQBA). \clubsuit$$

Otra generalización del Teorema de Pitágoras es el siguiente resultado de Thabit ibn-Qurra (826-901, d. C.).

8.5.12. Teorema de Thabit ibn-Qurra. Sea ΔABC un triángulo. Si del vértice A trazamos dos rectas que corten a BC en los puntos B' y C', de tal modo que $\angle AB'B \cong \angle A \cong \angle CC'A$, entonces

$$|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|(|BB'| + |CC'|).$$

Prueba: En la siguiente figura, se muestran los casos cuando el ángulo $\angle A$ es agudo y cuando no lo es:

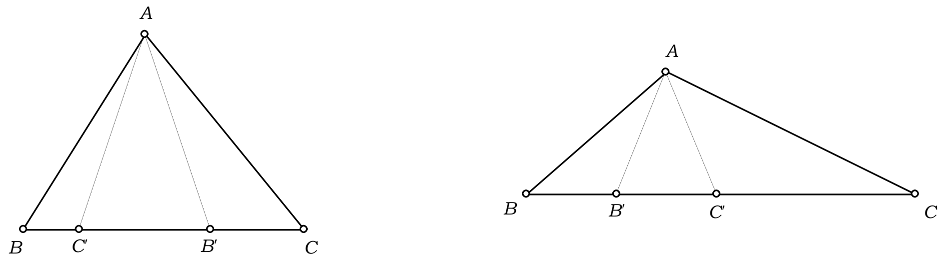


Figura 8.97

En ambos casos, observamos que $\Delta BB'A \sim \Delta ABC \sim \Delta C'CA$, ésto lo garantiza el criterio de semejanza 6.2.6. De aquí vemos que $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|BB'|}{|AB|}$ y $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|CC'|}{|AC|}$. Al factorizar y sumar, encontramos que

$$|AB|^2 + |AC|^2 = |BC||BB'| + |BC||CC'| = |BC|(|BB'| + |CC'|). \clubsuit$$

El Teorema de Pitágoras se puede interpretar diciendo que el área del cuadrado construido exteriormente sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos exteriormente sobre los catetos del mismo triángulo. Así, el Teorema de Pitágoras queda formulado en términos de las áreas de ciertos cuadrados construidos exteriormente. En el interior de un triángulo rectángulo se pueden inscribir dos cuadrados: uno teniendo como uno de sus vértices al vértice del ángulo recto y el otro teniendo un lado sobre la hipotenusa del triángulo (ver figura 8.98). Basándose en este hecho, L. Hoehn [a-Hoehn-2] descubrió del siguiente resultado que se podría interpretar como la versión en términos de perímetros del Teorema de Pitágoras:

8.5.13. Teorema(Hoehn). Sea ΔABC un triángulo rectángulo con ángulo recto $\angle A$.

1. Si $\square DEFG$ es el cuadrado inscrito en ΔABC, $\square HDIJ$ es uno de los cuadrados inscritos en ΔGBD y $\square EKLM$ es uno de los cuadrados inscritos en ΔFEC como muestra el lado izquierdo de la figura 8.98, entonces
$$per(\square DEFG) = per(\square HDIJ) + per(\square EKLM).$$
2. Si $\square DGEA$ es el cuadrado inscrito en ΔABC, $\square HIDJ$ es uno de los cuadrados inscritos en ΔDBG y $\square KLEM$ es uno de los cuadrados inscritos en ΔEGC como muestra el lado derecho de la figura 8.98, entonces
$$per(\square DGEA) = per(\square HIDJ) + per(\square KLEM).$$

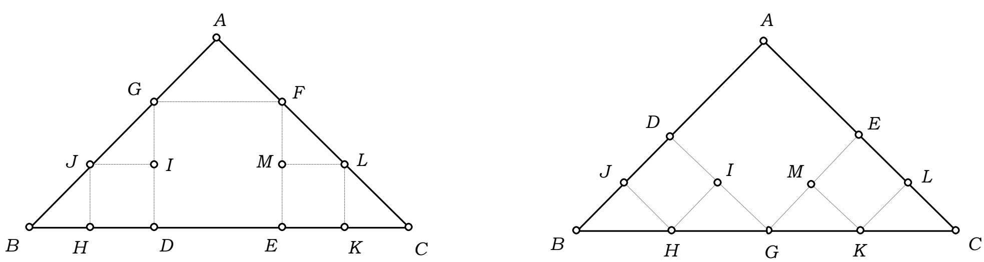


Figura 8.98

Prueba: Solo probaremos la primera afirmación. Claramente, podemos ver que $\Delta GJI \sim \Delta FML$. De aquí se deduce que

$$\frac{|JI|}{|MF|} = \frac{|IG|}{|ML|}$$
$$\frac{|JI|}{|DE|-|ML|} = \frac{|DE|-|JI|}{|ML|}$$
$$|JI||ML| = (|DE| - |ML|)(|DE| - |JI|) = |DE|^2 - |DE||JI| - |DE||ML| + |JI||ML|$$
$$|DE|^2 - |DE||JI| - |DE||ML| = 0$$
$$|DE|(|DE| - |JI| - |ML|) = 0$$
$$|DE| - |JI| - |ML| = 0$$
$$|DE| = |JI| + |ML|$$
$$4|DE| = 4|JI| + 4|ML|$$
$$per(\square\ DEFG) = per(\square\ HDIJ) + per(\square\ EKLM).\ ♣$$

Para cerrar esta sección, daremos dos aplicaciones matemáticas del Teorema de Pitágoras y finalizaremos con algunas de sus aplicaciones a la vida real.

8.5.14. Teorema. Calcular la longitud de los catetos de un triángulo rectángulo sabiendo la longitud de la hipotenusa y la suma de las longitudes de los catetos.

Prueba: Supongamos que a es la hipotenusa del triángulo rectángulo $\Delta(a,b,c)$ y $p = b + c$. Por el Teorema de Pitágoras (8.5.1), sabemos que $b^2 + c^2 = a^2$ y, por suposición, $b = p - c$. Por ello,
$$(p-c)^2 + c^2 = a^2$$
$$2c^2 - 2pc + p^2 - a^2 = 0$$
$$c = \frac{2p \pm \sqrt{4p^2 - 8(p^2 - a^2)}}{4} = \frac{2p \pm 2\sqrt{2a^2 - p^2}}{4} = \frac{p \pm \sqrt{2a^2 - p^2}}{2}.$$

Por consiguiente,
$$b = p - c = p - \frac{p \pm \sqrt{2a^2 - p^2}}{2} = \frac{2p - p \pm \sqrt{2a^2 - p^2}}{2} = \frac{p \pm \sqrt{2a^2 - p^2}}{2}.\ ♣$$

8.5.15. Teorema. Si $\Delta(a,b,c)$ es un triángulo rectángulo con hipotenusa c, entonces $a + b \leq \sqrt{2}\,c$. La igualdad se da si y solo si $a = b$.

Prueba: De acuerdo con el Teorema de Pitágoras 8.5.1, sabemos que
$$c^2 = a^2 + b^2 = \frac{(a+b)^2}{2} + \frac{(a-b)^2}{2} \geq \frac{(a+b)^2}{2}$$
$$c \geq \frac{a+b}{\sqrt{2}}$$
$$\sqrt{2}\,c \geq a + b.$$
Si $\sqrt{2}\,c = a + b$, entonces
$$2c^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 2a^2 + 2b^2$$
$$2ab = a^2 + b^2$$
$$(a-b)^2 = 0$$
$$a = b.$$
La necesidad se sigue directamente del Teorema 8.1.4. ♣

El libro [l-54] cita como una referencia para la desigualdad del teorema anterior el artículo matemática v Škole, 1965, no. 5, página 76.

Una de tantas aplicaciones del Teorema de Pitágoras es el cálculo de la distancia en la que uno puede ver sobre la superficie curva de la tierra desde un punto de observación a cierta altura (este problema lo discuten L. G. Woodby en su artículo [a-Wood] y los matemáticos V. Bunge y C. Bunge en [a-23]). En otras palabras, si uno se sube a una torre de observación cabe preguntarse hasta qué distancia puede uno ver la superficie de la tierra. Veamos cómo calcular dicha distancia:

Sabemos que la distancia del centro de la tierra al ecuador es de 6, 378 km aproximadamente, y la distancia del centro a los polos es de 6, 357 km aproximadamente. Supongamos que hay un observador P que se encuentra a una altura de h metros sobre la tierra (ver figura 8.99). En promedio, el radio de la tierra es de $r =$ 6, 367 km. Queremos calcular la distancia de observación d desde el punto P sobre la superficie de la tierra. Como la altura h está dada en metros, su equivalente en kilómetros es de $\frac{h}{1000}$. Aplicando el Teorema de Pitágoras (8.5.1), encontramos que

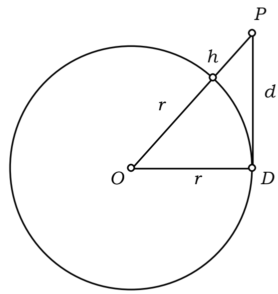


Figura 8.99

$$r^2 + d^2 = (r + \frac{h}{1000})^2 = r^2 + \frac{2rh}{1000} + \frac{h^2}{1000^2}$$

$$d^2 = \frac{2rh}{1000} + \frac{h^2}{1000^2} = \frac{6367h}{500} + \frac{h^2}{1000^2} = 12.734h + \frac{h^2}{1000^2}.$$

Ya que la altura h está dada en metros, el número $\frac{h^2}{1000^2}$ se podría omitir por ser muy pequeño. Veamos un ejemplo particular:

Supongamos que estamos en la Torre Sears, la cual esta ubicada en la ciudad de Chicago, que tiene 443 m de altura. Usando nuestra ecuación hallamos que

$$d = 12.734h + \sqrt{(12.734)(443) + \frac{443^2}{1000^2}} = \sqrt{5641.358249},$$

lo cual nos da una distancia de 75 km aproximadamente. Así que es imposible ver objetos más allá de 100 km de distancia de la Torre Sears de Chicago.

A continuación, contaremos la historia de algunos cálculos realizados por Aristarco de Samos 280 a. C:

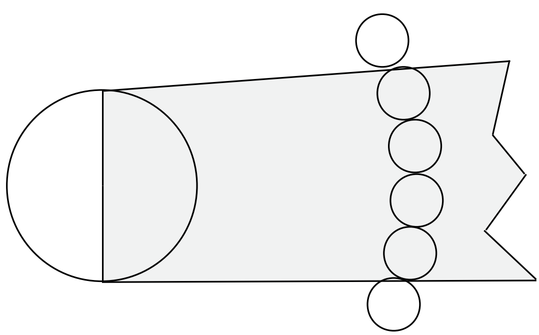


Figura 8.100

Basándose en el eclipse de luna, Aristarco midió aproximadamente el radio de la misma. Lo primero que hizo fue medir el tiempo que tarda la luna en ser cubierta por la sombra de la tierra. De este modo, se dio cuenta que la luna tarda cuatro veces el tiempo desde que empieza a estar completamente cubierta hasta que empieza a salir de la sombra de la tierra. De estas observaciones se percató de que el radio de la luna es igual a $\frac{1}{4}$ del radio de la tierra que es, en promedio, de 6, 367 km. Así, vemos que el diámetro de la luna es de aproximadamente 1591 km. Con este dato a disposición y usando triángulos semejantes, Aristarco consiguió obtener de manera aproximada la distancia entre la tierra y la luna de la siguiente manera:

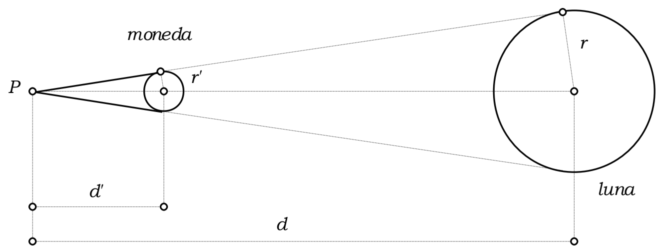
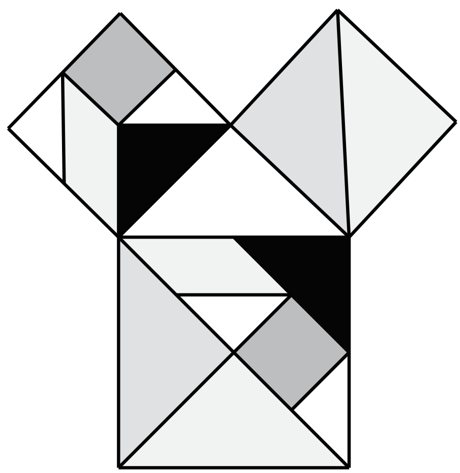


Figura 8.101

Desde la tierra fijamos un punto de observación P hacia la luna y colocamos una moneda redonda de radio r' en medio del punto de observación y la luna, de tal manera que desde el punto de observación P la orilla de la moneda coincida con la de la luna (ver figura 8.101). El siguiente paso consiste en medir la distancia del punto de observación a la moneda, digamos que es d'. El Teorema de Tales (6.2.5) nos asegura que $\frac{d}{d'} = \frac{r}{r'}$, en donde d denota la distancia de la tierra a la luna y r el radio de la luna. Por consiguiente, $d = \frac{d'r}{r'}$ = 384, 317 km aproximadamente. Teniendo conocimiento del Teorema de Pitágoras y sabiendo que durante los cuartos lunares la tierra, la luna y el sol forman un triángulo rectángulo siendo la luna el vértice del ángulo recto, Aristarco intentó el cálculo de la distancia de la tierra al sol. Aunque su procedimiento fue el correcto, su cálculo no fue aproximado, el fallo fue su cálculo de la medida del ángulo cuyo vértice es la tierra. Según los cálculos de Aristarco la medida de este ángulo era de 87 grados, pero hoy día sabemos que su medida es de 89 grados.

Con las piezas de dos tangrams chinos, se puede dar una prueba del Teorema de Pitágoras para el caso cuando el triángulo rectángulo es isósceles:

Figura 8.102



8.6. Otros teoremas importantes sobre triángulos

A continuación, daremos algunas aplicaciones geométricas del Teorema de Pitágoras (8.5.1). La primera de ellas es el célebre Teorema de Apolonio.

8.6.1. Teorema de Apolonio. En todo triángulo, la suma de los cuadrados de cualesquiera dos lados es igual al doble del cuadrado de la mitad del tercer lado, más el doble del cuadrado de la mediana que biseca al tercer lado.

Prueba: Sea ΔABC un triángulo. Probaremos que $|AB|^2 + |AC|^2 = 2|AM_a|^2 + 2|BM_a|^2$. Primero supongamos que $M_a = H_a$. Entonces, por el Teorema de Pitágoras (8.5.1), $|AB|^2 = |AM_a|^2 + |BM_a||^2$ y $|AC|^2 = |AM_a|^2 + |M_aC|^2$. Pero como $|BM_a| = |M_aC|$, se tiene entonces que $|AB|^2 + |AC|^2 = 2|AM_a||^2 + 2|BM_a|^2$. Ahora, supongamos que $M_a \neq H_a$:

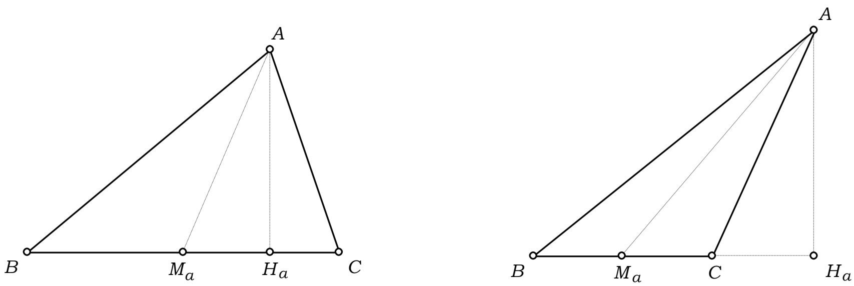


Figura 8.103

En este caso, uno de los ángulos $\angle AM_aB$ o $\angle CM_aA$ es obtuso. Sin perder generalidad, supongamos que el ángulo $\angle AM_aB$ es obtuso. Entonces, $\angle AM_aC$ tiene que ser agudo. Del Teorema 8.2.5 se sigue que

$$|AB|^2 = |AM_a|^2 + |BM_a|^2 + 2|BM_a||M_aH_a| \text{ y}$$
$$|AC|^2 = |AM_a|^2 + |CM_a|^2 - 2|CM_a||M_aH_a|.$$

Sumando ambas identidades se obtiene la relación deseada $|AB|^2 + |AC|^2 = 2|AM_a|^2 + 2|BM_a|^2$. ♣

8.6.2. Teorema. En un cuadrilátero $\square ABCD$, si M y N son los puntos medios de sus diagonales, entonces

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 = |AC|^2 + |DB|^2 + 4|MN|^2.$$

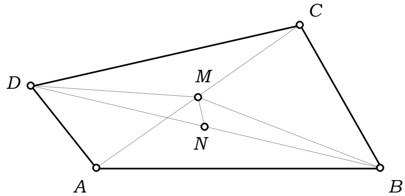


Figura 8.104

Prueba: Por el Teorema de Apolonio (8.6.1),

$$|DA|^2 + |CD|^2 = 2|AM|^2 + 2|DM|^2 = \frac{1}{2}|AC|^2 + 2|DM|^2,$$
$$|AB|^2 + |BC|^2 = 2|AM|^2 + 2|BM|^2 = \frac{1}{2}|AC|^2 + 2|BM|^2,$$
$$2|DM|^2 + 2|BM|^2 = 4|DN|^2 + 4|MN|^2 = |DB|^2 + 4|MN|^2.$$

Sumando, hallamos que

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 = \frac{1}{2}|AC|^2 + 2|DM|^2 + \frac{1}{2}|AC|^2 + 2|BM|^2$$
$$= |AC|^2 + 2|DM|^2 + 2|BM|^2 = |AC|^2 + |DB|^2 + 4|MN|^2. \text{ ♣}$$

El siguiente teorema fue conjeturado por P. Erdős en 1935 y su primera prueba fue descubierta por L. J. Mordell y D. F. Barrow en 1937. Pero casi todas las pruebas conocidas no son nada elementales. A continuación, damos una demostración elemental ideada por F. Yuefeng [a-183]**.**

8.6.3. Teorema de Erdős. Dado un triángulo, para cualquier punto dentro del triángulo o sobre de él, la suma de las distancias del punto a los vértices del triángulo es mayor o igual al doble de la suma de las distancias del punto a los lados del triángulo. La igualdad se da si y solo si el triángulo es equilátero y P es el circuncentro.

Prueba[a-183]: Sean ΔABC un triángulo y $P \in int(\Delta ABC) \cup \Delta ABC$. Basaremos nuestro razonamiento en la siguiente figura:

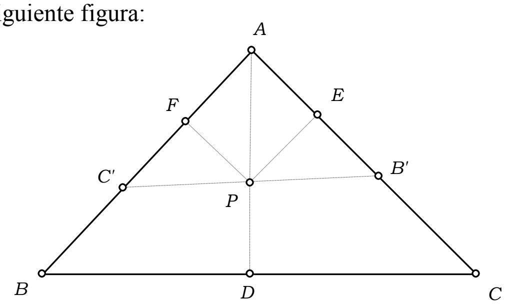


Figura 8.105

Sean D, E y F las proyecciones de P sobre BC, AC y AB, respectivamente. Tenemos entonces que $PD \perp BC$, $PE \perp AC$ y $PE \perp AB$. Sean $B' \in AC$ y $C' \in AB$ tales que $\angle AB'C' \cong \angle B$, $\angle B'C'A \cong \angle C$ y $P \in B'C'$. Pongamos $a' = |B'C'|$, $b' = |AC'|$, $c' = |AB'|$, $x = |PD|$, $y = |PE|$ y $z = |PF|$. Por el criterio de semejanza 6.2.6, $\Delta ABC \sim \Delta AB'C'$. Por ello, $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$.

Por otra parte, sabemos que

$$are(\Delta AB'C') = are(\Delta AC'P) + are(\Delta APB')$$

$$zb' + yc' = 2are(\Delta AB'C') \le |PA||a'|$$

$$z\frac{b'}{a'} + y\frac{c'}{a'} \le |PA|$$

$$z\frac{b}{a} + y\frac{c}{a} \le |PA|.$$

De la misma manera, podemos probar que $z\frac{a}{b} + x\frac{c}{b} \le |PB|$ y $x\frac{b}{c} + y\frac{a}{c} \le |PC|$. A continuación, enunciamos un resultado algebraico que necesitamos:

8.6.4. Lema. Si t es un número real positivo, entonces $t + \frac{1}{t} \ge 2$. La igualdad se da si y solo si $t = 1$.

Prueba: El resultado se sigue directamente de la desigualdad $0 \le (t-1)^2 \frac{1}{t}$. ♣

Por el Lema 8.6.4, hallamos que

$$2x + 2y + 2z \le x\left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right) + y\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) + z\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) \le |PA| + |PB| + |PC|.$$

Esto prueba la primera parte del teorema. Para la segunda parte, supongamos primero que $2x + 2y + 2z = |PA| + |PB| + |PC|$. Entonces, se debe cumplir que

$$2x + 2y + 2z = x\left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right) + y\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) + z\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right).$$

Es decir, $2 = \frac{c}{b} + \frac{b}{c} = \frac{c}{a} + \frac{a}{c} = \frac{b}{a} + \frac{a}{b}$, y por el Lema 8.6.4, $1 = \frac{c}{b} = \frac{a}{c} = \frac{a}{b}$. Por lo cual, $a = b = c$. Mostraremos ahora que P es el circuncentro del triángulo. Observemos que el triángulo $\Delta AB'C'$ es también equilátero, por lo cual, $\angle AB'C' \cong \angle B \cong \angle B'C'A \cong \angle C$. De acuerdo con el Teorema 3.4.6, $BC \parallel C'B'$. Ahora bien, de la primera desigualdad de arriba y nuestra suposición, podemos ver que se cumple la igualdad

$$2are(\Delta AB'C') = |PA|a'$$

$$are(\Delta AB'C') = are(\Delta AC'P) + are(\Delta APB') = \frac{1}{2}|PA|a'.$$

Según el Problema 8.803, $AP \perp C'B'$. Por consiguiente, P es el pie de la altura correspondiente al vértice A del triángulo equilátero $\Delta AB'C'$ y también P se encuentra en la mediatriz de $C'B'$. Como $BC \parallel C'B'$ y $PD \perp BC$, por el Teorema 3.7.2, se sigue que $PD \perp C'B'$. Lo cual significa que A, P y D son colineales. De aquí deducimos que $D = H_a = M_a$ y, por ello, P está en la mediatriz del segmento BC. Esto implica que $PB \cong PC$. De igual manera, se puede establecer la congruencia $PA \cong PB$. Así, queda probado que P es el circuncentro del triángulo ΔABC.

Supongamos ahora que nuestro triángulo ΔABC es equilátero y P es el circuncentro del triángulo. Sabemos que H_a, H_b y H_c son las proyecciones de P sobre los lados BC, AC y AB, respectivamente, y $P = G$. Por los Teoremas 8.3.14 y 8.3.34, $m_a = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ y $|PM_a| = |PH_a| = \frac{a}{2\sqrt{3}}$. Según el Teorema de Pitágoras (8.5.1),

$$|PA|^2 = \frac{a^2}{4} + |PH_a|^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{12} = \frac{a^2}{3}$$

$$|PA| = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Por lo tanto, $|PA| + |PB| + |PC| = a\sqrt{3} = 2\left(\frac{a}{2\sqrt{3}} + \frac{a}{2\sqrt{3}} + \frac{a}{2\sqrt{3}}\right) = 2(|PH_a| + |PH_b| + |PH_c|)$. ♣

8.6.5. Teorema [a-103]. En un triángulo ΔABC, se cumple la relación $c^2 = b^2 + ac$ si y solo si $m(\angle B) = 2m(\angle CAH_a)$ y $\angle C$ es un ángulo obtuso.

Prueba: *Necesidad*. De nuestra hipótesis vemos que $a < c$ y, por lo tanto, $c^2 > b^2 + a^2$. De acuerdo con el Corolario 8.2.6 (2), $\angle C$ es un ángulo obtuso. Sabemos que se cumple la igualdad $\frac{c}{b} = \frac{b}{c-a}$. En la figura 8.106, tenemos que $P \in AB$ satisface que $|BP| = a$. Por el segundo criterio de semejanza (6.2.10), hallamos que $\Delta ABC \sim \Delta APC$. De aquí se obtiene que $\angle B \cong \angle ACP$, $\angle C \cong \angle CPA$ y como el triángulo ΔBCP es isósceles, $\angle BPC \cong \angle PCB$. Ya que

$$m(\angle BPC) + m(\angle CPA) = 180,$$

se cumple entonces la igualdad

$$\begin{aligned} m(\angle BPC) + m(\angle C) &= 180 = m(\angle BPC) + m(\angle PCB) + m(\angle ACP) \\ &= 2m(\angle BPC) + m(\angle ACP). \end{aligned}$$

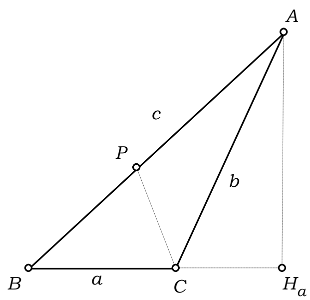


Figura 8.106

Por otro lado, de la identidad

$$180 = m(\angle H_aCA) + m(\angle C) = m(\angle BPC) + m(\angle C)$$

se sigue que $m(\angle H_aCA) = m(\angle BPC)$. Como consecuencia de esto,

$$180 = 2m(\angle BPC) + m(\angle B) = 2(m(\angle H_aCA) + m(\angle CAH_a))$$

$$2m(\angle BPC) + m(\angle B) = 2m(\angle H_aCA) + 2m(\angle CAH_a)$$

$$m(\angle B) = 2m(\angle CAH_a).$$

Suficiencia. Supongamos que $\angle B \cong 2\angle CAH_a$ y que el ángulo $\angle C$ es obtuso. Sabemos que $\operatorname{sen}\angle B = \frac{h_a}{c}$ y $\cos\angle CAH_a = \frac{h_a}{b}$, de donde se sigue la relación

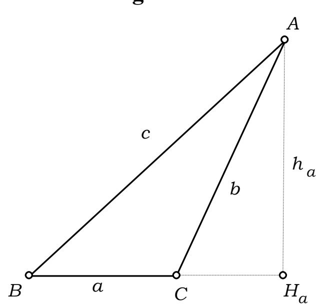


Figura 8.107

$$b\cos\angle CAH_a = c\operatorname{sen}\angle B = c\operatorname{sen}(2\angle CAH_a) = c2\operatorname{sen}\angle CAH_a\cos\angle CAH_a$$

(esto se cumple por la fórmula 8.2.1 (6)). Entonces, obtenemos que sen$\angle CAH_a = \frac{b}{2c}$. Por el Teorema 8.2.4, sabemos que

$$b\cos\angle C + c\cos\angle B = a$$
$$b\cos\angle C + c\cos(2\angle CAH_a) = a$$
$$b\cos\angle C + c((\cos\angle CAH_a)^2 - (\operatorname{sen}\angle CAH_a)^2) = a \quad (8.2.1\ (6))$$
$$b\cos\angle C + c(1 - 2(\operatorname{sen}\angle CAH_a)^2) = a \quad (8.2.1\ (6))$$
$$b\cos\angle C + c(1 - 2\frac{b^2}{4c^2}) = a$$
$$b\cos\angle C + c(1 - \frac{b^2}{2c^2}) = a.$$

Tenemos que $\cos\angle C = -\cos\angle H_aCA = -\operatorname{sen}\angle CAH_a$, pues $\angle C$ y $\angle CAH_a$ son suplementarios, entonces

$$a = b\cos\angle C + c(1 - \frac{b^2}{2c^2}) = -b\operatorname{sen}\angle CAH_a + c(1 - \frac{b^2}{2c^2})$$
$$= -b\frac{b}{2c} + c(1 - \frac{b^2}{2c^2}) = -\frac{b^2}{2c} - \frac{b^2}{2c} + c = -\frac{b^2}{c} + c,$$

Por lo tanto, $c^2 = b^2 + ac$. ♣

8.6.6. Teorema. Sea ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$. Si $D \in BC$ y l es una recta perpendicular a BC en el punto D que corta a $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{CA}$ en los puntos E y F, respectivamente, entonces $|DE| + |DF| = 2h_a$.

Prueba: Sea C' el punto de intersección de $\overrightarrow{BA}$ y la recta perpendicular a BC en el punto C. Tracemos la recta paralela a BC que pase por el vértice A y corte a l y CC' en los puntos P y Q, respectivamente. De acuerdo con el Teorema 8.3.39, $\overrightarrow{AH_a}$ es la bisectriz del ángulo $\angle A$. Por consiguiente, $\angle BAH_a \cong \angle H_aAC$. Según el Teorema 3.4.6, tenemos que $\angle BAH_a \cong \angle AED$ y $\angle H_aAC \cong \angle EFA$. Por ello, $\angle AED \cong \angle EFA$. Esto demuestra que ΔAFE es un triángulo isósceles y, por tanto, $AE \cong AF$. Como $AQ \perp EF$, por el Teorema 8.3.39, P es el punto medio de EF. Es decir, $FP \cong PE$. Como consecuencia de esto, tenemos que

$$|DE| + |DF| = |DP| + |PE| + |DF| = |DP| + |FP| + |DF| =$$
$$|DP| + |DP| = 2|DP| = 2|AH_a| = 2h_a. ♣$$

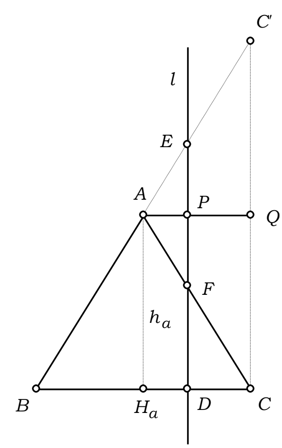


Figura 8.108

El teorema que a continuación enunciamos aparece en el libro [1-20].

8.6.7. Teorema. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$. Si E, $D \in BC$ satisfacen que $AB \cong BD$ y $AC \cong CE$, y si F y G son las proyecciones E y D sobre AB y AC, respectivamente, entonces $|ED| = |EG| + |DF|$.

Prueba: Del Teorema 3.2.9, $\angle EAC \cong \angle CEA$ y $\angle ADB \cong \angle BAD$.

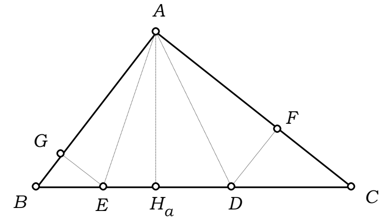


Figura 8.109

Como $m(\angle EAC) = m(\angle H_aAC) + m(\angle EAH_a)$ y $m(\angle CEA) = m(\angle B) + m(\angle BAE)$, esto último es cierto por el Teorema 4.3.8. Por lo cual, $m(\angle H_aAC) + m(\angle EAH_a) = m(\angle B) + m(\angle BAE)$. Pero sabemos, por el Lema 8.1.1, que $\angle B \cong \angle H_aAC$. Por ello, $\angle EAH_a \cong \angle BAE$. Es decir, $\overrightarrow{AE}$ es la bisectriz del ángulo $\angle BAH_a$. De acuerdo con el Teorema de la Bisectriz (4.7.9), obtenemos que $EG \cong EH_a$. Por otra parte, tenemos que

$$m(\angle ADB) = m(\angle C) + m(\angle DAC) \text{ y } m(\angle BAD) = m(\angle BAH_a) + m(\angle H_aAC).$$

Ya que $\angle ADB \cong \angle BAD$, obtenemos que $m(\angle C) + m(\angle DAC) = m(\angle BAH_a) + m(\angle H_aAC)$. Recurriendo de nueva cuenta al Lema 8.1.1, hallamos que $\angle C \cong \angle BAH_a$. Esto implica que $\angle DAC \cong \angle H_aAC$. Lo cual significa que $\overrightarrow{AD}$ es la bisectriz del ángulo $\angle H_aAC$. Por el Teorema 4.7.9, tenemos que $H_aD \cong DF$. Por lo tanto,

$$|ED| = |EH_a| + |H_aD| = |EG| + |DF|. \clubsuit$$

El siguiente resultado es de H. Gülicher (Problema 1532. Math. Magazine 71, no. 4 (1998), 320 – 321).

8.6.8. Teorema. Sobre dos de los lados de un triángulo ΔABC y en su exterior trazamos dos triángulos rectángulos ΔACD y ΔABE con ángulos rectos $\angle DCA$ y $\angle ABE$, respectivamente. Entonces h_a, BD y CE son concurrentes si y solo si $\angle BAE \cong \angle CAD$.

Prueba (A. Sinefakopoulos):

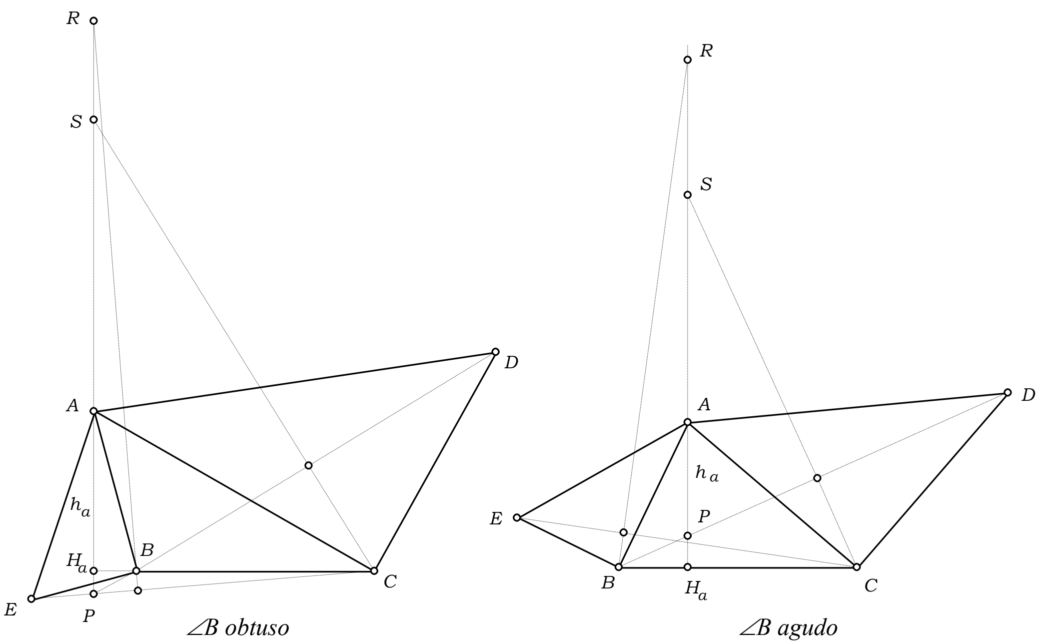


Figura 8.110

Sean R y S los puntos de intersección de las rectas perpendiculares a CE y BD que pasan por los puntos B y C, respectivamente, con la recta $\overleftrightarrow{AH_a}$. Como los triángulos rectángulos con hipotenusas BC y BR tienen un ángulo agudo congruente, por el Corolario 4.3.6, se sigue que $\angle BRA \cong \angle ECB$. Por otra parte, según el Teorema 4.3.8, sabemos que

$$m(\angle RAB) = m(\angle A\,H_a B) + m(\angle CBA) = m(\angle ABE) + m(\angle CBA) = m(\angle CBE)$$

si $\angle B$ es agudo, y

$$m(\angle RAB) = m(\angle A\,H_a B) + (180 - m(\angle CBA)) = 360 - m(\angle ABE + \angle CBA) = m(\angle CBE)$$

si $\angle B$ es obtuso. Así, por el Corolario 6.2.9, $\Delta ABR \sim \Delta BCE$. Por ello, $\frac{|AB|}{|BE|} = \frac{|AR|}{|BC|}$. Con un razonamiento similar probamos que $\frac{|AC|}{|CD|} = \frac{|AS|}{|BC|}$. Como una consecuencia de estas dos identidades, vemos que

$$R = S \Leftrightarrow \Delta AEB \sim \Delta ADC \Leftrightarrow \angle BAE \cong \angle CAD.$$

Por consiguiente, si $R = S$, entonces BD, CE y h_a son las alturas del triángulo ΔBCR, las cuales concurren en el punto P (Teorema 8.3.33). Recíprocamente, si h_a, BD y CE concurren en el punto P, entonces P resulta ser el ortocentro del triángulo ΔBCR y, por lo cual, $R = S$. De donde deducimos que $\angle BAE \cong \angle CAD$. ♣

El siguiente teorema está implícito en uno de los resultados de A. Brown que aparecen en su artículo [a-19].

8.6.9. Teorema. Sean ΔABC un triángulo equilátero. Si $P \in int(\Delta ABC)$, entonces AP, BP y CP son los lados de un triángulo.

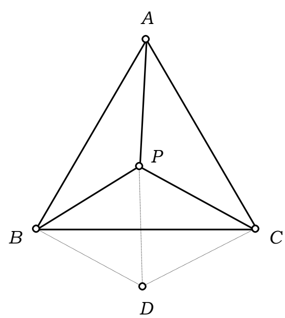


Figura 8.111

Prueba: Ubicamos un punto D en el exterior del triángulo ΔABC de tal forma que $AP \cong DC$ y $\angle BAP \cong \angle BCD$ (ver la figura 8.111). De acuerdo con el primer criterio de congruencia de triángulos (3.2.6), tenemos que $\Delta BAP \cong \Delta DCB$. Como resultado de esto, vemos que $\angle DBC \cong \angle PBA$ y ΔPBD es un triángulo isósceles con $BP \cong BD$. De donde hallamos que

$$m(\angle DBP) = m(\angle DBC) + m(\angle CBP) = m(\angle PBA) + m(\angle CBP) = m(\angle CBA) = 60.$$

Pero el Problema 4.73 nos garantiza que ΔPBD es un triángulo equilátero. Así, tenemos que ΔPDC es el triángulo deseado pues $AP \cong DC$ y $PB \cong PD$. ♣

Otra demostración del teorema anterior se propone en el Problema 8.411. Si el punto P yace en el exterior de un triángulo equilátero, en general AP, BP y CP no pueden ser los lados de un triángulo (ver el Teorema 9.10.35).

Como vimos en el capítulo anterior, si $\Delta(a,b,c)$ es un triángulo rectángulo con hipotenusa c, entonces $a^2 + b^2$ resulta ser igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa. Esto quizá motivó a C. Dixon [a-42] a preguntarse sobre la diferencia $a^2 - b^2$ en términos de las áreas de ciertos cuadrados. Su respuesta fue la siguiente:

8.6.10. Teorema (C. Dixon). Sea ΔABC un triángulo. En la figura,

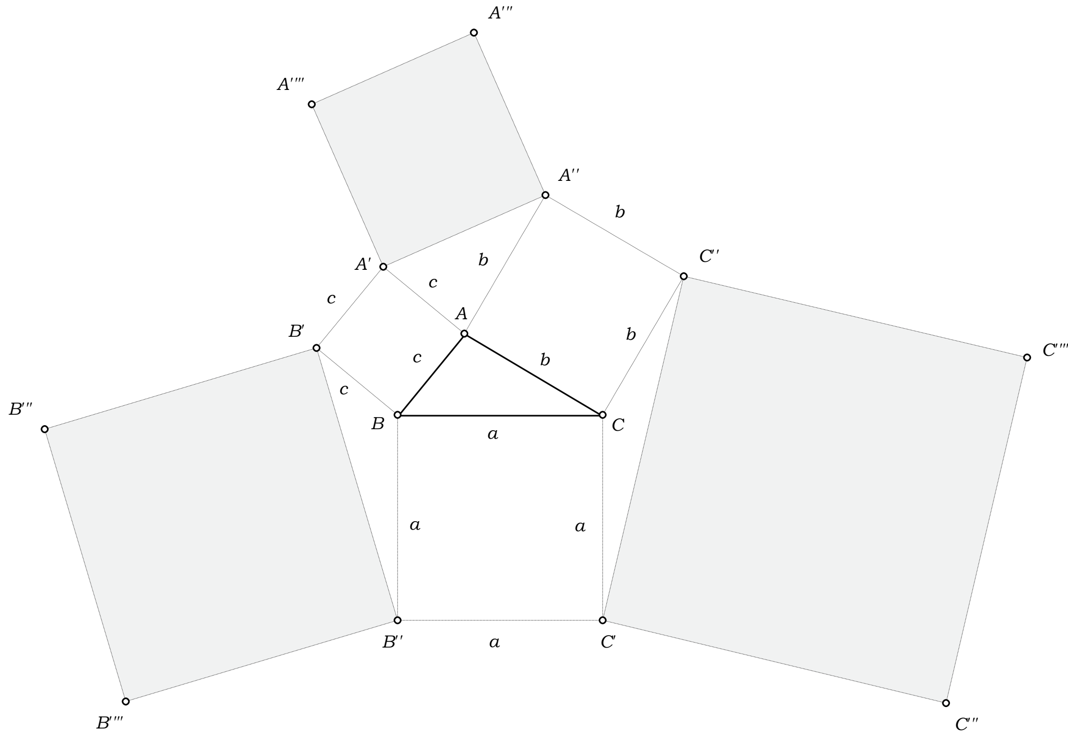


Figura 8.112

sobre los lados AB, BC y AC del triángulo ΔABC construimos cuadrados $BAA'B'$, $BCC'B''$ y $ACC''A''$, respectivamente, y luego sobre los segmentos $A'A''$, $B'B''$ y $C'C''$ construimos cuadrados $A'A''A'''A''''$, $B'B''B'''B''''$ y $C'C''C'''C''''$, respectivamente. Entonces

$$are(C'C''C'''C'''') - are(A'A''A'''A'''') = 3(a^2 - c^2),$$
$$are(B'B''B'''B'''') - are(A'A''A'''A'''') = 3(a^2 - b^2) \text{ y}$$
$$are(C'C''C'''C'''') - are(B'B''B'''B'''') = 3(b^2 - c^2).$$

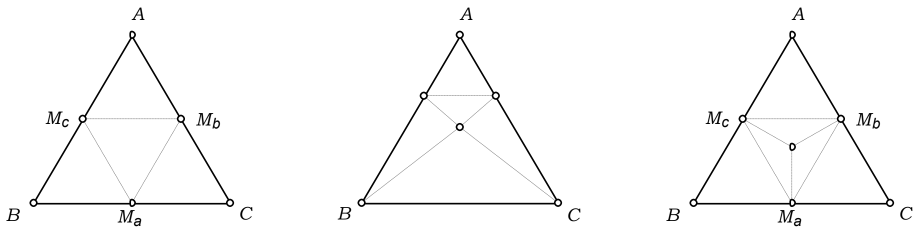
Prueba: Basta con probar la primera identidad. Por la Ley de los Cosenos (8.2.8) aplicada a los triángulos $\Delta AA'A''$ y $\Delta CC'C''$, hallamos la igualdad

$$are(C'C''C'''C'''') - are(A'A''A'''A'''') = |C'C''|^2 - |A'A''|^2 =$$
$$(a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle C'CC'') - (b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle A''AA') =$$
$$(a^2 + b^2 + 2ab\cos(\angle 180 - \angle C'CC'') - (b^2 + c^2 + 2bc\cos(\angle 180 - \angle A''AA') =$$
$$(a^2 + b^2 + 2ab\cos\angle C) - (b^2 + c^2 + 2bc\cos\angle A) =$$
$$(a^2 + b^2 + 2ac\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}) - (b^2 + c^2 + 2bc\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}) =$$
$$(a^2 + b^2 + a^2 + b^2 - c^2) - (b^2 + c^2 + b^2 + c^2 - a^2) = 3(a^2 - c^2). \clubsuit$$

8.7. División de triángulos en triángulos

8.7.1. Teorema [a-101]. Todo triángulo se puede dividir en k triángulos isósceles para cada número entero $k \geq 4$.

Prueba: Sea ΔABC un triángulo y $k \geq 4$ un número entero. Primero, consideraremos el caso cuando ΔABC sea equilátero. En la siguiente figura, presentamos las soluciones para $k \leq 6$:



$k = 4$ $k = 5$ $k = 6$

Figura 8.113

Procedamos ahora por inducción, suponiendo que cada triángulo equilátero se puede dividir en una cantidad menor que o igual a k triángulos isósceles y que $k \geq 7$. Como $k - 3 \geq 4$, podemos dividir nuestro triángulo ΔABC en $k - 3$ triángulos isósceles y a uno de estos triángulos de la subdivisión lo dividimos en 4 triángulos equiláteros. De este modo, ΔABC queda dividido en $k + 1$ triángulos isósceles.

Supongamos ahora que ΔABC no es equilátero. Sin perder generalidad, supongamos que BC es el lado más grande del triángulo ΔABC. Si $k = 4$, por el Teorema 8.3.19, tenemos entonces que los triángulos

$$\Delta M_c H_a A, \Delta A H_a M_b, \ \Delta H_a C M_b \text{ y } \Delta M_c H_a B$$

son todos isósceles (ver la figura 8.114).

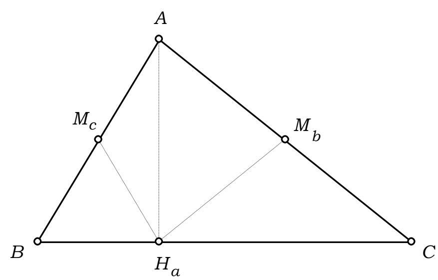


Figura 8.114

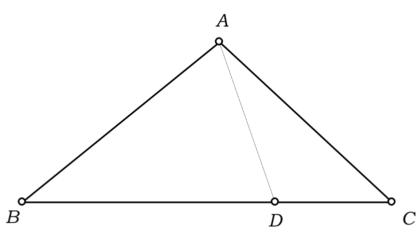


Figura 8.115

Supongamos que todo triángulo se puede dividir en $k > 4$ triángulos isósceles. Como $AB \leq BC$, podemos encontrar un punto $D \in BC$ tal que $AB \cong BD$ (ver la figura 8.115). Por consiguiente, el triángulo ΔABD es isósceles. y al otro triángulo ΔADC lo dividimos en k triángulos isósceles. Así, finalmente, el triángulo ΔABC queda dividido en $k + 1$ triángulos isósceles. ♣

La pregunta de que si hay triángulos que no se puedan dividir en k triángulos isósceles, para cuando $k = 2$ o $k = 3$, se le deja al lector para su análisis (ver los Problemas 8.180, 8.181 y 8.182).

8.7.2. Teorema[a-115]. Dados dos triángulos cualesquiera, se puede dividir cada uno de ellos en tres triángulos, de tal forma que cada uno de los triángulos que divide a uno de los triángulos dados es semejante a uno de los triángulos que divide al segundo triángulo dado.

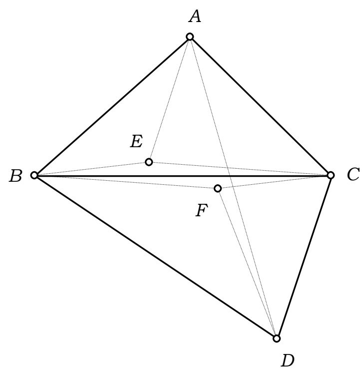


Figura 8.116

Prueba: Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos arbitrarios. Supongamos, sin perder generalidad, que BC y $B'C'$ son los lados de mayor longitud de ΔABC y $\Delta A'B'C'$, respectivamente. En el semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{BC}$ que no contiene al punto A, ubicamos un punto D, de tal forma que $\Delta DBC \sim \Delta A'B'C'$ (ver la figura 8.116). Unimos los vértices A y D y fijamos dos puntos $E \in int(\Delta ABC)$ y $F \in int(\Delta DBC)$, del tal modo que

$$\angle BAE \cong \angle DAC,\ \angle EBA \cong \angle CDA,\ \angle FDB \cong \angle CDA \text{ y } \angle DBF \cong \angle DAC.$$

Por el Corolario 6.2.9, hallamos que

$$\Delta EAB \sim \Delta ADC \sim \Delta FBD.$$

Por lo cual,

$$\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|AE|}{|AC|} \text{ y } \frac{|BD|}{|AD|} = \frac{|DF|}{|DC|}$$

y por consiguiente,

$$\frac{|AB|}{|AE|} = \frac{|AD|}{|AC|} \text{ y } \frac{|BD|}{|DF|} = \frac{|AD|}{|DC|}.$$

Como $\angle BAD \cong \angle EAC$ y $\angle ADB \cong \angle CDF$, por el segundo criterio de semejanza (6.2.10), obtenemos que $\Delta BAD \sim \Delta EAC$ y $\Delta BAD \sim \Delta FDC$. De esta semejanza se siguen las identidades

$$\frac{|BE|}{|DF|} = \frac{|AE|}{|BF|} \text{ y } \frac{|CE|}{|DF|} = \frac{|AE|}{|CF|}$$

y, como consecuencia, hallamos que

$$|BE||BF| = |CE||CF|$$

$$\frac{|BE|}{|CF|} = \frac{|CE|}{|BF|}.$$

Por otra parte, como $\angle AEB \cong \angle BFD$ y $\angle CEA \cong \angle DFC$, se tiene entonces que $\angle BEC \cong \angle CFB$. Según el segundo criterio de semejanza de triángulos (6.2.10), $\Delta EBC \sim \Delta FCB$. Pero como estos dos últimos triángulos comparten un lado, vemos que

$$\frac{|BE|}{|CF|} = \frac{|CE|}{|BF|} = \frac{|BC|}{|BC|} = 1.$$

Es decir, $\square EBFC$ es un paralelogramo (Teorema 5.3.1). En conclusión, el triángulo ΔABC queda dividido en los triángulos ΔEAB, ΔEAC y ΔEBC, y el otro triángulo ΔDBC en los triángulos ΔFBD, ΔFDC y ΔFCB, y además tenemos que $\Delta EAB \sim \Delta FBD$, $\Delta EAC \sim \Delta FDC$ y $\Delta EBC \sim \Delta FCB$. ♣

8.8. División de cuadrados en rectángulos.

La siguiente división de un cuadrado en cinco rectángulos no congruentes entre sí es de Ch. W. Trigg [a-169].

8.8.1. Teorema (Ch. W Trigg). Es posible dividir un cuadrado en cinco rectángulos no congruentes entre sí.

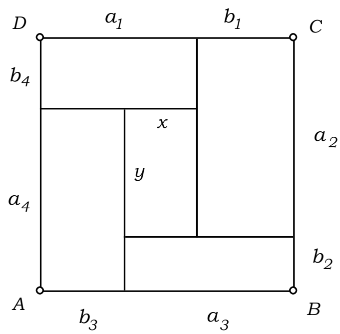


Figura 8.117

Prueba: Sea □$ABCD$ un cuadrado cualquiera cuyos lados tienen longitud a. De la figura 8.117 deducimos las identidades

$$x = a_1 - b_3 = a_3 - b_1 = a - b_1 - b_3 \text{ y}$$
$$y = a_4 - b_2 = a_2 - b_4 = a - b_2 - b_4 .$$

Por consiguiente,

$$a_1 = a - b_1, \quad a_2 = a - b_2, \quad a_3 = a - b_3 \quad \text{y} \quad a_4 = a - b_4 .$$

Así que, dando valores diferentes y menores que a a las variables b_1, b_2, b_3 y b_4, obtenemos las divisiones deseadas. ♣

Como un ejemplo particular, consideremos el cuadrado □ (10,10,10,10). Damos los valores

$$b_1 = 1, \ b_2 = 2, \ b_3 = 3 \ \text{y} \ b_4 = 4.$$

Entonces, hallamos que $a = 10$, $a_1 = 9$, $a_2 = 8$, $a_3 = 7$, $a_4 = 6$, $x = 6$ y $y = 4$.

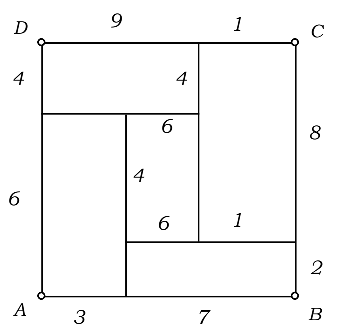


Figura 8.118

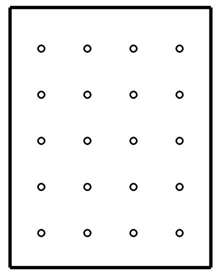
Problemas

8.1. El siguiente razonamiento aparece en el libro [l-229]:

Una vaca es una res.
Res en catalán significa nada.
El que nada, no se ahoga.
El que no se ahoga, flota.
La flota es una parte de la escuadra.
La escuadra es un triángulo rectángulo.
$\therefore$ vaca = triángulo rectángulo.

¿Qué hay de malo en este razonamiento?

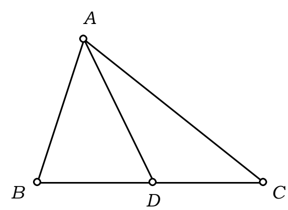
8.2. En la figura:



se tiene un tablero formado por cuatro columnas y cinco filas de de clavos. Los clavos están a una misma distancia a lo largo y a lo ancho. Uniendo tres de estos clavos con un cordón, ¿es posible formar un triángulo equilátero? ¿Es posible formar un triángulo equilátero en cualquier tablero de i columnas por j filas de clavos?

8.3 (2º Pretorneo de las Ciudades, Nivel Mayor, 1997). En un juego, el primer jugador pinta de rojo un punto del plano; el segundo jugador responde pintando de verde 10 puntos aún sin colorear, luego el primer jugador pinta de rojo otro punto aún sin colorear, y así sucesivamente. El primer jugador gana si logra en algún momento pintar tres puntos de rojo que sean los vértices de un triángulo equilátero. ¿Es posible que el segundo jugador evite que el primer jugador gane?

8.4. Suponiendo que la suma de las medidas de los ángulos de cualquier triángulo es constante, probar que dicha constante es igual a 180. Sugerencia: considerar la figura de la derecha.



8.5[a-131]. Dados $k > 2$ puntos en el plano tales que ninguna terna de ellos sea colineal, en donde k es un número natural. Probar que se pueden formar $\frac{k(k-1)(k-2)}{6}$ triángulos distintos cuyos vértices son tres de los puntos dados.

8.6. De una hoja de papel cuadrada, recortar un triángulo equilátero sin valerse de regla ni compás.

8.7. Se tiene una hoja de papel de forma arbitraria. Mediante dobleces, marcar sobre la hoja un triángulo rectángulo.

8.8. ¿Cuántos palillos se necesitan como mínimo para formar dos triángulos?

8.9 [a-91], [a-92] y [a-126]. Dados dos puntos en el plano A y B, definimos $A + B$ como el punto del plano tal que A, B y $A + B$ son los vértices de un triángulo equilátero, leyéndolos en sentido contrario a las manecillas del reloj.

a. ¿Es cierto que $A + B = B + A$?
b. ¿Es cierto que $(A + B) + C = A + (B + C)$?
c. Probar que si $A + B = A + C$, entonces $B = C$.

d. Probar que si $A + C = B + C$, entonces $A = B$.

Dados dos puntos en el plano A y B, definimos $A \bullet B$ = el punto medio del segmento AB. Probar las siguientes afirmaciones:

e. $A \bullet (B + C) = A \bullet B + A \bullet C$, para cualquier terna de puntos A, B y C.

f. Si $A + B = C \bullet B$, entonces $(A + B) + [(A + B) + C] = A$.

g. Si $A + B = C \bullet B$, entonces ΔABC es un triángulo rectángulo.

h [a-126]. $A \bullet (B \oplus C) = (A \oplus C) \bullet (B \oplus A)$.

8.10. Probar que dos triángulos cuyos lados son respectivamente perpendiculares son semejantes.

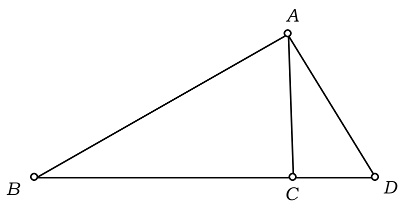
8.11. ¿Entre qué números se encuentra la medida del ángulo mayor de un triángulo cualquiera?

8.12[C. Ciamberlini, Ressegna di Matematica e Fisica (Roma) 5 (1925), 241-244]. Probar que un triángulo tiene un ángulo agudo, recto u obtuso, dependiendo de si la expresión

$$(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)$$

es positiva, cero o negativa.

8.13. En la figura:



tenemos que $\angle CAD \cong \angle CBA$. Probar que

$$|AD|^2 = |BD||CD|.$$

8.14[l-56]. En un triángulo ΔABC, sabemos que $|BC| = 2t$, $2|AB| + |AC| = 5t$ y $|AB|^2 - |AC|^2 = 2t^2$, en donde t es un número real positivo. Calcular $|AB|$ y $|AC|$ en función de t.

8.15. Si un ángulo de un cierto triángulo rectángulo mide 70 y uno de los catetos tiene longitud 10, probar que la longitud de su hipotenusa no puede ser igual a 20.

8.16. Si un triángulo ΔABC es rectángulo en $\angle A$, probar que la suma de las medidas de sus ángulos exteriores con vértices B y C es igual a tres veces la media de su ángulo exterior correspondiente al vértice A.

8.17. En un triángulo rectángulo, si proyectamos el punto medio de uno de los catetos sobre la hipotenusa, dicha proyección corta a la hipotenusa en dos segmentos tales que la diferencia de los cuadrados de las longitudes de ambos segmentos es igual al cuadrado de la longitud del segundo cateto.

8.18. Si en un triángulo rectángulo, uno de sus catetos es el doble del otro, probar que el pie de la altura correspondiente a la hipotenusa divide a esta en dos segmentos tales que uno de ellos es el cuádruple del otro.

8.19. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$. Si $P, Q \in BC$ satisfacen que $AB \cong BQ$ y $AC \cong PC$, probar que $m(\angle PAQ) = 45$.

8.20. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$ tal que $AC < AB$. Si $D \in AB$ satisface que $|AC|^2 = |AB||AD|$, probar que

a. $\Delta ABC \sim \Delta ACD$ y

b. $m_a \perp DC$.

8.21. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$ tal que $AB < AC$. Sean D el punto de intersección de t_a y AC, y E el punto simétrico de D con respecto a A.

a. Probar que en el triángulo ΔEBC se cumple que $m(\angle E) = 2m(\angle C)$.

b. Si F es el punto de intersección de m_a y $\overleftrightarrow{BE}$, probar que $EF \cong EA$.

c. Probar la congruencia $BF \cong AC$.

8.22. Sean ΔABC un triángulo rectángulo tal que $BC > AC > AB$ y $M \in int(\Delta ABC)$. Sean P, Q y R las proyecciones de M sobre BC, AC y AB, respectivamente. Por M trazamos una recta paralela a BC que corte a AB y a AC en los puntos B' y C', respectivamente.

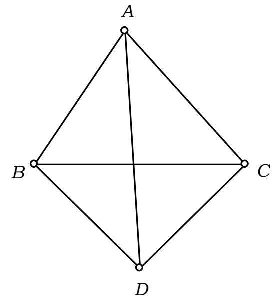
a. Comparar los segmento AC' y AB'.

b. Comparar las alturas del triángulo $\Delta AB'C'$ relativas a los vértices B' y C' y la suma $|MQ| + |MR|$.

c. Comparar las alturas h_a y h_c del triángulo $\Delta AB'C'$ y la suma $|MP| + |MQ| + |MR|$.

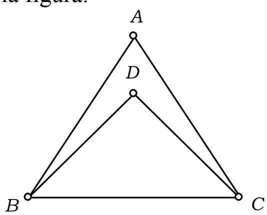
d. Si ΔABC es un triángulo equilátero, probar que la suma $|MP| + |MQ| + |MR|$ es constante para cualquier punto M en el interior del triángulo.

8.23. En la figura:



tenemos un triángulo rectángulo ΔDCB tal que $BD \cong DC$. Si $\overrightarrow{AD}$ es la bisectriz del ángulo $\angle BAC$, probar que ΔABC es un triángulo isósceles o un triángulo rectángulo.

8.24. En la figura:



tenemos un triángulo rectángulo ΔDBC tal que $BD \cong DC$. Si $\overrightarrow{AD}$ es la bisectriz del ángulo $\angle BAC$, probar que ΔABC es un triángulo isósceles.

8.25. Si a y c son dos números reales positivos con $a < c$, probar que existe un triángulo rectángulo cuyos lados tienen longitudes a, c y $\sqrt{c^2 - a^2}$.

8.26. Probar que en todo triángulo rectángulo la hipotenusa es mayor que la semisuma de los catetos.

8.27. Sea ΔABC un triángulo rectángulo isósceles. Probar que sus catetos tienen longitud $s(2 - \sqrt{2})$ y su hipotenusa tiene longitud $2s(\sqrt{2} - 1)$.

8.28. Probar que en todo triángulo rectángulo $\Delta(a,b,c)$ con hipotenusa a se cumplen las siguientes identidades:

a. $(b + c)^2 = a(a + 2h_a)$.

b. $(b - c)^2 = a(a - 2h_a)$.

c. $(a + q_a)^2 = 4b^2 + p_a^2$.

8.29. Sea $\Delta(a,b,c)$ un triángulo rectángulo con hipotenusa a. Consideremos su partes a, b, c, h_a , p_a y q_a .

a. Si $a = 5$ y $h_a = 2$, calcular b, c, p_a y q_a .

b. Si $b = 1 = p_a$, calcular a, c, h_a y q_a

c. Si $b = 2$ y $h_a = 1$, calcular a, c, p_a y q_a

d. Si $p_a = 1 = q_a$, calcular a, b, c y h_a .

e. Si $b = 3$ y $q_a = 1$, calcular a, c, h_a y p_a .

f. Si $h_a = q_a = 2$, calcular a, b, c y p_a .

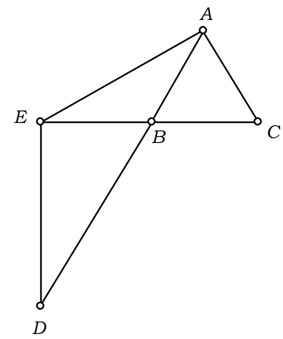
8.30. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumple la igualdad $\dfrac{c}{b} = \dfrac{q_b}{p_c}$.

8.31. Sea $\Delta(a,b,c)$ un triángulo rectángulo con hipotenusa a. Probar que $p_a = 1$ si y solo si $a = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4b^2}}{2}$.

8.32. Sean $\Delta(a,b,c)$ y $\Delta(a',b',c')$ dos triángulos rectángulos con hipotenusas a y a', respectivamente. Probar que $\Delta(a,b,c) \sim \Delta(a',b',c')$ si y solo si $\dfrac{q_a}{q_{a'}} = \dfrac{p_a}{p_{a'}}$.

8.33. En la figura:

ΔABC es un triángulo equilátero, $|BD| = 2|AB|$ y E es la proyección del punto D sobre la recta $\overleftrightarrow{BC}$. Encontrar las medidas de los ángulos del triángulo ΔDAE.



8.34. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle C$. Si $|BC| = 20$, $|BH_c| = 12$ y $h_c = 16$, calcular las longitudes de los lados restantes del triángulo.

8.35. Sea ΔABC un triángulo tal que $h_a = 6$, $|BH_a| = 4$ y $|H_aC| = 9$. Probar que ΔABC es un triángulo rectángulo.

8.36. Sea ΔABC un triángulo tal que $h_a = 12$, $b = 20$ y $c = 15$, ¿es ΔABC un triángulo rectángulo?

8.37. Sean ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$, y $D \in BC$ tales que $|DC| = 1$. Si $b = 12$ y $c = 9$, calcular la distancia de A a D.

8.38. Si en un triángulo ΔABC existe $P \in AB$ tal que $AP \cong PB \cong PC$, probar que $\angle C$ tiene que ser un ángulo recto.

8.39[I-143]. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$ con $AB < AC$. Si D es la proyección de B_a sobre BC, probar que $\dfrac{1}{|B_aD|} = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$.

8.40[I-143]. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$ con $AB < AC$. Si D es la proyección de M_c sobre BC probar que $b^2 = |DC|^2 - |BD|^2$.

8.41(G. Dostor). Si $\Delta(a,b,c)$ y $\Delta(a',b',c')$ son dos triángulos rectángulos semejantes con hipotenusas a y a', probar que $\dfrac{1}{h_a h_{a'}} = \dfrac{1}{bb'} + \dfrac{1}{cc'}$.

8.42. Sean ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$, y l una recta perpendicular a BC. Si l corta a $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{AC}$ en los puntos D y E, respectivamente.

a. Probar que el triángulo ΔADE es isósceles.

b. Si la medida del ángulo $\angle A$ es igual al doble de suma de las medidas de los otros dos ángulos del triángulo, probar que el triángulo ΔADE es equilátero.

8.43. Sean ΔABC un triángulo, y l una recta perpendicular a BC. Supongamos que l corta a $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{AC}$ en los puntos D y E, respectivamente. Si ΔADE es isósceles, ¿es el triángulo original también isósceles?

8.44. Sea ΔABC un triángulo isósceles tal que $m(\angle B) = m(\angle C) = \dfrac{m(\angle A)}{4}$. Si la recta perpendicular a BC en el punto B corta a $\overleftrightarrow{AC}$ en el punto D, probar que ΔADB es un triángulo equilátero.

8.45. Sea ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$. Fijamos un punto $D \in BC$. Si las rectas perpendiculares a BC en los puntos medios de BD y DC cortan a $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{AC}$ en los puntos M y N, respectivamente, probar que $BM \cong AN$ y $AM \cong CN$.

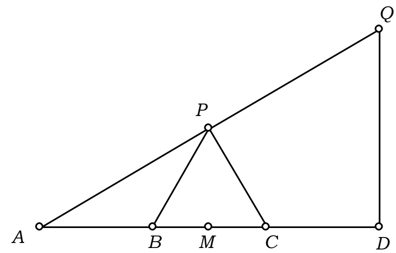
8.46. Sean ΔABC y ΔDAC dos triángulos rectángulos isósceles tales que $\angle A$ y $\angle D$ son ángulos rectos, y $D \notin \Delta ABC \cup int(\Delta ABC)$. Pongamos $a = |AB|$.

a. ¿Qué clase de cuadrilátero es $\square ABCD$?

b. Calcular las longitudes de los segmentos BC, AD y BD en función de a.
c. Si P es el punto de intersección de AC y BD, probar que $\Delta BPC \sim \Delta APD$ y calcular la razón de semejanza.
d. Expresar las longitudes de PA, PB, PC y BD en función de a.

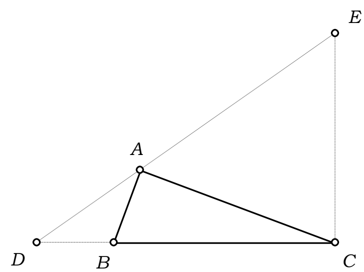
8.47. Sean ΔABC un triángulo rectángulo isósceles con ángulo recto $\angle A$, y l una recta en el exterior del mismo. Si P y Q son las proyecciones de B y C sobre l, respectivamente, probar las siguientes afirmaciones:
a. $|PQ| = |BP| + |CQ|$.
b. $\Delta P H_a Q$ es un triángulo rectángulo isósceles.

8.48. En la figura:



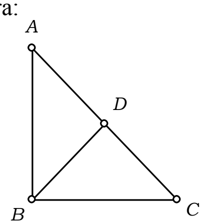
supongamos que $AB \cong BC \cong CD$, ΔPBC es equilátero, M es el punto medio de BC, y $QD \perp AD$.
a. Probar que $AP \cong PQ$, $PM \parallel QD$ y $BP \parallel CQ$.
b. Si $a = |AB|$, expresar $|PC|$, $|PD|$ y $|PA|$ en función de a.

8.49. En la figura:



ΔABC es un triángulo rectángulo con ángulo recto $\angle A$, $DC \perp CE$, $AB \cong DB$ y $AC \cong CE$. Probar que D, A y E son colineales.

8.50. En la figura:



sea ΔABC un triángulo rectángulo con ángulo recto $\angle B$. Si $D \in AC$ satisface que $BD \cong DC$, probar que $D = M_b$.

8.51. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$. Probar que $AB_b < B_bC$ y $AB_c < B_cB$.

8.52. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$. Probar la equivalencia de las siguientes desigualdades:
a. $BB_a < B_aC$.
b. $\angle BAM_a > \angle M_aAC$.

8.53. Si P es un punto en el plano equidistante de los tres vértices del triángulo ΔABC, probar que

$$m(\angle BPC) = 2m(\angle A).$$

8.54. Sean ΔABC un triángulo y $P \in int(\Delta ABC)$. Probar que $m(\angle BPC) = m(\angle A) + m(\angle ABP) + m(\angle ACP)$.

8.55. Sean ΔABC un triángulo, $M \in AB$, y $N \in AC$. Si $MN \parallel BC$ y $|BC| = 2|MN|$, probar que M y N son los puntos medios de AB y AC, respectivamente.

8.56. Sea ΔABC un triángulo. Probar que $AB \cong AC$ si y solo si $BH_b \cong CH_c$.

8.57. Sea ΔABC un triángulo. Probar que $m(\angle CB_aA) = 60$ si y solo si $m(\angle C) = 60 + m(\angle B)$.

8.58. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumple la congruencia $M_aH_b \cong M_aH_c$.

8.59. Sean ΔABC un triángulo y M el punto medio de AH. Probar que $MH_b \cong MH_c$

8.60[I-21]. Sean ΔABC un triángulo y $P \in BC$, $Q \in AC$ y $R \in AB$. Probar que los puntos medios de los segmentos AP, BQ y CR no pueden ser colineales.

8.61. En el triángulo ΔABC prolongamos AH_a hasta un punto D tal que $AH_a \cong H_aD$. Probar que $\Delta ABC \cong \Delta DBC$, $\Delta ABH_a \cong \Delta DBH_a$ y $\Delta AH_aC \cong \Delta DH_aC$.

8.62. Sea ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$. Probar que los ángulos $\angle A$ y $\angle H_bHH_c$ tienen que ser suplementarios.

8.63. Sean ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$ y $D \in AC$ y $E \in AB$ dos puntos tales que $BD \cong CE$ y $\angle ABD \cong \angle ACE$. Probar que $AD \cong AE$ y BD y CE se cortan en un punto de b_a.

8.64. Sea ΔABC un triángulo tal que $m(\angle B) = 60$ y $m(\angle C) = 45$. Si $a = 10$, calcular h_a y las longitudes de los lados del triángulo.

8.65. Sea ΔABC un triángulo tal que $m(\angle B) = 45$ y $m(\angle C) = 30$. Si $c = 9$, calcular las longitudes de los lados del triángulo.

8.66. En el triángulo $\Delta(4,6,8)$. Calcular numéricamente p_a y q_a.

8.67. Sea ΔABC un triángulo tal que $\angle A$ es agudo. Encontrar $P \in AC$ y $Q \in AB$ tales que $PQ \cong PC$.

8.68. Sea ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$. Si $\angle B \geq \angle A$, encontrar un punto $D \in AC$ tal que $\Delta ABC \sim \Delta BCD$ y $\angle A \cong \angle CBD$.

8.69. Sean ΔABC un triángulo equilátero y $P \in int(\Delta ABC)$. Sobre BP construimos un triángulo equilátero ΔBPD, de tal forma que A y D estén en diferentes semiplanos determinados por la recta $\overleftrightarrow{BP}$. Probar que $CD \cong AP$.

8.70. Sean $\angle AOB$ un ángulo no degenerado y $\overrightarrow{OP}$ su bisectriz. Supongamos que $\overrightarrow{OP} \perp \overleftrightarrow{AB}$. Sean C un punto en el semiplano determinado por $\overleftrightarrow{OB}$ que no contienen a A, y D un punto en el semiplano determinado por $\overleftrightarrow{OA}$ que no contiene a B tales que $\angle COB \cong \angle AOB \cong \angle DAO$ y $CB \cong DA$.

a. Probar que si $\angle DOC$ es recto, entonces $m(\angle AOB) < 90$.

b. Probar que ΔODC un triángulo isósceles.

8.71 (Baltic Way 1999, Problem 15). Sea ΔABC un triángulo con $m(\angle C) = 60$ y $AC < BC$. Sea $D \in BC$ tal que $AC \cong BD$. Si el lado AC se extiende hasta un punto E, de tal manera que $AC \cong CE$, probar que $AB \cong DE$.

8.72. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$. Probar que $AC \cong m_a$ si y solo si $m(\angle C) = 60$.

8.73. Sea ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$. Sean M y N las proyecciones del punto $L \in BC$ sobre las rectas $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{AB}$, respectivamente.

a. Prolongamos ML hasta un punto P tal que $PL \cong LN$. Probar que $\square PMH_bN$ es un rectángulo.

b. Probar que $|BH_b| = |NL| + |LM|$.

c. Probar que $|AN| + |AM| = |AB| + |AH_b|$.

8.74. Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos tales que $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$ y $\angle C$ y $\angle C'$ son suplementarios y no congruentes. Probar las siguientes afirmaciones:

a. $\angle B \cong \angle B'$.

b. $m(\angle A) + m(\angle A') = 2m(\angle \alpha)$, en donde $\angle \alpha$ es un ángulo complementario de $\angle B$.

8.75. Sean ΔPAB y ΔPCD dos triángulos isósceles con $PA \cong PB$ y $PC \cong PD$.

a. Probar que $AC \cong BD$.

b. Probar que $\Delta ABC \cong \Delta BCD$.

c. Si Q es el punto de intersección de AC y BD, probar que ΔBQC es un triángulo isósceles.

8.76. Sea ΔABC un triángulo. Si $P \in \overleftrightarrow{AB}$ y $Q \in \overleftrightarrow{AC}$ son tales que $AP \cong AC$ y $AB \cong AQ$. Probar que $BQ \parallel PC$.

8.77. Sea ΔABC un triángulo isósceles con $BA \cong BC$. Si $D \in \overleftrightarrow{AB}$ y $E \in \overleftrightarrow{BC}$ son tales que los triángulos ΔABD y ΔBCE son equiláteros, probar que $AE \cong CD$.

8.78. En un triángulo ΔABC, trazamos una recta l que pase por M_a y corte a AB en el punto P, a la recta $\overleftrightarrow{AC}$ en el punto Q y a la recta paralela AB que pasa por C en el punto R. Probar que $\dfrac{|PA|}{|PB|} = \dfrac{|QP|}{|QR|}$.

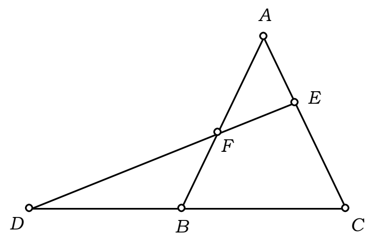
8.79. En un triángulo ΔABC, trazamos una recta l que pase por M_a y que corte a AC en el punto P y a la recta $\overleftrightarrow{AB}$ en el punto Q. Probar que $\dfrac{|PA|}{|PC|} = \dfrac{|AQ|}{|BQ|} = \dfrac{|QA|}{|QB|}$.

8.80. Sean ΔABC un triángulo y $D \in BC$. Trazamos rectas paralelas a AB y a AC que pasen por el punto D y corten a la recta paralela a BC que pasa por A en los puntos E y F, respectivamente. Probar las siguientes congruencias:

a. $\Delta DEF \cong \Delta ABF$.

b. $BF \cong CE$.

8.81. En la figura:



tenemos que D, E y F son colineales y $AB \cong AC$, $BD \cong BE$ y $FB \cong FE$. Expresar la medida de los ángulos del triángulo ΔABC en función de la medida del ángulo $\angle CDE$.

8.82. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumple la desigualdad $s < d(P,A) + d(P,B) + d(P,C) < per(\Delta ABC)$, para todo punto $P \in int(\Delta ABC)$.

8.83. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumplen las desigualdades $|BB_a| < c$ y $|B_aC| < b$.

8.84. Probar que en todo triángulo $\Delta(a,b,c)$ se cumple que $b > \dfrac{a}{2}$ o $c > \dfrac{a}{2}$.

8.85. Sea ΔABC un triángulo. Si $AB > AC$, probar que $\angle BAH_a > \angle H_aAC$.

8.86. Sea ΔABC un triángulo con $AC > AB$. Si $D \in AC$ satisface que $AD \cong AB$, probar que $BC > DC$.

8.87. Sea ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$. Probar que t_b corta a BC si y solo si $\angle C \leq \angle A$.

8.88. Si ΔABC es un triángulo isósceles con $AB \cong AC$. Probar que $|AB| > \dfrac{|BC|}{2}$.

8.89. Si $P \in int(\Delta ABC)$ satisface que $PB \cong AB$, probar que PC y AC no pueden ser congruentes.

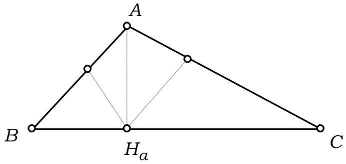
8.90. Sean ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$ y $D \in \overleftrightarrow{BC} - \{B, C\}$.

a. Probar que $D \in BC$ si y solo si $\angle B < \angle CDA$.

b. Probar que $D \in \overleftrightarrow{BC} - BC$ si y solo si $\angle B > \angle CDA$.

8.91. Sea ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$. Probar que $AB > BC$ si y solo si $60 < m(\angle B) < 90$.

8.92. En la figura:



sea ΔABC un triángulo. Probar que $AB < AC$ si y solo si

$$d(H_a, \overleftrightarrow{AB}) < d(H_a, \overleftrightarrow{AC}).$$

8.93. Sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo y hacia su exterior construimos un cuadrado. Probar que el punto de intersección de las diagonales del cuadrado equidista de los catetos del triángulo.

8.94. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$. Construimos cuadrados $\square ARSB$ y $\square PQCB$ en el exterior del triángulo. Si T es el punto de intersección de $\overleftrightarrow{PB}$ y $\overleftrightarrow{SR}$, probar que $\Delta ABC \cong \Delta STB$.

8.95. En un triángulo ΔABC construimos hacia su exterior y sobre sus lados AB y BC dos triángulos rectángulos isósceles ΔABE y ΔACD, respectivamente, cuyos ángulos rectos tienen a A como su vértice.

a. Probar que $EC \cong DB$.

b. Si M y N son los puntos medios de BD y EC, respectivamente, probar que el punto A yace en la mediatriz del segmento MN.

c. ¿Cuánto debe medir el ángulo $\angle A$ para que $DE \cong BC$?

8.96. Sobre los lados AC y BC de un triángulo ΔABC construimos exteriormente dos triángulos equiláteros ΔBCD y ΔCAE. Probar que $BE \cong AD$.

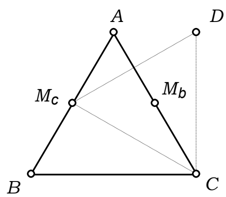
8.97. Sean ΔABC un triángulo; y $N, M \in BC$ tales que $AB \cong BM$ y $AC \cong CN$. Probar que

$$m(\angle MAN) = \frac{180 - m(\angle A)}{2}.$$

8.98. Sea ΔABC un triángulo isósceles tal que $AB \cong AC$ y $AB > BC$. Si $F \in AB$ satisface que $BF \cong BC$, probar que

$$m(\angle BFC) = \frac{m(\angle A) + m(\angle B)}{2}.$$

8.99[I-25]. En la figura:

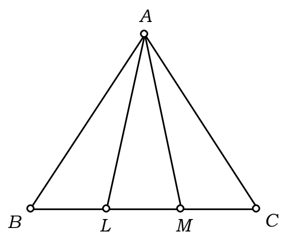


sea ΔABC un triángulo equilátero, $M_cD \parallel BM_b$ y $M_cD \cong BM_b$.

a. Probar que ΔADC es un triángulo rectángulo.

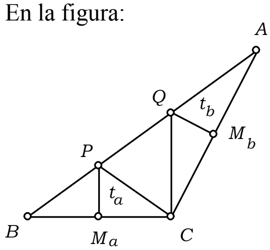
b. Probar que ΔM_cCD es un triángulo equilátero.

8.100. En la figura:



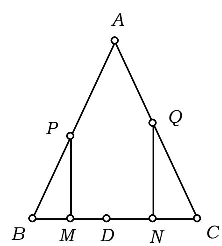
si $\Delta ABL \cong \Delta AMC$, ¿es ΔABC un triángulo isósceles?

8.101. En la figura:



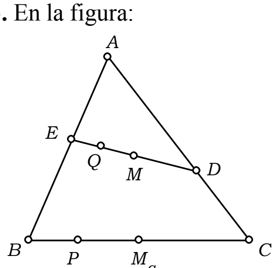
$\angle ACB$ es un ángulo obtuso, y P y Q son los puntos de intersección de t_a y AB, y t_b y AB, respectivamente. Probar que el ángulo $\angle QCP$ es congruente con el doble del complemento del ángulo exterior de vértice $\angle C$ del triángulo ΔABC.

8.102. En la figura:



tenemos que $AB \cong AC$, $D \in BC$ es arbitrario y M y N son los puntos medios de BD y DC, respectivamente. Si $PM \perp BC$ y $QN \perp BC$, probar que $BP \cong AQ$ y $AP \cong QC$.

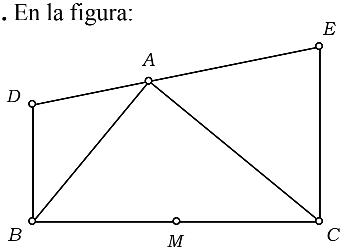
8.103. En la figura:



si ΔABC es un triángulo, M el punto medio de ED, $\dfrac{|BP|}{|PC|} = \dfrac{|EQ|}{|QD|}$,

probar que PQ no puede ser paralelo a MM_a.

8.104. En la figura:

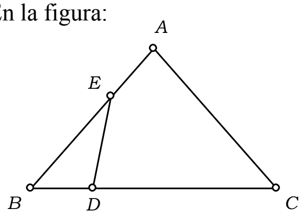


$DB \perp BC$, $EC \perp BC$, $DB \cong DA$ y $EA \cong EC$.

a. Probar que ΔABC es un triángulo rectángulo en $\angle A$.

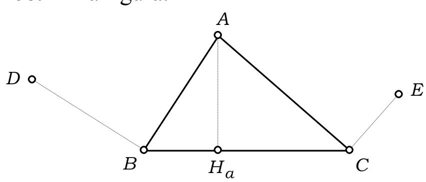
b. Si M es el punto medio de BC, probar que $AM \perp DE$.

8.105. En la figura:



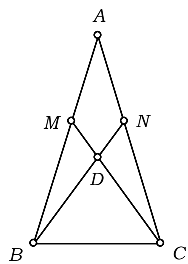
supongamos que $\angle BAC > \angle ACB$ y $\angle EDB > \angle BED$. Enlistar los segmentos AB, BC, BD y BE en orden decreciente.

8.106. En la figura:



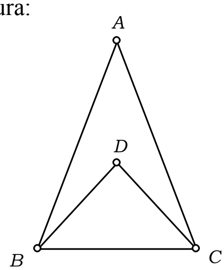
tenemos que ΔABC es un triángulo, $BD \perp AB$, $AC \perp CE$, $BD \cong CH_a$ y $CE \cong BH_a$. Probar que $AD \cong AE$.

8.107. En la figura:



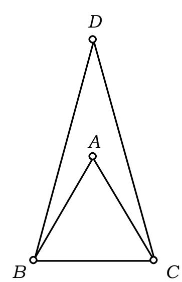
ΔABC es un triángulo isósceles tal que $AB \cong AC$, $3m(\angle A) = m(\angle B)$ y $BM \cong BC \cong NC$. Probar que $\angle NDM \cong \angle B$.

8.108. En la figura:



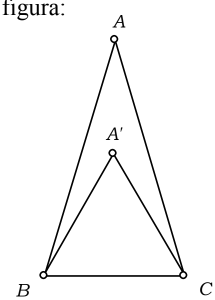
si $AB \cong AC$ y $BD \cong CD$, probar que $\overleftrightarrow{AD} \perp BC$.

8.109. En la figura:



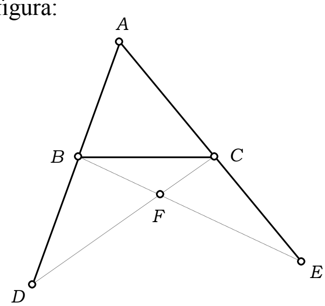
ΔABC es un triángulo equilátero y ΔDBC es un triángulo isósceles tales que $DB \cong DC$ y $m(\angle D) = \dfrac{m(\angle A)}{2}$. Probar que $AD \cong BC$.

8.110. En la figura:



$\Delta A'BC$ es un triángulo equilátero y ΔABC es un triángulo isósceles con $AB \cong AC$. Si $m(\angle BAC) = 5m(\angle A'BA)$, calcular la medida de cada uno de los ángulos del triángulo ΔABC.

8.111. En la figura:

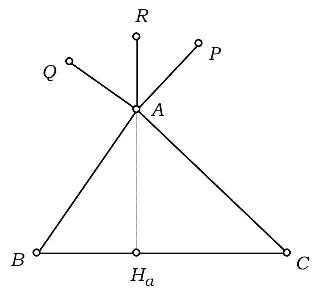


ΔABC es un triángulo arbitrario y $DB \cong BC \cong CE$.

Probar que $m(\angle DFB) = 90 - \dfrac{m(\angle A)}{2}$.

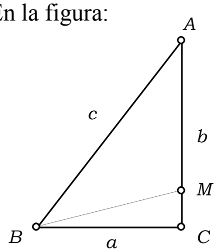
8.112. Giramos un triángulo ΔABC alrededor de su vértice A hasta una cierta posición $\Delta AB'C'$. Si AC biseca a BB', probar que la semirrecta $\overrightarrow{AB'}$ biseca a CC'.

8.113. En la figura:



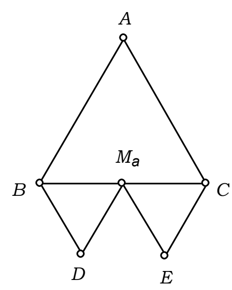
tenemos un triángulo arbitrario ΔABC, $R \in \overleftrightarrow{AH_a}$, $AP \perp AC$ y $AQ \perp AB$. Probar que $\angle B \cong \angle RAQ$ y $\angle C \cong \angle PAR$.

8.114. En la figura:



sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle C$. Si $M \in AC$ satisface que $AM \cong BM$, probar que $d(M, \overleftrightarrow{AC}) = \dfrac{ac}{2b}$.

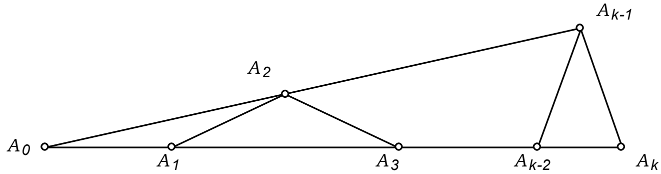
8.115. En la figura:



ΔABC, $\Delta M_a BD$ y $\Delta C M_a E$ son triángulos equiláteros. Probar que AD y AE trisecan a BC.

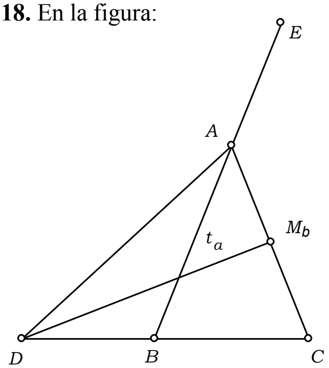
8.116. Sea ΔABC un triángulo cualquiera. Prolongamos AB hasta un punto E tal que $AE \cong AC$, y sea D el punto de intersección de la bisectriz del ángulo $\angle CAE$ y $\overleftrightarrow{BC}$. Probar que ΔDCE es un triángulo isósceles.

8.117[a-132]. En la figura:



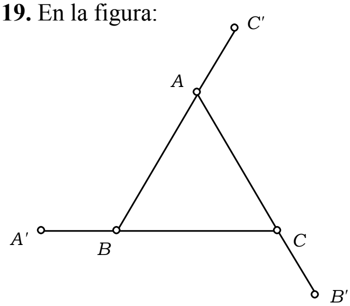
se tiene que $A_i\ A_{i+1} \cong A_{i+1}\ A_{i+2}$ para cada $0 \leq i \leq k-2$. Probar que $m(\angle A_{k-1}\ A_k\ A_{k-2}) = (k-1)m(\angle A_1\ A_0\ A_2)$.

8.118. En la figura:



supongamos que ΔABC es un triángulo isósceles con $AB \cong AC$, D es el punto intersección de $\overleftrightarrow{BC}$ y t_b, y $AE \cong BD$. Probar que los triángulos ΔCAD y ΔCED son isósceles.

8.119. En la figura:

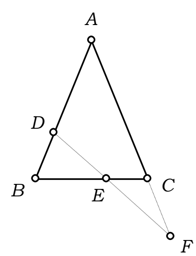


supongamos que ΔABC es un triángulo equilátero y $A'B \cong CB' \cong AC'$.

a. Probar que el triángulo $\Delta A'B'C'$ es equilátero.

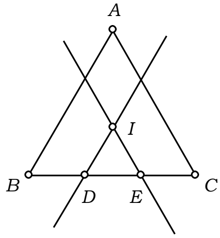
b. Si P es el punto de intersección de BB' y CC', Q es el punto de intersección AA' y CC', y R es el punto de intersección de BB' y AA', probar que el triángulo ΔPQR es equilátero.

8.120. En la figura:



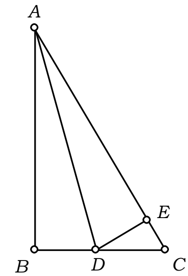
ΔABC es un triángulo isósceles con $AB \cong AC$ y $DE \cong EF$. Probar que $CF \cong BD$.

8.121. En la figura:



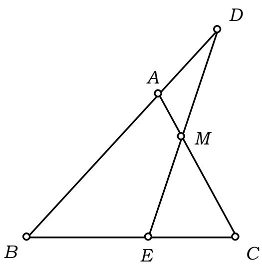
ΔABC es un triángulo equilátero, I su incentro, $DI \parallel AB$ y $EI \parallel AC$. Probar que D y E trisecan a BC.

8.122. En la figura:



sean ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle B$ y $D \in BC$ y $E \in AC$ tales que $DE \perp AC$. Probar que $\Delta ABD \sim \Delta CED \sim \Delta DEA$ si y solo si $m(\angle A) = 30$ y $m(\angle C) = 60$.

8.123[I-21]. En la figura:



tenemos un triángulo cualquiera ΔABC y $AD \cong EC$.

Probar que $\dfrac{|DM|}{|ME|} = \dfrac{a}{c}$.

8.124. Sean ΔABC un triángulo tal que $m(\angle C) = 3m(\angle B)$ y P es el punto de intersección de $\overleftrightarrow{AB}$ y t_a.

a. Probar que $\overleftrightarrow{CP}$ corta al triángulo ΔABC en dos triángulos isósceles.
b. Expresar la medida del ángulo exterior del triángulo adyacente a $\angle A$ en función de $m(\angle B)$.

8.125. Sea ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$. Probar los siguientes enunciados:

a. $B \in t_b$ si y solo si $\angle A \cong \angle C$.
b. $t_b \cap (BC - \{B\}) \neq \varnothing$ si y solo si $\angle A > \angle C$.
c. $t_b \cap (\overleftrightarrow{BC} - BC) \neq \varnothing$ si y solo si $\angle A < \angle C$.

8.126. Sea ΔABC un triángulo rectángulo isósceles con ángulo recto $\angle A$. Sean $M \in BC$ y P y Q las proyecciones de M sobre AB y AC, respectivamente.

a. Si R es el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero $\square APMQ$, probar que R está en la mediatriz del segmento AM_a.
b. Hallar la medida del ángulo $\angle QM_aP$.
c. Probar que $\Delta BM_aP \cong \Delta AM_aQ$.
d. Probar que $M_aP \cong M_aQ$.

8.127. Sean ΔABC un triángulo con $m(\angle B) = 2m(\angle C)$, $D \in \overrightarrow{AB}$ tal que $BD \cong BH_a$, y E el punto de intersección de AC y $\overrightarrow{DH_a}$.

a. Probar que $AE \cong EH_a \cong EC$.
b. Compara los ángulos de los triángulos ΔAED y ΔABC.
c. Si B' es el punto simétrico de B con respecto a H_a, probar que el triángulo $\Delta AB'C$ es isósceles.
d. Probar que $AD \cong H_aC$.

8.128. Sea ΔABC un triángulo tal que $AB < AC$. Sean l una recta paralela a AC que pasa por B, $E \in l$ tal que A y E están en diferentes semiplanos determinados por la recta $\overleftrightarrow{BC}$, y $D \in AC$ tal que $AB \cong AD$.

a. Probar que $\overrightarrow{BD}$ es la bisectriz del ángulo $\angle EBA$.
b. Sea F el punto de intersección de AC y t_a. Probar que $\overrightarrow{BC}$ es la bisectriz del ángulo $\angle EBF$.
c. Probar que $m(\angle FBA) = 2m(\angle CBD)$.

8.129. Sean ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$, $D \in \overleftarrow{BC}$ tal que $AB \cong BD$, y E un punto en la recta perpendicular a BC en el punto C que esté en el semiplano determinado por $\overleftrightarrow{BC}$ que contiene a A tal que $AC \cong CE$.

a. Calcular en función de $m(\angle B)$ las medidas de los ángulos $\angle BAD$, $\angle ECA$ y $\angle CAE$.

b. Probar que los puntos D, A y E son colineales.

8.130. Sea ΔABC un triángulo con $AC > BC$. Sean P y Q los puntos de intersección de la recta $\overleftrightarrow{AB}$ con las rectas perpendiculares a e_a que pasan por los puntos M_a y C, respectivamente.

a. Probar que $|AP| = \dfrac{|AC| - |AB|}{2}$.

b. Probar que $|M_a P| = \dfrac{|AC|}{2}$.

8.131. Sean ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$ y $D \in \overleftrightarrow{BC}$. Por D trazamos rectas paralelas a AB y AC que corten a $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{AB}$ en los puntos E y F, respectivamente.

a. Probar que $D \in BC$ si y solo si $|AB| = |DE| + |DF|$.

b. Probar que $D \in \overleftrightarrow{BC} - BC$ si y solo si $|AB| = ||DE| - |DF||$.

8.132[I-143]. Sea ΔABC un triángulo tal que $|AB| = 2|AC|$. Por un punto arbitrario $D \in BC$, trazamos rectas paralelas a AB y AC que corten a AC y AB en los puntos F y E, respectivamente. Probar que

a. $2|DE| + |DF| = |AB|$ y

b. $|DE| + \dfrac{|DF|}{2} = |AC|$.

8.133[I-143 Sean ΔABC un triángulo y $E \in AB$ y $F \in AC$ tales que $BF \cong CE$. Por un punto arbitrario $D \in BC$ trazamos rectas paralelas a BF y CE que corten a AC y AB en los puntos P y Q, respectivamente. Probar que la suma $|DP| + |DQ|$ es una constante que no depende de la elección del punto D sobre el lado BC.

8.134[I-143]. Sea ΔABC un triángulo. Por un punto arbitrario $D \in BC$ trazamos rectas paralelas a AB y AC que corten a AC y AB en los puntos F y E, respectivamente. Si $\dfrac{|AB|}{|AC|} = \dfrac{p}{q}$, probar que la suma $p|DE| + q|DF|$ es una constante que no depende de la elección del punto D sobre el lado BC.

8.135[I-143]. Sea ΔABC un triángulo. Por un punto arbitrario $D \in BC$ trazamos rectas paralelas a AB y AC que corten a AC y AB en los puntos F y E, respectivamente. Probar que $\dfrac{|DE|}{b} + \dfrac{|DF|}{c} = 1$.

8.136[I-143]. Sean ΔABC un triángulo y $D \in BC$. Sean E y F las proyecciones de D sobre AB y AC respectivamente. Probar las siguientes identidades:

a. $\dfrac{|DE|}{b} + \dfrac{|DF|}{c} = \operatorname{sen}\angle A$.

b. $c|ED| + b|DF| = 2are(\Delta ABC)$.

8.137. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$. Fijamos un punto $P \in BC - \{M_a\}$ y sean D y E sus proyecciones sobre AB y AC, respectivamente. Si F es el punto de intersección de $\overleftrightarrow{AM_a}$ y $\overleftrightarrow{PE}$, probar que $\Delta BPE \cong \Delta RQA$.

8.138. Sea ΔABC un triángulo. Sean D el punto simétrico de A con respecto a C, y E el punto simétrico de D con respecto a la recta $\overleftrightarrow{BC}$.

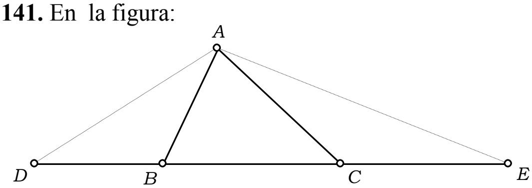
a. Probar que el triángulo ΔCEA es isósceles.

b. Probar que la bisectriz del ángulo $\angle ECA$ es perpendicular a $\overleftrightarrow{BC}$.

8.139. Sean ΔABC un triángulo y P un punto en su exterior. Ubicamos puntos R, S y T sobre las rectas $\overleftrightarrow{AP}$, $\overleftrightarrow{BP}$ y $\overleftrightarrow{CP}$, respectivamente, de tal manera que P esté entre los puntos A y R, B y S y C y T, y que $AP \cong PR$, $PB \cong PS$ y $PC \cong PT$. Probar que $\Delta ABC \sim \Delta RST$.

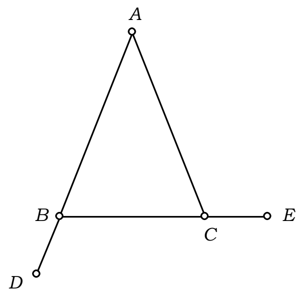
8.140. Sea ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$. Probar que el ángulo $\angle BIC$ es congruente con el ángulo exterior adyacente al ángulo $\angle B$ del triángulo.

8.141. En la figura:



tenemos que $AB \cong BD$ y $AC \cong CE$. Expresar las medidas de los ángulos $\angle BDA$ y $\angle AEC$ en función de las medidas de los ángulos $\angle B$ y $\angle C$.

8.142. En la figura:



$AB > BC$, $AB \cong AC$ y $|BD| = |CE| = |AB| - |BC|$.
Probar las siguientes afirmaciones:

a. $\Delta ACE \cong \Delta EBD$.
b. ΔEAD es isósceles.
c. $m(\angle EDA) = \dfrac{m(\angle BAC) + m(\angle AED)}{2}$.

8.143[I-21]. Sean ΔABC un triángulo equilátero y $P \in int(\Delta ABC)$. Sean L, M y N las proyecciones de P sobre los lados BC, AC y AB, respectivamente. Probar que $\dfrac{|PL|+|PM|+|PN|}{|BL|+|CM|+|AN|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

8.144[I-32, Problem 151]. Sean ΔABC un triángulo equilátero y $P \in int(\Delta ABC)$. Sean L, M y N las proyecciones de P sobre los lados BC, AC y AB, respectivamente. Probar que $\dfrac{|PL|+|PM|+|PN|}{a+b+c} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

8.145. Sean ΔABC un triángulo equilátero y $T \in int(\Delta ABC)$. Por T trazamos rectas paralelas a BC, AC y AB que corten a BC en los puntos R y P, a AC en los puntos N y S, y a AB en los puntos Q y M, respectivamente. Expresar la suma $|MN| + |PQ| + |RS|$ en función del perímetro del triángulo.

8.146. Sean ΔABC un triángulo equilátero y $T \in int(\Delta ABC)$. Por T trazamos una recta paralela a BC que corte a AC y AB en los puntos M y N, una recta paralela a AB que corte a BC y AC en los puntos P y Q, y una recta paralela a AC que corte a AB y BC en los puntos R y S, respectivamente. Probar que

$$|MN| + |PQ| + |RS| < per(\Delta ABC).$$

8.147. Sean ΔABC un triángulo equilátero cuyos lados tienen longitud a, y $P \in int(\Delta ABC)$. Trazamos rectas paralelas a los lados del triángulo original que pasen por el punto P y corten a AB, BC y AC en los puntos D, E, F, G, H y K, respectivamente, probar que $|DE| + |FG| + |HK| = 2a$.

8.148. Sea ΔABC un triángulo isósceles con $|AB| = |AC| = 15$. Fijamos un punto $M \in BC$ y por él trazamos rectas paralelas a AC y AB que corten a AB y a AC en los puntos P y Q, respectivamente. Probar que

$$30 < 2|PM| + 3|QM| < 45.$$

8.149. Sea ΔABC un triángulo isósceles con $|AB| = |AC| = 20$. Hallar un punto $M \in BC$ tal que si por él trazamos rectas paralelas a AC y AB que corten a AB y a AC en los puntos P y Q, respectivamente, se tenga que

$$3|PM| + 4|QM| = 65.$$

8.150. Si ΔABC es un triángulo isósceles tal que $|AB| = |AC| = 1$ y $m(\angle A) = 36$, hallar la longitud de su lado BC.

8.151. Dado un triángulo ΔABC, si $P, Q \in int(\Delta ABC)$, probar que $d(P,Q) \le \max\{|AB|,|AC|,|BC|\}$.

8.152. Sea ΔABC un triángulo. Si $D \in BC$ satisface que $\angle ABD \cong \angle C$, probar que $|AB|^2 = |BD||BC|$.

8.153. Dividir un triángulo en cuatro triángulos congruentes entre sí.

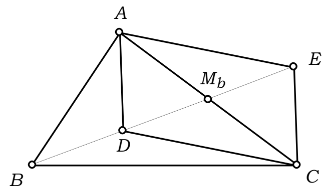
8.154. Dividir un triángulo equilátero en tres triángulos congruentes.

8.155. Probar que si un triángulo se puede dividir en tres triángulos congruentes, entonces el triángulo tiene que ser equilátero.
8.156 (Ken's Puzzle of the Week). Dividir un triángulo arbitrario en triángulos que tengan un ángulo obtuso.
8.157. Dividir un triángulo arbitrario en triángulos cuyos ángulos sean agudos.
8.158. ¿Puede un triángulo arbitrario ser dividido en triángulos rectángulos?
8.159. Dado un triángulo con un ángulo obtuso, ¿cuál es el mínimo número en que se puede dividir en triángulos cuyos ángulos sean todos agudos?
8.160. ¿Puede algún triángulo ser dividido en dos triángulos congruentes entre sí y semejantes al original?
8.161. Dividir un triángulo en k triángulos que tengan la misma área, en donde $k > 1$ es un número natural.
8.162. Si un triángulo se puede dividir en k triángulos congruentes entre sí, en donde $k > 1$ es un número natural, probar que dicho triángulo se puede dividir en $4^i k$ triángulos congruentes entre sí.
8.163. Encontrar diferentes formas en las que un triángulo cualquiera se pueda dividir en tres triángulos equivalentes.
8.164. Probar que todo triángulo se puede dividir en $4 + 3k$ triángulos semejantes a él mismo, para cada número entero positivo k.
8.165. Probar que todo triángulo se puede dividir en k^2 triángulos semejantes a él mismo, para cada número entero positivo $k > 1$.
8.166. Probar que todo triángulo se puede dividir en $2k$ triángulos semejantes a él mismo, para cada número entero positivo $k > 1$.
8.167. Probar que todo triángulo se puede dividir en k triángulos semejantes a él mismo, para cada número entero positivo $k > 5$.
8.168. Probar que un triángulo puede dividirse en dos triángulos semejantes a él mismo si y solo si el triángulo es un triángulo rectángulo.
8.169. Probar que todo triángulo rectángulo se puede dividir en tres triángulos semejantes a él mismo.
8.170. Probar que todo triángulo rectángulo se puede dividir en cinco triángulos semejantes a él mismo.
8.171. Probar que un triángulo rectángulo cuyos catetos estén en la razón 2 a 1 se puede dividir en cinco triángulos congruentes entre sí y similares al original.
8.172. Probar que si un triángulo se puede dividir en tres triángulos semejantes a él mismo, entonces el triángulo tiene que ser un triángulo rectángulo.
8.173. Dividir un triángulo isósceles en tres triángulos semejantes entre sí (no necesariamente semejantes al triángulo original).
8.174. Probar que si un triángulo puede dividirse en dos triángulos semejantes entre sí, entonces dicho triángulo es isósceles.
8.175. ¿Puede cualquier triángulo ser dividido en cinco triángulos semejantes entre sí?
8.176. Sea ΔABC un triángulo tal que todos sus ángulos son agudos y ninguno de sus ángulos mide 60, ¿puede ser el triángulo ΔABC dividido en tres triángulos semejantes entre sí?
8.177. Dividir el triángulo $\Delta(\angle 90,\angle 45,\angle 45)$ en triángulos semejantes entre sí, de tal forma que la figura resultante sea simétrica.
8.178. Dividir el triángulo $\Delta(\angle 30,\angle 30,\angle 120)$ en triángulos semejantes entre sí de tal forma que la figura resultante sea simétrica.
8.179. ¿Es posible dividir un triángulo isósceles en dos triángulos isósceles no congruentes?
8.180. Probar que todo triángulo rectángulo se puede dividir en k triángulos isósceles, para cualquier número entero $k > 1$.
8.181. Probar que todo triángulo cuyos ángulos son agudos se puede dividir en k triángulos isósceles, para cualquier número entero $k > 2$.
8.182. Probar que el triángulo $\Delta(\angle 1,\angle 8,\angle 171)$ no se puede dividir en tres triángulos isósceles.
8.183. Probar que el triángulo $\Delta(\angle 120,\angle 40,\angle 20)$ se puede dividir en dos triángulos isósceles de dos maneras diferentes.
8.184. Si en un triángulo uno de sus ángulos es el doble que otro, probar que el triángulo se puede dividir en dos triángulos isósceles.
8.185. Si en un triángulo uno de sus ángulos es el triple que otro, probar que el triángulo se puede dividir en dos triángulos isósceles.

8.186[a-101]. Si un triángulo ΔABC con lado mayor BC se puede dividir en 2 triángulos isósceles, probar que se cumple una de las siguientes condiciones: $\angle A$ o $\angle B = 2\angle C$ o $\angle A = 3\angle C$.
8.187[a-101]. Probar que el triángulo $\Delta(\angle 160,\angle 10,\angle 10)$ no se puede dividir en 3 triángulos isósceles.
8.188[l-126]. Cortar un triángulo equilátero en cinco partes, de tal forma que con ellas se puedan formar tanto dos como tres triángulos equiláteros más pequeños.
8.189. Probar que todo triángulo rectángulo se puede dividir en dos partes, de tal forma que con ellas se pueda formar un rectángulo. ¿Solo los triángulos rectángulos poseen esta propiedad?
8.190. Si un triángulo rectángulo se puede dividir en dos partes, de tal forma que con ellas se pueda formar un cuadrado, probar que sus ángulos agudos tienen medidas 30 y 60.
8.191. Sea ΔABC un triángulo tal que $m(\angle A) = 30$ y $m(\angle C) = 40$. Calcular la medida de cada uno de los ángulos de los triángulos $\Delta A H_c C$ y $\Delta B H_c C$.
8.192. Sean ΔABC un triángulo y $k > 0$ un número entero. Si $m(\angle B) = k(m(\angle A))$ y $m(\angle C) = (k + 1)(m(\angle A))$, expresar la medida de los ángulos de ΔABC en función de k.
8.193. Sea ΔABC un triángulo. Si $m(\angle BA B_a) = 2x - y$, $m(\angle B_a AC) = 4y$, $m(\angle B) = 4x$ y $m(\angle C) = 6y$, calcular la medida de cada uno de los ángulos del triángulo.
8.194. Sea ΔABC un triángulo. Si $m(\angle C - \angle A) = 50$ y $m(\angle A - \angle B) = 50$, calcular las medidas de todos los ángulos del triángulo.
8.195. Sean ΔABC un triángulo con $m(\angle B) = 70$, y $D \in BC$ y $E \in AC$ tales que $m(\angle AED) = 40$. Si $AB \cong AD$ y $DE \cong EC$, probar que ΔABC es un triángulo rectángulo.
8.196. Sea ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$: Probar que $\Delta ABC \cong \Delta B B_b C$ si y solo si $m(\angle A) = 36$.
8.197. En un triángulo ΔABC, si $P \in BC$ satisface que $\angle BAP \cong \angle ABP$ y $\angle APC \cong \angle ACP$, probar que $BP \cong AC$.
8.198. Consideremos el triángulo $\Delta(25,20,15)$. Tomamos un punto $P \in A H_a$ tal que $|AP| = 5$. Si $D \in AB$ y $E \in AC$ son las proyecciones de P sobre AB y AC, calcular las longitudes de los segmentos AD y AE.
8.199[l-32, Problem 206]. Sea ΔABC un triángulo tal que $|AB| = 2|BC|$. Probar que BC es el lado más corto del triángulo.
8.200. Consideremos el triángulo $\Delta(\angle 70, \angle 30, \angle 80)$. Fijamos un punto $D \in \overleftrightarrow{BC} - \{B, C\}$ tal que $C \in BD$. Sea F el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos $\angle A$ y $\angle DCA$. Comparar los segmentos BC y CF.
8.201. En el triángulo $\Delta(\angle 70,\angle 30,\angle 80)$, comparar los segmentos $I_a B$ y $I_a C$.
8.202. En el triángulo $\Delta(\angle 20,\angle 120,\angle 40)$, probar que $A B_b > B B_b$ y $C B_b > B B_b$.
8.203. En el triángulo $\Delta(\angle 80,\angle 60,\angle 40)$, comparar los segmentos AH y BH y los segmentos $A H_b$ y $H H_b$.
8.204. Sea ΔABC un triángulo isósceles tal que $AB \cong AC$ y $m(\angle A) = \dfrac{m(\angle B)}{k}$, en donde k es un número entero positivo. Si $D \in BC$ y $E \in AC$ satisfacen la congruencia $DC \cong EC$, probar que $DE \parallel e_c$.
8.205. Dados cualesquiera tres puntos A, B y C en el plano, ¿es posible encontrar un punto O, de tal forma que $\overrightarrow{OC}$ sea la bisectriz del ángulo $\angle AOB$?
8.206. Sea ΔABC un triángulo, ¿para qué puntos D del plano es el cuadrilátero $\square ABCD$ convexo? Primero considerar la posición de los vértices del cuadrilátero en sentido contrario a las manecillas del reloj, y después la posición arbitraria del punto D.
8.207. Sea ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$. Si $M \in BC$ y las rectas paralelas a AB y AC que pasan por M cortan a AC y AB en los puntos D y E, respectivamente, probar que $are(\square MDAE) = 2|AB|$.
8.208. Sean ΔABC un triángulo con $a = h_a$, D, $E \in BC$, $F \in AC$ y $G \in AB$. Si $\square DEFG$ es un rectángulo, probar que $are(\square DEFG) = 2a$.
8.209. Sea ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$. Sea D el punto de intersección de la recta perpendicular a $\overleftrightarrow{BC}$ en el punto B y $\overleftrightarrow{AC}$. Fijamos un punto $E \in \overleftarrow{BC}$ y por él tracemos una recta paralela a $\overleftrightarrow{BD}$, la cual corta a la recta paralela a $\overleftrightarrow{BC}$ que pasa por D en el punto F. Si AB triseca el área del trapecio $\square FDCE$, probar que $|BC| = 4|BE|$.

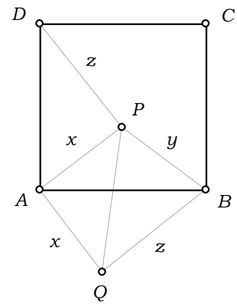
8.210. En la figura:

ΔABC es un triángulo y $\angle DAC \cong \angle ECA$.
Probar que $\square DCEA$ es un paralelogramo.



8.211[a-161]. La longitud del lado de un cuadrado inscrito en un triángulo, de tal forma que uno de los lados del cuadrado es paralelo a una altura del triángulo, es igual al producto de la longitud de dicha altura por el lado correspondiente del triángulo dividido por la suma de las longitudes de dicho lado y de dicha altura.
8.212. Sean $\square ABCD$ un rectángulo y O el punto de intersección de sus diagonales. Supongamos que $m(\angle AOB) = 120$. Si $P \in BC$ satisface que $4|PC| = 3|BC|$, probar que $7|BC| = 4|AP|$.
8.213. Sea $\square ABCD$ un cuadrado de lado a. Si ΔAEF es un triángulo equilátero inscrito en el cuadrado con $E \in BC$ y $F \in DC$, calcular la longitud de los lados del triángulo y sus alturas en función de a.
8.214[a-19]. En la figura:

$\square ABCD$ es un cuadrado y $P \in int(\square ABCD)$. Hacia afuera del cuadrado, ubicamos un punto Q tal que $DP \cong BQ$ y $AP \cong AQ$. Pongamos $x = |AP|$, $y = |BP|$ y $z = |CP|$.



a. Probar que

$$|AB|^2 = \frac{1}{2}(y^2+z^2) + \frac{1}{2}\sqrt{(x\sqrt{2}+y+z)(-x\sqrt{2}+y+z)(x\sqrt{2}-y+z)(x\sqrt{2}+y-z)} =$$
$$\frac{1}{2}(y^2+z^2) + are(\Delta PQB).$$

b. Probar que

$$are(\Delta(y,z,\sqrt{2}\,x)) = are(\Delta(\sqrt{2}\,y,x,w)) = are(\Delta(y,\sqrt{2}\,z,w)) = are(\Delta(\sqrt{2}\,w,z,y)),$$

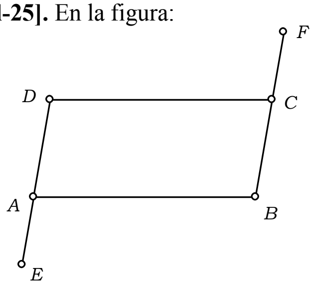
en donde $w = |DP|$.
8.215[a-19]. Sean ΔABC un triángulo equilátero y $P \in int(\Delta ABC)$.
a. Si $x = |PA|$, $y = |PB|$ y $z = |PC|$, probar que cada uno de los lados del triángulo ΔABC tiene longitud

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2+\sqrt{3(x+y+z)(y+z-x)(x+z-y)(x+y-z)}}}{2}.$$

b. Probar que $x+y>z$, $x+z>y$ y $y+z>x$.

8.216. Sea $\square ABCD$ un trapecio isósceles con $AB \parallel CD$. Si $m(\angle A) = 60$, $\overrightarrow{AC}$ es la bisectriz del ángulo $\angle A$ y $|AB| = 10$, encontrar las longitudes de los lados restantes del trapecio.
8.217. Sea $\square ABCD$ un trapecio tal que $AB \cong DC$, $|AB| = 15$, $|DC| = 5$, $|AC| = 12$ y $|DB| = 16$.
a. Probar que $AC \perp DB$.
b. Calcular las longitudes de las alturas del trapecio.
c. Si O es el punto de intersección de las diagonales del trapecio, calcular las medidas de los segmentos OA, OB, OC y OD.
8.218. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$. Si $|AC| = 2|AB|$, probar que $63 < m(\angle B) < 64$ y $26 < m(\angle B) < 27$.
8.219. Si un cateto de un triángulo rectángulo tiene longitud igual a la mitad de la longitud de la hipotenusa, probar que el ángulo opuesto a dicho cateto mide 30.

8.220[I-25]. En la figura:

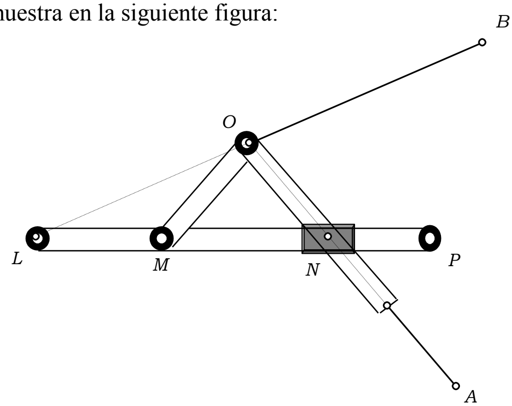


sea $\square ABCD$ un paralelogramo.
a. Si $AE \cong CF$, probar que $\square EBFD$ es un paralelogramo.
b. Si $m(\angle A) = 120$, probar que $\square EBFD$ es un rectángulo si y solo si $|AB| = 2|AE|$.

8.221. Sean l y m dos rectas que se cortan en el punto O. Fijamos un punto $A \in l - \{O\}$ y por él trazamos una recta n paralela a la bisectriz de uno de los dos ángulos formados por las rectas l y m. Si $B \in n$ y los puntos L y M son las proyecciones de B sobre las rectas l y M, respectivamente, probar que la diferencia $|BL| - |BM|$ no depende de la elección del punto B sobre la recta n.

8.222. Uno de los aparatos para trisecar un ángulo se muestra en la siguiente figura:

Dicho aparato consiste de tres barras LP, MO y ON. La barra MO está unida a la barra LP en M y se mueve alrededor de este punto de unión, y la barra ON se mueve libremente a través de la barra LP conservando su longitud. Además se tiene que $|LM| = |MN| = |NP|$. Para trisecar un ángulo con este instrumento, basta colocar su vértice sobre el punto O, uno de sus lados sobre la barra ON y el punto L sobre la recta que contiene al segundo lado del ángulo. Entonces, $\angle PLO$ es la trisección deseada. Decir por qué $\angle PLO$ es la trisección del ángulo en cuestión.



8.223. Si dos triángulos tienen un ángulo congruente y un segundo ángulo de uno de ellos es suplementario a un ángulo del otro, probar que los lados opuestos a los ángulos congruentes son proporcionales a los lados opuestos a los ángulos suplementarios.

8.224. Dividir un ángulo no nulo cualquiera en dos partes, de tal forma que los senos de los ángulos obtenidos estén en la relación $\frac{i}{j}$, en donde i y j son números reales positivos.

8.225. Probar que los Teoremas 8.2.4, 8.2.8 y 8.2.10 son equivalentes.

8.226[I-209]. Si en el triángulo ΔABC se cumple que $m(\angle C) = 60$, probar que

$$\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}.$$

8.227. Sea $\angle\alpha$ un ángulo agudo no nulo. En el triángulo rectángulo $\Delta(\text{sen}\angle\alpha, 1-\cos\angle\alpha, \sqrt{2(1-\cos\angle\alpha)}\,)$, probar que el ángulo opuesto a cateto de longitud $1 - \cos\angle\alpha$ es igual a $\frac{\angle\alpha}{2}$.

8.228. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$ con $\angle B < \angle C$. Probar las siguientes relaciones:

a. $|AH_a| = a\cos\angle B \,\text{sen}\angle B$, $|BH_a| = a(\cos\angle B)^2$ y $|CH_a| = a(\text{sen}\angle B)^2$.

b. $m(\angle AM_aB) = 2m(\angle B)$.

c. $|M_a H_a| = \frac{a}{2}\cos(2\angle B)$.

d. $|AH_a| = \frac{a}{2}\text{sen}(2\angle B)$, $|BH_a| = \frac{a}{2}(1 + \cos(2\angle B))$ y $|CH_a| = \frac{a}{2}(1 - \cos(2\angle B))$.

8.229. Sean ΔABC un triángulo cualquiera y $D \in BC$. Si $\dfrac{|BD|}{|CD|} = \dfrac{i}{j}$, probar las siguientes identidades:

a. $(i+j)\cot\angle CDA = i\cot\angle BAD - j\cot\angle DAC = j\cot\angle B - i\cot\angle C$.

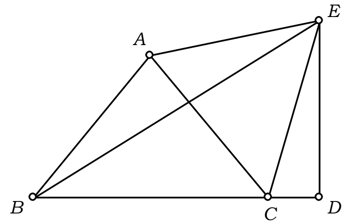
b. $(i+j)^2|AD|^2 = (i+j)(ib^2 + jc^2) - ija^2$.

8.230[E. Crane, Solution to Problem 1993.6, Math. Gazette 78 No. 481 (1994), 110 – 111]. En la figura:

$m(\angle CBA) = 50 = m(\angle ACB)$, $m(\angle DCE) = 70$ y $AB \cong AC \cong CE$.

a. Probar que $m(\angle DBE) = 30$.

b. Probar la identidad $\tan\angle 30 = \dfrac{\operatorname{sen}\angle 70}{2\cos\angle 50 + \cos\angle 70}$.



8.231. Probar que en todo triángulo rectángulo ΔABC con hipotenusa a se cumplen las siguientes identidades:

$$\operatorname{sen}(2\angle B) = \frac{2bc}{a^2}, \qquad \operatorname{sen}\angle B\tan\angle B = \frac{b^2}{ac}, \qquad \operatorname{sen}\angle B + \cos\angle B = \operatorname{sen}\angle C + \cos\angle C,$$

$$\frac{\operatorname{sen}\angle B + \cos\angle C}{\cos\angle B + \operatorname{sen}\angle C} = \tan\angle B, \quad \csc\angle B + \cot\angle B = \frac{a+c}{b} = \frac{b}{a-c} \quad \text{y} \quad \sec(2\angle B) - \tan(2\angle C) = \frac{c+b}{c-b}.$$

8.232. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumplen las siguientes identidades:

$$\operatorname{sen}\frac{\angle B - \angle C}{2} = \frac{b-c}{a}\cos\frac{\angle A}{2}, \qquad b^2\operatorname{sen}(2\angle C) + c^2\operatorname{sen}(2\angle B) = 2bc\operatorname{sen}\angle A,$$

$$a(b\cos\angle C - c\cos\angle B) = b^2 - c^2, \qquad (b+c)\cos\angle A + (c+a)\cos\angle B + (a+b)\cos\angle C = a+b+c,$$

$$b\cos\angle B + c\cos\angle C = a\cos(\angle B - \angle C), \qquad a\cos\angle A + c\cos\angle C = b\cos(\angle A - \angle C),$$

$$b\cos\angle B + a\cos\angle A = c\cos(\angle B - \angle A),$$

$$2(bc\cos\angle A + ca\cos\angle B + ab\cos\angle C) = a^2 + b^2 + c^2,$$

$$(a^2 - b^2 + c^2)\tan\angle B = (a^2 + b^2 - c^2)\tan\angle C,$$

$$a^2 = (b-c)^2(\cos\frac{\angle A}{2})^2 + (b+c)^2(\operatorname{sen}\frac{\angle A}{2})^2, \qquad b^2 = (c-a)^2(\cos\frac{\angle B}{2})^2 + (c+a)^2(\operatorname{sen}\frac{\angle B}{2})^2,$$

$$c^2 = (a-b)^2(\cos\frac{\angle C}{2})^2 + (a+b)^2(\operatorname{sen}\frac{\angle C}{2})^2,$$

$$3abc = a^3\cos(\angle B - \angle C) + b^3\cos(\angle C - \angle A) + c^3\cos(\angle A - \angle B),$$

$$\cot\angle A\cot\angle B + \cot\angle B\cot\angle C + \cot\angle C\cot\angle A = 1, \quad \cot\frac{\angle A}{2} + \cot\frac{\angle B}{2} + \cot\frac{\angle C}{2} = \cot\frac{\angle A}{2}\cot\frac{\angle B}{2}\cot\frac{\angle C}{2},$$

$$\frac{\operatorname{sen}\angle A + \operatorname{sen}\angle B - \operatorname{sen}\angle C}{\operatorname{sen}\angle A + \operatorname{sen}\angle B + \operatorname{sen}\angle C} = \tan\frac{\angle A}{2}\tan\frac{\angle B}{2}, \qquad \cos\angle A + \cos\angle B - \cos\angle C = 4\cos\frac{\angle A}{2}\cos\frac{\angle B}{2}\operatorname{sen}\frac{\angle C}{2} - 1,$$

$$\tan\frac{\angle A}{2}\tan\frac{\angle B}{2} + \tan\frac{\angle B}{2}\tan\frac{\angle C}{2} + \tan\frac{\angle C}{2}\tan\frac{\angle A}{2} = 1,$$

$$(b^2 - c^2)\cot\angle A + (c^2 - a^2)\cot\angle B + (a^2 - b^2)\cot\angle C = 0, \quad (a+b+c)(\tan\frac{\angle A}{2} + \tan\frac{\angle B}{2}) = 2c\cot\frac{\angle C}{2},$$

$$\left(\frac{\operatorname{sen}\angle A + \operatorname{sen}\angle B + \operatorname{sen}\angle C}{a+b+c}\right)^2 = \frac{a\cos\angle A + b\cos\angle B + c\cos\angle C}{2abc},$$

$$\tan\angle A + \tan\angle B + \tan\angle C = \tan\angle A\tan\angle B\tan\angle C,$$

$$(\cos\angle A)^2 + (\cos\angle B)^2 + (\cos\angle C)^2 + 2\cos\angle A\cos\angle B\cos\angle C = 1,$$

$$\cos\angle A + \cos\angle B + \cos\angle C - 1 = 4\operatorname{sen}\frac{\angle A}{2}\operatorname{sen}\frac{\angle B}{2}\operatorname{sen}\frac{\angle C}{2}.$$

8.233. Sea ΔABC un triángulo. Probar que las siguientes identidades se cumplen para cualquier ángulo $\angle\alpha$:

$$a\cos\angle\alpha = b\cos(\angle C - \angle\alpha) + c\cos(\angle B + \angle\alpha),\quad b\cos\angle\alpha = c\cos(\angle A - \angle\alpha) + a\cos(\angle C + \angle\alpha) \text{ y}$$
$$c\cos\angle\alpha = a\cos(\angle B - \angle\alpha) + b\cos(\angle A + \angle\alpha).$$

8.234[I-181]. Sea ΔABC un triángulo. Probar geométricamente que

$$a\cos\angle\alpha = b\cos(\angle C - \angle\alpha) + c\cos(\angle B + \angle\alpha),$$

para cualquier ángulo $\angle\alpha$.

8.235. Encontrar los catetos b y c de un triángulo rectángulo $\Delta(a,b,c)$ conociendo la hipotenusa a y sabiendo que $\operatorname{sen}\angle B = 2\operatorname{sen}\angle C$.

8.236(Problem 769, π, μ, ε Journal). Sea ΔABC un triángulo. Probar que $c^2 = 4ab\cos\angle A\cos\angle B$ si y solo si $a = b$.

8.237[I-186]. Si en un triángulo ΔABC se cumple la identidad $\cos(3\angle A) + \cos(3\angle B) + \cos(3\angle C) = 1$, probar que uno de sus ángulos tiene medida 120.

8.238[I-186]. Si en un triángulo ΔABC se cumple la identidad $m(\angle A) = 45$, probar que

$$(1 + \cot\angle B)(1 + \cot\angle C) = 2.$$

8.239. Si $4(2(\cos\angle\alpha)^2 + (\operatorname{sen}\angle\alpha)^2) = 5$, probar que $m(\angle\alpha) = 60$.

8.240. Si el ángulo $\angle\alpha$ satisface la igualdad $\operatorname{sen}\angle\alpha = 2\operatorname{sen}(\angle 100 - \angle\alpha)\operatorname{sen}\angle 10$, probar que $m(\angle\alpha) = 20$.

8.241. Probar que para cualquier ángulo $\angle\alpha$ se cumple la identidad

$$(\operatorname{sen}(\angle 30 - \angle\alpha))^2 + (\cos\angle\alpha)^2 + (\operatorname{sen}(\angle 30 + \angle\alpha))^2 = \frac{3}{2}.$$

8.242[I-181]. Sean ΔABC un triángulo equilátero y $A \in int(\Delta ABC)$. Probar que

$$\cos(\angle CPB - \angle 60) = \frac{|PB|^2 + |PC|^2 - |PA|^2}{2|PB||PC|}.$$

8.243. Probar que un triángulo ΔABC es isósceles si se cumple una de las siguientes identidades:

a. $a = 2b\cos\angle C$. b. $\operatorname{sen}\angle A = 2\operatorname{sen}\angle B\cos\angle C$. c. $a\cos\angle B = b\cos\angle A$.

d. $a = 2b\operatorname{sen}\dfrac{\angle A}{2}$. e. $(s - b)\cot\dfrac{\angle C}{2} = s\tan\dfrac{\angle B}{2}$. f. $a\tan\angle A + b\tan\angle B = (a + b)\tan\dfrac{\angle A + \angle B}{2}$.

g. $c(a + b)\cos\dfrac{\angle B}{2} = b(a + c)\cos\dfrac{\angle C}{2}$. h. $(a^2 + b^2)\operatorname{sen}(\angle A - \angle B) = (a^2 - b^2)\operatorname{sen}(\angle A + \angle B)$.

8.244[I-186]. Probar que el triángulo ΔABC es isósceles, o bien, rectángulo si se cumple una de las siguientes identidades:

a. $\dfrac{\cos\angle A + 2\cos\angle C}{\cos\angle A + 2\cos\angle B} = \dfrac{\operatorname{sen}\angle B}{\operatorname{sen}\angle C}$. b. $(a^2 + b^2)\operatorname{sen}(\angle A - \angle B) = (a^2 - b^2)\operatorname{sen}(\angle A + \angle B)$.

8.245. Probar que un triángulo ΔABC es rectángulo si se cumple una de las siguientes identidades:

a. $\operatorname{sen}\angle C = \dfrac{\operatorname{sen}\angle A + \operatorname{sen}\angle B}{\cos\angle A + \cos\angle B}$. b. $\cot\dfrac{\angle B}{2} = \dfrac{a + c}{b}$. c. $\tan\angle B = \dfrac{\cos(\angle C - \angle B)}{\operatorname{sen}\angle A + \operatorname{sen}(\angle C - \angle B)}$.

d. $\dfrac{\operatorname{sen}(2\angle A)}{\cot\angle B} + \dfrac{\operatorname{sen}(2\angle B)}{\cot\angle A} = 2$.

8.246. Probar que un triángulo ΔABC es rectángulo e isósceles si se cumplen las dos relaciones

$$1 + \cot(\angle 45 - \angle B) = \frac{2}{1 - \cot\angle C} \quad \text{y} \quad 4are(\Delta ABC) = a^2.$$

8.247[I-32, Problem 225]. Si en el triángulo ΔABC se cumple que $\cos\angle A\cos\angle B + \operatorname{sen}\angle A\operatorname{sen}\angle B\operatorname{sen}\angle C = 1$, probar que ΔABC es un triángulo rectángulo isósceles.

8.248. Probar que un triángulo ΔABC es equilátero si se cumplen las dos relaciones

$$a^2 = \frac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\angle B\operatorname{sen}\angle C = \frac{3}{4}.$$

8.249[I-178]. Probar que un triángulo ΔABC es equilátero si $\cot\angle A + \cot\angle B + \cot\angle C = \sqrt{3}$.

8.250 (Fórmulas de Newton). Probar que en todo triángulo ΔABC se cumplen las identidades

$$\frac{b+c}{a} = \frac{\cos(\frac{\angle B-\angle C}{2})}{\operatorname{sen}\frac{\angle A}{2}},\quad \frac{c+a}{b} = \frac{\cos(\frac{\angle C-\angle A}{2})}{\operatorname{sen}\frac{\angle B}{2}} \text{ y } \frac{a+b}{c} = \frac{\cos(\frac{\angle A-\angle B}{2})}{\operatorname{sen}\frac{\angle C}{2}}.$$

8.251 (Fórmulas de Mollweide). Probar que en todo triángulo ΔABC se cumplen las identidades

$$\frac{b-c}{a} = \frac{\operatorname{sen}(\frac{\angle B-\angle C}{2})}{\cos\frac{\angle A}{2}},\quad \frac{c-a}{b} = \frac{\operatorname{sen}(\frac{\angle C-\angle A}{2})}{\cos\frac{\angle B}{2}} \text{ y } \frac{a-b}{c} = \frac{\operatorname{sen}(\frac{\angle A-\angle B}{2})}{\cos\frac{\angle C}{2}}.$$

8.252 (Fórmulas de Neper). Probar que en todo triángulo ΔABC se cumplen las identidades

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan(\frac{\angle A+\angle B}{2})}{\tan(\frac{\angle A-\angle B}{2})},\quad \frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan(\frac{\angle B+\angle C}{2})}{\tan(\frac{\angle B-\angle C}{2})} \text{ y } \frac{a+c}{a-c} = \frac{\tan(\frac{\angle C+\angle A}{2})}{\tan\frac{\angle C-\angle A}{2}}.$$

8.253 (Fórmulas de Delambre-Gauss). Probar que en todo triángulo ΔABC se cumplen las identidades

$$\frac{a}{b-c} = \frac{\operatorname{sen}(\frac{\angle B+\angle C}{2})}{\operatorname{sen}(\frac{\angle B-\angle C}{2})} = \frac{\cos\frac{\angle A}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\angle B-\angle C}{2}} \text{ y } \frac{a}{b+c} = \frac{\cos(\frac{\angle B+\angle C}{2})}{\cos(\frac{\angle B-\angle C}{2})} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\angle A}{2}}{\cos\frac{\angle B-\angle C}{2}}.$$

8.254 (Fórmulas de las Cotangentes). Probar que en todo triángulo ΔABC se cumplen las relaciones

$$\cot\angle A = \frac{b-a\cos\angle C}{a\operatorname{sen}\angle C} = \frac{c-a\cos\angle B}{a\operatorname{sen}\angle B},\ \cot\angle B = \frac{c-b\cos\angle A}{b\operatorname{sen}\angle A} = \frac{a-b\cos\angle C}{b\operatorname{sen}\angle C} \text{ y}$$

$$\cot\angle C = \frac{a-c\cos\angle B}{c\operatorname{sen}\angle B} = \frac{b-c\cos\angle A}{c\operatorname{sen}\angle A}.$$

8.255 [I-146]. Determinar las medidas de los ángulos de un triángulo, sabiendo que las longitudes de sus lados están en proporción $2:\sqrt{6}:1+\sqrt{3}$.

8.256 [I-146]. Sea $\Delta(a,b,c)$ un triángulo rectángulo con hipotenusa a. Si $\frac{b}{c} = 2+\sqrt{3}$, calcular $\cos(\angle B - \angle C)$.

8.257 [I-138]. Sea ΔABC un triángulo tal que $\angle B$ y $\angle C$ son ángulos agudos. Probar que $\frac{|H_aB|}{|H_aC|} = \frac{\tan\angle C}{\tan\angle B}$.

8.258 [I-146]. Si en el triángulo $\Delta(a,b,c)$ se cumple que $b = a + 1$, $c = a + 2$ y $\cos\angle A = \frac{3}{5}$, calcular a, $\tan\frac{\angle B}{2}$ y $\tan\frac{\angle C}{2}$.

8.259 [I-181]. Si en el triángulo ΔABC se cumple la igualdad $\cos\angle A = \cos\angle B\cos\angle C$, probar que

$$\cot\angle B\cot\angle C = \frac{1}{2}.$$

8.260 [I-181]. Sea $\Delta(a,b,c)$ un triángulo. Si $a = 2c - 2b$ y $D \in BC$ satisface que $\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{1}{3}$, probar que $m(\angle C) = 2m(\angle CDA)$.

8.261 [I-138]. Sea ΔABC un triángulo tal que H es el punto medio de h_a. Probar que $\tan\angle B\tan\angle C = 2$.

8.262 [I-138]. Sea ΔABC un triángulo tal que $a = 2h_a$. Probar que $2\tan\angle B\tan\angle C = \tan\angle B + \tan\angle C$.

8.263 [I-138]. Sea ΔABC un triángulo. Probar que $c = m_a$ si y solo si $\tan\angle B = 3\tan\angle C$.

8.264 [I-186]. En todo triángulo ΔABC, probar que c es una de las raíces de la ecuación

$$x^2 - 2bx\cos\angle A + b^2 - a^2 = 0.$$

8.265 [I-181]. Si en un triángulo ΔABC se cumple que

$$\csc\angle A\csc\angle B\csc\angle C + 4\cot\angle A\cot\angle B\cot\angle C = \sec\frac{\angle A}{2}\sec\frac{\angle B}{2}\sec\frac{\angle C}{2} + 4\tan\frac{\angle A}{2}\tan\frac{\angle B}{2}\tan\frac{\angle C}{2},$$

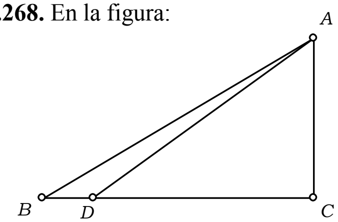
probar que uno de los ángulos del triángulo tiene medida 60.

8.266. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$. Completar la tabla usando, en cada caso, la información que se proporciona de algunas de las partes del triángulo ΔABC.

	AB	BC	AC	$\angle B$	$\angle C$
Primer Caso	4	5			
Segundo Caso		6	2		
Tercer Caso	3		3		
Cuarto Caso		5		60	
Quinto Caso	3				40

8.267. Si en el triángulo $\Delta(\angle 75,\angle 60,\angle 45)$ se tiene que $h_a = 4$, calcular la longitud de cada uno de los lados del triángulo.

8.268. En la figura:



ΔABC es un triángulo rectángulo en $\angle C$, $m(\angle DBA) = 30$ y $m(\angle CDA) = 60$. Si $|BD| = 10$, calcular la longitud de cada uno de los lados del triángulo ΔABC.

8.269. Calcular la medida del ángulo mayor del triángulo $\Delta(7,5,3)$.

8.270. En el lado BC del triángulo $\Delta(5,6,4)$ tomamos un punto D tal que $|AD| = 5$. Calcular las longitudes de los segmentos BD y DC.

8.271. Si en un triángulo ΔABC se tiene que $m(\angle A) = 120$, $b = 10$ y $c = 5$, encontrar a.

8.272. Si en un triángulo ΔABC se tiene que $m(\angle A) = 60$, $b = 4$ y $c = 5$, calcular las longitudes de los segmentos BC, BB_a y CB_a.

8.273. Sea ΔABC un triángulo isósceles tal que $|AB| = |AC| = 4$ y $m(\angle A) = 45$. Calcular h_b y h_c.

8.274. Sea ΔABC un triángulo tal que $m(\angle A) = 105$ y $m(\angle C) = 30$. Encontrar $\frac{b}{c}$.

8.275. Si en el triángulo ΔABC se cumple que $m(\angle C) = 60$ y $|BC| = 4|AC|$, probar que $|AB| = \sqrt{13}\,|AC|$.

8.276. Si en el triángulo ΔABC se cumple que $m(\angle A) = 2m(\angle B)$, probar que $a^2 = b(b + c)$.

8.277. Si en el triángulo ΔABC se cumple que $m(\angle A) = m(\angle B) = 2m(\angle C)$, probar que $a^3 - c^3 = 2ac^2$.

8.278[I-186]. Si en un triángulo ΔABC se cumple que $\cos\angle A + \cos\angle B = 4(\operatorname{sen}\frac{\angle C}{2})^2$, probar que $2c = a + b$.

8.279. Sean ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$, y $P \in BC$. Si D y E son las proyecciones de P sobre AB y AC, respectivamente, probar que $|BP||PC| = |AD||DB| + |AE||EC|$.

8.280. Sean $\angle AOB$ y $\angle BOC$ dos ángulos rectos adyacentes. Si $|OA| = 5$, $|OB| = 4$ y $|OC| = 2$, probar que todos los ángulos del triángulo ΔABC son agudos y calcular su área.

8.281. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumple la identidad $|AB|^2 + |AC|^2 = 2|BM_a|^2 + 2|AM_a|^2$.

8.282. Sea ΔABC un triángulo tal que $m(\angle A) = 60$. Probar la igualdad $a^2 + bc = b^2 + c^2$.

8.283. Si en un triángulo ΔABC se tiene que $m(\angle A) = 120$, probar la identidad $a = \sqrt{c^2 + b^2 + cb}$.

8.284. Si en un triángulo ΔABC se tiene que $m(\angle A) = 60$ y $|AB| = 2|AC|$, probar que $|BC|^2 = 3|AC|^2$.

8.285. Sean ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle C$, $P \in BC$ y $Q \in AC$. Probar que $c^2 + |PQ|^2 = |PA|^2 + |BQ|^2$.

8.286. Sean AB un segmento y $C \in AB$. Sobre AC y CB trazamos dos triángulos equiláteros ΔDAC y ΔECB en un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{AB}$. Probar que $|DE|^2 = |AB|^2 - 3|AC||BC|$.

8.287. Probar que en todo triángulo ΔABC con $AB > AC$ se cumple que $|AB|^2 - |AC|^2 = 4|BM_a||M_aH_a|$.

8.288. Probar que en todo triángulo isósceles ΔABC con $AB \cong AC$ se cumple que $|BC|^2 = 2|AB||BH_c|$.

8.289. Si en el triángulo ΔABC tenemos que $|BC| = 10$, ¿cuál es el valor de $b^2 + c^2 - 2|AM_a|^2$?

8.290. Probar que en todo triángulo ΔABC, cuyos ángulos son todos agudos, se cumple que

$$|AB|^2 - |AC|^2 = 2|BC||M_aH_a|.$$

8.291. Si ΔABC es un triángulo con ángulo obtuso $\angle B$, probar que

$$|CH_a|^2 = |BH_a|^2 + |BC|^2 + 2|BC||BH_a|.$$

8.292. Sea ΔABC un triángulo en el cual $\angle C$ es un ángulo obtuso. Probar que $|AB||AH_c| = |AC|^2 + |AC||CH_b|$.

8.293. Si en un triángulo escaleno ΔABC uno tiene la identidad $2h_a = |BC| = a$, probar que $\angle A$ tiene que ser un ángulo agudo.

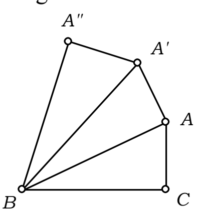
8.294. Si el triángulo ΔABC cumple que $|AB| = 18$, $|BC| = 8$ y $|H_aC| = 14$, probar que el ángulo $\angle C$ tiene que ser agudo.

8.295. ¿Tiene el triángulo $\Delta(10,5,6)$ un ángulo obtuso?

8.296. ¿Cuál de los triángulos $\Delta(4,4,5)$ y $\Delta(4,2,5)$ tiene un ángulo obtuso?

8.297. Dados cuatro segmentos de longitudes 3, 4, 5 y 6, ¿cuántos triángulos se pueden formar con dichos segmentos que tengan un ángulo obtuso?

8.298. En la figura:



tenemos que los triángulos ΔABC, $\Delta A'BA$ y $\Delta A''BA'$ son rectángulos en $\angle C$, $\angle A$ y $\angle A'$, respectivamente. Si $m(\angle A'BA'') = m(\angle ABA') - 1$ y $m(\angle ABA') = m(\angle CBA) - 1$, ¿cuál de los segmentos AC, AA' y $A'A''$ es el mayor y cuál es el menor?

8.299. Sean ΔABC un triángulo rectángulo isósceles con ángulo recto $\angle A$, l una recta que pasa por A, y M y N las proyecciones de B y C sobre l, respectivamente.

a. Probar que $|MN| = |BM| + |CN|$.

b. Probar que ΔMH_aN es un triángulo rectángulo isósceles.

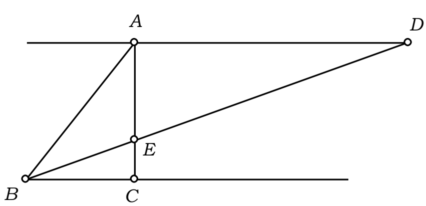
8.300[l-46, XII, p. 250]. Sea ΔABC un triángulo rectángulo isósceles. Si la suma de las longitudes de la hipotenusa y la altura correspondiente es x, probar las siguientes afirmaciones:

a. Los catetos tienen longitud $\frac{\sqrt{2}}{3}x$.

b. La longitud de la hipotenusa es $\frac{2}{3}x$.

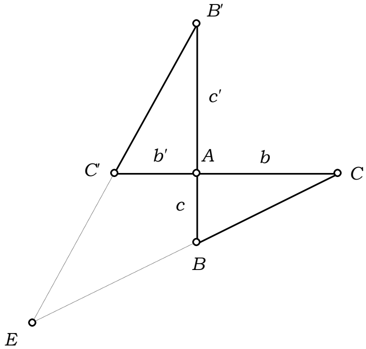
c. La longitud de la altura correspondiente a la hipotenusa es $\frac{x}{3}$.

8.301. En la figura:



tenemos que $AD \parallel BC$, $BC \perp CA$, $|ED| = 2|AB|$ y $m(\angle CBD) = 20$. Calcular la medida del ángulo $\angle DBA$.

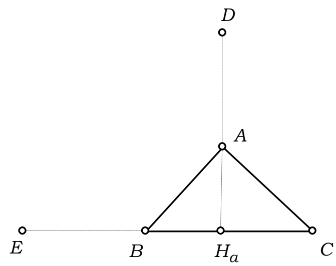
8.302. En la figura:



ΔABC y $\Delta A'B'C'$ son triángulos rectángulos en $\angle A$. Si E es el punto de intersección de $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{B'C'}$, expresar $d(E, \overleftrightarrow{AB})$ y $d(E, \overleftrightarrow{AC})$ en función de b, c, b' y c'.

8.303[l-42, XII, p. 250]. Entre todos los triángulos rectángulos cuya suma de las longitudes de su hipotenusa y su altura correspondiente es x, encontrar el de mayor área, expresando la longitud de sus lados en función de x.
8.304[l-42, XIII, p. 250]. Entre todos los triángulos rectángulos del mismo perímetro, ¿cuál es el que tiene la suma de sus catetos y la altura correspondiente a su hipotenusa máxima?
8.305. En la figura:

ΔABC es un triángulo rectángulo en $\angle A$, $AB \cong AD$ y $AC \cong EB$. Probar que $DC \cong EA$.



8.306. Sea ΔABC un triángulo tal que $\angle B$ es un ángulo obtuso. Probar que no es posible construir un triángulo cuyos lados tengan longitudes $\frac{a}{2}$, b y $\frac{c}{2}$. ¿Es cierto este resultado si $\angle B$ es un ángulo agudo?
8.307. Probar que en todo triángulo $\Delta(a,b,c)$ se cumplen al menos dos de las siguientes desigualdades:

$$a + b > c, \quad c + a > b \quad \text{y} \quad b + a > c.$$

8.308. Probar que una condición necesaria y suficiente para que exista un triángulo con lados de longitudes a, b y c es que se cumpla la desigualdad $|b - c| < a < b + c$.
8.309. ¿Cuántos triángulos hay cuyos lados tengan longitudes entre los números 6, 7, 8 y 9?
8.310[l-54]. Probar que tres números reales positivos a, b y c son los lados de un triángulo si y solo si

$$max\{a,b,c\} < \frac{1}{2}(a + b + c).$$

8.311[a-19]. Si $\Delta(a,b,c)$ es un triángulo, probar que

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 > 3(a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c).$$

8.312[l-32, Problem 132]. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumplen las desigualdades

$$3(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2 \leq 4(ab + bc + ca).$$

8.313[l-32, Problem 231]. Probar que en todo triángulo $\Delta(a,b,c)$ se cumple la desigualdad

$$abc \geq (-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c).$$

8.314. Si a, b y c son las longitudes de los lados de un triángulo, probar que pa, pb y pc son también las longitudes de los lados de un triángulo, para cualquier número real positivo p. ¿Es cierta esta afirmación para los números $a + p$, $b + p$ y $c + p$?
8.315. Para cada entero positivo $k > 2$, ¿cuántos triángulos hay con dos lados de longitudes k y $k + 1$ y el tercer lado con longitud igual a un número entero positivo?

8.316. Probar que $x + 1$, $x + 2$ y $x + 3$ son los lados de un triángulo para todo número real positivo x.
8.317[Chih-yi Wang. American Math. Monthly 67, January (1960), 82]. Si a, b y c son los lados de un triángulo, probar que $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ y $\sqrt{c}$ son también los lados de un triángulo (para mayor información sobre este problema el lector también puede consultar el libro [l-306]).
8.318. ¿Son $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ y $\sqrt{8}$ las longitudes de los lados de algún triángulo?
8.319. Sean a, b y c tres números reales positivos. Probar que a, b y c son los lados de un triángulo si y solo si
$$(a + b + c)(b - a + c)(a - b + c)(a + b - c) > 0.$$
8.320. Probar que tres números reales positivos a, b y c son los lados de un triángulo si y solo si
$$2(a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2) - (a^4 + b^4 + c^4) > 0.$$
8.321. Si tres números reales positivos a, b y c satisfacen que $(a^2 + b^2 + c^2)^2 > 2(a^4 + b^4 + c^4)$, probar que a, b y c son los lados de un triángulo.
8.322[a-88]. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_k$ números reales positivos, con $k > 2$ un número entero. Si
$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2)^2 > (k-1)(a_1^4 + a_2^4 + \ldots + a_k^4),$$
probar que a_h, a_i y a_j son los lados de un triángulo siempre que los índices h, i y j sean distintos entre sí.

8.323. Si $\Delta(a,b,c)$ es un triángulo, probar que $\frac{a+b}{2}$, $\frac{b+c}{2}$ y $\frac{c+a}{2}$ son los lados de un triángulo.

a. ¿Es la función $\Delta(a,b,c) \to \Delta(\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2})$ inyectiva?

b. ¿Es la función $\Delta(a,b,c) \to \Delta(\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2})$ suprayectiva?

c. ¿Tiene la función $\Delta(a,b,c) \to \Delta(\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2})$ un triángulo que lo mande a él mismo?

8.324[l-244]. Si $\Delta(a,b,c)$ es un triángulo cuyos ángulos son agudos, probar que a^2, b^2 y c^2 son los lados de un triángulo.
8.325[a-62]. Si $\Delta(a,b,c)$ es un triángulo, probar que $\frac{a}{a+1}$, $\frac{b}{b+1}$ y $\frac{c}{c+1}$ son los lados de un triángulo.
8.326[l-201]. Si $\Delta(a,b,c)$ es un triángulo, probar que $\frac{1}{a+c}$, $\frac{1}{b+c}$ y $\frac{1}{a+b}$ son los lados de un triángulo.
8.327[l-97]. Dividimos un segmento AB de longitud 1 en tres segmentos de longitudes a, b y c. Probar que a, b y c son las longitudes de los lados de un triángulo si y solo si $a < \frac{1}{2}$, $b < \frac{1}{2}$ y $c < \frac{1}{2}$.
8.328. Si ΔABC es un triángulo, ¿son h_a, h_b y h_c los lados de un triángulo?
8.329. Si ΔABC es un triángulo, probar que $\frac{1}{h_a}$, $\frac{1}{h_b}$ y $\frac{1}{h_c}$ son los lados de un triángulo.
8.330 [l-244]. Si ΔABC es un triángulo, probar que $a^2 h_a$, $b^2 h_b$ y $c^2 h_c$ son los lados de un triángulo.
8.331. Si ΔABC es un triángulo, ¿son s_a, s_b y s_c los lados de un triángulo?
8.332 [a-117]. Si ΔABC es un triángulo, probar que $a s_a$, $b s_b$ y $c s_c$ son los lados de un triángulo.
8.333. Si ΔABC es un triángulo cualquiera, ¿son $b s_a$, $c s_b$ y $a s_c$ los lados de un triángulo?
8.334[Problem 710, π, μ, ε Journal 9 (1989-92), 199 - 200]. Sean a y b dos números enteros positivos.

a. ¿Cuándo existe un triángulo cuyos lados sean a, b y $mcd(a,b)$?
b. ¿Cuándo existe un triángulo cuyos lados sean a, b y $mcm(a,b)$?

Aquí $mcd(a,b)$ denotan el máximo común divisor y $mcm(a,b)$ es el mínimo común múltiplo de a y b.
8.335. Sean a y b dos números naturales positivos con $a > 2b$.

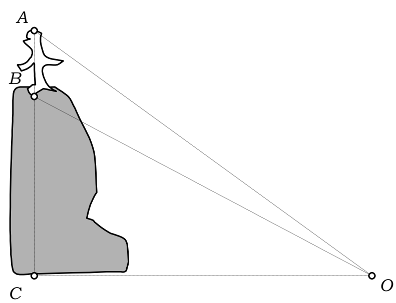
a. Probar que $a - b$, a y $a + b$ son los lados de un triángulo.

b. Probar que si $are(\Delta(a,b,c))$ es un número racional, entonces $\sqrt{\frac{a^2 - 4b^2}{3}}$ es un número entero.

8.336 (Saint-Cyr.). Supongamos que $x^2 + x + 1$, $2x + 1$ y $x^2 - 1$ son las longitudes de los lados de un triángulo, en donde $1 < x$ es un número real. Probar que uno de los ángulos del triángulo tiene medida 120.
8.337. Probar que el ángulo mayor del triángulo $\Delta(3,5,7)$ tiene medida 120.
8.338. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$. Sobre la hipotenusa del triángulo trazamos un cuadrado, siendo P el punto de intersección de sus diagonales. Trazamos la recta perpendicular a $\overleftrightarrow{AP}$ en el punto P, la cual corta a $\overrightarrow{AB}$ y a $\overrightarrow{AC}$, en los puntos L y M, respectivamente. Probar que $AC \cong BL$ y $AB \cong CN$.
8.339. Sobre los catetos AB y AC de un triángulo rectángulo ΔABC trazamos los cuadrados $\square ADEB$ y $\square ACFG$. Sean P el punto de intersección de AB y CE y Q el punto de intersección de AC y BF. Probar que $AP \cong AQ$ y $|AP|^2 = |BP||CQ|$.
8.340. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$. Hacia el exterior del triángulo trazamos dos cuadrados $\square ABDE$ y $\square ACFG$. Si P y Q son las proyecciones de D y F sobre la recta $\overleftrightarrow{BC}$, respectivamente, probar que

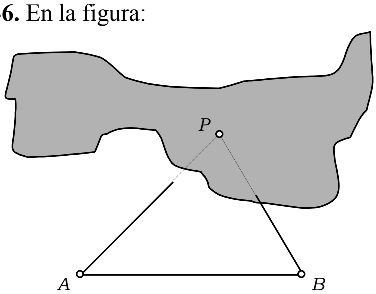
$$|BC| = |PD| + |QF|.$$

8.341. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$. Si $M \in BC$ y P y Q son las proyecciones de M sobre AB y AC, respectivamente, probar que $per(\square APMQ) = \dfrac{2(|BM|b + |MC|c)}{a}$.
8.342. Un observador se encuentra a 20 m de distancia del pie de una torre de 70 m de altura, ¿bajo qué ángulo se ve esta torre desde el punto de observación que está a 1 m del suelo?
8.343. Si un observador ve un árbol bajo un ángulo de medida 30, ¿cuál será la medida del ángulo de visión para otro observador que esté al doble de distancia que el primer observador del tronco del árbol?
8.344. Una persona colocada a la orilla de un río ve un árbol plantado en la ribera opuesta del río bajo un ángulo de 60. Si se aleja 40 m, el ángulo bajo el cual ve al árbol en su nueva posición es de 30. Calcular la altura del árbol y el ancho del río.
8.345. En la figura:



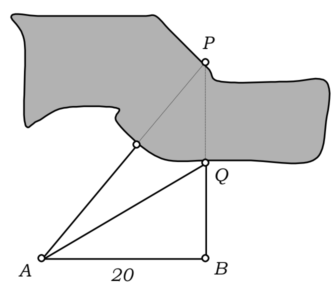
En la cima de un monte de 45 m de altura se encuentra una estatua de 5 m de alto. Un observador (punto O) se encuentra a una distancia de 50 m del centro del monte (punto C). Calcular la medida del ángulo $\angle AOB$.

8.346. En la figura:



P es un punto inaccesible y se sabe que $AB = 50$ m, $m(\angle BAP) = 45$ y $m(\angle PBA) = 60$. Calcular la distancia de P a los puntos A y B.

8.347. En la figura:



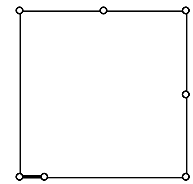
P y Q son dos puntos en la orilla de un río. Según los trazos, en una de las orillas del río, ΔPAB es un triángulo rectángulo en $\angle B$, $m(\angle BAQ) = 30$, $m(\angle QAP) = 20$ y $|AB| = 20$ m. Calcular la longitud del ancho del río en los puntos P y Q.

8.348. Se tiene un manzano cuya sombra es de 5 m de largo, y en él sobresale una manzana de 7 cm de diámetro cuya sombra tiene 12 cm de largo por 20 cm de ancho. Calcular la altura del manzano.

8.349. Un péndulo de longitud 20 cm está colgado de un punto de 30 cm del suelo. Si el péndulo se balancea formando un ángulo de medida 60 grados, calcular su altura del suelo cuando está en uno de sus dos puntos finales de su trayecto de balanceo y la distancia entre dichos puntos finales.

8.350. Si en una pista triangular un ciclista gira 120 grados en la primera curva y 160 grados en la segunda curva, ¿cuántos grados tiene que girar para darle una segunda vuelta a la pista?

8.351. Un parque de forma cuadrada tiene su entrada en una de las esquinas y cuenta con una cafetería y un restaurante situados en las mitades de dos de sus orillas, como lo muestra la figura. Una persona entró al parque y se dirigió a la cafetería para tomar un café, pero en el camino cambió de opinión y decidió ir al restaurante. Así que, después de haber caminado 200 m hacia la cafetería, giró un ángulo de medida 90 para dirigirse en línea recta hacia el restaurante. ¿Cuál fue la distancia que dicha persona recorrió?



8.352. Probar que en todo cuadrilátero $\square ABCD$, se cumplen las siguientes identidades:

a. $-(m(\angle ACB)+m(\angle BAC)+m(\angle B))+(m(\angle ADB)+m(\angle DBA)+m(\angle A))+$
$(m(\angle CBD)+m(\angle BDC)+m(\angle C))-(m(\angle CAD)+m(\angle DCA)+m(\angle D))=0$.

b. $180-(m(\angle B)+m(\angle C))=m(\angle A)+m(\angle D)-180=m(\angle BAC)-m(\angle DCA)=m(\angle BDC)-m(\angle DBA)$.

c. $180-(m(\angle B)+m(\angle A))=m(\angle C)+m(\angle D)-180=m(\angle ACB)-m(\angle CAD)=m(\angle ADB)-m(\angle CBD)$.

d. $180-(m(\angle ACB)+m(\angle CBD))=180-(m(\angle ADB)+m(\angle CAD))=m(\angle BAC)+m(\angle DBA)=$
$m(\angle BDC)+m(\angle DCA)$.

e. $\operatorname{sen}\angle CAD\operatorname{sen}\angle DBA\operatorname{sen}\angle C=\operatorname{sen}\angle CBD\operatorname{sen}\angle DCA\operatorname{sen}\angle A$,
$\operatorname{sen}\angle CBD\operatorname{sen}\angle BAC\operatorname{sen}\angle D=\operatorname{sen}\angle CAD\operatorname{sen}\angle BDC\operatorname{sen}\angle B$,
$\operatorname{sen}\angle ADB\operatorname{sen}\angle DCA\operatorname{sen}\angle A=\operatorname{sen}\angle ACB\operatorname{sen}\angle DBA\operatorname{sen}\angle D$ y
$\operatorname{sen}\angle ACB\operatorname{sen}\angle BDC\operatorname{sen}\angle A=\operatorname{sen}\angle ADB\operatorname{sen}\angle BAC\operatorname{sen}\angle C$.

f. $\operatorname{sen}\angle BAC\operatorname{sen}\angle DBA\operatorname{sen}\angle C\operatorname{sen}\angle D=\operatorname{sen}\angle BDC\operatorname{sen}\angle DCA\operatorname{sen}\angle B\operatorname{sen}\angle A$,
$\operatorname{sen}\angle B\operatorname{sen}\angle C\operatorname{sen}\angle CAD\operatorname{sen}\angle ADB=\operatorname{sen}\angle D\operatorname{sen}\angle A\operatorname{sen}\angle ACB\operatorname{sen}\angle CBD$ y
$\operatorname{sen}\angle ACB\operatorname{sen}\angle CAD\operatorname{sen}\angle DBA\operatorname{sen}\angle BDC=\operatorname{sen}\angle ADB\operatorname{sen}\angle CBD\operatorname{sen}\angle BAC\operatorname{sen}\angle DCA$.

g. $2\cos\angle ADB\cos\angle BDC\cos\angle D-(\cos\angle ADB)^2-(\cos\angle BDC)^2-(\cos\angle D)^2+1=0$.

h. $\dfrac{a\operatorname{sen}\angle A-b\operatorname{sen}(\angle A-\angle B)+c\operatorname{sen}(\angle A-\angle B-\angle C)}{a\cos\angle A-b\cos(\angle A-\angle B)+c\cos(\angle A-\angle B-\angle C)}=\tan(2\angle A)$.

8.353 [I-181]. Probar que en todo cuadrilátero $\square ABCD$, se cumple la identidad

$$((\cos\angle A)^4+(\cos\angle B)^4+(\cos\angle C)^4+(\cos\angle D)^4)-2((\cos\angle A)^2(\cos\angle B)^2+(\cos\angle B)^2(\cos\angle C)^2+(\cos\angle C)^2(\cos\angle A)^2+(\cos\angle D)^2(\cos\angle A)^2+(\cos\angle D)^2(\cos\angle B)^2+(\cos\angle D)^2(\cos\angle C)^2)+4((\cos\angle B)^2(\cos\angle C)^2(\cos\angle D)^2+(\cos\angle C)^2(\cos\angle D)^2(\cos\angle A)^2+(\cos\angle D)^2(\cos\angle A)^2(\cos\angle B)^2+(\cos\angle A)^2(\cos\angle B)^2(\cos\angle C)^2)+4\cos\angle A\cos\angle B\cos\angle C\cos\angle D(2-(\cos\angle A)^4-(\cos\angle B)^4-(\cos\angle C)^4-(\cos\angle D)^4)=0.$$

8.354. Probar que en todo cuadrilátero $\square\,(a,b,c,d)$, se cumple la igualdad

$$(a^2+c^2)(-a^2c^2+b^2d^2+e^2f^2)+(b^2+d^2)(a^2c^2-b^2d^2+e^2f^2)+(e^2+f^2)(-a^2c^2+b^2d^2-e^2f^2)=(abe)^2+(adf)^2+(cbf)^2+(cde)^2.$$

8.355. Dado un cuadrilátero cualquiera, calcular en función de las longitudes de sus lados y las funciones trigonométricas la longitud del segmento que une los puntos medios de sus diagonales y las longitudes de los segmentos que unen los puntos medios de sus lados opuestos.

8.356. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero tal que $a=|AB|=|BC|=|CD|$, $m(\angle B)=90$ y $m(\angle C)=135$. Expresar las longitudes de los segmentos AC y AD en función de a.

8.357. Si la longitud de la diagonal más corta de un rombo es igual a 8 y uno de sus ángulos tiene medida igual a 60, encontrar la longitud de uno de los lados del rombo.

8.358. Calcular las medidas de los ángulos de un rombo cuyo perímetro es igual a 3 veces una de las diagonales.

8.359. Conociendo las longitudes de los lados paralelos de un trapecio y las longitudes de sus diagonales, calcular la longitud de la altura correspondiente a los lados paralelos.
8.360. Conociendo las longitudes de los lados de un trapecio, calcular las longitudes de sus diagonales.
8.361. Sea $\square ABCD$ un trapecio tal que $AB \parallel CD$, $AD \cong DC$ y $|AB| = 3|DC|$. Si $m(\angle A) = 60$, calcular la longitud del lado BC.
8.362. Sea $\square ABCD$ un trapecio rectangular en $\angle A$ tal que $AB \parallel CD$. Si uno de los ángulos del trapecio mide 30, probar que $|BC| = 2|AD|$.
8.363. Conociendo las longitudes de los lados de un rectángulo, calcular el seno, el coseno y la tangente de uno de los ángulos que forman sus diagonales.
8.364. En un rectángulo cuyo lado mayor es el triple que el menor, calcular las medidas de los ángulos que forman sus diagonales.
8.365[l-50]. Sea $\square ABCD$ un cuadrado cuyos lados tienen longitud 3. Si $P \in BC$ y $Q \in CD$ satisfacen que $|BP| = |DQ| = 1$, probar que $\cos\angle PAQ = \frac{3}{5}$.
8.366. Sea $\square ABCD$ un cuadrado cuyos lados tienen longitud 30. En este cuadrado inscribimos un cuadrado $\square A'B'C'D'$, de tal manera que $\frac{|AB|}{3} = |AA'|$. Calcular la longitud de los lados del cuadrado $\square A'B'C'D'$ y las medidas de los ángulos formados por los lados de este y los lados del cuadrado original.
8.367. Si uno de los ángulos de un paralelogramo mide 120 y sus lados tienen longitudes 4 y 6, calcular la medida de uno de los ángulos que forman sus diagonales.
8.368[l-181]. Si $\square ABCD$ es un paralelogramo, probar que

$$ef = \sqrt{(a^2+b^2)^2 - 4a^2b^2(\cos\angle A)^2}\,.$$

8.369[l-50]. Sean $\square ABCD$ un paralelogramo y M y N los puntos medios de BC y CD, respectivamente. Si $|AB| = 2x$ y $|AD| = 2y$, probar que

$$|AM|^2 + |AN|^2 = |AC|^2 + x^2 + y^2\,.$$

8.370[Hobson]. Sean $\square ABCD$ un cuadrado y O el punto de intersección de sus diagonales. Sean P y Q puntos en la mediatriz de BC equidistantes de O y R el punto de intersección de $\overleftrightarrow{BP}$ y $\overleftrightarrow{CQ}$. Probar que

$$\tan\angle CRB(\tan\angle RBC + \tan\angle BCR)^2 + 8 = 0.$$

8.371[A. Yaglom – I. Yaglom, Problema de las Cevianas]. Dadas k cevianas desde cada uno de los vértices de un triángulo tales que cada tres de ellas no concurren en un punto del interior del triángulo, ¿en cuántas regiones disjuntas entre sí queda dividido el interior del triángulo por estas $3k$ cevianas? (ver el artículo panorámico [a-45]).
8.372[a-45, Problema Generalizado de las Cevianas]. Desde cada uno de los vértices A, B y C de un triángulo, se trazan i, j y k cevianas, respectivamente, tales cada tres de ellas no concurren en un punto del interior del triángulo. ¿En cuántas regiones disjuntas entre sí queda dividido el interior del triángulo por estas $i + j + k$ cevianas?
8.373. Si dos triángulos son congruentes, probar que sus medianas, sus bisectrices y sus alturas correspondientes también son congruentes.
8.374. Probar que dos triángulos son congruentes si un lado de uno es congruente con un lado del otro y las alturas relativas a los otros dos lados son congruentes.
8.375. Probar que dos triángulos son congruentes si dos lados de uno son congruentes a sus correspondientes dos lados del otro y las alturas relativas a los dos lados del primero son congruentes a las alturas relativas a los dos lados del otro.
8.376. Probar que dos triángulos son congruentes si dos lados de uno son congruentes a sus correspondientes dos lados del otro y las medianas relativas a dichos lados son congruentes.
8.377. Probar que dos triángulos son congruentes si dos lados de uno son congruentes a sus correspondientes dos lados del otro y las medianas relativas a los lados terceros son congruentes.
8.378. Probar que dos triángulos son congruentes si son semejantes y tienen una bisectriz correspondiente congruente.

8.379. Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos tales que $b_b = b_{b'}$. Probar que $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ si se cumple una de las siguientes condiciones:

a. $\angle B \cong \angle B'$, $BC \cong B'C'$ y $BB_b \cong B'B_{b'}$.
b. $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$ y $\angle A \cong \angle A'$.
c. $\angle B \cong \angle B'$ y $\angle C \cong \angle C'$.
d. $\angle B \cong \angle B'$, $\angle AB_aB \cong \angle A'B_{a'}B'$ y $\angle CB_aA \cong \angle C'B_{a'}A'$.
e. $AC \cong A'C'$ y $B_aC \cong \angle B_{a'}C'$.

8.380. Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos. Si $AB \cong A'B'$, $m_a = m_{a'}$ y $BC \cong B'C'$, probar que $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

8.381. Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos en los cuales $a = a'$ y $m_a = m_{a'}$. Probar que $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ si se cumple una de las siguientes condiciones:

a. $AC \cong A'C'$.
b. $\angle CM_aA \cong \angle C'M_{a'}A'$.
c. $\angle C \cong \angle C'$ y $\angle AM_aB \cong \angle A'M_{a'}B'$.

8.382. Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos en los cuales $h_a = h_{a'}$. Probar que $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ si se cumple una de las siguientes condiciones:

a. $BC \cong B'C'$ y $\angle C \cong \angle C'$.
b. $BC \cong B'C'$ y $AC \cong A'C'$.
c. $\angle BAH_a \cong \angle B'A'H_{a'}$ y $\angle H_aAC \cong \angle H_{a'}A'C'$.

8.383. Probar que dos triángulos isósceles son congruentes si tienen el mismo perímetro y sus alturas relativas a sus bases son congruentes.

8.384. Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos tales que $AB \cong A'B'$ y $\angle B \cong \angle B'$. Si una de las dos congruencias $\angle BAB_a \cong \angle B'A'B_{a'}$ o $\angle BAB_a \cong \angle B'A'M_{a'}$ se cumple, ¿son los triángulos congruentes?

8.385. Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos. Si $BC \cong B'C'$, $m_a \cong m_{a'}$ y $h_a \cong h_{a'}$, probar que $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

8.386. Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos tales que $AB \cong A'B'$, $b_a \cong b_{a'}$ y $|BB_a| = |B'B_{a'}|$. Probar que $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

8.387. Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos tales que $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$ y $m_a \cong m_{a'}$. Probar que $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

8.388. Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos rectángulos en $\angle A$ y $\angle A'$, respectivamente. Si $\angle B \cong \angle B'$ y $b_b \cong b_{b'}$, probar que $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

8.389. Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos tales que $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$, y $\angle A$ y $\angle A'$ son suplementarios. Probar que $h_b \cong h_{b'}$ y $h_c \cong h_{c'}$.

8.390. Si ΔABC y $\Delta A'B'C'$ son dos triángulos semejantes, probar que

$$\frac{m_a}{m_{a'}} = \frac{m_b}{m_{b'}} = \frac{m_c}{m_{c'}} = \frac{b_a}{b_{a'}} = \frac{b_b}{b_{b'}} = \frac{b_c}{b_{c'}} = \frac{h_a}{h_{a'}} = \frac{h_b}{h_{b'}} = \frac{h_c}{h_{c'}}.$$

8.391. Sean ΔABC un triángulo y AD una ceviana. Contestar las siguientes preguntas, justificando la respuesta:

a. Si $\overrightarrow{AD}$ es la bisectriz del ángulo $\angle A$, ¿es cierto que $BD \cong DC$?
b. Si AD es la altura correspondiente al vértice A, ¿es cierto que $|BD||DC| = |AD|$?
c. Si AD es la mediana correspondiente al vértice A, ¿es cierto que $\dfrac{|AB|}{|BD|} = \dfrac{|BD|}{|AC|}$?
d. Si $\overrightarrow{AD}$ es la bisectriz del ángulo $\angle A$ y $BD \cong DC$, ¿puede ser ΔABC un triángulo isósceles?

8.392. Dado un triángulo ΔABC, encontrar el punto $P \in BC$ tal que divida a BC en la razón $\dfrac{b}{c}$.

8.393[I-21]. Giramos un triángulo ΔABC sobre su vértice A un ángulo de medida 90. Sean B' y C' las nuevas posiciones de B y C, respectivamente. Probar las siguientes afirmaciones:

a. La mediana del triángulo $\Delta ABC'$ con respecto al lado BC' es una altura del triángulo $\Delta AB'C$.

b. La mediana del triángulo $\Delta AB'C$ con respecto al lado $B'C$ es una altura del triángulo $\Delta ABC'$.

8.394[I-21]. Sean ΔABC un triángulo y D, $E \in BC$. Supongamos que $\dfrac{|AE|}{|AD|} = \dfrac{p}{q}$ y $\angle BAD \cong \angle DAE \cong \angle EAC$.

Probar que $|AE| = \dfrac{(q^2 - p^2)bc}{q(cp - bq)}$ y $|AD| = \dfrac{(q^2 - p^2)bc}{p(cp - bq)}$.

8.395. Probar que dos cevianas de un mismo triángulo no se pueden bisecar entre sí.

8.396. Probar que la bisectriz de un ángulo de un triángulo está entre la altura y la mediana correspondiente.

8.397. En el triángulo $\Delta(6,10,8)$, si $D \in BC$ satisface que $|DC| = \dfrac{30}{13}$, probar que $\overrightarrow{AD}$ es la bisectriz de $\angle A$.

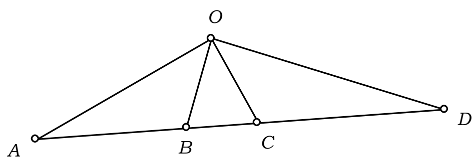
8.398. En el triángulo $\Delta(9,5,6)$, sea $D \in \overleftrightarrow{BC}$ tal que $|CD| = 45$ y C precede a D sobre la recta $\overleftrightarrow{BC}$. Probar que $\overrightarrow{AD}$ es la bisectriz del ángulo exterior adyacente al ángulo $\angle A$.

8.399. Sean ΔABC un triángulo con $m(\angle A) = 120$, y ΔDCB un triángulo equilátero con D en el exterior del triángulo ΔABC.

a. Probar que $\overrightarrow{AD}$ es la bisectriz del ángulo $\angle A$.

b. Probar que $|AD| = |AB| + |AC|$.

8.400. En la figura:

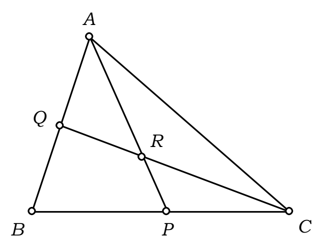


tenemos que $m(\angle AOB) = m(\angle BOC) = m(\angle COD) = 45$. Probar que $\dfrac{|AB|}{|BC|} = \dfrac{|AD|}{|CD|}$ y $\dfrac{|AB|}{|AD|} = \dfrac{|BC|}{|CD|}$.

8.401. En la figura:

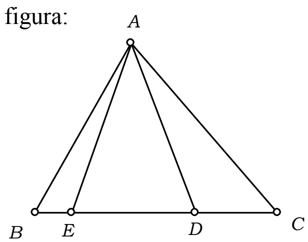
sean AP y CQ dos cevianas del triángulo ΔABC y R su punto de intersección. Si $\dfrac{a}{|PC|} = \dfrac{c}{|BQ|} = t$, probar que

$$\frac{|CR|}{|RQ|} = \frac{t}{(t-1)^2}, \quad \frac{|AR|}{|RP|} = t^2 - t \text{ y } \frac{|AP|}{|RP|} = t^2 - t + 1$$



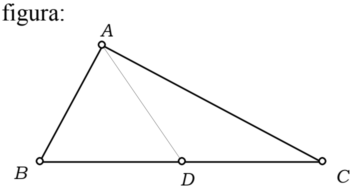
8.402. Sean ΔABC un triángulo y $P \in int(\Delta ABC)$. Si las bisectrices de $\angle BPC$, $\angle CPA$ y $\angle APB$ cortan a los lados BC, CA y AB en los puntos L, M y N, respectivamente, probar que $\dfrac{|BL|}{|LC|}\dfrac{|CM|}{|MA|}\dfrac{|AN|}{|NB|} = 1$.

8.403. En la figura:



ΔABC es un triángulo tal que $m(\angle A) = 70$, $m(\angle C) = 50$, $\angle BAD \cong \angle C$ y $\angle EAC \cong \angle B$. Probar que $AD \cong AE$.

8.404. En la figura:



si $\angle A$ es un ángulo recto y $\angle BAD \cong \angle DBA$, probar que D es el punto medio de BC.

8.405. Probar que el ángulo mayor de un triángulo le corresponde a la bisectriz de menor tamaño.

8.406. Sea ΔABC un triángulo en el cual $AB < AC$. Probar que las siguientes condiciones son equivalentes:

a. $PB < PC$ para todo punto $P \in \overrightarrow{AB_a} \cap int(\Delta ABC)$.

b. $PB < PC$ para algún punto $P \in \overrightarrow{AB_a} \cap int(\Delta ABC)$.

c. $QB > QC$ para todo punto $Q \in \overrightarrow{AB_a} \cap ext(\Delta ABC)$.

d. $QB > QC$ para algún punto $Q \in \overrightarrow{AB_a} \cap ext(\Delta ABC)$.

8.407. Sean ΔABC un triángulo y $L \in AC$ y $M \in AB$. Probar que BL y CM no se pueden bisecar uno a otro.

8.408. Sean ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$ y $D \in \overleftrightarrow{BC} - \{B, C\}$.

a. Si $D \in BC$, probar que $AD < AB$.

b. Si $D \notin BC$, probar que $AD > AB$.

8.409. Probar que cualquier ceviana de un triángulo equilátero que esté en el interior (respectivamente, exterior) del mismo, es menor (respectivamente, mayor) que cualquiera de los lados del triángulo.

8.410. Probar que en todo triángulo con dos lados no congruentes, la mediana que corta al lado menor es la mayor.

8.411. Con la ayuda del Problema 8.409, dar otra demostración del Teorema 8.6.9.

8.412. Si $\square ABCD$ es un cuadrado y $P \in int(\square ABCD)$, ¿son $|PA|$, $|PB|$, $|PC|$ y $|PD|$ los lados de un cuadrilátero?

8.413. Sea ΔABC un triángulo con ángulo obtuso $\angle A$. Si $D \in AC$ y $E \in AB$, probar que

$$|BD| + |CE| > |BE| + |ED| + |DC|.$$

8.414. Si $P \in int(\Delta ABC)$, probar que $(|AB| + |AC|) - (|PB| + |PC|) < 2|PA|$.

8.415. Sea ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$. Si $D, E \in BC$. Probar que $|AD| + |AE| < |AB| + |AC|$.

8.416. Sea ΔABC un triángulo tal que $AB < AC$, ¿es cierta la desigualdad $|AD| + |AE| < |AB| + |AC|$ para cualesquiera par de puntos $D, E \in BC$?

8.417. Sea ΔABC un triángulo rectángulo isósceles con $AB \cong AC$. Probar que $d(P,A) - d(P,B) - d(P,C)$ es una constante que no depende de la elección del punto $P \in \overleftrightarrow{BC} - BC$.

8.418. Sean ΔABC un triángulo equilátero y $\angle\alpha$ un ángulo no degenerado. Si $P \in int(\Delta ABC)$, $L \in BC$, $M \in AC$ y $N \in AB$ satisfacen que $\angle CLP \cong \angle AMP \cong \angle BNP \cong \angle\alpha$, probar que la suma $|PL| + |PM| + |PN|$ es una constante que no depende de la elección de los puntos P, L, M y N.

8.419 (Bacc. Dijon, 1905). Las distancias de un punto exterior de un triángulo equilátero a los lados del mismo tienen suma constante, admitiendo signo negativo en una de dichas distancias.

8.420. En un triángulo ΔABC, si AB y AC no son congruentes, ¿es cierto que B_a está entre M_a y H_a?

8.421. Sea ΔABC un triángulo. Probar que $AB > AC$ si y solo si $B_a \in M_a C - \{M_a, C\}$.

8.422. Sea ΔABC un triángulo. Si $AB < AC$, probar que $B_a \in H_a M_a$.

8.423. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumplen las desigualdades $AB > BB_a$ y $AC > B_a C$.

8.424. Sea ΔABC un triángulo tal que $AB > AC$. Probar que $BB_a > B_a C$.

8.425. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumple que $AB > BB_a$.

8.426. En un triángulo ΔABC, si M es el punto medio de $B_a E_a$, probar que $MA \cong MB_a$.

8.427. En un triángulo ΔABC, probar que $B_b B_c \parallel BC$ si y solo si $AB \cong AC$.

8.428. Sean ΔABC un triángulo, $D \in AB$ y $E \in AC$. Si $BB_a \cong BD$ y $B_a C \cong CE$, probar que $DE \parallel BC$.

8.429. Sea ΔABC un triángulo tal que $AB > AC$. Probar que el ángulo $\angle A B_a B$ es obtuso.

8.430. Sea ΔABC un triángulo tal que $AB_a \cong B_a C$, ¿entre qué valores numéricos se encuentra $m(\angle C)$?

8.431. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumple que $m(\angle B) - m(\angle C) = m(\angle C B_a A) - m(\angle A B_a B)$.

8.432[I-32, Problem 391]. Sea ΔABC un triángulo tal que $\angle C$ es obtuso y $AB_a \cong AE_a$. Encontrar la diferencia $m(\angle C) - m(\angle B)$.

8.433. Sea ΔABC un triángulo. Si C precede a E_a sobre la recta $\overleftrightarrow{BC}$, ¿qué se puede decir sobre el ángulo $\angle C$?

8.434. Sean ΔABC un triángulo, P el punto de intersección de b_a y h_a, y Q el punto de intersección de b_a y la recta perpendicular a AB en el punto A.

a. Calcular en función de $m(\angle B)$ las medidas de los ángulos $\angle BAP$, $\angle QPA$ y $\angle AQP$.
b. Probar que $AP \cong AQ$.

8.435. Sea ΔABC un triángulo. Por M_a trazamos una recta perpendicular a b_a que corta a AB y AC en los puntos E y F, respectivamente, y $\overleftrightarrow{EF}$ corta a la recta paralela a AC que pasa por B en el punto P.

a. Probar que los triángulos ΔAEF y ΔBEP son isósceles.
b. Comparar los triángulos ΔDBP y ΔDCF.
c. Probar que $BE \cong CF$.

8.436. Sean ΔABC un triángulo y P el punto de intersección de b_a y t_a.

a. Probar que si $P \in int(\Delta ABC)$, entonces ΔABC es un triángulo isósceles.
b. Sean E y F las proyecciones de P sobre las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{AC}$, respectivamente. Probar que

$$|AE| = |AF| = \frac{|AB| + |AC|}{2} \text{ y } |BE| = |CF| = \frac{||AB| - |AC||}{2}.$$

c. Si Q es el punto de intersección de e_a y t_a, y E' y F' son las proyecciones de Q sobre las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{AC}$, respectivamente, probar que $|AE'| = |AF'| = \dfrac{||AB| - |AC||}{2}$ y $|BE'| = |CF'| = \dfrac{|AB| + |AC|}{2}$.
d. $\Delta PBE \cong \Delta PCF$.
e. Probar que $EE' \cong AC$ y $FF' \cong AB$.

8.437. Sean ΔABC un triángulo y P la proyección de A sobre b_b. Trazamos una recta paralela a BC que pase por P y corte a AC en el punto M. Probar que M es el punto medio de AC.

8.438. Sea ΔABC un triángulo. Por B_c trazamos una recta paralela a AC que corte a BC en el punto D y a e_c en el punto E. Probar que $B_c D \cong DE$.

8.439. Sea ΔABC un triángulo. Trazamos una recta paralela a BC que pase por el punto B_c y corte a AC en el punto D, y trazamos otra recta paralela a AC que pase por el punto B_c y corte a BC en el punto E. Probar que $\square ECD B_c$ es un rombo.

8.440. En todo triángulo ΔABC, probar que se cumplen las siguientes afirmaciones:

a. b_b y e_c no pueden ser paralelos.
b. b_b y e_c se cortan en un punto del semiplano determinado por $\overleftrightarrow{BC}$ que contiene al vértice A.

8.441. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$.

a. Si e_a corta a $\overleftarrow{BC}$, probar que $m(\angle C) < 45$.
b. Si e_a corta a $\overleftarrow{CB}$, probar que $m(\angle B) < 45$.
c. Probar que $m(\angle A E_a B) = \dfrac{|m(\angle B) - m(\angle C)|}{2}$.

8.442. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$. Probar que $b_a = \dfrac{bc\sqrt{2}}{b+c}$.

8.443. En un triángulo ΔABC, probar que el triángulo $\Delta A B_a E_a$ es isósceles con $A B_a \cong A E_a$ si y solo si $m(\angle C) = m(\angle B) + 90$.

8.444. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$. Sea D el punto de intersección de la recta perpendicular a AC en el punto B_b y BC. Probar que el triángulo $\Delta B B_b D$ es isósceles.

8.445[KöMal, Problem C. 491, January 1998]. Probar que en todo triángulo uno de sus lados es menor que la altura correspondiente.

8.446. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$. Si la bisectriz del ángulo $\angle BA H_a$ corta a BC en el punto D, probar que el triángulo ΔADC es isósceles.

8.447. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumple la relación $\dfrac{|BH_a|}{|BC|} = \dfrac{|AB|^2}{|BC|^2}$.

8.448. Sea ΔABC un triángulo con $AB > AC$. Prolongamos b_a hasta un punto P tal que $BP \cong B B_b$. Si Q es el punto de intersección de $\overleftrightarrow{BP}$ y $\overleftrightarrow{AC}$, probar que $\dfrac{|AQ|}{|AC|} = \dfrac{|PQ|}{|B_aC|}$.

8.449. Sea ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$ y $m(\angle B) = 2m(\angle A)$. Probar que $|A B_b| = |B_b B| = |BC|$.

8.450. Sean ΔABC un triángulo tal que $|AB| = 2|AC|$ y $D \in AC$. Si $AB \parallel B_a D$, calcular $\dfrac{|AD|}{|DC|}$ y $\dfrac{|AB|}{|B_aE|}$.

8.451. En un triángulo ΔABC, probar que $|C H_a|^2 - |B H_a|^2 = |CB|^2$ si y solo si $\angle B$ es un ángulo recto.

8.452. Sea ΔABC un triángulo tal que las medidas de sus ángulos $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$ están en proporción 1:2:4. Probar las siguientes identidades:

a. $a^2 = b|C B_b|$. b. $ab = c b_c$. c. $a^2 = b_b b_c$. d. $b^2 = c|A B_c|$. e. $ac = b b_b$.

8.453[I-22]. Si en el triángulo ΔABC tenemos que b_a es la media geométrica de $|B B_a|$ y $|B_a C|$, probar que

$$b + c = a\sqrt{2}.$$

8.454. En un triángulo ΔABC, si $D \in \overleftrightarrow{M_aB_a}$ satisface que $DC \parallel AB$, probar la igualdad $2|DC| = |AC|$.

8.455. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle C$. Probar que $|AB| = |AC| + b_a$.

8.456. Sean ΔABC un triángulo, y l una recta paralela a BC que pasa por A. Sean D y E los puntos de intersección de b_b y b_c con l, respectivamente.

a. Probar que $|DE| = |AB| + |AC|$.

b. Si F es el punto de intersección de l y e_c, probar que $|DF| = ||AB| - |AC||$.

8.457. Sea ΔABC un triángulo tal que $AB > AC$. Probar que $|PB| - |PC| < |AB| - |AC|$, para todo punto $P \in b_a$.

8.458. Sea ΔABC un triángulo. Probar que $|PB| + |PC| > |AB| + |AC|$, para todo punto $P \in e_a$.

8.459. Sean ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$, $D \in \overleftrightarrow{AB_a}$ y $E \in \overleftrightarrow{AB} - AB$.

a. Si A está entre B y E, probar la desigualdad $|AE| + |AC| < |DE| + |DC|$.

b. Si B está entre A y E, probar la desigualdad $|AE| - |AC| < |DE| + |DC|$.

8.460. Sea ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$. Probar que si $X \in \overrightarrow{AC}$ y $Y \in \overrightarrow{AB_a}$, entonces

$$|AX| - |AB| < |BY| + |YX|.$$

8.461. Sea ΔABC un triángulo. Si la recta perpendicular a b_a que pasa por A corta a $\overleftrightarrow{BC}$ en el punto D, probar que $A B_b \cong D B_b$.

8.462. Sea ΔABC un triángulo. Si trazamos una recta paralela a b_a que pase por el vértice B y que corte a $\overleftrightarrow{AC}$ en el punto D, probar que $BA \cong DA$.

8.463. Sea ΔABC un triángulo. Trazamos rectas paralelas a AB y AC que pasen por el punto B_a y corten a AC y a AB en los puntos D y E, respectivamente. Probar que $B_a D \cong B_a E$.

8.464. Sea ΔABC un triángulo. Sobre AB_a tomamos dos puntos D y E tales que $AD \cong AB$ y $AE \cong AC$. Probar la congruencia $BE \cong CD$.

8.465. Sea ΔABC un triángulo. Trazamos una recta paralela a b_a que pase por C y corte a $\overleftrightarrow{AB}$ en el punto D. Probar que $AC \cong AD$.

8.466. En un triángulo ΔABC, sea P el punto de intersección de b_c y t_c. Si D y E son las proyecciones de P sobre las rectas $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{AC}$, respectivamente, probar que $DB \cong EA$.

8.467. Si los puntos C y D dividen al segmento AB, de tal forma que $\dfrac{|AB|}{|AC|} = \dfrac{|AC|}{|AD|}$ y el punto $E \notin \overleftrightarrow{AB}$ satisface que $AC \cong AE$, probar que $\overrightarrow{EC}$ es la bisectriz del ángulo $\angle DEB$.

8.468. Sea ΔABC un triángulo. Si D y E son las proyecciones del vértice B sobre b_a y e_a, respectivamente, probar que los puntos M_a, D y E son colineales.

8.469. Sea ΔABC un triángulo. Sean L y M las proyecciones de A sobre b_b y e_b, respectivamente, y N y P las proyecciones de A sobre b_c y e_c, respectivamente.

a. ¿Qué tipos de cuadriláteros son $\square BLAM$ y $\square CPAN$?

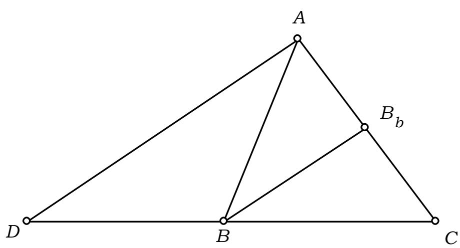
b. Probar que los puntos M, M_b, N, L, M_c y P son colineales.

8.470. Sea ΔABC un triángulo. Trazamos una recta paralela a BC que pase por el punto B_c y corte a AC en el punto D. Probar que M_a, D y E_c son colineales.

8.471. Probar que un triángulo ΔABC es isósceles con $AB \cong AC$ si y solo si $PB \cong PC$, para cualquier punto $P \in b_a - \{A, B_a\}$.

8.472. En un triángulo equilátero ΔABC, probar que b_a triseca a b_b y b_c, b_b triseca a b_a y b_c, y b_c triseca a b_a y b_b.

8.473. En la figura:



si BB_b es la bisectriz del ángulo $\angle CBA$ y $DA \parallel BB_b$, probar que ΔBAD es un triángulo isósceles.

8.474. Sea ΔABC un triángulo de perímetro 20. Si $|BB_a| = 3$ y $|AC| = 5$, encontrar las longitudes de los lados AB y BC.

8.475. Si en el triángulo ΔABC se cumple que $|AB| = 10$, $|AC| = 6$ y $|B_a H_a| = 2$, calcular longitud del lado BC.

8.476. Probar que en todo triángulo ΔABC, se cumple la igualdad

$$|AB||AC| = |BE_a||CE_a| - |AE_a|^2.$$

8.477 (Baltic Way 1999, Problem 13). Sea ΔABC un triángulo tal que $|AB_b| = |AC| + |BB_a|$. Encontrar la medida del ángulo $\angle C$.

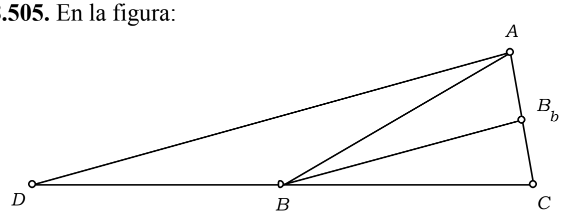
8.478. Sea ΔABC un triángulo tal que $a = 30$, $c - b = 5$ y $\dfrac{|AB|}{|BB_a|} = \dfrac{3}{2}$. Calcular las longitudes de los dos lados restantes del triángulo.

8.479. Sea ΔABC un triángulo tal que $m(\angle A) = 40$ y $m(\angle B) = 60$. Si P es el punto de intersección de b_a y e_c, calcular la medida del ángulo $\angle CPA$.
8.480. En un triángulo ΔABC se tiene que $m(\angle BE_aA) = 20$. Probar que $|m(\angle B) - m(\angle C)| = 40$.
8.481. En el triángulo $\Delta(20,40,50)$, calcular $|AB_c|$, $|B_cB|$, $|BB_a|$, $|B_aC|$, $|CB_b|$ y $|B_bA|$.
8.482. En el triángulo $\Delta(6,8,10)$, calcular la longitud del segmento B_aE_a.
8.483. En el triángulo $\Delta(9,10,5)$, calcular $|BB_a|$, $|B_aC|$, $|BE_a|$ y $|CE_a|$.
8.484. En el triángulo $\Delta(20,9,12)$, encontrar la longitud de B_aH_a.
8.485. Sea ΔABC un triángulo tal que $\dfrac{|AC|}{|AB|} = \dfrac{1}{2}$. Probar la igualdad $\dfrac{|B_aE_a|}{|BC|} = \dfrac{4}{3}$.
8.486. En el triángulo $\Delta(10,12,6)$, fijemos un punto $D \in BC$. Probar que $D = B_a$ si y solo si $|BD| = \dfrac{10}{3}$.
8.487. Sea ΔABC un triángulo de perímetro 40. Si $|BB_a| = 3$ y $|B_aC| = 7$, calcular las longitudes de los lados AB y AC del triángulo.
8.488. Si ΔABC es un triángulo tal que $|BB_a| = 5$ y $|B_aC| = 15$, calcular la longitud de CE_a.
8.489. Sea ΔABC un triángulo tal que $|AB| - |AC| = 5$. Si $|BB_a| = 3$ y $|B_aC| = 1$, calcular el perímetro del triángulo.
8.490. Sea ΔABC un triángulo con $|AB| = 6$ y $|AC| = 8$. Si $E \in AB$ satisface que $B_aE \parallel AC$, calcular $|BE|$ y $|EA|$.
8.491. En el triángulo $\Delta(\angle 60,\angle 80,\angle 40)$, sean D y E los puntos en donde las bisectrices de los ángulos $\angle AB_aB$ y $\angle CB_aA$ cortan a AB y AC, respectivamente. Calcular las medidas de los ángulos $\angle BDB_a$ y $\angle B_aEC$.
8.492. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$ tal que uno de los ángulos que forman b_b y m_a mide 60. Calcular las medidas de los ángulos agudos del triángulo.
8.493. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$. Si $BB_b \cong B_bC$, calcular la medida de cada uno de los ángulos formados por b_b y b.
8.494. Sea ΔABC un triángulo. Si D es el punto de intersección de M_bM_c y b_b, probar que $AD \perp b_b$.
8.495. Si ΔABC es un triángulo isósceles en el cual $AB \cong AC$ y $m(\angle A) = 80$, calcular la medida de uno de los ángulos que forman h_c y b_b.
8.496. Si en el triángulo ΔABC se tiene que $m(\angle A) = 40$, calcular la medida del ángulo formado por b_b y b_c.
8.497. En el triángulo $\Delta(\angle 50, \angle 70, \angle 60)$, calcular la medida del ángulo formado por b_a y h_a.
8.498. En un triángulo ΔABC tenemos que $m(\angle B) = 60$ y $m(\angle B_bIB_c) = 110$. Calcular las medidas de los ángulos $\angle C$ y $\angle CB_cA$.
8.499. Sea ΔABC un triángulo tal que $AB_a \cong BB_a$ y $m(\angle C) = 50$. Calcular la medida de los ángulos $\angle A$ y $\angle B$.
8.500. Si ΔABC es un triángulo rectángulo en $\angle A$ y P es el punto de intersección de b_b y h_a, probar que

$$\frac{|AP|}{|H_aP|} = \frac{|CB_b|}{|AB_b|}.$$

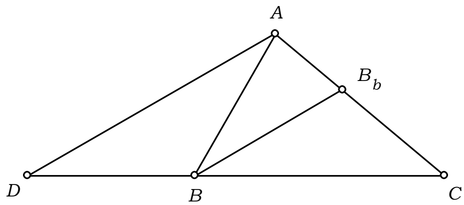
8.501. Sean ΔABC un triángulo y $D \in BC$. Probar que $|AD| > \dfrac{b+c}{2a}$.
8.502. Sean ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$ y $D \in BC$. Probar que la desigualdad $BD < DC$ se cumple si y solo si $\angle BAD > \angle DAC$.
8.503. Sea ΔABC un triángulo. Probar que $\angle A > \angle C$ si y solo si existe $D \in BC$ tal que $AD \cong DC$.
8.504. Sea ΔABC un triángulo equilátero y $D \in BC - \{B, C\}$. Si M es el punto medio de AD, probar la desigualdad $AM < CM$.

8.505. En la figura:



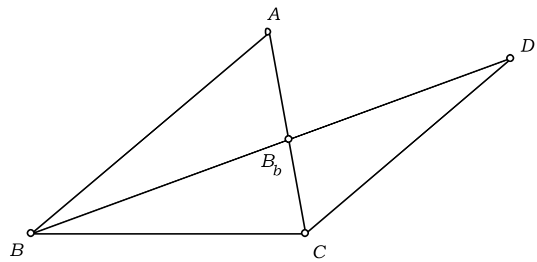
si $B\,B_b$ es la bisectriz del ángulo $\angle CBA$, $DA \parallel B\,B_b$, $m(\angle DAB) = 15$ y $m(\angle BAC) = 70$, encontrar las medidas de los ángulos $\angle CBA$, $\angle ACB$ y $\angle BDA$.

8.506. En la figura:



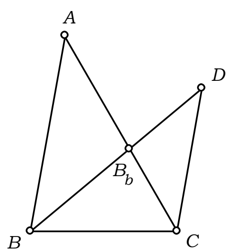
si $B\,B_b$ es la bisectriz del ángulo $\angle CBA$, $m(\angle BAC) = 80$ y $m(\angle ACB) = 40$, probar que $DA \parallel B\,B_b$ si y solo si $m(\angle DAB) = 30$.

8.507. En la figura:



si en el triángulo ΔABC se tiene que $B\,B_b$ es la bisectriz del ángulo $\angle B$, $m(\angle BAC) = 60$ y $m(\angle ACB) = 80$, probar que $AB \parallel DC$ si y solo si $m(\angle BDC) = 20$.

8.508. En la figura:



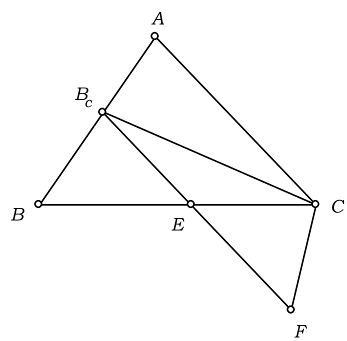
si $AB \parallel DC$ y $B\,B_b$ es la bisectriz de $\angle B$, en el triángulo ΔABC,

a. probar que

$$m(\angle A\,B_b B) = \frac{180 - (m(\angle BAC) - m(\angle ACB))}{2}.$$

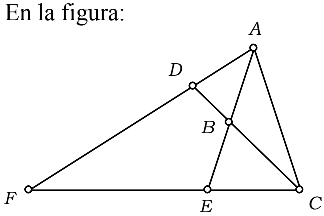
b. Si $m(\angle BAC) = 40$ y $m(\angle ACB) = 60$, encontrar $m(\angle A\,B_b B)$, $m(\angle ABC)$, $m(\angle C\,B_b D)$ y $m(\angle BDC)$.

8.509. En la figura:



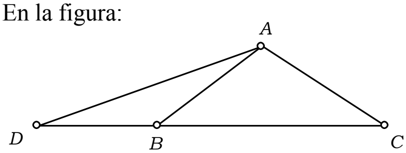
ΔABC es un triángulo, F es el punto de intersección de la bisectriz del ángulo exterior del triángulo de vértice C y $AC \parallel B_c F$. Probar que E es el punto medio de $B_c F$.

8.510. En la figura:



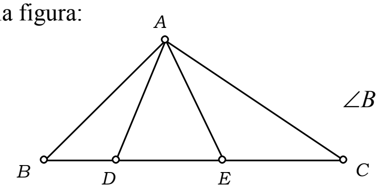
tenemos que $AC \cong AE \cong CD$. Si $AB > BC$, probar que $AF > CF$.

8.511. En la figura:



si $AB < BC$, probar que $AD < DC$.

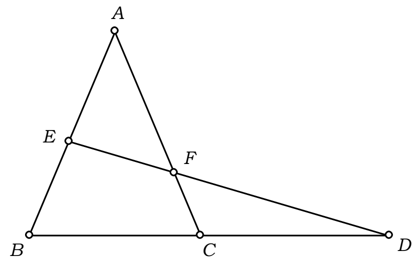
8.512. En la figura:



AD y AE son cevianas del triángulo ΔABC. Si $\angle EAC > \angle C$, $\angle B > \angle BAD$ y $\angle EAC < \angle BAD$, probar que $BD < EC$.

8.513. En la figura:

ΔABC es un triángulo isósceles con $AB \cong AC$, $BC \cong CD$, $|AB| = 20$, $|AF| = 15$ y $|CF| = 5$. Encontrar la longitud del segmento $|EB|$.



8.514. Tenemos un triángulo isósceles ΔABC con $m(\angle A) = 20$ y $AB \cong AC$. Supongamos que $D \in AC$ y $E \in AB$ satisfacen que $m(\angle CBD) = 60$ y $m(\angle ECB) = 50$. Si $\overleftrightarrow{DE}$ corta a $\overleftrightarrow{BC}$ en el punto F, probar que $BD \cong BF$. Sugerencia: considerar el punto $P \in AB$ tal que $PD \parallel BC$ y el punto Q que es la intersección de PC y BD.

8.515. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumplen las siguientes identidades:

a. $|AH_b||AC| = |AB||AH_c|$.

b. $|AH||HH_a| = |BH||HH_b| = |CH||HH_c|$.

c. $|BH||BH_b| = |AB||BH_c|$.

8.516. En cualquier triángulo ΔABC, probar que las siguientes identidades se cumplen:

$$m(\angle H_a AO) = \frac{|m(\angle B) - m(\angle C)|}{2},$$

$$m(\angle H_b BO) = \frac{|m(\angle A) - m(\angle C)|}{2} \text{ y}$$

$$m(\angle H_c CO) = \frac{|m(\angle A) - m(\angle B)|}{2}.$$

8.517. En cualquier triángulo ΔABC, probar que $\angle ABH_b \cong \angle ACH_c$.

8.518. En un triángulo ΔABC, probar que $b > c$ si y solo si $h_b < h_c$.

8.519. Si en el triángulo ΔABC se cumple la desigualdad $a \le b \le c$, probar que $h_c \le h_b \le h_a$.

8.520. Si en un triángulo ΔABC se tiene que $m(\angle A) = 71$ y $m(\angle B) = 54$, probar que $h_b > h_c$.

8.521[I-21]. Si ΔABC es un triángulo tal que $a = h_a$, probar que $b^4 + c^4 \le 3b^2c^2$.

8.522. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumple la desigualdad

$$h_a + h_b + h_c < a + b + c.$$

8.523. Probar que si los tres ángulos del triángulo ΔABC son agudos, entonces $s < h_a + h_b + h_c$. ¿Es cierta la desigualdad si uno de los ángulos del triángulo no es agudo?

8.524. Si en el triángulo ΔABC se cumple la identidad $\frac{h_a}{a} = \frac{h_b}{b}$, probar que $a = b$.

8.525. Probar que un triángulo ΔABC es equilátero si y solo si $\frac{h_a}{a} = \frac{h_b}{b} = \frac{h_c}{c}$.

8.526[I-32, Problem 27]. Sean ΔABC un triángulo y $P \in int(\Delta ABC)$. Probar que se cumple la identidad

$$\frac{d(P, \overleftrightarrow{BC})}{h_a} + \frac{d(P, \overleftrightarrow{AC})}{h_b} + \frac{d(P, \overleftrightarrow{AB})}{h_c} = 1.$$

8.527. Sea ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$. Probar que $m(\angle CBH_b) = \frac{m(\angle A)}{2}$.

8.528. Si en el triángulo ΔABC se tiene que $m(\angle B) = 55$ y $m(\angle C) = 45$, encontrar $m(\angle H_a A B_a)$.

8.529. Si en el triángulo ΔABC se tiene que $m(\angle A) = 40$ y $m(\angle C) = 90$, probar que $h_c = |H_c B|$.

8.530. Si ΔABC es un triángulo rectángulo con ángulo recto $\angle A$, $|BH_a| = 2$ y $|H_a C| = 6$, calcular las longitudes de sus catetos.

8.531. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$. Si $h_a = 6$ y $|BH_a| - |H_a C| = 2$. Calcular la longitud de cada uno de los lados del triángulo.

8.532. Sea ΔABC un triángulo tal que $m(\angle B) - m(\angle C) = 90$. Probar que $|AH_a|^2 = |BH_a||CH_a|$.

8.533. Si ΔABC es un triángulo rectángulo en $\angle A$, $|BH_a| = 2$ y la longitud de su hipotenusa es 5, calcular las longitudes de AB, AC y h_a.

8.534. Sea ΔABC un triángulo isósceles tal que $AB \cong AC$ y $m(\angle A) = 45$.

a. Si P es el punto de intersección de h_a y h_c, probar que $PH_c \cong H_c B$ y $PH_b \cong H_b C$.

b. $|AC| - |HH_c| = |CH_c|$.

8.535. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$.

a. Si $\frac{|BH_a|}{|H_a C|} = \frac{9}{4}$, encontrar $\frac{|AB|}{|AC|}$.

b. Si $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{9}{4}$, calcular $\frac{|BH_a|}{|H_a C|}$.

8.536. Sea ΔABC un triángulo rectángulo con hipotenusa a. Si $\frac{|BB_a|}{|B_a C|} = \frac{i}{j}$, probar que $\frac{|BH_a|}{|H_a C|} = \frac{i^2}{j^2}$.

8.537. Sean ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$ y $M \in AB$, y $N \in AC$ tales que $\overrightarrow{H_a M}$ es la bisectriz del ángulo $\angle AH_a B$ y $\overrightarrow{H_a N}$ es la bisectriz del ángulo $\angle CH_a A$. Probar la igualdad $\frac{|BM|}{|MA|} = \frac{|AN|}{|NC|}$.

8.538. Sea ΔABC un triángulo. Sean D y E los puntos de intersección de b_b y h_a con la recta perpendicular a AB en el punto A, respectivamente. Probar que ΔADE es un triángulo isósceles.

8.539. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$.

a. Calcular el ángulo formado por las bisectrices de los ángulos $\angle BAH_a$ y $\angle H_a AC$.

b. Probar que los ángulos $\angle A$ y $\angle H_a A M_a$ tienen la misma bisectriz.

8.540. Sean ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$. Si $D \in BC$ satisface que $AB \cong BD$, probar que $\overrightarrow{AD}$ es la bisectriz del ángulo $\angle H_a AC$.

8.541. En todo triángulo rectángulo ΔABC con ángulo recto $\angle A$, probar que las bisectrices de los ángulos $\angle B$ y $\angle AH_a C$ son perpendiculares.

8.542. En cierto triángulo ΔABC, ¿pueden h_a y h_b bisecarse entre sí?

8.543. Sea ΔABC un triángulo. Probar que si el ángulo $\angle A$ es agudo, entonces $\angle A$ es congruente al ángulo agudo formado por las rectas que contienen a h_b y h_c. ¿Es cierto el resultado si $\angle A$ es obtuso?

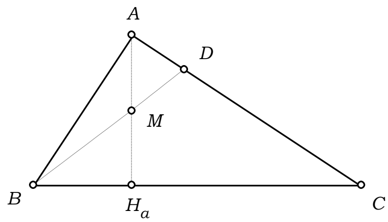
8.544. Sea ΔABC un triángulo tal que $m(\angle BIC) = 100$. Calcular la medida del ángulo formado por h_b y h_c.

8.545. Sean ΔABC un triángulo cualquiera y $D \in BC$. Supongamos que l es una recta paralela a m_a que pasa por el punto D y corta a $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{AC}$ en los puntos E y F, respectivamente. Probar que $|DE| + |DF| = 2\, m_a$.

8.546. Sean ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$ y $D \in BC$. Supongamos que l es una recta perpendicular a BC en el punto D y corta a $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{AC}$ en los puntos E y F, respectivamente. Probar que $|DE| + |DF| = 2\, h_a$.

8.547[M. d' Ocagne, Nouvelles Annales de Mathématiques, 1883]. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$. Fijamos un punto $P \in AH_a$. Sean D el punto de intersección de la recta paralela a BC que pasa por P y AB, y E el punto de intersección de $\overleftrightarrow{AB}$ y la recta perpendicular a PC en el punto P. Probar que $AE \cong BD$.

8.548[I-164]. En la figura:



tenemos que ΔABC es un triángulo rectángulo en $\angle A$ y M es el punto medio de h_a. Si $|BH_a| = 9$ y $|H_aC| = 16$, hallar la longitud del segmento BD.

8.549. Sea ΔABC un triángulo equilátero. Si D y E son las proyecciones de H_c y H_b sobre BC, respectivamente. Probar que D y E trisecan a BC. ¿Es cierto el recíproco de este resultado?

8.550. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$. Si H_1 es la proyección de H_a sobre AB, H_2 es la proyección de H_1 sobre BC, …, probar que la serie b, h_a, $|H_a H_1|$, $|H_1 H_2|$, … es geométrica.

8.551. Sea ΔABC un triángulo equilátero. Si ΔAH_aD es otro triángulo equilátero, probar que cada uno de los lados del triángulo ΔAH_aD es perpendicular a uno de los lados del triángulo original ΔABC.

8.552. Sea ΔABC un triángulo cualquiera.

a. Expresar en función de $m(\angle B)$ y $m(\angle C)$ la medida del ángulo $\angle H_aAB_a$.

b. Expresar en función de $m(\angle A)$ la medida del ángulo $\angle CIA$.

c. Expresar en función de $m(\angle A)$ la medida del ángulo $\angle CI_aB$.

d. Expresar en función de $m(\angle A)$ la medida del ángulo $\angle CHB$.

8.553. Probar que en todo triángulo, el punto medio de uno de sus lados es equidistante de los pies de las alturas de los otros dos lados.

8.554. Sean ΔABC un triángulo y $E \in AB$ y $F \in AC$ tales que $EF \parallel BC$. Si la recta paralela a AB que pasa por F y la recta paralela a AC que pasa por E se cortan en el punto D, probar que $\overrightarrow{AD}$ biseca a BC.

8.555. Sea ΔABC un triángulo.

a. Si $AM_a < BM_a$, probar que $\angle A$ es un ángulo obtuso.

b. Si $AM_a > BM_a$, probar que $\angle A$ es un ángulo agudo.

c. Si $AM_a \cong BM_a$, probar que $\angle A$ es un ángulo recto.

8.556. Sea ΔABC es un triángulo. Probar las siguientes afirmaciones:

a. $\angle A$ es un ángulo agudo si y solo si $a < 2\, m_a$.

b. $\angle A$ es un ángulo recto si y solo si $a = 2\, m_a$.

c. $\angle A$ es un ángulo obtuso si y solo si $a > 2\, m_a$.

d. Si $\angle A$ es un ángulo agudo, entonces $per(\Delta ABC) < 6\, m_a$.

8.557. Probar que en todo triángulo ΔABC, la mediana m_a biseca a $M_c M_b$.

8.558. Probar que en todo triángulo ΔABC, se cumplen las desigualdades

$$a < m_b + m_c, \qquad b < m_a + m_c \quad \text{y} \quad c < m_a + m_b.$$

8.559. Probar que en todo triángulo ΔABC, se cumple la desigualdad

$$\frac{3per(\Delta ABC)}{4} < m_a + m_b + m_c < per(\Delta ABC).$$

8.560. Probar que en todo triángulo, se cumplen las desigualdades

$$a < \frac{2m_b}{3} + \frac{2m_c}{3}, \quad b < \frac{2m_a}{3} + \frac{2m_c}{3} \quad \text{y} \quad c < \frac{2m_a}{3} + \frac{2m_b}{3}.$$

8.561. Si en el triángulo ΔABC se cumple que $a \leq b \leq c$, probar que $m_c \leq m_b \leq m_a$.

8.562. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumplen las siguientes desigualdades:

$$\frac{|AB|+|AC|-|BC|}{2} < m_a < \frac{|AB|+|AC|}{2},$$

$$\frac{|BA|+|BC|-|AC|}{2} < m_b < \frac{|BA|+|BC|}{2} \text{ y}$$

$$\frac{|CA|+|CB|-|AB|}{2} < m_c < \frac{|CA|+|CB|}{2}.$$

8.563. En todo triángulo ΔABC, probar que $m_a < m_b + m_c$, $m_b < m_c + m_a$ y $m_c < m_a + m_b$.

8.564. Sea ΔABC un triángulo. Si D es el punto de intersección de la recta paralela a m_b que pasa por el punto M_c y la recta $\overleftrightarrow{M_aM_b}$, probar que $\Delta DM_cC \cong \Delta(m_a, m_b, m_c)$.

8.565. Dado un triángulo ΔABC. Probar que la recta perpendicular a BC en el punto M_a corta al lado más grande de los otros dos lados del triángulo.

8.566. Sea ΔABC es un triángulo. Por A y B trazamos dos rectas l y m, respectivamente, que se cortan en el punto P y satisfacen que $l \parallel m_b$ y $m \parallel AC$.

a. Probar que los puntos P, M_b y M_c son colineales.

b. Probar que PC corta a $M_a M_c$ en su punto medio.

8.567. Sea ΔABC un triángulo. Si M es el punto medio del segmento $M_b M_c$ y P es el punto de intersección de BM_b y CM_c, probar que los puntos A, M, P y M_a son colineales.

8.568. Si ΔABC es un triángulo rectángulo en $\angle A$, probar que $AM_a \cong M_b M_c$.

8.569. Si ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$, probar que $5a^2 = 4(m_b^2 + m_c^2)$.

8.570. Si ΔABC un triángulo equilátero, probar que $3a^2 = 4m_a^2$.

8.571. Sea ΔABC un triángulo isósceles con $m(\angle A) = 120$. Probar que $a^2 = 12m_a^2$.

8.572[I-22]. Si en el triángulo ΔABC se cumple la relación $m_b \perp m_c$, probar que $5a^2 = b^2 + c^2$.

8.573[I-21]. Sea ΔABC un triángulo. Si $m_a \perp m_b$, probar que $\frac{1}{2} < \frac{a}{b} < 2$.

8.574. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$, ¿qué relación debe de existir entre los catetos del triángulo para que las medianas m_a y m_c sean perpendiculares?

8.575. Sea ΔABC un triángulo. Si $m_a > \frac{a}{2}$, probar que $m(\angle A) < m(\angle B) + m(\angle C)$.

8.576. Sea ΔABC un triángulo. Probar que $AB < AC$ si y solo si el ángulo $\angle AM_aB$ es agudo.

8.577. Sea ΔABC un triángulo tal que $\angle B > \angle A$. Si $P \in m_c$, probar que $\angle EBD > \angle DAE$.

8.578. Sea ΔABC un triángulo en el cual $AB > AC$. Probar las siguientes afirmaciones:

a. $\angle AM_aB$ es un ángulo obtuso.

b. $PB > PC$ para todo punto $P \in m_a$ distinto de M_a.

8.579. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle B$ tal que $m(\angle A) = 63$. Si D y E son los puntos medios de BM_a y M_aC, respectivamente, calcular aproximadamente las medidas de los ángulos $\angle BAM_a$, $\angle BAD$ y $\angle BAE$.

8.580. Sea ΔABC un triángulo tal que $AB > AC$. Probar que $\angle BM_aA > \angle AM_aC$ y $\angle BAM_a < \angle CAM_a$.

8.581. Sean ΔABC un triángulo tal que $\angle B$ es agudo y $|AB| = 2|BC|$, y P el punto de intersección de t_a y la recta perpendicular a BC en el punto C. Probar que $m(\angle APC) = 3m(\angle APM_a)$.

8.582. En el triángulo $\Delta(\angle 90,\angle 50,\angle 40)$, calcular la medida del ángulo $\angle H_aAM_a$.

8.583. Sean ΔABC un triángulo, $D \in AB$ y $E \in AC$. Si $\overrightarrow{M_aD}$ y $\overrightarrow{M_aE}$ son las bisectrices de los ángulos $\angle AM_aB$ y $\angle CM_aA$, respectivamente, probar que $DE \parallel BC$.

8.584. En un triángulo ΔABC, sean X el punto de intersección de la bisectriz del ángulo $\angle AM_aB$ y AB, Y el punto de intersección de la bisectriz del ángulo $\angle CM_aA$ y AC, y Z el punto de intersección de XY y AM_a. Probar que Z es el punto medio de XY.

8.585. En un triángulo ΔABC, si P es el punto de intersección de la bisectriz del ángulo $\angle CM_aA$ y el lado AC y Q es el punto de intersección de la bisectriz del ángulo $\angle AM_aB$ y el lado AB, probar que $QP \parallel BC$.

8.586. En un triángulo ΔABC, sean D el punto de intersección de la bisectriz del ángulo $\angle AM_aB$ y el lado AB, y E el punto de intersección de la bisectriz del ángulo $\angle CM_aA$ y el lado AC. Probar que

a. $\dfrac{|DA|}{|DB|} = \dfrac{|EA|}{|EC|}$,

b. $DE \parallel BC$ y

c. $|AE| = \dfrac{2bm_a}{2m_a + a}$, $|AD| = \dfrac{2cm_a}{2m_a + a}$ y $|DE| = \dfrac{2am_a}{2m_a + a}$.

8.587[I-164]. Sean ΔABC un triángulo rectángulo no isósceles con hipotenusa a, y D el punto intersección de b_a y t_a.

a. Probar que $|AM_a| = |M_aD|$.

b. Si $AB > AC$, probar que $m(\angle M_aAD) = \dfrac{m(\angle C) - m(\angle B)}{2}$.

8.588. Sea ΔABC un triángulo. Trazamos la recta l perpendicular a b_a que pase por M_a y que corte a $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{AC}$ en los puntos D y E, respectivamente. Por B trazamos una recta paralela a AC que corte a l en el punto F. Probar las siguientes afirmaciones:

a. ΔADE y ΔBDF son triángulos isósceles.

b. $\Delta BM_aF \cong \Delta M_aCE$.

c. $BD \cong CE$.

d. Si P es el punto de intersección de las mediatrices de BC y DE, entonces $\Delta PCE \cong \Delta PBD$.

8.589. Sean ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$, y $D \in \overleftrightarrow{AM_a} - AM_a$ tales que $AM_a \cong M_aD$. Si la recta perpendicular a BC que pasa por el punto D corta a b_b y b_c en los puntos E y F, respectivamente, probar que $DB \cong DE$ y $DC \cong DF$.

8.590. Sea ΔABC un triángulo. Alargamos los segmentos AH_a y AM_a hasta los puntos D y E, respectivamente, de tal manera que $AH_a \cong H_aD$ y $AM_a \cong M_aE$. Si F es el punto de intersección de las rectas $\overleftrightarrow{BD}$ y $\overleftrightarrow{CE}$, probar que el triángulo ΔFBC es isósceles.

8.591. Sean ΔABC un triángulo y $D \in BM_a$. Si la recta paralela a m_a que pasa por D corta a AB en E y a $\overleftrightarrow{AC}$ en F, expresar los cocientes $\frac{|AE|}{|M_aD|}$, $\frac{|AF|}{|M_aD|}$ y $\frac{|AE|}{|AF|}$ en función de a, b y c.

8.592. Sean ΔABC un triángulo y $D, E \in AC$ tales que $AD \cong DE \cong EC$. Sean P el punto de intersección de AM_a y BD, y F el punto de intersección de AB y $\overleftrightarrow{CP}$. Probar las siguientes afirmaciones:

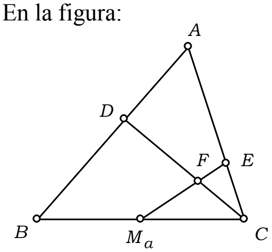
a. P es el punto medio de AM_a.

b. $|PD| = \frac{|M_aE|}{2}$.

c. $|PD| = \frac{|BD|}{4}$.

d. $|AF| = \frac{|AB|}{3}$.

8.593. En la figura:



si $\frac{|CE|}{|EA|} = \frac{1}{2}$ y $\frac{|M_aF|}{|FE|} = \frac{3}{2}$, calcular $\frac{|AD|}{|DB|}$.

8.594. Sean ΔABC un triángulo, D y E los puntos que trisecan a AC y M el punto de intersección de m_a y BD. Probar las siguientes afirmaciones:

a. M es el punto medio de m_a.

b. $|MD| = \frac{|M_aE|}{2} = \frac{|BD|}{4}$.

c. Si F es el punto de intersección de AB y CM, entonces $|AF| = \frac{|AB|}{3}$.

8.595. Sean ΔABC un triángulo y $D \in BC$ tales que $\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{2}{3}$. Si P es el punto de intersección de m_c y AD, encontrar $\frac{|CP|}{|CM_c|}$.

8.596. Sean ΔABC un triángulo y $P \in AC$ tales que $|AC| = 4|AP|$. Si Q es el punto de intersección de BP y m_a, probar que $|PQ| = \frac{|BP|}{5}$.

8.597. Si ΔABC es un triángulo tal que $\angle A$ es obtuso, probar la identidad $|BC| = \frac{||AB|^2 - |AC|^2|}{2|M_aH_a|}$.

8.598. Sean ΔABC un triángulo, M el punto medio de BM_a y D el punto de intersección de BC y $\overrightarrow{AM}$. Si $|AD|$ = 20, encontrar la longitud del segmento MD.

8.599. Sea ΔABC un triángulo. Por M_a trazamos una recta paralela a $\overleftrightarrow{BM_b}$ que corte a $\overleftrightarrow{M_bM_c}$ en el punto D.
a. Probar que los lados del triángulo ΔAM_aD son congruentes a las medianas del triángulo ΔABC.
b. Probar que cada mediana del triángulo ΔAM_aD tiene $\frac{3}{4}$ de longitud de uno de los lados del triángulo original.

8.600. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$. Supongamos que la mediatriz de BC corta a AC en el punto D. Sean E es el punto simétrico de D con respecto a A, y F es el punto de intersección de $\overleftrightarrow{BF}$ y m_a. Probar que $BF \cong BC$.

8.601. En un triángulo cualquiera ΔABC, si P es la proyección de M_a sobre AB, probar la relación

$$3|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2 + 4|AB||AP|.$$

8.602. En un triángulo ΔABC, si P es el punto de intersección de b_a y m_b, probar que $|AC||BP| = 2||AB||PM_b|$.

8.603. Sean ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle C$ y P la proyección de M_a sobre AB. Si $|AC| = 4$ y $|BC| = 6$, calcular las longitudes de los segmentos BP, PM_a y PC.

8.604. Sean ABC un triángulo y l una recta en el exterior del triángulo que pasa por el vértice A. Si L, M y N son las proyecciones de B, C y M_a sobre la recta l, respectivamente, probar que $|M_aL| = |M_aM|$.

8.605. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$. Por el vértice A trazamos una recta paralela a $\overleftrightarrow{BC}$ que corte a $\overleftrightarrow{BM_b}$ en el punto D y a $\overleftrightarrow{CM_c}$ en el punto E. Probar que $|BD|^2 + |CE|^2 = 5|BC|^2$.

8.606. Sean ΔABC un triángulo y $P \in BC$. Por P trazamos una recta paralela AM_a que corte a $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{AC}$ en los puntos R y S, respectivamente. Probar que la suma $|PR| + |PS|$ permanece constante cuando P se mueve sobre BC.

8.607. Sean ΔABC un triángulo. Si P es el punto de intersección de m_b y $M_a M_c$, y Q el punto de intersección de m_c y $M_a M_b$. Probar que $PQ \parallel BC$ y $|BC| = 4|PQ|$.

8.608. Sean ΔABC un triángulo y M el punto medio de su mediana m_c. Si la recta $\overleftrightarrow{AM}$ corta a BC en el punto D, probar que $3|DC| = |BC|$.

8.609. Sean ΔABC un triángulo y M el punto medio de BG. Si la recta $\overleftrightarrow{AM}$ corta a BC en el punto D, probar que $4|BD| = |DC|$.

8.610[Math. Student]. En el interior de un triángulo ΔABC, localizar un punto P tal que $\angle APB \cong \angle APC$. Probar además que si P se encuentra en una de las medianas del triángulo, entonces el triángulo es isósceles.

8.611. Dado un triángulo ΔABC con $AB > AB$, encontrar un punto $P \in BC$ tal que $|AB| - |AP| = |AP| - |AC|$.

8.612. Sea ΔABC un triángulo. Sean M el punto medio de m_a, D el punto de intersección de $\overleftrightarrow{BM}$ y AC, y E el punto de intersección de AC y la recta paralela a $\overleftrightarrow{BM}$ que pasa por M_a. Probar que D y E trisecan a AC.

8.613. Sean ΔABC un triángulo y $P \in BC$. Por P trazamos rectas paralelas a AC y a AB que corten a $\overleftrightarrow{AM_a}$ en los puntos D y E, respectivamente. Probar que M_a es el punto medio de DE.

8.614. Sean ΔABC un triángulo y D un punto en el semiplano determinado por $\overleftrightarrow{BC}$ que no contiene a A tal que $DC \cong AB$ y $DB \cong AC$. Probar que los puntos A, M_a y D son colineales.

8.615. En un triángulo cualquiera ΔABC prolongamos BM_b y CM_c hasta unos puntos P y Q, respectivamente, tales que $BM_b \cong M_bP$ y $CM_c \cong M_cQ$. Probar que el vértice A pertenece a la mediatriz del segmento PQ.

8.616. Sea ΔABC un triángulo cualesquiera. Si prolongamos la mediana m_a hasta un punto D tal que $AM_a \cong M_aD$, probar que $\Delta ABM_a \cong \Delta DCM_a$.

8.617. Sea ΔABC un triángulo tal que AB y AC no son congruentes. Probar que $\square H_aM_aM_bM_c$ es un trapecio isósceles.

8.618. Sean ΔABC un triángulo y M y N los puntos medios de BG y CG, respectivamente. Probar que $\square M_cMNM_b$ es un paralelogramo.

8.619[I-25]. Sea ΔABC un triángulo. Trazamos rectas paralelas a m_a que pasen por los puntos M_c y M_b y corten a BC en los puntos D y E, respectivamente.

a. Probar que $are(\square M_cDEM_b) = \frac{1}{2}are(\Delta ABC)$.

b. Si P es el punto de intersección de m_a y la diagonal DM_b, encontrar $\frac{|AP|}{|PM_a|}$.

c. Si Q es el punto de intersección de m_a y M_cM_b, probar que $\overleftrightarrow{DQ}$ es la mediatriz del segmento AM_b.

8.620[I-72]. Si una de las alturas de un triángulo equilátero es igual a $\frac{3}{2}$ y un punto P de una de sus medianas está a una distancia q del incentro del mismo triángulo, probar que $|PA||PA||PB| = 1 \pm q^3$.

8.621. Sea ΔABC un triángulo tal que $m(\angle A) = 60$, $m(\angle B) = 40$ y $m(\angle C) = 80$. Sean $P \in BC$, $Q \in AC$ y $R \in AB$. Pongamos $m(\angle APC) = x$, $m(\angle BQA) = y$ y $m(\angle CRB) = z$. Expresar la medida de los ángulos del triángulo formado por las rectas AP, BQ y CR en función de x, y y z. Encontrar los valores de x, y y z cuando dicho triángulo sea equilátero y $BQ \perp CR$.

8.622. Sea ΔABC un triángulo tal que $AB_c \cong B_cC \cong BC$. Calcular la medida de cada uno de los ángulos del triángulo original.

8.623. Si en un triángulo ΔABC se cumplen las congruencias $AB \cong AB_a$ y $AC \cong CB_c$, calcular la medida de cada uno de los ángulos del triángulo original.

8.624. Sea ΔABC un triángulo tal que $m(\angle BB_cC) = 80$ y $m(\angle BB_bC) = 70$. Calcular la medida de cada uno de los ángulos del triángulo original.

8.625. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$. Si $m(\angle H_aAM_a) = 30$, calcular las medidas de los ángulos agudos del triángulo original.

8.626. Si en el triángulo ΔABC se cumple que $m(\angle H_aAB_a) = 25$ y $m(\angle BI_bC) = 35$, calcular la medida de cada uno de los ángulos del triángulo original.

8.627. Si en el triángulo ΔABC se cumple que $m(\angle CB_aA) = 70$ y $m(\angle BB_bC) = 95$, calcular la medida de cada uno de los ángulos del triángulo original.

8.628. Si en el triángulo ΔABC se cumple que $m(\angle H_aAB_a) = 30$ y $m(\angle CI_aB) = 50$, calcular la medida de cada uno de los ángulos del triángulo original.

8.629. Si en el triángulo ΔABC se cumple que $m(\angle BIC) = 150$ y $m(\angle H_aAB_a) = 20$, calcular la medida de cada uno de los ángulos del triángulo original.

8.630. Sea ΔABC un triángulo tal que $m(\angle B) = 60$ y $m(\angle C) = 50$. Si P y Q son los puntos de intersección de h_a con b_b y b_c, respectivamente, calcular la medida de cada uno de los ángulos del triángulo ΔPIQ.

8.631. Sea ΔABC un triángulo tal que $m(\angle A) = 70$, $m(\angle B) = 80$ y $m(\angle C) = 30$. Calcular la medida de cada uno de los ángulos de los triángulos ΔAHB, ΔBHC y ΔCHA.

8.632. Sea ΔABC un triángulo isósceles tal que $AB \cong AC$. Si $m(\angle BIC) = 6m(\angle A)$, calcular la medida de cada uno de los ángulos del triángulo original.

8.633. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumplen las relaciones

$$\frac{|IA|}{|IB_a|}=\frac{b+c}{a},\ \frac{|IB|}{|IB_b|}=\frac{a+c}{b}\ \text{y}\ \frac{|IC|}{|IB_c|}=\frac{a+b}{c}.$$

8.634. En el triángulo $\Delta(40{,}50{,}20)$, calcular

a. $|AB_c|$, $|B_cB|$, $|BB_a|$, $|B_aC|$, $|CB_b|$ y $|B_bA|$; y b. $\dfrac{|IA|}{|IB_a|}$, $\dfrac{|IB|}{|IB_b|}$ y $\dfrac{|IC|}{|IB_c|}$.

8.635. Probar que en todo triángulo ΔABC las siguientes ternas de puntos son colineales:

A, I y I_a. B, I y I_b. C, I y I_c. A, I_b y I_c. I_a, B y I_c. I_a, I_b y C.

8.636. En todo triángulo ΔABC, probar que cualquiera de los puntos I, I_a, I_b y I_c es el ortocentro del triángulo formado por los tres puntos restantes.

8.637. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumplen las identidades

a. $m(\angle BIC)=\dfrac{m(\angle A)}{2}+90$,

b. $m(\angle BI_aC)=90-\dfrac{m(\angle A)}{2}$, $m(\angle BI_bC)=\dfrac{m(\angle A)}{2}$ y $m(\angle BI_cC)=\dfrac{m(\angle A)}{2}$.

8.638. Sea ΔABC un triángulo. En el triángulo $\Delta I_a I_b I_c$, probar que se cumplen las siguientes relaciones:

a. $m(\angle I_b I_a I_c)=\dfrac{180-\angle A}{2}=\dfrac{\angle B+\angle C}{2}$, $m(\angle I_c I_b I_a)=\dfrac{180-\angle B}{2}=\dfrac{\angle A+\angle C}{2}$ y

$$m(\angle I_b I_c I_a)=\frac{180-\angle C}{2}=\frac{\angle A+\angle B}{2}.$$

b. Probar que $m(\angle I_aBC)-m(\angle BCI_a)=m(\angle I_c I_b I_a)-m(\angle I_b I_c I_a)$.

c. Comparar los ángulos del triángulo $\Delta I_a I_b I_c$ con los ángulos de los triángulos ΔI_aBC, ΔAI_bC y ΔABI_c.

8.639. Dado un triángulo ΔABC, probar que existe un triángulo $\Delta A'B'C'$ tal que $\Delta ABC \sim \Delta I_{a'} I_{b'} I_{c'}$.

8.640. En un triángulo ΔABC, probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a. $AB \cong AC$.
b. $b_a = t_a$.
c. $m_a = t_a$.
d. $h_a = t_a$.

8.641. Sea ΔABC un triángulo. Probar que las siguientes congruencias son equivalentes:

a. $AB \cong AC$.
b. $BH \cong CH$.
c. $BI \cong CI$.
d. $BG \cong CG$.
e. $OM_b \cong OM_c$.

8.642. Probar que en todo triángulo escaleno ΔABC cuyos ángulos sean todos agudos se cumple que $\Delta OBC \sim \Delta HBC$.

8.643. Sea ΔABC un triángulo equilátero. Si D es el punto en donde la recta paralela a AB que pasa por I a AC y E es el punto en donde la recta paralela a BC que pasa por I corta a AC, probar que $AD \cong DI \cong DE \cong IE \cong EC$.

8.644. Sea ΔABC un triángulo cuyos ángulos son agudos y $AB > AC$. Comparar los segmentos HB y HC.

8.645. Sea ΔABC un triángulo tal que $AB > AC$. Probar que $IB > IC$ y comparar los segmentos I_aB y I_aC.

8.646. En un triángulo ΔABC, probar que $IB \cong IC$ si y solo si $I_aB \cong I_aC$.

8.647. Sea ΔABC un triángulo tal que $m(\angle A) = 40$ y $m(\angle B) = 60$. Colocar los segmentos AI, BI y AC en orden creciente de longitud.

8.648. Sea ΔABC un triángulo. Si las longitudes de los lados del triángulo están en proporción 6:5:4. Probar que $\dfrac{|IA|}{|IB_a|} = 2$.

8.649. En el triángulo $\Delta(4,7,8)$, calcular $|CE_a|$.

8.650. Si el triángulo ΔABC satisface que $m(\angle B) = 70$ y $m(\angle C) = 50$, calcular la medida del ángulo $\angle BHC$.

8.651. Sea ΔABC un triángulo. Probar que los ángulos $\angle A$ y $\angle BHC$ son suplementarios.

8.652. Probar que en todo triángulo ΔABC, se cumple que $m(\angle BHC) = 180 - m(\angle A)$.

8.653. Sea ΔABC un triángulo tal que $m(\angle BIC) = 120$. Calcular la medida del ángulo $\angle A$.

8.654. Sea ΔABC un triángulo. Expresar la medida de los ángulos $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COA$, $\angle AHB$, $\angle BHC$ y $\angle CHA$ en función de las medidas de los ángulos del triángulo original.

8.655. En el triángulo $\Delta(\angle 60,\angle 80,\angle 40)$, calcular las medidas de los ángulos $\angle AIB$, $\angle BIC$ y $\angle CIA$.

8.656. Sea ΔABC un triángulo. Trazamos la recta paralela a BC que pasa por I y que corta a los lados AB y AC en los puntos D y E, respectivamente. Probar que $|DE| = |BD| + |CE|$.

8.657. Sea ΔABC un triángulo. Trazamos la recta paralela a AB que pasa por I que corte a BC en el punto D, y la recta paralela a AC que pasa por I que corta a BC en el punto E. Probar que $per(\Delta IDE) = |BC|$.

8.658. Sea ΔABC un triángulo. Trazamos la recta paralela a BC que pase por I_c, la cual corta a las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{AC}$ en los puntos D y E, respectivamente. Probar que $|DE| = ||BD| - |CE||$.

8.659. Sea ΔABC un triángulo isósceles con $\angle B \cong \angle C$. Si $\angle BIC = 2\angle A$, probar que ΔABC es equilátero.

8.660. Dado un triángulo ΔABC, probar que A es el ortocentro del triángulo ΔHBC, B es el ortocentro del triángulo ΔHCA y C es el ortocentro del triángulo ΔHAB.

8.661. Sean ΔABC un triángulo y L, M y N los puntos medios de HA, HB y HC, respectivamente. Probar que H es también el ortocentro del triángulo ΔLMN.

8.662. Si el circuncentro de un triángulo yace en una de sus alturas, probar que el triángulo tiene que ser isósceles.

8.663. Sea ΔABC un triángulo equilátero. Probar que los tres triángulos ΔIBC, ΔAIC y ΔIAB son congruentes entre sí.

8.664. Probar que el incentro de un triángulo ΔABC es el ortocentro del triángulo $\Delta I_a I_b I_c$.

8.665. En todo triángulo ΔABC, probar que G es también el centro de gravedad del triángulo $\Delta M_a M_b M_c$.

8.666. Sea ΔABC un triángulo. Si P, Q y R son los circuncentros de los triángulos ΔBOC, ΔCOA y ΔAOB, probar que los ángulos del triángulo ΔPQR son los complementarios de los ángulos $\dfrac{\angle A}{2}$, $\dfrac{\angle B}{2}$ y $\dfrac{\angle C}{2}$.

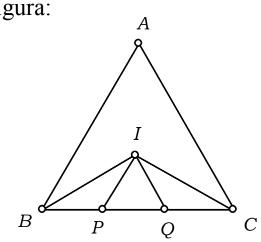
8.667. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$. Sean G, G' y G'' los centros de gravedad de los triángulos ΔABC, ΔABH_a y ΔACH_a, respectivamente. Probar que

$$|AG|^2 = |H_aG'|^2 + |H_aG''|^2.$$

8.668. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumplen las identidades

$$\frac{|GM_c|}{|M_cM_a|} = \frac{|GC|}{|CA|}, \quad \frac{|M_cM_a|}{|M_aG|} = \frac{|CA|}{|AG|} \quad \text{y} \quad \frac{|GM_c|}{|M_aG|} = \frac{|GC|}{|AG|}.$$

8.669. En la figura:



tenemos que ΔABC es un triángulo equilátero. Si $AB \parallel IP$ y $AC \parallel IQ$, probar que P y Q trisecan a BC.

8.670[a-81]. Sean ΔABC un triángulo y $P \in int(\Delta ABC)$. Sean A_1, B_1 y C_1 las proyecciones del punto P sobre los lados BC, AC y AB, respectivamente. Consideremos el triángulo $\Delta A_1 B_1 C_1$. Como $P \in int(\Delta A_1 B_1 C_1)$, podemos tomar las proyecciones A_2, B_2 y C_2 del punto P sobre los lados $B_1 C_1$, $A_1 C_1$ y $A_1 B_1$ formando así un nuevo triángulo $\Delta A_2 B_2 C_2$. Continuando este proceso hacia el infinito, obtenemos una sucesión infinita de triángulos

$$\Delta ABC, \Delta A_1 B_1 C_1, \Delta A_2 B_2 C_2, \ldots, \Delta A_k B_k C_k, \ldots$$

Ahora, trazamos rectas perpendiculares a PA en el punto A, a PB en el punto B y a PC en el punto C, formando un nuevo triángulo $\Delta A_{-1} B_{-1} C_{-1}$. Continuando con este proceso podemos construir una sucesión infinita de triángulos

$$\ldots, \Delta A_{-k} B_{-k} C_{-k}, \ldots, \Delta A_{-2} B_{-2} C_{-2}, \Delta A_{-1} B_{-1} C_{-1}, \Delta ABC.$$

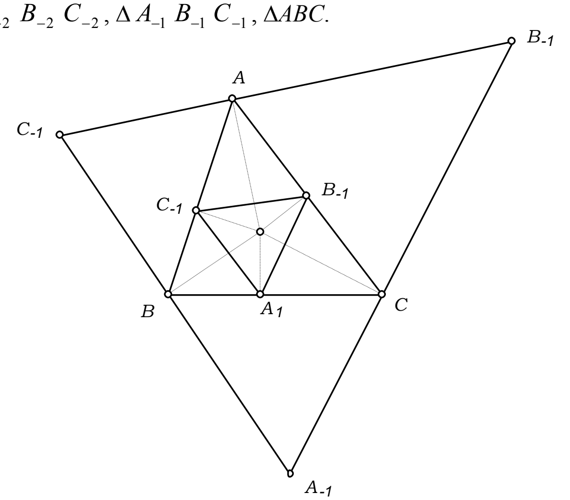
a. Si P es el incentro de ΔABC, probar que P es el circuncentro del triángulo $\Delta A_1 B_1 C_1$ y P es el ortocentro del triángulo $\Delta A_{-1} B_{-1} C_{-1}$.

b. Si P es el circuncentro de ΔABC, probar que P es el ortocentro del triángulo $\Delta A_1 B_1 C_1$ y P es el incentro del triángulo $\Delta A_{-1} B_{-1} C_{-1}$.

c. Si P es el ortocentro de ΔABC, probar que P es el circuncentro del triángulo $\Delta A_{-1} B_{-1} C_{-1}$.

d. Si P es el ortocentro de ΔABC y ΔABC tiene todos sus ángulos agudos, probar que P es el incentro del triángulo $\Delta A_1 B_1 C_1$.

e. Probar que si P es el incentro, el circuncentro o el ortocentro de uno de estos triángulos, entonces la secuencia incentro, circuncentro y ortocentro se repite, en este orden, dentro de la sucesión de triángulos:



$$\ldots, \Delta A_{-k} B_{-k} C_{-k}, \ldots, \Delta A_{-1} B_{-1} C_{-1}, \Delta ABC, \Delta A_1 B_1 C_1, \ldots, \Delta A_k B_k C_k, \ldots.$$

8.671. Sean ΔABC un triángulo y D el punto de intersección de las perpendiculares a AB y a AC que pasan por B y C, respectivamente.

a. Probar que $\square BDCH$ es un paralelogramo.

b. Probar que M_a es el punto medio de HD.

8.672. Sean ΔABC un triángulo. Si P y Q son los puntos simétricos de I con respecto a los puntos M_b y M_c, respectivamente, probar que $\square BCPQ$ es un paralelogramo.

8.673. Sea ΔABC un triángulo. Si prolongamos la mediana AM_a hasta un punto D, de tal forma que $AG \cong GD$, probar que $\square BDCG$ es un paralelogramo.

8.674[l-164]. Sobre los lados AB y AC de un triángulo ΔABC y hacia su exterior trazamos cuadrados $\square ACDE$ y $\square BAFG$. Probar que $|EF| = 2\, m_a$.

8.675. Probar que la suma de las distancias de una recta dada a los vértices de un triángulo dado es igual a la suma de las distancias de los puntos medios de los lados del triángulo dado a la recta dada.

8.676(Ver Problemas 6.44 y 6.45) Sean ΔABC un triángulo y l una recta que no corta al mismo. Probar la igualdad

$$d(A,l) + d(B,l) + d(C,l) = 3d(G,l).$$

8.677. Consideremos el triángulo $\Delta(10,9,5)$. Por su centro de gravedad G, trazamos una recta paralela a BC que corte a AB y AC en los puntos D y E, respectivamente. Encontrar las longitudes de los lados del trapecio $\square BCED$.

8.678. Sea ΔABC un triángulo tal que $AC > AB$. Trazamos la recta paralela a AC que pase por B, en el semiplano determinado por $\overleftrightarrow{AB}$ que contenga C y sobre dicha recta paralela fijamos un punto P, y también fijamos un punto $Q \in AC$ tal que $AQ \cong AB$. Probar los siguientes enunciados:

a. $\overrightarrow{BQ}$ es la bisectriz del ángulo $\angle PBA$.

b. $\overrightarrow{BC}$ es la bisectriz del ángulo $\angle PBO$.

c. $m(\angle OBA) = 2m(\angle QBC)$.

8.679. Sean A, B, C y D cuatro puntos con los tres primeros no colineales. Sean M, N, P, Q, R y S los puntos medios de AB, CD, AC, BD, AD y BC, respectivamente. Probar las siguientes afirmaciones:

a. Los segmentos MN, PQ y RS tienen el mismo punto medio que denotaremos por W.

Sea G el centro de gravedad del triángulo ΔABC.

b. $|GW| = \dfrac{|GD|}{4}$.

c. $W \in DG$.

8.680. Sea ΔABC un triángulo. Prolongamos BC en ambos lados hasta los puntos D y E, de tal forma que $BD \cong BC \cong CE$. Sean F el punto de intersección de la recta paralela a AB que pasa por el punto D y la recta paralela a AC que pasa por el punto E, y M el punto de intersección de BC y $\overleftrightarrow{FA}$.

a. Probar que $\dfrac{|MB|}{|BD|} = \dfrac{|MC|}{|CE|}$.

b. Comparar los segmentos MB y MC.

c. ¿Qué representa el punto A para el triángulo ΔDEF?

8.681. En el triángulo $\Delta(10,5,6)$, calcular numéricamente h_a, h_b, h_c, m_a, m_b, m_c, b_a, b_b y b_c.

8.682. En el triángulo $\Delta(3,4,5)$, calcular numéricamente h_a, h_b, h_c, $|AH_c|$ y $|H_cB|$.

8.683[I-164]. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$. Si m_a divide al ángulo recto $\angle A$ en la razón $\dfrac{1}{2}$, expresar los lados del triángulo en términos de m_a.

8.684. Sea ΔABC un triángulo tal que $|AB| = 6$, $|AC| = 8$ y $m_a^2 = 46$. Encontrar la longitud del lado BC.

8.685. En el triángulo ΔABC tenemos que $|AB| = 6$, $|AC| = 9$ y $m(\angle A) = 60$. Calcular numéricamente m_a.

8.686. En el triángulo ΔABC sus alturas h_a, h_b y h_c están en proporción 3:5:6. Si la longitud del lado más grande del triángulo es igual a 12, encontrar la longitud del lado más pequeño.

8.687. Si en el triángulo ΔABC se cumple que $m_a = 4$, $m_b = 5$ y $m_c = 3$, encontrar las longitudes de los lados del triángulo.

8.688. Si en el triángulo ΔABC se cumple que $m_a = 12$, $m_b = 15$ y $m_c = 9$, probar que el ángulo $\angle M_aGC$ es recto.

8.689. Sea ΔABC un triángulo tal que $m_a = b$. Probar que $c^2 = m_a^2 + 2|M_aC|^2$.

8.690. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumple la relación

$$b_a^2(b+c)^2 + e_a^2(b-c)^2 = 4b^2c^2.$$

8.691. Probar que en cualquier triángulo se cumplen las siguientes identidades:

$$h_a = \frac{a\operatorname{sen}\angle B\operatorname{sen}\angle C}{\operatorname{sen}\angle A},\quad h_b = \frac{b\operatorname{sen}\angle A\operatorname{sen}\angle C}{\operatorname{sen}\angle B}\quad \text{y}\quad h_c = \frac{c\operatorname{sen}\angle A\operatorname{sen}\angle B}{\operatorname{sen}\angle C}.$$

8.692. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumplen las identidades

$$b_a = \frac{2bc\cos\frac{\angle A}{2}}{b+c},\quad b_b = \frac{2ac\cos\frac{\angle B}{2}}{a+c}\quad \text{y}\quad b_c = \frac{2ab\cos\frac{\angle C}{2}}{a+b}.$$

8.693. Si ΔABC es un triángulo rectángulo con hipotenusa c, probar las siguientes identidades:

$$m_a = \frac{\sqrt{a^2+4b^2}}{2}, \qquad m_b = \frac{\sqrt{4a^2+b^2}}{2}, \qquad m_c = \frac{a}{2},$$

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3c^2}{2}, \qquad m_a^2 + m_b^2 = \frac{5c^2}{4},$$

$$h_a = a, \quad h_b = b, \quad h_c = \frac{ab}{c},$$

$$b_a = \frac{b}{b+c}\sqrt{a^2+(b+c)^2}, \quad b_b = \frac{a}{a+c}\sqrt{b^2+(a+c)^2}, \quad b_c = \sqrt{2}\,\frac{ab}{a+b},$$

$$e_a = \sqrt{\frac{2c}{c-a}}, \quad e_b = \sqrt{\frac{2c}{c-b}} \quad \text{y} \quad e_c = \frac{ab\sqrt{2}}{a-b}.$$

8.694. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumplen las identidades

$$e_a = 2\frac{\sqrt{bc(s-b)(s-c)}}{b-c}, \quad e_b = 2\frac{\sqrt{ac(s-a)(s-c)}}{a-c} \quad \text{y} \quad e_c = 2\frac{\sqrt{ab(s-a)(s-b)}}{a-b}.$$

8.695. Sea $\Delta(a,b,c)$ un triángulo isósceles con $b = c$. Probar las siguientes identidades:

a. $m_a = b_a = h_a = \sqrt{b^2 - \dfrac{a^2}{4}}$. b. $m_b = m_c = \sqrt{\dfrac{a^2}{2} + \dfrac{b^2}{4}}$.

c. $b_b = b_c = \dfrac{a\sqrt{b(a+2b)}}{a+b}$.

d. $h_b = h_c = \dfrac{a\sqrt{4b^2-a^2}}{2b}$. e. $e_b = e_c = \dfrac{a\sqrt{b(2b-a|)}}{a-b}$.

8.696. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumplen las siguientes identidades:

$$b_a^2 = bc\left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right), \quad b_b^2 = ac\left(1 - \frac{b^2}{(a+c)^2}\right) \quad \text{y} \quad b_c^2 = ab\left(1 - \frac{c^2}{(a+b)^2}\right).$$

8.697. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumplen las identidades:

a. $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \dfrac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$.

b. $m_a^4 + m_b^4 + m_c^4 = \dfrac{9}{16}(a^4 + b^4 + c^4)$.

8.698[l-143]. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumple la identidad

$$16(m_a^2 m_b^2 + m_b^2 m_c^2 + m_c^2 m_a^2) = 9(a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2).$$

8.699. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumplen las siguientes igualdades:

$$a = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{2}m_b^2 + \frac{1}{2}m_c^2 - \frac{1}{4}m_a^2},$$

$$b = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{2}m_a^2 + \frac{1}{2}m_c^2 - \frac{1}{4}m_b^2} \quad \text{y}$$

$$c = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{2}m_a^2 + \frac{1}{2}m_b^2 - \frac{1}{4}m_c^2}.$$

8.700. Probar que la suma de los cuadrados de las tres medianas de cada uno de los triángulos rectángulos con hipotenusa congruente es igual a una constante.

8.701l-32, Problem 132]. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumple la desigualdad

$$\sqrt{b_a} + \sqrt{b_b} + \sqrt{b_c} \le \sqrt{m_a} + \sqrt{m_b} + \sqrt{m_c}.$$

8.702[l-192, p. 204]. En todo triángulo ΔABC, probar las siguientes identidades:

$$\frac{1}{a} = 2h_a\sqrt{\frac{1}{h_s}\left(\frac{1}{h_s}-\frac{1}{h_a}\right)\left(\frac{1}{h_s}-\frac{1}{h_b}\right)\left(\frac{1}{h_s}-\frac{1}{h_c}\right)},$$

$$\frac{1}{b} = 2h_b\sqrt{\frac{1}{h_s}\left(\frac{1}{h_s}-\frac{1}{h_a}\right)\left(\frac{1}{h_s}-\frac{1}{h_b}\right)\left(\frac{1}{h_s}-\frac{1}{h_c}\right)} \quad \text{y}$$

$$\frac{1}{c} = 2h_c\sqrt{\frac{1}{h_s}\left(\frac{1}{h_s}-\frac{1}{h_a}\right)\left(\frac{1}{h_s}-\frac{1}{h_b}\right)\left(\frac{1}{h_s}-\frac{1}{h_c}\right)},$$

en donde $\frac{1}{h_s} = \frac{1}{2}(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c})$.

8.703. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumple la desigualdad $s < b_a + b_b + b_c$.

8.704. En cualquier triángulo ΔABC, probar que $b_a < \frac{b+c}{2}$, $b_b < \frac{a+c}{2}$ y $b_c < \frac{a+b}{2}$.

8.705. En cualquier triángulo ΔABC, probar que $h_a < \frac{b+c}{2}$, $h_b < \frac{a+c}{2}$ y $h_c < \frac{a+b}{2}$.

8.706[l-32, Problem 67]. Si en el triángulo $\Delta(a,b,c)$ se cumple que $a \geq b \geq c$, probar que

$$a + h_a \geq b + h_b \geq c + h_c.$$

8.707. Sean ΔABC un triángulo y $D \in AB$ y $E \in AC$ tales que $\frac{|AE|}{|EC|} = \frac{3}{4}$. Sea F el punto de intersección de $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{DE}$. Dar una condición necesaria y suficiente al cociente $\frac{|AD|}{|DB|}$ para que C sea el punto medio de BF.

8.708[a-106]. El formulario que a continuación enlistamos es una recopilación hecha por J. S. Mackay y el lector puede encontrar en su artículo [a-106] notas históricas y referencias acerca de cada una de las identidades:

1. $|BB_a| = \frac{ac}{b+c}$, $|AB_b| = \frac{bc}{a+c}$, $|AB_c| = \frac{cb}{a+b}$, $|CB_a| = \frac{ab}{b+c}$, $|CB_b| = \frac{ba}{a+c}$ y $|BB_c| = \frac{ca}{a+b}$.

2. $|BE_a| = \frac{ac}{|c-b|}$, $|CE_a| = \frac{ab}{|c-b|}$, $|AE_b| = \frac{bc}{|c-a|}$, $|CE_b| = \frac{ab}{|c-a|}$, $|AE_c| = \frac{bc}{|b-a|}$ y $|BE_c| = \frac{ac}{|b-a|}$.

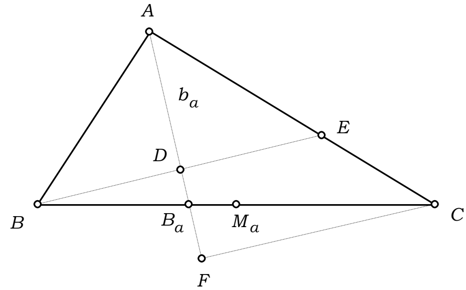
3. $|M_a B_a| = \frac{a|b-c|}{2(b+c)}$, $|M_b B_b| = \frac{b|a-c|}{2(a+c)}$ y $|M_c B_c| = \frac{c|a-b|}{2(a+b)}$.

4. $|M_a E_a| = \frac{a(b+c)}{2|b-c|}$, $|M_b E_b| = \frac{b(a+c)}{2|a-c|}$ y $|M_c E_c| = \frac{c(a+b)}{2|a-b|}$.

5. $|B_a H_a| = \frac{2ss_a|b-c|}{a(b+c)}$, $|B_b H_b| = \frac{2ss_b|a-c|}{b(a+c)}$ y $|B_c H_c| = \frac{2ss_c|a-b|}{c(a+b)}$.

6. $|E_a H_a| = \frac{2s_b s_c(b+c)}{a|b-c|}$, $|E_b H_b| = \frac{2s_a s_c(a+c)}{b|a-c|}$ y $|E_c H_c| = \frac{2s_a s_b(a+b)}{c|a-b|}$.

7. En un triángulo ΔABC, sean D la proyección del vértice B sobre la recta $\overleftrightarrow{AB_a}$, E el punto de intersección de la recta $\overleftrightarrow{BD}$ con la recta $\overleftrightarrow{AC}$, y F la proyección del vértice C sobre la recta $\overleftrightarrow{AB_a}$. Probar las siguientes afirmaciones:



a. D es el punto medio de BE.

b. $|M_a D| = \dfrac{||AB| - |AC||}{2}$.

c. $|M_a F| = \dfrac{||AB| - |AC||}{2}$.

d. $m(\angle ABE) = \dfrac{m(\angle B) + m(\angle C)}{2}$.

e. $m(\angle CBE) = \dfrac{|m(\angle B) - m(\angle C)|}{2}$.

f. $\dfrac{|AD|}{|AB_a|} = \dfrac{|AC| + |AB|}{2|AC|}$. g. $\dfrac{|AF|}{|AB_a|} = \dfrac{|AC| + |AB|}{2|AB|}$. h. $\dfrac{|DF|}{|AB_a|} = \dfrac{||AC|^2 - |AB|^2|}{2|AB||AC|}$.

i. $\dfrac{|DB_a|}{|AB_a|} = \dfrac{||AC| - |AB||}{2|AC|}$. j. $\dfrac{|FB_a|}{|AB_a|} = \dfrac{||AC| - |AB||}{2|AB|}$.

k. $\dfrac{|DB_a| + |FB_a|}{|AB_a|} = \dfrac{||AC|^2 - |AB|^2|}{2|AB||AC|}$. l. $are(\Delta ABC) = |AF||BD| = |AD||CF|$.

m. $m(\angle ABD) = m(\angle ACF) = 90 - \dfrac{m(\angle A)}{2}$.

n. $|AD||AF| = s\, s_a$, $|BD||CF| = s_b\, s_c$ y $|AD||AF||BD||CF| = are(\Delta ABC)^{\,2}$.

8. Expresiones para los lados del triángulo $\Delta B_a B_b B_c$:

$$|B_b B_c|^2 = \frac{abc}{(a+c)^2(a+b)^2}(b^2c + bc^2 - ac^2 + a^2c + a^2b - ab^2 + a^3 - b^3 - c^3 + 3abc),$$

$$|B_a B_b|^2 = \frac{abc}{(b+c)^2(a+c)^2}(a^2b + ab^2 - cb^2 + c^2b + c^2a - ca^2 + c^3 - a^3 - b^3 + 3abc) \text{ y}$$

$$|B_a B_c|^2 = \frac{abc}{(a+b)^2(b+c)^2}(c^2a + ca^2 - a^2b + ab^2 + b^2c - bc^2 + b^3 - a^3 - c^3 + 3abc).$$

9. Expresiones para los lados del triángulo $\Delta E_a E_b E_c$:

$$|E_b E_c|^2 = \frac{abc}{(a-c)^2(a-b)^2}(a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - b^2c - bc^2 - ac^2 - a^2c - a^2b - ab^2),$$

$$|E_a E_b|^2 = \frac{abc}{(c-a)^2(c-b)^2}(a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - a^2b - ab^2 - b^2c - bc^2 - ac^2 - a^2c) \text{ y}$$

$$|E_a E_c|^2 = \frac{abc}{(b-a)^2(b-c)^2}(a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - c^2a - a^2c - a^2b - ab^2 - b^2c - bc^2).$$

8.709. Sean $\angle AOB$ un ángulo no degenerado y $P \in int(\angle AOB)$. Si P' y P'' son los puntos simétricos de P con respecto a las rectas $\overleftrightarrow{OA}$ y $\overleftrightarrow{OB}$, respectivamente, probar que la mediatriz del segmento $P'P''$ pasa por O.

8.710. Sean $\angle\alpha$ un ángulo no degenerado y P un punto fijo sobre su bisectriz. Una recta que pasa por P corta a los lados del ángulo en los puntos A y B. Probar que la suma $\dfrac{1}{|OA|} + \dfrac{1}{|OB|}$ es una constante que no depende de la elección de la recta secante.

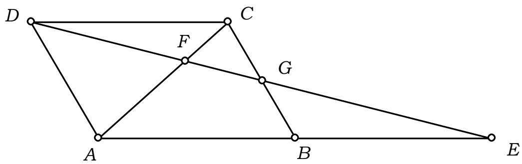
8.711. En un cuadrilátero $\square ABCD$, se tiene que las bisectrices de los ángulos $\angle B$ y $\angle D$ se intersecan en la diagonal AC. Probar que las bisectrices de los ángulos $\angle A$ y $\angle C$ se intersecan en la diagonal DB.

8.712. Sean $\square ABCD$ un cuadrilátero y $P \in ext(\square ABCD)$. Probar que los triángulos ΔPAC y ΔPDB tienen el mismo centro de gravedad.

8.713. Si $\square ABCD$ es un paralelogramo tal que $m(\angle A) = 30$, probar que $are(\square ABCD) = \dfrac{ab}{2}$.

8.714. Sea $\square ABCD$ un paralelogramo tal que $m(\angle A) = 60$. Probar que su altura con respecto a la base esta dada por la fórmula $h = \dfrac{\sqrt{3}}{2}|AD|$.

8.715. En la figura:

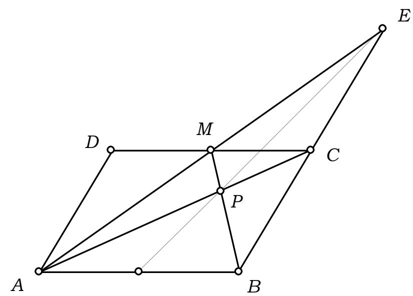


tenemos que $\square ABCD$ es un paralelogramo y $AB \cong BE$. Si F y G son los puntos de intersección de DE con AC y BC, respectivamente, probar que

a. G es el punto medio de BC y

b. $|AF| = |FC|$.

8.716. En la figura:



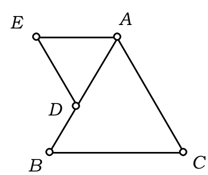
tenemos que $\square ABCD$ es un paralelogramo, M es el punto medio de CD, E es el punto de intersección de las rectas $\overleftrightarrow{AM}$ y $\overleftrightarrow{BC}$, y P es el punto de intersección de BM y AC. Probar las siguientes afirmaciones:

a. $BC \cong CE$.

b. $\overrightarrow{EP}$ biseca a AB.

8.717. Sea $\square ABCD$ un trapecio isósceles con $AB \parallel CD$ y $CD < AB$. Sean M y N los puntos medios de AC y BD, respectivamente, y H el pie de la altura correspondiente al vértice D con respecto al lado AB. Probar que $\square AHMN$ es un paralelogramo.

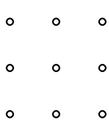
8.718. En la figura:



tenemos dos triángulos equiláteros ΔABC y ΔEDA. Probar que $BE \cong CD$.

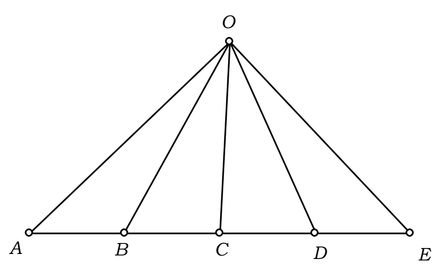
8.719. ¿Cuál es la probabilidad de que al romper en tres partes un palillo se forme un triángulo?

8.720. En la figura:



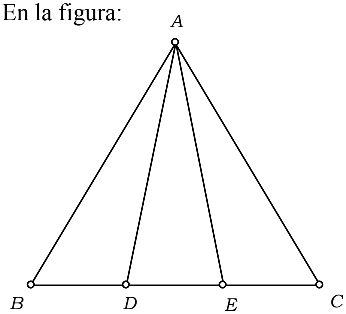
tenemos nueve puntos que distan uno del otro, a lo largo y a lo ancho, 1 cm. Calcular el área de cada uno de los triángulos cuyos vértices yacen en los nueve puntos.

8.721. En la figura:



tenemos que $d(O, \overleftrightarrow{AE}) = 2$, $|AB| = 1$ y $AB \cong BC \cong CD \cong DE$. ¿Cuánto suman las áreas de todos los triángulos que se puedan formar?

8.722. En la figura:



si ΔABC es un triángulo equilátero de perímetro 90 y $BD \cong DE \cong EC$, encontrar el perímetro del triángulo ΔADE.

8.723[a-90]. Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos. Pongamos $\alpha = are(\Delta ABC)$, $\alpha' = are(\Delta A'B'C')$, $\rho = per(\Delta ABC)$ y $\rho' = per(\Delta A'B'C')$. Probar que cada una de las siguientes condiciones garantiza la congruencia de los triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$:

a. $\alpha = \alpha'$, $c = c'$ y $\angle C \cong \angle C'$.
b. $\alpha = \alpha'$, $\rho = \rho'$ y $\angle C \cong \angle C'$.
c. $\alpha = \alpha'$, $\rho = \rho'$ y $c = c'$.
d. $\rho = \rho'$, $c = c'$ y $\angle C \cong \angle C'$.
e. $\alpha = \alpha'$, $\angle C \cong \angle C'$ y $\angle B \cong \angle B'$.
f. $\rho = \rho'$, $\angle C \cong \angle C'$ y $\angle B \cong \angle B'$.
g. $\rho = \rho'$, $c = c'$ y $b = b'$.
h. ¿Pueden las condiciones $\alpha = \alpha'$, $c = c'$ y $b = b'$ implicar que los dos triángulos sean congruentes?

8.724. Sea ΔABC un triángulo. Una recta paralela a BC corta a AB y AC en los puntos D y E, respectivamente. Si $\dfrac{|AD|}{|AB|} = p$, probar que $are(\Delta ADE) = p^2\, are(\Delta ABC)$ y $are(\Delta ABE) = p\, are(\Delta ABC)$.

8.725. Si $k \geq 2$ es un número natural, calcular el área del triángulo $\Delta(k, k+1, k+2)$.

8.726. Calcular el área de un triángulo con lados $b = 3^k$ y $c = 2^k$, en donde k es un número entero positivo, y cuyo ángulo comprendido mide 60.

8.727. Si la base de un triángulo isósceles tiene longitud 4 y su perímetro es igual a 16, calcular el área del triángulo.

8.728. Calcular el área del triángulo $\Delta(\angle 75, \angle 45, \angle 60)$ sabiendo que $h_a = 5$.

8.729. En el triángulo $\Delta(10,5,6)$ calcular su área y h_a.

8.730. Sea ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong BC$ y $|BC| = 6$. Si $h_c = 3$, calcular el área del triángulo.

8.731. Sea ΔABC un triángulo rectángulo tal que $m(\angle A) = 90$, $b = 6$ y $c = 8$, encontrar el valor numérico de h_a.

8.732. Expresar el área de un triángulo equilátero en función de una de sus alturas.

8.733. Encontrar el área de un triángulo equilátero cuyas alturas tienen longitud 9.

8.734. Si en el triángulo $\Delta(5,4,c)$ el ángulo $\angle B$ varía entre 0 y 90, ¿entré que valores se encuentra c?

8.735. Calcular el área de un triángulo cuyos lados están en proporción 2:4:6 y su perímetro es igual a 24.

8.736[l-288]. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$. Si la mediana m_a divide al ángulo $\angle A$ en la razón 1:2, expresar el área del triángulo ΔABC en función de m_a.

8.737. Calcular el área del triángulo rectángulo $\Delta(a,b,8)$ si a es su hipotenusa y $a - b = 4$.

8.738. Calcular el área del triángulo rectángulo $\Delta(a,4,c)$ si a es su hipotenusa y el perímetro del triángulo es igual a $3b$.

8.739. Calcular el área de un triángulo rectángulo isósceles de perímetro 90.

8.740. Calcular el área de un triángulo rectángulo cuyo cateto menor tiene 5 de longitud y la diferencia entre las longitudes de su hipotenusa y el otro cateto es 1.

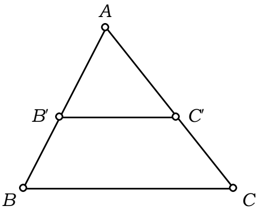
8.741. Si la altura de un triángulo es igual a la longitud del lado correspondiente más 1, y su área es igual a 5, calcular las longitudes de dicho lado y dicha altura.

8.742. Sea ΔABC un triángulo isósceles tal que $b + c = 10$ y $\dfrac{|BB_a|}{|B_aC|} = \dfrac{2}{3}$. Calcular el área del triángulo.

8.743. Sea ΔABC un triángulo isósceles tal que $|AB| = |AC| = 2$ y $m(\angle\alpha) = 150$. Calcular el área del triángulo.

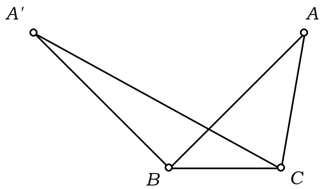
8.744. Se tienen triángulos equiláteros cuyos lados tienen longitudes 1, 2, 3, 4, 5,... Probar que sus áreas están en proporción 1, 4, 9, 16, 25,... .

8.745. En la figura:



tenemos que $BC \parallel B'C'$, $|BC| = 5$, $are(\Delta ABC) = 10$ y $d(\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{B'C'}) = 2$. Calcular $are(\Delta AB'C')$.

8.746. En la figura:



tenemos que $m(\angle CBA) = 45$, $m(\angle CBA') = 135$ y $AB \cong A'B$. Probar que $are(\Delta ABC) = are(\Delta A'BC)$.

8.747. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumplen las siguientes relaciones:

a. $\Delta BGC \sim \Delta M_b G M_c$, $\Delta CGA \sim \Delta M_c G M_a$ y $\Delta AGB \sim \Delta M_a G M_b$.

b. $\dfrac{are(\Delta M_b G M_c)}{are(\Delta ABC)} = \dfrac{are(\Delta M_c G M_a)}{are(\Delta ABC)} = \dfrac{are(\Delta M_a G M_b)}{are(\Delta ABC)} = \dfrac{1}{12}$.

8.748. Probar que las medianas de un triángulo lo dividen en seis triángulos equivalentes.

8.749. Sea ΔABC un triángulo. Sean A_1, B_1 y C_1 los puntos medios de BC, AC y AB, respectivamente, así sucesivamente sean A_{k+1}, B_{k+1} y C_{k+1} los puntos medios de $B_k C_k$, $A_k C_k$ y $A_k B_k$, respectivamente, en donde en k es un número entero positivo. Probar que

$$are(\Delta A_1 B_1 C_1) + are(\Delta(A_2 B_2 C_2)) + \ldots + are(\Delta(A_k B_k C_k)) + \ldots = \frac{are(\Delta ABC)}{3}.$$

8.750. Sean ΔABC un triángulo y M el punto medio de CM_c. Si D es el punto de intersección de BC y $\overleftrightarrow{AM}$, probar que $are(\Delta M_c BD) = are(\Delta AD M_c) = are(\Delta ADC)$.

8.751. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumple la identidad $are(\Delta GBC) = are(\square A M_c G M_b)$.

8.752. Sea ΔABC un triángulo. Por C trazamos una recta paralela a m_b que corte a $\overleftrightarrow{AB}$ en el punto D. Probar que $are(\Delta ADC) = 2are(\Delta ABC)$.

8.753. En un triángulo ΔABC, probar que si $P \in AM_a$, entonces $are(\Delta APB) = are(\Delta APC)$.

8.754. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle B$ tal que $m(\angle A) = 60$ y $|AM_c| = 5$. Calcular el área del rectángulo $\square BEM_b M_c$.

8.755. Sean ΔABC un triángulo, $D \in \overleftrightarrow{AM_a} - AM_a$ tal que $AM_a \cong M_a D$ y $F, G \in \overleftrightarrow{BC} - BC$ tales que $AM_a \cong M_a D$ y $FB \cong BC \cong CG$. Probar que $per(\Delta ADF) = per(\Delta ADG) = 2(m_a + m_b + m_c)$.

8.756. Sea ΔABC un triángulo. Si $L \in BC - \{B, C\}$, $M \in AC - \{A, C\}$ y $N \in AB - \{A, B\}$, probar que $per(\Delta LMN) < per(\Delta ABC)$.

8.757. Calcular el área de un triángulo equilátero cuyo centro de gravedad está a distancia 4 de uno de los vértices del mismo triángulo.

8.758. Por el centro de gravedad de un triángulo ΔABC trazamos una recta paralela a BC que corte a AB y AC en los puntos D y E, respectivamente. Encontrar la proporción del área del trapecio $\square DBCE$ y el área del triángulo original.

8.759. Sea ΔABC es un triángulo. Tomemos $A' \in \overleftrightarrow{AC}$, $B' \in \overleftrightarrow{BA}$ y $C' \in \overleftrightarrow{BC}$, de tal forma que $A \in A'C$, $B \in B'A$, $C \in BC'$, $BB' \cong AB$, $CC' \cong BC$ y $AA' \cong AC$. Probar que $are(\Delta A'B'C') = 7are(\Delta ABC)$.

8.760. Dado un triángulo, dividirlo en tres triángulos cuyas áreas estén en proporción con tres números reales positivos dados.

8.761. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$. Probar las siguientes identidades:

a. $\dfrac{are(\Delta ABH_a)}{are(\Delta ACH_a)} = \dfrac{|AB|^2}{|AC|^2}$. b. $\dfrac{|BH_a|}{|AH_a|} = \dfrac{|AB|}{|AC|}$.

8.762. Sea ΔABC un triángulo. Probar que $AB \cong AC$ si y solo si $are(\Delta ABB_a) = are(\Delta AB_aC)$.

8.763. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumple que $are(\Delta ABC) < s^2$.

8.764. Probar que en todo triángulo rectángulo ΔABC se cumplen las siguientes desigualdades:

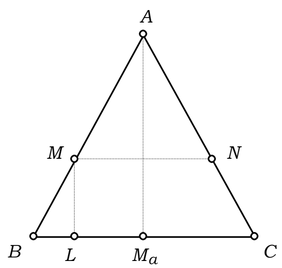
a. $\sqrt{are(\Delta ABC)} \le s(\sqrt{2} - 1)$. b. $\sqrt{are(\Delta ABC)} < s$. c. $\dfrac{s}{\sqrt{are(\Delta ABC)}} \ge \sqrt{2} + 1$.

8.765. Probar que si ΔABC es un triángulo rectángulo en $\angle A$, entonces $are(\Delta ABC) = s(s-a) = (s-b)(s-c)$.

8.766. Probar que el área de un triángulo rectángulo isósceles es igual a $\dfrac{1}{4}$ del cuadrado de su hipotenusa.

8.767. Encontrar la razón entre las áreas de dos triángulos equiláteros si el lado de uno de ellos es congruente a la altura del otro.

8.768. En la figura:



ΔABC es un triángulo isósceles con $AB \cong AC$, $MN \parallel BC$ y $L \in BM_a$.

Si $p = \dfrac{are(\Delta ABC)}{are(LCMN)} \ge \dfrac{3a}{4}$, probar que la longitud del segmento BL se puede expresar en función de p y a, ¿cuántas soluciones hay? ¿Es realmente necesario que $p \ge \dfrac{3a}{4}$?

8.769. Sean A, B, C y D cuatro puntos consecutivos y P un punto fuera de la recta que contiene a estos puntos.

a. Probar que $are(\Delta PAD)$, $are(\Delta PAC)$ y $are(\Delta PBD)$ son los lados de un triángulo.

b. Probar que $per(\Delta PAD)$, $per(\Delta PAC)$ y $per(\Delta PBD)$ son los lados de un triángulo.

c. Si $are(\Delta PAD)$, $are(\Delta PAC)$ y $are(\Delta PBD)$ son los lados de un triángulo, ¿se puede decir algo sobre el ordenamiento de los puntos dados sobre la recta que los contiene?

8.770. Dado un triángulo ΔABC, encontrar las longitudes de los lados de un triángulo isósceles $\Delta A'B'C'$ tal que $are(\Delta ABC) = are(\Delta A'B'C')$, ¿es posible que $per(\Delta A'B'C') = per(\Delta ABC)$?

8.771. Si $are(\Delta(4,b,c)) = 16$ y $\Delta(4,b,c) \sim \Delta(2,b',c')$, encontrar $are(\Delta(2,b',c'))$.

8.772. Sea ΔABC un triángulo tal que $per(\Delta ABC) = are(\Delta ABC)$. Si $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, ¿es cierto que $per(\Delta A'B'C') = are(\Delta A'B'C')$?

8.773. Se tienen dos triángulos semejantes cuyos lados están en la razón de semejanza $\dfrac{2}{3}$. Si un tercer triángulo es semejante a los dados y su área es igual a la suma de las áreas de estos dos triángulos, encontrar la razón de semejanza en que se encuentra cada uno de los dos triángulos dados con el tercero.

8.774. Probar que la razón entre las áreas de dos triángulos semejantes es igual a la razón entre los cuadrados de sus bisectrices correspondientes.

8.775. Si dos triángulos tienen un ángulo congruente, probar que la razón entre las áreas de ambos triángulos es igual a la razón entre las áreas de los rectángulos cuyos lados son los lados de los ángulos congruentes.
8.776. Calcular el área de un triángulo ΔABC tal que $m_a = 10$ y que es semejante al triángulo $\Delta(5,3,4)$.
8.777. Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos isósceles con $a = b$ y $a' = b'$. Si $c = 2per(\Delta A'B'C')$, $per(\Delta ABC) - per(\Delta A'B'C') = 40$, $a + a' = 10$ y $a' = 5$, encontrar las longitudes de los lados de ambos triángulos.
8.778. Se tienen dos triángulos equiláteros tales que la longitud del lado de uno de ellos es 4 unidades más grande que el perímetro del otro, y el perímetro del que tiene mayor lado es 18 unidades más grande que el perímetro del otro. Hallar las longitudes de los lados de ambos triángulos.
8.779. Si $are(\Delta ABC) < are(\Delta A'B'C')$, ¿es cierto que $per(\Delta ABC) < per(\Delta A'B'C')$?
8.780. Si $per(\Delta ABC) < \dfrac{per(\Delta A'B'C')}{2}$, ¿es cierto que $are(\Delta ABC) < are(\Delta A'B'C')$?
8.781. Sea ΔABC un triángulo. Si $\Delta A'B'C'$ es el triángulo formado por las rectas paralelas a los lados de ΔABC que pasan por los vértices del mismo, probar que $per(\Delta A'B'C') = 2per(\Delta ABC)$.
8.782. Si $per(\Delta ABC) = 12$ y a, b y c son números enteros positivos, encontrar los posibles valores de a, b y c.
8.783. Si $\Delta(a,b,c)$ es un triángulo rectángulo con cateto c tal que su área y perímetro son iguales a 10, encontrar la longitud de cada uno de los lados del triángulo.
8.784. Si en el triángulo ΔABC se cumple que $per(\Delta ABC) = 61$, $|BB_a| = 5$ y $|B_aC| = 10$, encontrar las longitudes de los lados del triángulo.
8.785. Sea ΔABC un triángulo tal que $m(\angle A) = 135$, $b = 8$ y $are(\Delta ABC) = 20$. Calcular las longitudes de los dos lados restantes del triángulo.
8.786. Sea ΔABC un triángulo tal que $a = 10$, $m_a = 8$ y $are(\Delta ABC) = 30$. Calcular las longitudes de los otros dos lados del triángulo.
8.787. Sea ΔABC un triángulo tal que $are(\Delta ABC) = 20$, H_a divide a BC en la razón $\dfrac{|BH_a|}{|H_aC|} = \dfrac{2}{3}$ y $\dfrac{h_a}{|BH_a|} = \dfrac{2}{5}$. Calcular la longitud de cada uno de los lados del triángulo.
8.788. Sea ΔABC un triángulo tal que $m(\angle B) = 60$ y $|AB| = 10$. Si $are(\Delta ABC) = 30$, calcular las longitudes de los lados restantes del triángulo.
8.789. Calcular la longitud de los catetos del triángulo rectángulo $\Delta(a,b,10)$ con hipotenusa c sabiendo que su área es igual a 10.
8.790[I-163]. Hallar las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo conociendo su perímetro y la razón entre sus catetos.
8.791. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$. Probar que las longitudes de sus catetos b y c se pueden expresar en función de b_a y del área del triángulo.
8.792. Sea ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$. Si $d(O, \overleftrightarrow{BC}) = 3$, $are(\Delta ABC) = 20$ y $\dfrac{|AO|}{a} = \dfrac{1}{2}$, calcular las longitudes de los lados del triángulo.
8.793. Sea $\Delta(a,b,c)$ un triángulo rectángulo isósceles con hipotenusa a. Hacia el exterior del triángulo y sobre uno de sus catetos construimos un triángulo equilátero y sobre el segundo cateto construimos un cuadrado. Si el área de la región poligonal resultante es de 64, calcular el valor numérico de a y b.
8.794. Sean ΔABC un triángulo. Hacia su exterior trazamos el cuadrado $\Box BADE$. Si el área del triángulo ΔEBC es igual a un cuarto del área del cuadrado, probar que el triángulo original es isósceles.
8.795. Encontrar la longitud de cada uno de los lados de un triángulo equilátero cuya área es igual a la diferencia de las áreas de dos triángulos equiláteros de lados 5 y 10.
8.796. Si el triángulo $\Delta(a,b,c)$ tiene la misma área que un triángulo equilátero cuyos lados tienen longitud a, probar que $h_a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2$.
8.797. Si un triángulo equilátero tiene la misma área que un cuadrado, expresar el perímetro del triángulo en función del perímetro del cuadrado.

8.798. Dados dos triángulos equiláteros cuyos lados tienen longitudes a y a', encontrar la longitud del lado de un tercer triángulo equilátero cuya área sea igual a la suma de las áreas de los dos triángulos equiláteros dados.
8.799. Sean ΔABC un triángulo y $D \in AB$ y $E \in AC$ tales que $DE \parallel BC$. Si $per(\Delta ABC) = per(\square BCED)$, expresar las longitudes de los segmentos AD, DB, AE y EC en función de a, b y c.
8.800. Sean ΔABC un triángulo equilátero cuyos lados tienen longitud 1 y D la proyección de A sobre e_b. Calcular el área del triángulo ΔADB.
8.801. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$ tal que $|AB| = 6$ y $|AC| = 12$. Trazamos una recta paralela a $\overleftrightarrow{AC}$ que pase por el punto B, la cual corta a $\overrightarrow{AH_a}$ en el punto D. Encontrar las longitudes de los lados del triángulo ΔBDH_a.
8.802. Sean ΔABC un triángulo, $E \in AB$ y $D \in AC$. Supongamos que P es el punto de intersección de BD y EC y es tal que $\angle PBE \cong \angle DCP$. Probar que el área del triángulo ΔPBC es la media geométrica de las áreas de los triángulos ΔPCD y ΔPEB.
8.803. Sean ΔABC un triángulo y $P \in BC$. Probar que $are(\Delta APB) + are(\Delta APC) = \dfrac{a\,|PA|}{2}$ si y solo si $P = H_a$.
8.804. Sean ΔABC es un triángulo y $P \in AB$. Probar que $are(\Delta APC) = \dfrac{|AP|}{|AB|}\, are(\Delta ABC)$.
8.805. En el triángulo rectángulo $\Delta(16,5,6)$ con hipotenusa a tomamos un punto $P \in AB$ tal que $|AP| = 1$. Calcular el área del triángulo ΔPBC.
8.806. Sea ΔABC un triángulo equilátero cuyos lados tienen longitud 6. Si $P \in BC$, $Q \in AC$ y $R \in AB$ satisfacen que $|PC| = |QA| = |RB| = 1$, calcular el área del triángulo ΔPQR.
8.807. En el triángulo $\Delta(10,7,5)$, encontrar un punto $D \in BC$ tal que $are(\Delta ABD) - are(\Delta ADC) = 1$.
8.808. Sean ΔABC un triángulo. Si $P \in m_a$, probar que $are(\Delta ABP) = are(\Delta ACP)$.
8.809. Sean ΔABC un triángulo y $P \in AB$. Trazamos una recta paralela a $\overleftrightarrow{PC}$ que pase por el vértice B y corte a $\overleftrightarrow{AC}$ en el punto D. Si Q es el punto medio de AD, probar que $2are(\Delta APQ) = are(\Delta ABC)$.
8.810. Sea ΔABC un triángulo. Si $D \in BC$, probar que $are(\Delta ABC) = a|AD|\text{sen}\angle\alpha$, en donde $\angle\alpha$ es el ángulo formado por las rectas $\overleftrightarrow{DC}$ y $\overleftrightarrow{AD}$.
8.811. Sean ΔABC un triángulo y $D \in \overleftrightarrow{BC} - BC$. Probar que $are(\Delta ABC) = \dfrac{a\,|AD|\,\text{sen}\angle\alpha}{2}$, en donde $\angle\alpha$ es el ángulo de vértice D y cuyos lados yacen sobre las rectas $\overleftrightarrow{DA}$ y $\overleftrightarrow{BC}$.
8.812. Sean ΔABC un triángulo y $D \in AC$ tales que $3|AD| = 2|AC|$. Sea E el punto de intersección de $\overleftrightarrow{BD}$ y la recta paralela a $\overleftrightarrow{BC}$ que pasa por A. Expresar el área del triángulo ΔCED como fracción del área del triángulo original ΔABC.
8.813. Sobre los catetos del triángulo rectángulo $\Delta(5,4,3)$ y en su exterior construimos dos triángulos equiláteros ΔADC y ΔABE. Calcular el área de dichos triángulos.
8.814. Sean ΔABC un triángulo y $D \in BC$. Si $q|BD| = p|BC|$, probar que $are(\Delta ABD) = \dfrac{p}{q-p}\, are(\Delta ACD)$.
8.815. Sean ΔABC un triángulo, $L \in AB$ y $N \in AC$. Si $|AL| = 3|LB|$ y $|NC| = 2|AN|$, encontrar $\dfrac{are(\Delta M_a NL)}{are(\Delta ABC)}$.
8.816. Sea ΔABC un triángulo tal que $\dfrac{|AB|}{|AC|} = \dfrac{4}{5}$. Encontrar $\dfrac{are(\Delta ABC)}{are(\Delta ABB_a)}$ y $\dfrac{are(\Delta ABC)}{are(\Delta AB_aC)}$.
8.817. Sea ΔABC un triángulo tal que $|AB| = 5$ y $|AC| = 4$. Calcular $\dfrac{are(\Delta ACE_a)}{are(\Delta ABC)}$.

8.818. En un triángulo ΔABC, si $X \in AB$ y $Y \in AC$ son tales que $AC \parallel XB_a$ y $AB \parallel YB_a$, probar que

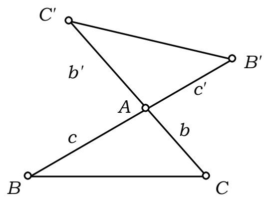
$$\frac{are(B_aYAX)}{are(\Delta ABC)} = \frac{2bc}{(b+c)^2}.$$

8.819. En el triángulo ΔABC, sean $P \in BC$, $Q \in AC$ y $R \in AB$ tales que $3|PC| = |BC|$, $3|AQ| = |QC|$ y $3|RB| = |AB|$. Si L, M y N son los puntos de intersección de AP y BQ, BQ y CR, y CR y PA, respectivamente, calcular la razón $\dfrac{are(\Delta LMN)}{are(\Delta ABC)}$.

8.820. Supongamos que $\Delta(a,8,2) \sim \Delta(a',b',c')$ y $b' - c' = 4$. Calcular $\dfrac{are(\Delta(a',b',c'))}{are(\Delta(a,8,2))}$.

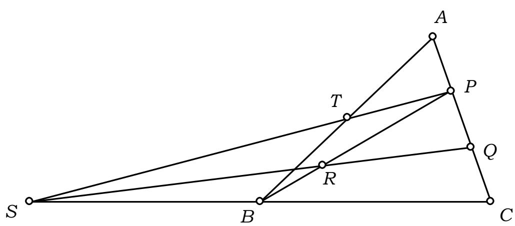
8.821. Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos tales que $\angle A \cong \angle A'$ o $m(\angle A) + m(\angle A') = 180$. Probar que $\dfrac{are(\Delta ABC)}{are(\Delta A'B'C')} = \dfrac{bc}{b'c'}$.

8.822. En la figura:



probar que $\dfrac{are(\Delta ABC)}{are(\Delta AB'C')} = \dfrac{cb}{c'b'}$.

8.823. En la figura:



tenemos que $AP \cong PQ \cong QC$ y $\dfrac{|BR|}{|RP|} = \dfrac{1}{2}$.

a. Encontrar $\dfrac{are(BCQR)}{are(\Delta ABC)}$.

b. Probar que B es el punto medio de SC.

c. $T = M_c$.

8.824. Sean ΔABC un triángulo y $P \in AB$ y $Q \in AC$ tales que $PQ \parallel BC$. Probar que

$$\frac{are(\Delta APQ)}{are(\Delta BPQ)} = \frac{are(\Delta APQ)}{are(\Delta CPQ)}.$$

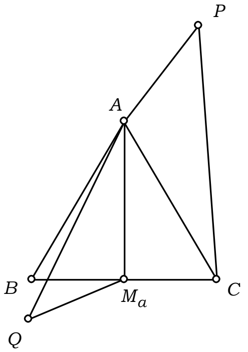
8.825. En un triángulo ΔABC, sean $P \in AB$ y $Q \in AC$ tales que $\dfrac{|PB|}{|AB|} = \dfrac{|QC|}{|AC|} = \dfrac{1}{k}$, en donde k es un número entero positivo. Si R es el punto de intersección de BQ y CP, expresar $\dfrac{are(\Delta RPQ)}{are(\Delta ABC)}$ en función de k.

8.826. Sean ΔABC un triángulo y $D \in AB$ y $E \in AC$ tales que $\dfrac{|AD|}{|DB|} = \dfrac{|AE|}{|EC|} = \dfrac{1}{4}$. Calcular $\dfrac{are(\Delta ADE)}{are(\Delta ABC)}$.

8.827. Sea ΔABC un triángulo rectángulo. Si A', B' y C' son los puntos simétricos de A, B y C con respecto a los lados BC, AC y AB, respectivamente, calcular la razón $\dfrac{are(\Delta ABC)}{are(\Delta A'B'C')}$.

8.828 (Baltic Way 1999, Problem 14). Sea ΔABC un triángulo isósceles tal que $AB \cong AC$. Una recta l corta a AB y a AC en los puntos D y E, respectivamente. La recta paralela a AC que pasa por B corta a l en el punto F y la recta paralela a AB que pasa por C corta a l en el punto G. Probar que $\dfrac{are(BCGD)}{are(BCEF)} = \dfrac{|AD|}{|AE|}$.

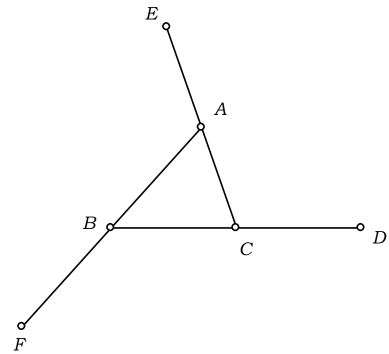
8.829. En la figura:



ΔABC es un triángulo equilátero y $\Delta AQM_a \sim \Delta PAC$.

Probar que $\dfrac{are(\Delta AQM_a)}{are(\Delta PAC)} = \dfrac{3}{4}$.

8.830. En la figura:



ΔABC es un triángulo en el cual hemos extendido cada uno de sus lados, de tal manera que $BC \cong CD$, $AC \cong AE$, y $AB \cong BF$. Encontrar $\dfrac{are(\Delta ABC)}{are(\Delta DEF)}$.

8.831. Sea ΔABC un triángulo equilátero tal que $|AB| = |AC| = 7$ y $|BC| = 3$. Prolongamos el segmento BC hasta un punto D tal que $|CD| = 1$. Calcular el área del triángulo ΔABD.

8.832[l-32, Problem 250]. Dados los lados congruentes de un triángulo isósceles, ¿cuál es la longitud del tercer lado para que el triángulo alcance su máxima área?

8.833. Sea ΔABC un triángulo equilátero cuyos lados tienen longitud 5, ¿qué cantidad x se le debe agregar a cada lado del triángulo para que se obtenga un triángulo equilátero de área 90?

8.834[l-56]. Si a un triángulo equilátero le aumentamos a cada uno de sus lados una longitud positiva i, obtenemos un triángulo equilátero cuya área es igual a j^2, expresar la longitud de los lados del triángulo equilátero original en función de i y j.

8.835. Si la altura h_a de un triángulo ΔABC se incrementa 50 unidades, ¿cuánto se le debe quitar a la base correspondiente para que el área del nuevo triángulo tenga la misma área que el triángulo original?

8.836. Sea ΔABC. Dividimos BC en k segmentos congruentes entre sí, en donde $k > 2$ es un número entero positivo. Sean $B_1, B_2, ..., B_k$ son los puntos de dicha división. Por cada uno de estos puntos trazamos rectas paralelas a AB que corten a AC en los puntos $A_1, A_2, ..., A_k$, respectivamente. Pongamos $A_0 = A$ y $B_0 = B$.

a. Calcular el cociente $\dfrac{are(A_iB_iC)}{are(A_jB_jC)}$, para cada $0 \le i < j \le k$.

b. Expresar el área del trapecio $\square B_i\, B_{i+1}\, A_{i+1}\, A_i$ en términos del área del triángulo ΔABC.

8.837. Si ΔABC es un triángulo isósceles con $b = c$, probar que

$$are(\Delta ABC) = \frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{4}.$$

8.838. Sea ΔABC un triángulo isósceles con $b = c$. Probar las identidades $b = \dfrac{s^2 + h_a^2}{2s}$ y $a = \dfrac{s^2 - h_a^2}{s}$.

8.839[a-5] y [a-6]. A continuación, enlistamos parte del formulario de M. Baker que consiste de varias expresiones del área de un triángulo ΔABC cualquiera (la otra parte de dicho formulario se dará en el Problema 9.742):

$$are(\Delta ABC) = \sqrt{2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4}$$

$= \frac{4}{3}\sqrt{m_s(m_s - m_a)(m_s - m_b)(m_s - m_c)}$, en donde $m_s = \frac{1}{2}(m_a + m_b + m_c)$,

$$= \frac{1}{3}\sqrt{2m_a^2m_b^2 + 2m_b^2m_c^2 + 2m_c^2m_a^2 - m_a^4 - m_b^4 - m_c^4}$$

$$= \frac{h_a^2h_b^2h_c^2}{\sqrt{(h_ah_b + h_bh_c + h_ch_a)(-h_ah_b + h_bh_c + h_ch_a)(h_ah_b - h_bh_c + h_ch_a)(h_ah_b + h_bh_c - h_ch_a)}} = \frac{\sqrt[3]{abch_ah_bh_c}}{2}$$

$$= \sqrt{\frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{3(\frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2})}} = \frac{1}{3h_ah_bh_c}\sqrt{(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)(h_a^2h_b^2 + h_b^2h_c^2 + h_c^2h_a^2)} =$$

$$= \frac{1}{4}b_a\,b_b\,b_c(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{a+b+c})$$

$$= \frac{3}{8}b_a\,b_b\,b_c(\frac{1}{\sqrt{2m_a^2 + 2m_b^2 - m_c^2}} + \frac{1}{\sqrt{2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2}} + \frac{1}{\sqrt{2m_c^2 + 2m_a^2 - m_b^2}} -$$

$$\frac{1}{\sqrt{2m_a^2 + 2m_b^2 - m_c^2} + \sqrt{2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2} + \sqrt{2m_c^2 + 2m_a^2 - m_b^2}})$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b_ab_bb_c}{2}(h_a + h_b + h_c - \frac{1}{\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}})} = \frac{b_ab_bb_c\sqrt{(m_a^2 - h_a^2)(m_b^2 - h_b^2)(m_c^2 - h_c^2)}}{s(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{8m_c^2(a^2 + b^2 - 2m_c^2) - (a^2 - b^2)^2} = \frac{1}{2}h_c(\sqrt{a^2 - h_c^2} + \sqrt{b^2 - h_c^2})$$

$$= \frac{1}{2}b_c ab(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})\sqrt{1 - \frac{1}{4}b_c^2(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})^2} = \frac{1}{3}\sqrt{4m_b^2m_c^2 - (\frac{9}{4}a^2 - (m_b^2 + m_c^2))^2}$$

$= \frac{2}{3}\sqrt{m_b^2m_c^2 - m_a^4}$, en donde $2k_a^2 = \frac{9}{4}a^2 - (m_b^2 + m_c^2)$,

$$= \frac{h_b^3\sqrt{a^2 - h_a^2} - h_c^3\sqrt{a^2 - h_c^2}}{2(h_b^2 - h_c^2)} = \frac{1}{6}h_a(\sqrt{4m_b^2 - h_a^2} - \sqrt{4m_c^2 - h_a^2}) = \frac{1}{2}\frac{a \pm b}{\frac{1}{h_a} \pm \frac{1}{h_b}} = \frac{1}{2}\sqrt{abh_ah_b}$$

$$= h_a\sqrt{(h_a^2 + \sqrt{(m_a^2 - h_a^2)(b_a^2 - h_a^2)})(\sqrt{\frac{m_a^2 - h_a^2}{b_a^2 - h_a^2}} - 1)}$$

$$= \frac{1}{2}h_a(\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + m_a^2 - h_a^2 + a\sqrt{m_a^2 - h_a^2}} + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + m_a^2 - h_a^2 - a\sqrt{m_a^2 - h_a^2}})$$

$$= h_a(\sqrt{b^2 - h_a^2} \pm \sqrt{m_a^2 - h_a^2}) = \frac{1}{2}(a\,d(H, \overleftrightarrow{BC}) + b\,d(H, \overleftrightarrow{AC}) + c\,d(H, \overleftrightarrow{AB})) = \frac{1}{4}(a|HA| + b|HB| + c|HC|)$$

$$= \frac{1}{8R}(a^2|HA|\csc\angle A + b^2|HB|\csc\angle B + c^2|HC|\csc\angle C)$$

$$= \frac{s}{\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}} = \frac{s_a}{-\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}}$$

$$= 4are(\Delta M_a\ M_b\ M_c) = \frac{are(\Delta H_a H_b H_c)}{2\cos\angle A\cos\angle B\cos\angle C)} = are(\Delta B_a\ B_b\ B_c)\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{2abc}$$

$$= \frac{1}{4}(a^2\cot\angle A + b^2\cot\angle B + c^2\cot\angle C) = \frac{a^2\text{sen}\angle B\text{sen}\angle C}{2\text{sen}\angle A} = \frac{b^2\text{sen}\angle A\text{sen}\angle C}{2\text{sen}\angle B} = \frac{c^2\text{sen}\angle A\text{sen}\angle B}{2\text{sen}\angle C}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{h_a h_b}{\text{sen}\angle C} = \frac{1}{2}\frac{a^2}{\cot\angle B+\cot\angle C} = \frac{1}{2}h_a^2\frac{\text{sen}\angle \text{A}}{\text{sen}\angle B\text{sen}\angle C} = \frac{1}{2}h_a^2(\cot\angle B+\cot\angle C)$$

$$= \frac{1}{2}h_a^2(\text{sen}(2\angle B)+\text{sen}(2\angle C)) = \frac{1}{2}(a^2-b^2)\frac{\text{sen}\angle A\text{sen}\angle B}{\text{sen}(\angle A - \angle B)} = \frac{1}{4}(a^2\,\text{sen}(2\angle B)+b^2\,\text{sen}(2\angle A))$$

$$= \frac{1}{2}\frac{a^2-b^2}{\cot\angle A-\cot\angle B} = \frac{1}{2}(h_b^2 - h_a^2)\frac{\text{sen}\angle A\text{sen}\angle B}{\text{sen}(\angle A - \angle B)}\frac{1}{(\text{sen}\angle C)^2} = \frac{1}{2}h_a\ h_b\frac{\tan\frac{\angle \text{A}}{2}\tan\angle B\tan\frac{\angle C}{2}}{\cos\angle A}$$

$$= h_a\ h_b\frac{\tan\frac{\angle \text{A}}{2}\tan\frac{\angle B}{2}\tan\frac{\angle C}{2}}{\cos\angle A(1-(\tan\frac{\angle B}{2}))^2} = \frac{2m_a^2\text{sen}\angle A\text{sen}\angle B\text{sen}\angle C}{2((\text{sen}\angle A)^2+(\text{sen}\angle B)^2+(\text{sen}\angle C)^2)-3(\text{sen}\angle A)^2}$$

$$= \frac{2(m_b^2-m_a^2)}{3(\cot\angle A-\cot\angle B)} = \frac{1}{4}\frac{a^2+b^2+c^2}{\cot\angle A+\cot\angle B+\cot\angle C} = \frac{1}{3}\frac{m_a^2+m_b^2+m_c^2}{\cot\angle A+\cot\angle B+\cot\angle C}$$

$$= \frac{4m_a^2+3a^2}{8(\cot\angle A+\cot\angle B+\cot\angle C)} = \frac{4(m_a^2+m_b^2)-3c^2}{4(\cot\angle A+\cot\angle B+\cot\angle C)}$$

$$= \frac{h_a+h_b+h_c}{2\left(\frac{\cos\frac{\angle A}{2}}{b_a}+\frac{\cos\frac{\angle B}{2}}{b_b}+\frac{\cos\frac{\angle C}{2}}{b_c}\right)} = \frac{b_a\text{sen}(\angle C+\frac{\angle A}{2})+b_b\text{sen}(\angle A+\frac{\angle B}{2})+b_c\text{sen}(\angle B+\frac{\angle C}{2})}{2\left(\frac{\cos\frac{\angle A}{2}}{b_a}+\frac{\cos\frac{\angle B}{2}}{b_b}+\frac{\cos\frac{\angle C}{2}}{b_c}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}b_a^2\frac{\text{sen}\angle \text{A}}{\text{sen}\angle B\text{sen}\angle C}\text{sen}(\angle B+\frac{\angle A}{2})\text{sen}(\angle A+\frac{\angle B}{2}) = \frac{1}{2}a\,b_a\,\text{sen}(\angle C+\frac{\angle A}{2}) = \frac{h_a(h_b+h_c)}{4\text{sen}(\angle C+\frac{\angle A}{2})\cos\frac{\angle A}{2}}$$

$$= \frac{b_a(h_b+h_c)}{4\cos\frac{\angle A}{2}} = \frac{1}{4}b_a^2(b+c)(\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\tan\frac{\angle A}{2} = \frac{1}{2}b_a\ b_b\frac{\text{sen}(\angle B+\frac{\angle A}{2})\text{sen}(\angle A+\frac{\angle B}{2})}{\text{sen}\angle C}$$

$$= b_a\ b_b\ b_c\frac{-b_a\text{sen}\frac{\angle A}{2}+b_b\text{sen}\frac{\angle B}{2}+b_c\text{sen}\frac{\angle C}{2}}{-b_b b_c\cos\frac{\angle A}{2}+b_c b_a\cos\frac{\angle B}{2}+b_a b_b\cos\frac{\angle C}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}a\text{sen}\angle B(a\cos\angle B+\sqrt{b^2-a^2(\text{sen}\angle B)^2}) = a(-b_a\,\text{sen}\frac{\angle A}{2}+b_b\,\text{sen}\frac{\angle B}{2}+b_c\,\text{sen}\frac{\angle C}{2})$$

$$= 2s(b_a\,\text{sen}\frac{\angle A}{2}+b_b\,\text{sen}\frac{\angle B}{2}+b_c\,\text{sen}\frac{\angle C}{2}) = s^2\tan\frac{\angle A}{2}\tan\frac{\angle B}{2}\tan\frac{\angle C}{2} = (s-a)^2\tan\frac{\angle A}{2}\cot\frac{\angle B}{2}\cot\frac{\angle C}{2}.$$

8.840. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumple la relación

$$\frac{1}{are(\Delta ABC)} = \sqrt{2\left(\frac{1}{h_a^2h_b^2}+\frac{1}{h_a^2h_c^2}+\frac{1}{h_b^2h_c^2}\right)-\left(\frac{1}{h_a^4}+\frac{1}{h_b^4}+\frac{1}{h_c^4}\right)}.$$

8.841[I-186]. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumplen las siguientes identidades:

a. $\cot\angle BM_aA = \dfrac{b^2-c^2}{4are(\Delta ABC)}$.

b. $a\cos\angle B\cos\angle C + b\cos\angle C\cos\angle A + c\cos\angle A\cos\angle B = \dfrac{2are(\Delta ABC)\operatorname{sen}\angle A}{a}$.

c. $s^2 = are(\Delta ABC)(\cot\dfrac{\angle A}{2} + \cot\dfrac{\angle B}{2} + \cot\dfrac{\angle C}{2})$.

8.842. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumplen las siguientes identidades:

a. $2are(\Delta ABC)(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}) = h_a + h_b + h_c$. b. $\dfrac{abc}{are(\Delta ABC)^2} = \dfrac{1}{s_a}+\dfrac{1}{s_b}+\dfrac{1}{s_c}-\dfrac{1}{s}$.

c. $\dfrac{2s}{abc} = \dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ac}+\dfrac{1}{ab}$.

8.843. Sea $\Delta(a,b,c)$ un triángulo rectángulo con hipotenusa c y $a > b$. Probar las siguientes identidades:

a. $a = \dfrac{1}{2}(\sqrt{c^2+2ch_c} + \sqrt{c^2-2ch_c})$ y $b = \dfrac{1}{2}(\sqrt{c^2+2ch_c} - \sqrt{c^2-2ch_c})$

b. $a = \dfrac{s^2+are(\Delta ABC)}{2s} + \sqrt{\dfrac{(s^2+are(\Delta ABC))^2}{4s^2} - 2are(\Delta ABC)}$ y

$b = \dfrac{s^2+are(\Delta ABC)}{2s} - \sqrt{\dfrac{(s^2+are(\Delta ABC))^2}{4s^2} - 2are(\Delta ABC)}$.

8.844. Sean ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle C$. Probar que

$$c = \frac{s^2 - are(\Delta ABC)}{s}.$$

8.845[I-21]. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumple la identidad

$$\frac{are(\Delta H_aH_bH_c)}{are(\Delta ABC)} = (\cos\angle A)^2 + (\cos\angle A)^2 + (\cos\angle A)^2 - 1.$$

8.846[Ch. W. Trigg, Problem 3065, School Sci. Math. 67 (1967), 106-107]. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumple la identidad

$$s^3 + s_a^3 + s_b^3 + s_c^3 - a^3 - b^3 - c^3 = \frac{6are(\Delta ABC)^2}{s}.$$

8.847. En el triángulo $\Delta(5,8,7)$, calcular el área del triángulo $\Delta I_a I_b I_c$.

8.848. Sea ΔABC un triángulo. Por su incentro I, trazamos una recta paralela a BC que corte a AB y a AC en los puntos D y E, respectivamente. Probar que $per(\Delta ADE) = b + c$.

8.849. Calcular las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo conociendo la longitud de su hipotenusa y la longitud de la altura correspondiente.

8.850. Encontrar entre todos los triángulos rectángulos de hipotenusa a, el que tenga mayor altura con respecto a la hipotenusa y dar la altura en función de la longitud de la hipotenusa.

8.851. Encontrar entre todos los triángulos rectángulos con catetos a y b y altura con respecto a la hipotenusa h, el que tenga la menor hipotenusa y expresar la longitud de la hipotenusa en función de h.

8.852. Encontrar entre todos los triángulos rectángulos de área igual a t, el que tenga el menor perímetro.

8.853. Encontrar entre todos los triángulos rectángulos de perímetro 25, el que tenga la máxima área.

8.854. Hallar las dimensiones de los lados del rectángulo de área máxima inscrito en un triángulo isósceles cuya base tiene longitud 20 y cuya altura tiene longitud 30.

8.855. Sea ΔABC un triángulo isósceles tal que $b = c$. Si variamos el ángulo $\angle A$ y los lados b y c permanecen constantes, ¿qué valor debe de tener $\angle A$ para que el triángulo ΔABC de su área máxima?

8.856[KöMal, Problem Gy. 3178, January 1998]. En un triángulo de área unitaria, ¿cuál es la longitud más pequeña del segundo lado más grande?

8.857. Sean ΔABC un triángulo y $P \in int(\Delta ABC)$. Sean $A_1,\ldots, A_k \in \Delta ABC - \{A, B, C\}$, en donde k es un número entero positivo. Unimos P con cada uno de los puntos $A_1,\ldots, A_k$, A, B y C quedando el triángulo original ΔABC dividido en triángulos pequeños. Probar que k es par si solo si el triángulo ΔABC queda dividido en un número impar de triángulos.

8.858. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle C$. Sobre sus catetos y hacia su exterior trazamos dos triángulos isósceles rectángulos ΔDCB y ΔEAC con ángulos rectos $\angle D$ y $\angle E$, respectivamente. Determinar el área de la región poligonal $BDCEA$ en función de los lados a y b del triángulo.

8.859. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$. Probar las siguientes identidades:

a. $\dfrac{are(\Delta ABC)}{a^2} = \dfrac{are(\Delta ABH_a)}{c^2} = \dfrac{are(\Delta AH_aC)}{b^2}$.

b. $are(\Delta ABC)\,h_a^2 = are(\Delta AB\,H_a)b^2 = are(\Delta A\,H_a\,C)c^2$.

c. Deducir una demostración del Teorema de Pitágoras (8.5.1).

8.860. Sean $\angle\alpha$ un ángulo no degenerado de vértice O y $P \in int(\angle\alpha)$. Una recta variable que pasa por P corta a los lados del ángulo $\angle\alpha$ en los puntos A y B.

a. Expresar las áreas de los triángulos ΔAOB, ΔAOP y ΔBOP en función de $|OA|$, $|OB|$, $|OP|$, $\angle AOP$ y $\angle POB$.

b. Probar que $\dfrac{1}{are(\Delta AOP)} + \dfrac{1}{are(\Delta BOP)}$ es independiente de la recta.

c. Analizar el caso cuando P yace en el exterior del ángulo.

8.861. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$. Exteriormente, construimos el cuadrado $\square BCDE$. Sean P y Q las proyecciones de D y E sobre las rectas $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{AB}$, respectivamente, y R el punto de intersección de PD y QE.

a. Probar que $\square APRQ$ es un cuadrado cuyos lados tienen longitud $b + c$.

b. $are(\square APRQ) = a^2 + 2bc$.

c. Deducir una demostración del Teorema de Pitágoras (8.5.1).

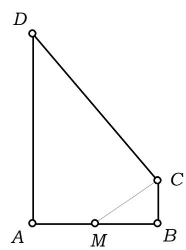
8.862. Sea ΔABC un triángulo cuyos ángulos son todos agudos. Sobre cada uno de los lados del triángulo exteriormente construimos cuadrados $\square BCDE$, $\square CAFG$ y $\square ABJK$. Las alturas del triángulo h_a, h_b y h_c cortan a DE, FG y JK en los puntos P, Q y R.

a. Comparar los triángulos ΔABF y ΔAKC.

b. Comparar los rectángulos $\square A\,H_b\,QF$ y $\square A\,H_c\,RK$.

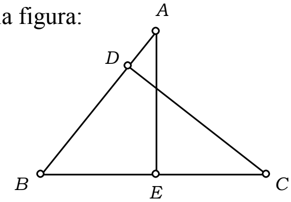
c. Probar la relación $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle A$.

8.863. En la figura:



tenemos un cuadrilátero $\square ABCD$ tal que $AB \perp AD$ y $AB \perp BC$. Si M es el punto medio de AB, $m(\angle BMC) = 30$ y $2|AD| = 3|AB|$, expresar en función de $a = |AB|$ las longitudes de los lados del cuadrilátero.

8.864. En la figura:



tenemos que $AB \perp CD$ y $AE \perp BC$. Si $|BC| = 8$, $|AF| = 2$ y $|AE| = 5$, calcular las longitudes de los lados del triángulo ΔDBC.

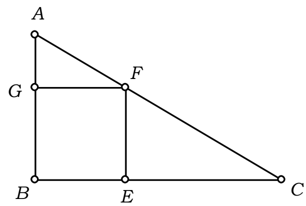
8.865. Sea ΔABC un triángulo. Determinar un punto $L \in BC$ tal que si trazamos dos rectas paralelas a AB y AC que corten a AC y AB en los puntos M y N, respectivamente, se cumpla que $are(\square BLMN) = \dfrac{are(\Delta ABC)}{2}$.

8.866. Sean ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$ y $M \in BC$. La recta paralela a AB que pasa por M corta a AC en el punto E. Demostrar que el perímetro del cuadrilátero $\square ADME$ permanece invariante cuando M se mueve sobre BC.

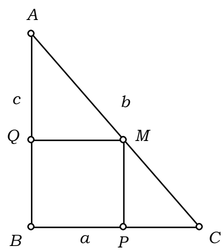
8.867. Sea ΔABC un triángulo rectángulo isósceles con ángulo recto $\angle A$. Sean $M \in BC$ y P y Q las proyecciones de M sobre AB y AC, respectivamente. Probar que $\square APMQ$ es un rectángulo y que su perímetro es independiente de la elección del punto M sobre BC.

8.868. En la figura:

ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle B$ tal que $m(\angle A) = 60$ y $\square BEFG$ es un cuadrado. Si $a = 8$ y $c = 6$, calcular el área del cuadrado.



8.869. En la figura:



$\Delta\ (a,b,c)$ un triángulo rectángulo con hipotenusa b y $\square MQBP$ un rectángulo inscrito en $\Delta(a,b,c)$. Probar la desigualdad $are(\square MQBP) \leq \dfrac{ab}{4}$.

8.870. Sea ΔABC un triángulo cuyos ángulos son agudos. Probar que el área del rectángulo cuyos lados tienen longitudes a y $|BH_a|$ es mayor que dos veces el área del triángulo original si se cumple que $m(\angle B) < 45$.

8.871. Sea ΔABC un triángulo equilátero cuyos lados tienen longitud 30. Tomamos puntos $E \in AB$ y $D \in BC$ tales que $|BE| = 3$ y $|BD| = 10$. Calcular la longitud del segmento ED. Si $|BE| = 20$, ¿a qué distancia se deben encontrar E de B para que el segmento ED parta al triángulo en dos regiones poligonales equivalentes?

8.872[l-72]. Probar que en todo cuadrilátero $are(\square ABCD)$ se cumple la identidad

$$16^2\, are(\square ABCD) = 4e^2f^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2).$$

8.873[a-101]. Probar que en todo cuadrilátero $\square ABCD$ se cumple la desigualdad

$$are(\square ABCD) \leq \frac{1}{2}(a+c) + \frac{1}{2}(b+d).$$

Probar que la igualdad se da si y sólo si $\square ABCD$ es un rectángulo.

8.874[l-32, Problem 275]. Probar que en todo cuadrilátero $\square\ (a,b,c,d)$ se cumple la desigualdad

$$a^2 + b^2 + c^2 > \frac{1}{3}d^2.$$

8.875 [l-32, Problem 37]. Un cierto cuadrilátero $\square\ (a,b,c,d)$ tiene cada uno de sus vértices en cada uno de los lados de un cuadrado de lado 1. Probar que se cumple la desigualdad $2 \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leq 4$.

8.876. Si en un cuadrilátero $\square ABCD$ se cumple que los segmentos que unen los puntos medios de los lados opuestos son congruentes probar que $are(\square ABCD) = \dfrac{ef}{2}$.

8.877. Si una de las diagonales de un cuadrilátero lo dividen en dos triángulos tales que el área de uno de ellos es el doble del área del otro, probar que dicha diagonal corta a la segunda diagonal en uno de sus puntos de trisección.

8.878. Calcular el área de un cuadrilátero $\square ABCD$, sabiendo que $|AC| = 80$, $|BD| = 100$ y uno de los ángulos que forman sus diagonales mide 120.

8.879. Un cierto cuadrilátero es equivalente a un triángulo que tiene dos lados congruentes a las diagonales del cuadrilátero. Probar que el ángulo formado por dichos lados del triángulo es congruente con uno de los dos ángulos formados por las diagonales del cuadrilátero.
8.880. Probar que dos cuadriláteros son equivalentes si sus diagonales correspondientes son congruentes y los ángulos correspondientes que ellas forman son congruentes.
8.881. En un cuadrilátero $\square ABCD$, sean $L \in AB$, $M \in BC$, $N \in DC$ y $P \in DA$ tales que

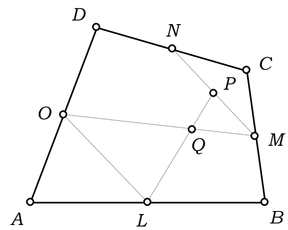
$$\frac{|AL|}{|LB|} = \frac{|MC|}{|BM|} = \frac{|NC|}{|DN|} = \frac{|AP|}{|PD|} = 2.$$

a. Probar que $\square LMNP$ es un paralelogramo.

b. Probar que $are(\square LMNP) = \frac{4}{9}\, are(\square ABCD)$.

8.882[I-240]. Sean $\square ABCD$ un cuadrilátero y L, M, N, O y P los puntos medios de AB, BC, CD, DA y MN, respectivamente. Si Q es el punto de intersección de MO y PL, probar que

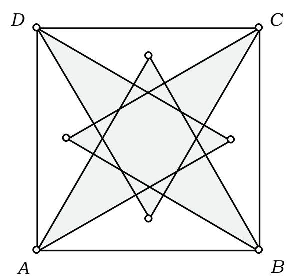
$$are(\square ABCD) = 6are(\Delta QOL).$$



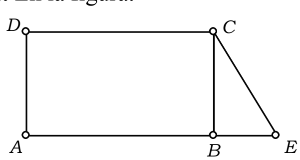
8.883[I-32, Problem 59]. Dados nueve puntos en el interior de un cuadrado de lado 1, probar que tres de ellos determinan un triángulo de área no mayor que $\frac{1}{8}$.
8.884. Si un rectángulo tiene área 6 y uno de sus lados es de longitud 5, encontrar las longitudes de los lados del rectángulo dado.
8.885. Sea $\square ABCD$ un cuadrado de lado a. Prolongamos AC hasta un punto E tal que $CB \cong CE$. Expresar el área del triángulo ΔECB en función de a.
8.886. Sea $\square ABCD$ un cuadrado cuyos lados tienen longitud 4. Sobre los lados AB y BC del cuadrado y hacia su exterior construimos dos triángulos equiláteros ΔABE y ΔBCF. Calcular el área de los triángulos ΔEFC, ΔEBC y ΔEFB.
8.887. Sea $\square ABCD$ un rectángulo con $|AB| = 10$ y $|BC| = 4$. Fijamos dos puntos $P, Q \in CD$ tales que D, P, Q y C sean consecutivos, $|DP| = 3$ y $|QC| = 2$. Calcular el área del triángulo ΔAPQ y el cuadrilátero $\square ABQP$.
8.888. En el rectángulo $\square$ (6,15,6,15) tomamos dos puntos $P \in BC$ y $Q \in CD$ tales que $|QC| = 5$ y $|QD| = 2$. Calcular el área del triángulo ΔAPQ.
8.889. Sea $\square ABCD$ un rectángulo con $|BC| = 2$. Extendemos el lado BC en la dirección de C hasta un punto E, de tal forma que $\angle BDE$ sea un ángulo recto. Si $|CE| = 6$, encontrar el área del rectángulo.
8.890[I-74]. En la figura:

tenemos un cuadrado $\square ABCD$, en el cual se han trazado triángulos equiláteros en cada uno de sus lados. Dichos triángulos forman una estrella de 8 picos. Si A es el área de la estrella y B es el área de uno de los triángulos equiláteros, probar que

$$\mathsf{A} = 8\mathsf{B} - 3are(\square ABCD).$$

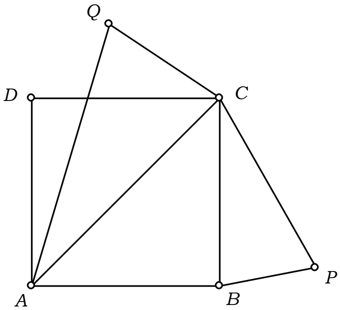


8.891. En la figura:



$\square ABCD$ es un rectángulo y $m(\angle CEB) = 60$. Si $|BE| = 5$ y $|AB| = 2|BC|$, calcular el área del rectángulo.

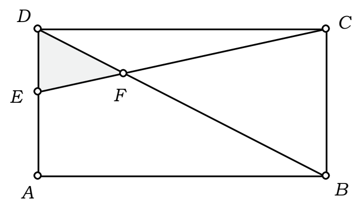
8.892. En la figura:



$\square ABCD$ es un cuadrado y $\Delta QAC \sim \Delta PCB$.

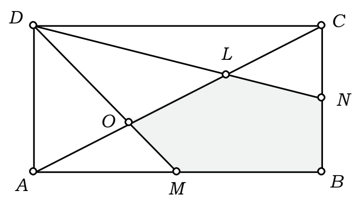
Probar que $\dfrac{are(\Delta PCB)}{are(\Delta QAC)} = \dfrac{1}{2}$.

8.893. En la figura:



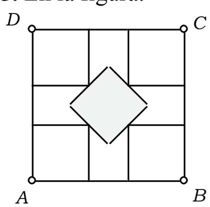
$\square ABCD$ es un rectángulo. Si $|AB| = 10$, $|BC| = 5$ y $|DE| = 2$, calcular el área del triángulo ΔFDE.

8.894. En la figura:



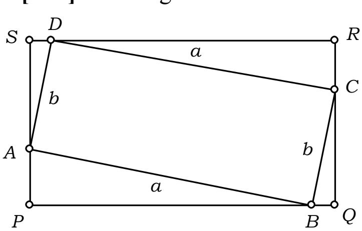
$\square ABCD$ es un rectángulo y M y N son los puntos medios de AB y BC, respectivamente. Si $|AB| = 8$ y $|BC| = 2$, calcular el área de la región poligonal $MBNLO$.

8.895. En la figura:



$\square ABCD$ es un cuadrado de lado 3. Dentro del cuadrado tenemos cinco cuadrados congruentes entre sí. Calcular el área del cuadrado del centro que está sombreado.

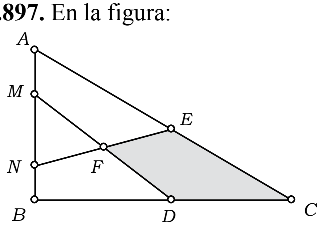
8.896[I-23]. En la figura:



tenemos dos rectángulos $\square ABCD$ y $\square PQRS$. Probar la desigualdad

$$ab \leq \ are(\square PQRS) \leq. \ \frac{(a+b)^2}{2}.$$

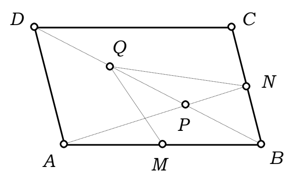
8.897. En la figura:



tenemos un triángulo rectángulo ΔABC tal que $m(\angle B) = 90$. Si $|BC| = 8$, $|AC| = 10$, $|DC| = 4$, $|EC| = 5$ y $|MN| = 3$, calcular el área del cuadrilátero $\square EFDC$.

8.898. Probar que el área de un paralelogramo $\square ABCD$ está dada por $are(\square ABCD) = ef\,\text{sen}\angle BOC$, en donde O es el punto de intersección de sus diagonales.
8.899. Sean $\square ABCD$ un paralelogramo, M el punto medio de AB y N el punto de intersección de AC y DM. Probar que $are(\Delta AMN) = \dfrac{1}{12} are(\square ABCD)$.
8.900. Entre todos los paralelogramos de perímetro 10 y con un lado de longitud 3 encontrar el de mayor área.
8.901. Sean $\square ABCD$ un paralelogramo y O el punto de intersección de sus diagonales. Si $m(\angle AOB) = 120$, $|AC| = 16$ y $|BD| = 8$, calcular el área y el perímetro del paralelogramo.
8.902. Dos lados adyacentes de un paralelogramo tienen longitudes 10 y 12. Si el área del paralelogramo es igual a 60, probar que el ángulo formado por dichos lados mide 30.
8.903. Sea $\square ABCD$ un paralelogramo con $m(\angle A) = 60$. Si $|AD| = 8$ y $are(\square ABCD) = 24$, encontrar las longitudes del los lados del paralelogramo.
8.904[I-243]. $\square ABCD$ es un paralelogramo y $O = M_1$ es el punto de intersección de sus diagonales. Sean M_2 el punto medio de DM_1, M_3 el punto medio de CM_2, M_4 el punto medio de DM_3 y así sucesivamente construimos los puntos $M_1, M_2, \ldots, M_k, \ldots$. Para cada número entero positivo k, sea P_k la proyección de M_k sobre el lado AB. Probar la igualdad $|M_k P_k| = \dfrac{2^k - 1}{2^k} h$, en donde h es la altura del paralelogramo correspondiente al lado AB.
8.905[I-243]. Sean $\square ABCD$ un paralelogramo y M y N los puntos medios de AB y BC, respectivamente. Si P es el punto de intersección de AN y BD, y Q es el punto medio de DP, probar que

$$are(\square ABCD) = 3are(\square MBNQ).$$



8.906[I-243]. Sean $\square ABCD$ un paralelogramo y P un punto fuera de él. Si Q, R, S y T son las proyecciones de P sobre $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{DA}$, respectivamente, probar que el área del cuadrilátero $\square ABCD$ no depende de la elección del punto P.
8.907. Probar que un triángulo inscrito en un paralelogramo tiene a lo más la mitad del área del paralelogramo.
8.908. Sea $\square ABCD$ un trapecio tal que $AB \parallel CD$, $m(\angle A) = 45$, $m(\angle B) = 60$, $|AB| = 20$ y $|BC| = 8$. Calcular el área y el perímetro del trapecio.
8.909[I-292]. Si $\square ABCD$ es un trapecio tal que $AB \parallel DC$, probar la identidad

$$are(\square ABCD) = \left(\sqrt{are(\Delta(|AB|,|AC|,|DB|))} + \sqrt{are(\Delta(|DC|,|AC|,|DB|))}\right)^2.$$

8.910. Si $\square ABCD$ es un trapecio tal que $AB \parallel DC$ y O es el punto de intersección de sus diagonales, probar que

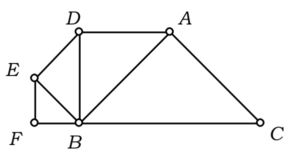
$$\frac{are(\Delta DOC)}{are(\Delta AOB)} = \frac{|DC|^2}{|AB|^2}.$$

8.911. Calcular el área del trapecio isósceles $\square$ (10,2,8,2).
8.912. Determinar el área del trapecio isósceles $\square$ $(3t, \sqrt{2}\,t, t, \sqrt{2}\,t)$ en función del número real positivo t.
8.913. Sea $\square ABCD$ un trapecio isósceles tal que $AB \parallel CD$, $|AB| = 9$ y $m(\angle A) = 45$. Calcular el perímetro y el área del trapecio.
8.914. Sea $\square ABCD$ un trapecio rectangular tal que $AB \parallel CD$, $|AB| = 20$ y $|CD| = 5$. Si uno de los ángulos del trapecio mide 30, calcular el área del mismo.
8.915. Sea $\square ABCD$ un trapecio rectangular tal que $AB \parallel CD$, $m(\angle A) = 90$ y $m(\angle B) = 45$. Si E es el punto de intersección de los lados no paralelos del trapecio y $|AB| = 15$, ¿cuál debe ser la longitud del lado CD para que este divida al triángulo ΔEAB en dos regiones poligonales equivalentes?
8.916. Los lados paralelos de un trapecio isósceles tienen longitudes 4 y 8. Si el área del trapecio es igual a $6\sqrt{5}$, calcular las longitudes de los lados no paralelos del trapecio.

8.917. ¿Cuál es la longitud del lado de un rombo que tiene igual perímetro que un triángulo equilátero cuyos lados miden 20?
8.918. Si los catetos de un triángulo rectángulo tienen longitudes 3 y 4, y un cateto y la hipotenusa de otro triángulo rectángulo tienen longitudes 4 y 5, respectivamente, probar que los dos triángulos son congruentes.
8.919. Probar que $\Delta(x^2 - 1, 2x, x^2 + 1)$ es un triángulo rectángulo para todo número real positivo x.
8.920. Si $\Delta(2x+1, 2x, 2x-1)$ es un triángulo rectángulo, encontrar x y las longitudes de los lados del triángulo.
8.921. Si $\Delta(4, 5-x, x)$ es un triángulo rectángulo en $\angle B$, calcular las longitudes de los lados del triángulo.
8.922. Si $\Delta(a,b,c)$ es un triángulo rectángulo con hipotenusa a, probar que

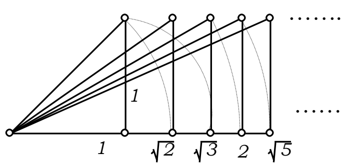
$$\Delta(7a + 3b + 6c, 6a + 2b + 6c, 3a + 3b + 2c)$$

es también un triángulo rectángulo.
8.923. Dado un número real positivo t, ¿puede existir un triángulo rectángulo cuyos lados tengan longitudes t, $\sqrt{2}\, t$ y $2t$?
8.924. Probar que dos números reales positivos a y b son los catetos de un triángulo rectángulo con hipotenusa c si y sólo si a y b son las raíces de la ecuación $x^2 + x\sqrt{c^2 + 2p} + p = 0$, para algún número real positivo p.
8.925. Probar que dos números reales positivos a y b son los catetos de un triángulo rectángulo de hipotenusa c si y sólo si a y b son las raíces de la ecuación $x^2 - (2p - c)x + 2p(p - c) = 0$, para algún número real positivo p.
8.926[I-189]. Probar que $2(1 + \operatorname{sen}\angle\alpha) + \cos\angle\alpha$, $2(1 + \cos\angle\alpha) + \operatorname{sen}\angle\alpha$ y $3 + 2(\cos\angle\alpha + \operatorname{sen}\angle\alpha)$ son los lados un triángulo rectángulo, para cualquier ángulo no degenerado $\angle\alpha$.
8.927. Sean ΔABC un triángulo y $D \in AB$. Si $|BC|$ es la media geométrica de $|AB|$ y $|BD|$, y $|AC|$ es la media geométrica de $|AB|$ y $|AD|$, probar que ΔABC es un triángulo rectángulo.
8.928. Sean ΔABC un triángulo y $D \in BC$. Si $|AD|$ es la media geométrica de $|BD|$ y $|DC|$, probar que ΔABC es un triángulo rectángulo.
8.929. En la figura:



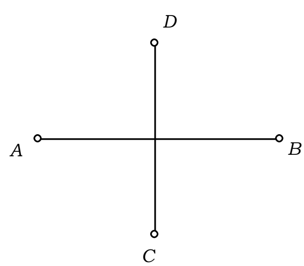
tenemos que ΔABC, ΔDBA, ΔEBD y ΔFBE son triángulos rectángulos isósceles con ángulos rectos $\angle A$, $\angle D$, $\angle E$ y $\angle F$, respectivamente.
1. Probar que los puntos F, B y C son colineales.
2. Si $|BC| = 6$, calcular la longitud del segmento FB.

8.930 [I-94]. De la figura



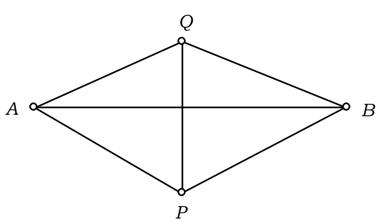
describir la función de la sucesión
$1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \ldots\ldots$.

8.931. En la figura:



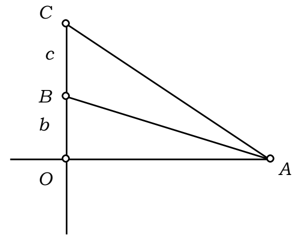
probar que $AB \perp CD$ si y sólo si $|CA|^2 - |CB|^2 = |DA|^2 - |DB|^2$.

8.932. En la figura:



tenemos que $AB \perp PQ$. Probar la igualdad
$|AP|^2 + |BQ|^2 = |BP|^2 + |AQ|^2$.

8.933. En la figura:



tenemos dos rectas perpendiculares $\overleftrightarrow{OA}$ y $\overleftrightarrow{OC}$ y un punto $B \in \overleftrightarrow{OC}$ tal que $\overrightarrow{AB}$ es la bisectriz del ángulo $\angle CAO$. Si $b = |OB|$ y $c = |BC|$, determinar la longitud de OA en función de b y c.

8.934. Sea $\angle AOB$ un ángulo recto. Si $C \in \overrightarrow{OB}$, probar que $|OB|^2 + |AC|^2 = |OC|^2 + |AB|^2$.

8.935. Sea $\angle AOB$ un ángulo recto. Si $P \in \overrightarrow{OA}$ y $Q \in \overrightarrow{OB}$, probar que $|AB|^2 + |PQ|^2 = |AQ|^2 + |BP|^2$.

8.936. Sean $\angle AOB$ un ángulo no degenerado y $C \in OA - \{O, A\}$. La recta paralela a $\overleftrightarrow{BC}$ que pasa por A corta a $\overrightarrow{OB}$ en un punto D. Probar que B está entre O y D.

8.937. Si en un cierto triángulo ΔABC se tiene que $h_a = 12$, $|BH_a| = 8$ y $|H_aC| = 18$, probar que el triángulo tiene que ser un triángulo rectángulo.

8.938. Sea $\Delta(a,b,c)$ un triángulo rectángulo con hipotenusa c. Si $a + b = 10$ y $c = 15$, encontrar la longitud de cada uno de los lados del triángulo.

8.939. Si ΔABC es un triángulo rectángulo en $\angle A$, $|BH_a| = 3$ y $|H_aC| = 24$, calcular las longitudes de los lados del triángulo.

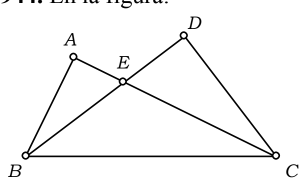
8.940. Si $\Delta(a,b,c)$ es un triángulo rectángulo con hipotenusa c, $b = 5$ y su perímetro es igual a 25, encontrar las longitudes del cateto a y la hipotenusa.

8.941 [I-167]. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$. Si el punto $D \in BC$ satisface que $|BD| = 10$, $|DC| = 5$ y $d(D, \overleftrightarrow{AB}) = d(D, \overleftrightarrow{AC})$, calcular las longitudes de los catetos del triángulo.

8.942. Si en el triángulo ΔABC sólo se sabe que $|AC| = 10$, $h_b = 3$ y $h_c = 6$, calcular las longitudes de los lados restantes del triángulo.

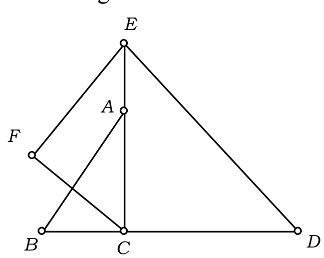
8.943. Sea ΔABC un triángulo. Si $m(\angle B) = 30$, $m(\angle C) = 60$ y $|H_aC| = 5$, calcular la longitud de cada uno de los lados del triángulo.

8.944. En la figura:



tenemos dos triángulos rectángulos en $\angle A$ y $\angle D$. Si $|BC| = 10$, $|AB| = 8$ y $3|AE| = 2|AC|$, calcular las longitudes de los lados restantes de ambos triángulos.

8.945. En la figura:



sean ΔABC, ΔECD y ΔEFC triángulos rectángulos con hipotenusas AB, ED y EC, respectivamente. Si $|AB| = 5$, $|ED| = 10$, $|EF| = 2\sqrt{5}$, $|CD| = |BC| + 5$ y $|AC| = |FC|$, calcular las longitudes de los lados de cada uno de los tres triángulos.

8.946. Si ΔABC es un triángulo rectángulo en $\angle B$, $|AB| = 10$ y $|BC| = 24$, calcular $|AH_b|$ y $|H_bC|$.

8.947. Sea ΔABC un triángulo tal que $|BH_a| = 5$, $|H_aC| = 12$ y $b - c = 6$. Calcular la longitud de BC.

8.948. Si en un triángulo ΔABC se tiene que $|BA| = 5$, $|AC| = 6$ y $h_a = 4$, calcular $|BC|$.

8.949. Si ΔABC es un triángulo rectángulo con hipotenusa a tal que $|BH_a| = 5$ y $|H_aC| = 20$, encontrar la longitud de h_a.

8.950. Si $\Delta(a,b,c)$ es un triángulo rectángulo con hipotenusa b tal que $a + c = 14$ y $a - c = 2$, calcular $|AB_b|$ y $|B_bC|$.

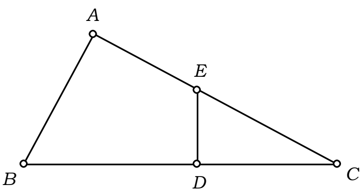
8.951. Calcular la altura correspondiente a la base de un triángulo isósceles ΔABC tal que $|AB| = |AC| = 20$ y $|BC| = 12$.

8.952. En un triángulo $\Delta(a,b,c)$, se sabe que $b = 3$, $c = 5$ y $|BH_a||H_aC| = \frac{3}{2}$. Hallar el valor numérico de a.

8.953. Sea $\Delta(a,b,c)$ un triángulo rectángulo con hipotenusa a y perímetro 25. Si $b + c = a + 5$, hallar el valor numérico de b y c.

8.954. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$. Si $P \in AB$ satisface la identidad $|AP|^2 + |BP|^2 + |CP|^2 = e$, expresar las longitudes de los segmentos AP y AB en función de b, c y e.

8.955. En la figura:



tenemos que $\angle BAC$ y $\angle CDE$ son ángulos rectos, $|BD| = 18$, $|DE| = 9$ y $|EC| = 12$. Encontrar las longitudes de AB, BC y AC.

8.956. Probar que en cualquier triángulo ΔABC se cumplen las siguientes identidades:

a. $|AB|^2 + |H_aC|^2 = |AC|^2 + |BH_a|^2$.

b. $c^2 - b^2 = a(|BH_a| - |H_aC|)$.

c. $|BH_a|^2 + |CH_b|^2 + |AH_c|^2 = |CH_a|^2 + |AH_b|^2 + |BH_c|^2$.

8.957 [I-23]. Si ΔABC es un triángulo cuyos ángulos son todos agudos, probar que

$$2(|AH_a||AH| + |BH_b||BH| + |CH_c||CH|) = a^2 + b^2 + c^2.$$

8.958. Si en el triángulo ΔABC se cumple la igualdad $|CH_a|^2 - |BH_a|^2 = \frac{1}{2}|CB|^2$, probar que $\frac{|CH_a|}{|CB|} = \frac{3}{4}$.

8.959. Sea ΔABC un triángulo tal que $|H_aM_a| = \frac{a}{4}$. Probar que $|c^2 - b^2| = \frac{a^2}{2}$.

8.960 [I-41]. Sean ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$ y P y Q las proyecciones de H_a sobre los lados AB y AC, respectivamente. Probar que $|PB|^2 + |QC|^2 + 3h_a^2 = a^2$ y $h_a^3 = a|PB||QC|$.

8.961. Sea $\Delta(a,b,c)$ un triángulo rectángulo de hipotenusa c. Si $\frac{b}{a} = k$, probar las siguientes identidades:

$$a = \frac{2s}{k+1+\sqrt{k^2+1}},\quad b = \frac{2ks}{k+1+\sqrt{k^2+1}} \text{ y } c = \frac{2\sqrt{k^2+1}s}{k+1+\sqrt{k^2+1}}.$$

8.962. Si $\Delta(a,b,c)$ es un triángulo rectángulo con hipotenusa b, probar que $m_a^2 = b^2 - \frac{3}{4}a^2$.

8.963. Si a es la longitud de los lados de un triángulo equilátero y h es la longitud de una de sus alturas, probar que $4h^2 = 3a^2$.

8.964. Sea ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$. Tomemos puntos $D \in AB$ y $E \in AC$, de tal forma que $DE \parallel BC$. Si $a = 2i$ y $per(\square BCED) = 2j$, probar que $|AD| = \frac{(s-i)(s-j)}{s_a}$.

8.965. Si ΔABC es un triángulo isósceles tal que $|AB| = |AC| = k|BC|$, en donde k es un número entero positivo, probar la relación $4h_a^2 = (4k^2 - 1)|BC|^2$.

8.966. Sean ΔABC un triángulo equilátero y M el punto medio de m_a. Probar que $4|BM| = \sqrt{7}\, a$.

8.967. Sean ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$ y $D \in BC$. Sea E el punto de intersección de AC y la recta perpendicular a BC en el punto D. Si $|AB| = 2$, $|AC| = 10$ y $|DC| = 3$, encontrar el perímetro del cuadrilátero $\square BDEA$.

8.968. Las diagonales de un cuadrilátero son perpendiculares si y sólo si la suma de los cuadrados de dos lados opuestos es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados.

8.969. Probar que un cuadrilátero es un paralelogramo si y sólo si la suma de los cuadrados de las diagonales es igual a la suma de los cuadrados de sus lados.

8.970. Si en el cuadrilátero $\square\ (4,b,2,d)$ los ángulos $\angle A$ y $\angle C$ son rectos y $|BD| = 5$, calcular la longitud de los lados restantes del cuadrilátero.

8.971. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero tal que $\angle A$ es un ángulo recto y la diagonal BD es perpendicular a uno de los lados. Probar que el cuadrado del lado mayor del cuadrilátero es igual a la suma de los cuadrados de los otros tres lados.

8.972. Probar que si O es el punto de intersección de las diagonales de un cuadrado $\square ABCD$, entonces

$$|AB| = \sqrt{2}\,|AO|.$$

8.973. Encontrar las longitudes de los lados de un cuadrado cuyas diagonales tienen longitud 50.

8.974. Si $\square ABCD$ es un cuadrado cuyos lados tienen 10 de longitud y $P \in AC$ cumple que $|AP| = 10$, encontrar la longitud de PC.

8.975. Sean $\square ABCD$ un cuadrado de lado 8 y $E \in AD$ tales que $m(\angle EBA) = 30$. Trazamos la recta que pasa por A y que es perpendicular a BE en el punto G, la cual corta a DC en el punto F. Encontrar las longitudes de los lados del cuadrilátero $\square EGFD$.

8.976. Sean $\square ABCD$ un rectángulo, $E \in BC$, $F \in CD$ y $G \in AD$. Si $|BE| = 1$, $|EC| = 5$, $|DG| = 4$, $m(\angle EFC) = 45$ y $m(\angle DFG) = 30$, encontrar las longitudes de los lados del cuadrilátero $\square AEFG$.

8.977. Sea $\square ABCD$ un rectángulo tal que $|AB| = 7$ y $|AD| = 4$. La recta perpendicular a $\overleftrightarrow{AC}$ en el punto $E \in AC$ que pasa por D corta a AB en el punto F. Calcular las longitudes de los lados de los triángulos ΔDAE y ΔEFC.

8.978. Probar que la suma de los cuadrados de las diagonales de un rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de sus lados.

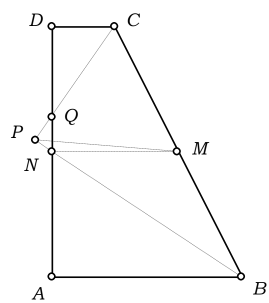
8.979. Sean $\square ABCD$ un paralelogramo y O el punto de intersección de sus diagonales. Si $|AC| = 18$, $|BD| = 6$ y $d(O, \overleftrightarrow{AB}) = 1$, encontrar la longitud de cada uno de los lados del paralelogramo.

8.980. Calcular las longitudes de las diagonales del trapecio isósceles $\square\ (12,5,3,5)$.

8.981. Sea $\square ABCD$ un trapecio rectangular en $\angle A$ y $\angle D$ tal que $AB \parallel CD$, $CD < AB$, $AC \perp BC$ y $|CD| = 10$. Encontrar las longitudes de los lados y las diagonales del trapecio.

8.982 [I-243]. En la figura:

$\square ABCD$ es un trapecio rectangular en $\angle A$ con $AB \parallel CD$. Tenemos que M y N son los puntos medios de BC y DA, respectivamente, P es la proyección de C sobre $\overleftrightarrow{BN}$ y Q es el punto de intersección de DA y PC. Si $|AB| = 3$, $|AD| = 8$ y $|CD| = 1$, calcular las longitudes de MP, PC y el área del triángulo ΔMPN.



8.983. Si las diagonales de un rombo miden 8 y 6, encontrar su área y la longitud de sus lados.

8.984. Si en el rombo $\square ABCD$ se cumple la identidad $a^2 = ef$, encontrar la medida de uno de los ángulos agudos del rombo.

8.985 [l-41]. Sea $\square ABCD$ un rombo. Si g es la suma de las longitudes de las diagonales del rombo, probar la identidad $a = \frac{1}{2}\sqrt{g^2 4are(ABCD)}$.

8.986. Probar que la suma de los cuadrados de las diagonales de un rombo es igual a 4 veces el cuadrado de uno de sus lados.

8.987. En un cuadrado, inscribir un triángulo equilátero y expresar la longitud de los lados del triángulo en función de la longitud de los lados del cuadrado.

8.988. En un triángulo equilátero, inscribir un cuadrado y expresar la longitud de los lados del cuadrado en función de la longitud de los lados del triángulo.

8.989. Encontrar la longitud de los lados del mayor y del menor triángulo equilátero que se pueda inscribir en un cuadrado de lado 1.

8.990. Dado un triángulo rectángulo, determinar sobre su hipotenusa un punto de tal forma que la suma de los cuadrados de sus distancias a los catetos sea igual a un número dado.

8.991. Tomamos un punto D en el lado BC del triángulo rectángulo $\Delta(10,8,6)$. Por D trazamos rectas paralelas a los catetos formando con los mismos un rectángulo. Si el perímetro de este rectángulo es igual a la mitad del perímetro del triángulo original, calcular las longitudes de los segmentos BD y DC.

8.992. Consideremos el triángulo $\Delta(15,9,12)$. Fijamos un punto $P \in AB$ y sea Q su proyección sobre BC. Si $|PQ| = 3$, calcular el perímetro del triángulo ΔPBQ.

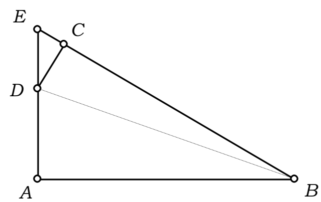
8.993 [o-1]. Sea $\Delta(a,b,c)$ un triángulo rectángulo tal que $per(\Delta(a,b,c)) = 18$ y $a^2 + b^2 + c^2 = 128$. Hallar el área del triángulo.

8.994. Sea ΔABC un triángulo isósceles tal que $AB \cong AC$, $|BC| = 18$ y $h_a = 12$. Si $E \in \overleftrightarrow{BC}$ y $|AE| = 20$, probar que $\angle BAE$ es un ángulo recto.

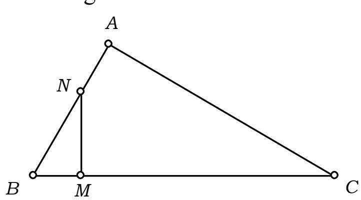
8.995 [l-41]. Si $\Delta(a,b,c)$ es un triángulo rectángulo con hipotenusa c, probar que $a + b$, h_c y $c + h_c$ son los lados de un triángulo rectángulo.

8.996 [l-243]. En la figura:

tenemos que $\angle A$ es un ángulo recto y $m(\angle CBA) = m(\angle CDE) = 30$. Si $|CD| = 1$ y $|DA| = 2\sqrt{3}$, calcular la longitud de BD.



8.997. En la figura:

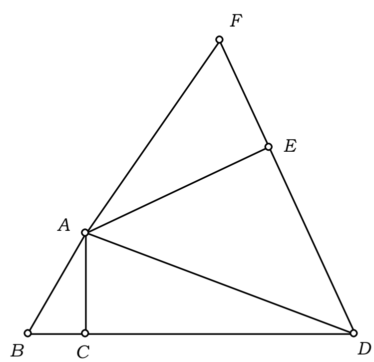


ΔABC es un triángulo rectángulo en $\angle A$ con $m(\angle C) = 30$ y $MN \perp BC$. Si $are(\Delta BMN) = are(\Delta ANC)$, probar que

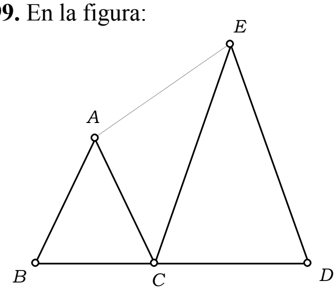
$$\frac{|BN|}{|NA|} = |MN|\frac{ab}{c}.$$

8.998. En la figura:

tenemos que $m(\angle CBA) = 60$, $m(\angle ADC) = 20$, $m(\angle EDA) = 45$ y $m(\angle EAF) = 30$. Si B, C y D son colineales, D, E y F son colineales, $AC \perp BD$, $AE \perp DF$ y $|AB| = 10$, calcular, usando trigonometría, la longitud de AF.



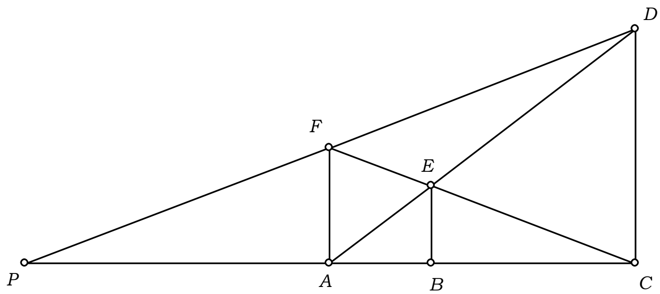
8.999. En la figura:



tenemos dos triángulos isósceles ΔABC y ΔECD tales que $|AB| = |AC| = 3$, $|BC| = 4$, $|EC| = |ED| = 15$ y $|CD| = 6$. Calcular el perímetro del cuadrilátero $\square ABDE$.

8.1000. Supongamos que los dos triángulos ΔABC y ΔECD de la figura del problema anterior son equiláteros con lados 4 y 10, respectivamente. Sea P el punto de intersección de las rectas $\overleftrightarrow{AE}$ y $\overleftrightarrow{BD}$. Calcular el área de los triángulos ΔACE, ΔEPD, ΔAPB y ΔAPC.

8.1001. En la figura:
tenemos que A, B y C son colineales, D es el punto de intersección de $\overleftrightarrow{AE}$ y $\overleftrightarrow{CD}$, F es el punto de intersección de $\overleftrightarrow{CE}$ y $\overleftrightarrow{AF}$, $AF \perp AC$, $BE \perp AC$, $CD \perp AC$, $|AB| = 4$, $|BC| = 8$ y $|BE| = 3$. Si P es el punto de intersección de $\overleftrightarrow{FE}$ y $\overleftrightarrow{AC}$, calcular la longitud de CP.



8.1002 [I-23]. En un triángulo ΔABC, se ha inscrito un cuadrado, de modo que uno de sus lados esté sobre el lado mayor del triángulo. Si la longitud de los lados del cuadrado es igual a x, probar que $\sqrt{2}\, r < x < 2r$.

8.1003. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$ tal que $m(\angle B) = 60$ y $|BC| = 14$. Sobre los catetos de dicho triángulo y hacia su exterior trazamos dos triángulos equiláteros ΔABD y ΔACE. Calcular las distancias de M_a a los puntos D y E.

8.1004 [I-23]. Sobre los lados de un triángulo ΔABC construimos triángulos equiláteros ΔABP, ΔACQ y ΔRBC semejantes entre sí, de tal forma que los dos primeros estén hacia el exterior del triángulo y el tercero hacia el interior del mismo. Probar que P, A, Q y R son colineales, o bien, $\square PAQR$ es un paralelogramo.

8.1005. Sean ΔABC y ΔDAC dos triángulos rectángulos isósceles tales que $\angle A$ y $\angle D$ son ángulos rectos, y D y B están en diferentes semiplanos determinados por $\overleftrightarrow{AC}$. Pongamos $a = |AB|$.

a. ¿Qué clase de cuadrilátero es $\square ABCD$?

b. Expresar las longitudes de BC, AD y BD en función de a.

c. Si P es el punto de intersección de AC y BD, probar que $\Delta BPC \sim \Delta APD$ y calcular la razón de similitud.

d. Expresar las longitudes de los segmentos PA, PB, PC y BD en función de a.

8.1006. Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos isósceles con $AB \cong AC \cong A'B' \cong A'C'$. Si $B'C'$ es el doble de la altura h_a, probar que $are(\Delta ABC) = are(\Delta A'B'C')$.

8.1007. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero tal que sus ángulos $\angle B$ y $\angle D$ sean rectos. Si sus diagonales son perpendiculares, probar que $DC \cong BC$.

8.1008. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero tal que $m(\angle D) = 60$, $m(\angle B) = 90$, $BC \cong CD$, $|AB| = 4$ y $|BC| = 6$. Calcular el perímetro del cuadrilátero.

8.1009. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero tal que $\angle B$ y $\angle DCA$ son ángulos rectos. Si $|BC| = 3$, $|AC| = 5$ y $|DC| = 4$, calcular las distancias del vértice D a las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{BC}$.

8.1010. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero tal que $m(\angle A) = 90$, $|AB| = 12$, $|BC| = 8$, $|CD| = 17$ y $|DA| = 9$.

a. Probar que el ángulo $\angle CBD$ es recto.
b. Calcular el área del cuadrilátero.

8.1011. Se tiene un rectángulo de perímetro 42 tal que la razón entre las longitudes de sus lados es de $\frac{1}{3}$. Hallar las longitudes de los lados y de las diagonales del rectángulo.

8.1012. Si la longitud de la diagonal de un cuadrado es igual a 1, encontrar el área del cuadrado.

8.1013. Determinar las dimensiones de un rectángulo equivalente a un cuadrado de lado 5 tal que uno de los lados del rectángulo es congruente a la diagonal del cuadrado.

8.1014. Si las longitudes de dos lados no congruentes de un rectángulo están en la proporción $\frac{3}{4}$ y la longitud de una de sus diagonales es 4, calcular las dimensiones del rectángulo.

8.1015. Sea $\square ABCD$ un rectángulo con $|AB| = 8$ y $d(B, \overleftrightarrow{AC}) = 2$. Encontrar las longitudes de los lados restantes del rectángulo.

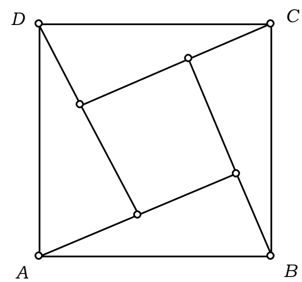
8.1016. Sean $\square ABCD$ un cuadrado, $P \in AB$, $Q \in BC$, $R \in CD$ y $S \in DA$. Si $\square PQRS$ es un cuadrado, $|PR| = 10$ y $\frac{|AP|}{|PB|} = \frac{3}{4}$, encontrar las longitudes de los lados del cuadrado original.

8.1017. Sea $\square ABCD$ un rectángulo cuyos lados tienen longitudes 18 y 16. Si H es el pie de la altura del triángulo ΔDAB con respecto al lado BD, calcular la longitud de los segmentos AH y HC.

8.1018. Sean $\square ABCD$ un cuadrado y $P \in int(\Delta ABC)$. Si $PC \cong AB$, $d(P, \overleftrightarrow{AB}) = 5$ y $d(P, \overleftrightarrow{AD}) = 3$, calcular las dimensiones del cuadrado.

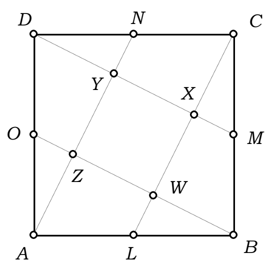
8.1019. Sean $\square ABCD$ un rectángulo de perímetro 20 y O el punto de intersección de sus diagonales. Si $m(\angle BOC) = 60$, encontrar las longitudes de los lados del rectángulo.

8.1020. En la figura:



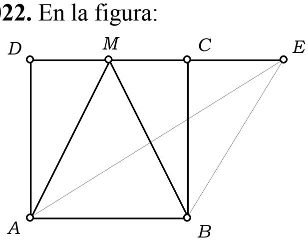
el área del cuadrado $\square ABCD$ es igual a 100 y la del cuadrado pequeño es de 36. Los cuatro triángulos rectángulos que aparecen en la figura son todos congruentes entre sí. Calcular la longitud de cada uno de los lados de dichos triángulos.

8.1021. En la figura:



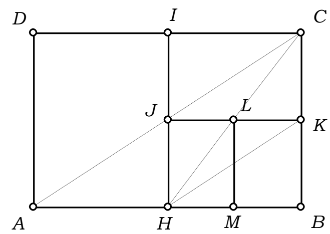
sea $\square ABCD$ un cuadrado de lado a. Sean L, M, N y O los puntos medios de AB, BC, CD y DA, respectivamente.
a. Probar que $\square WXYZ$ es un cuadrado.
b. Probar que $are(\square WXYZ) = \frac{are(ABCD)}{5}$.

8.1022. En la figura:



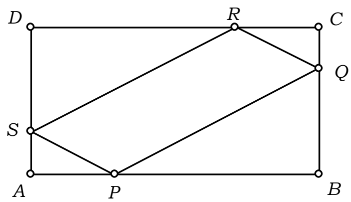
sean $\square ABCD$ un cuadrado de lado 1, M el punto medio de DC, y D, C y E tres puntos colineales tales que $MB \cong ME$. Calcular las longitudes de los segmentos ME, AE y BE.

8.1023. En la figura



sea $\square ABCD$ un rectángulo de lados a y b. Si H es el punto medio de AB, I es el punto medio de DC, J es el punto medio de HI, K es el punto medio de BC, L es el punto medio de JK y M es el punto medio de HB, calcular la longitud de los segmentos AC, HC, HK y HL en función de a y b.

8.1024. En la figura:



$\square ABCD$ es un rectángulo tal que $|AB| = 30$ y $|BC| = 20$. Si $|AP| = 5$ y $\square PQRS$ es un paralelogramo cuyos lados son paralelos a las diagonales del rectángulo, calcular el área del paralelogramo $\square PQRS$.

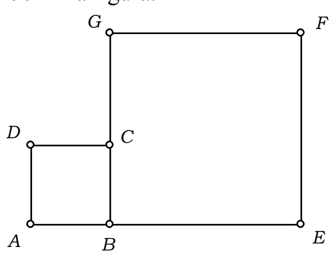
8.1025. Si un rectángulo tiene i de ancho por j de largo, en donde i y j son números enteros positivos, y es dividido en cuadrados de lado 1, probar que cualquiera de las diagonales del rectángulo interseca a $i + j - (i,j)$ cuadrados, en donde (i,j) denota el máximo común divisor de i y j.

8.1026. Si un rectángulo es dividido en cuadrados con las mismas dimensiones, de tal forma que hay $k + 1$ cuadrados a lo largo y k cuadrados a lo ancho, en donde k es un número entero positivo, probar que cualquiera de las diagonales del rectángulo corta a $2k$ cuadrados.

8.1027. Sea $\square ABCD$ un rectángulo con i de ancho por j de largo, en donde i y j son números enteros positivos. Dividamos el rectángulo en cuadrados de lado 1. Si la diagonal AC pasa por uno de los vértices, digamos F, de uno de los cuadrados y E y G son las proyecciones de F sobre los lados AB y AB, respectivamente, probar que $\square ABCD \sim \square AEFG$.

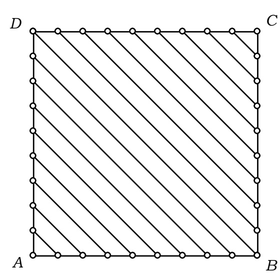
8.1028. Si en un cuadrado de lado a colocamos en su interior más de $4k$ puntos, en donde k es un entero positivo, probar que $k + 1$ de estos puntos están a distancia $\leq \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

8.1029. En la figura:



tenemos dos cuadrados $\square ABCD$ y $\square BEFG$ cuyos lados tienen longitudes 2 y 6, respectivamente. Calcular la distancia que hay entre los centros de los cuadrados.

8.1030 (CESGRANRIO-80). En la figura:



tenemos un cuadrado $\square ABCD$ de lado a. Cada uno de los lados del cuadrado ha sido dividido en nueve partes congruentes entre sí. Probar que la suma de las longitudes de los 17 segmentos que unen los puntos de división es igual a $9\sqrt{2}\,a$.

8.1031. Sea $\square ABCD$ un rectángulo tal que $|AB| = 10$ y $|BC| = 4$. Si $P \in AB$ satisface que $|AP| = 4$, determinar la clase de ángulo que es $\angle CPD$.

8.1032. Sean $\square ABCD$ un rectángulo con $|AB| = 16$ y $|BC| = 7$, y $P \in AB$, ¿cuál debe ser la longitud del segmento AP para que el ángulo $\angle CPD$ sea recto?

8.1033. Sea $\square ABCD$ un cuadrado cuyos lados tienen longitud 1. Prolongamos la diagonal AC hasta un punto E, de tal manera que $|CE| = 1$ y sea F la proyección de E sobre la recta $\overleftrightarrow{AB}$. Encontrar la longitud de los segmentos AE, BE y EF y la medida de los ángulos $\angle AEB$ y $\angle FBE$.

8.1034. Sean $\square ABCD$ un rectángulo y O el punto de intersección de sus diagonales. Por O trazamos una recta paralela a AB y sobre ella ubicamos dos puntos E y F tales que E preceda a O y $EO \cong OF \cong AB$. Sean G y H los puntos de intersección de las rectas $\overleftrightarrow{EA}$ y $\overleftrightarrow{FB}$, y de las rectas $\overleftrightarrow{FC}$ y $\overleftrightarrow{ED}$, respectivamente.

a. ¿Cuándo el cuadrilátero $\square GFHE$ es un rectángulo?

b. Probar que A, B, C y D son los puntos medios de los lados del cuadrilátero $\square GFHE$.

c. Probar que las diagonales del cuadrilátero $\square GFHE$ son perpendiculares.

Supongamos que $|AB| = 8$ y $|BC| = 3$.

d. Calcular el área del cuadrilátero $\square GFHE$.

e. Hallar la razón entre las áreas de los triángulos ΔHAB y ΔHEF.

8.1035 [Calendar, January, Problem # 3, Math. Teacher 96 (2003), 40]. Tenemos un rectángulo de perímetro 100 y una de sus diagonales tiene longitud x. Expresar el área del rectángulo en función de x.

8.1036. Sean $\square\,(a,b,a,b)$ un rectángulo y $\square\,(a',b',a',b')$ un paralelogramo con la misma área. Supongamos que $a = 8$, $|AC| = 10$ y $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{3}{4}$.

a. Calcular el perímetro de ambos cuadriláteros.

b. Determinar la longitud de la altura del paralelogramo correspondiente al lado a'.

8.1037. Si los lados de un paralelogramo tienen longitudes 8 y 12, y una de sus diagonales tiene longitud 6, calcular la longitud de la diagonal restante del paralelogramo.

8.1038. Si las diagonales de un paralelogramo tienen longitudes 8 y 4, y uno de sus lados tiene longitud 5, calcular las longitudes de los lados restantes del paralelogramo.

8.1039. Sean $\square ABCD$ un paralelogramo tal que $|AB| = 2|BC|$, y M y N los puntos medios de los lados AB y CD, respectivamente.

a. Probar que $\angle CMD$ y $\angle ANB$ son ángulos rectos.

b. Si E y F son los puntos de intersección de $\overleftrightarrow{DM}$ y $\overleftrightarrow{BC}$, y de $\overleftrightarrow{CM}$ y $\overleftrightarrow{AD}$, respectivamente, probar que $\square CDFE$ es un rombo.

c. Supongamos que $m(\angle ADC) =120$ y $b = |BC|$. Probar que

$$are(\square ABCD) = \sqrt{3}\,b^2 \text{ y } are(\square FECD) = 2\sqrt{3}\,b^2 .$$

d. Si P es el punto de intersección de $\overleftrightarrow{DM}$ y AC, probar que F, P y N son colineales.

e. Probar que $are(\Delta DCF) = are(\square ABCD)$, $are(\square FMPA) = \dfrac{are(ABCD)}{3}$ y $are(\square ABCD) = 2|BC|^2 \operatorname{sen}\angle A$.

f. Probar que $|FN| = |AC|$.

8.1040. Sean $\square ABCD$ un trapecio tal que $AB \parallel CD$ y M y N los puntos medios de AB y CD, respectivamente. Si $\angle A$ y $\angle B$ son complementarios, probar que $|MN| = ||AB| - |CD||$.

8.1041. Sea $\square ABCD$ un trapecio tal que $AB \parallel CD$, los ángulos $\angle A$ y $\angle D$ son rectos y $m(\angle B) = 60$. Si $|AB| = 12$ y $|CD| = 5$, calcular las longitudes de las diagonales del trapecio.

8.1042. Sea $\square ABCD$ un trapecio tal que $AB \parallel CD$, $\angle ADB$ es recto, $m(\angle DBA) = 30$, $|AD| = 5$ y $\overrightarrow{AC}$ es la bisectriz del ángulo $\angle A$. Encontrar las longitudes de DC, AB y DB y el área del trapecio.

8.1043. Sea $\square ABCD$ un trapecio isósceles tal que $AB \parallel CD$, $|AB| = 24$ y $|CD| = 12$. Si $\angle ADB$ y $\angle ACB$ son ángulos rectos, encontrar las longitudes de los lados no paralelos del trapecio.

8.1044. Calcular las longitudes de las diagonales de un rombo cuya área es igual a 16 y sus lados tienen longitud igual a 1.

8.1045. Probar que el trapecio $\square\,(8,5,4,3)$ es rectangular.

8.1046 [l-41]. Sea $\square ABCD$ un trapecio tal que $AB \parallel CD$ y $a > c$. Si $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{DB}$ son las bisectrices de los ángulos $\angle C$ y $\angle D$, respectivamente, probar que $are(\square ABCD) = \frac{a+c}{4}\sqrt{3a^2+2ac-c^2}$.

8.1047 [l-41]. Sea $\square ABCD$ un trapecio isósceles tal que $AB \parallel CD$ y $AC \perp DB$. Si MN es el segmento medio del trapecio, probar que $are(\square ABCD) = |MN|^2$.

8.1048 (La celda de Peaucellier). Sean A y B dos puntos fijos en el plano. Si $|AP| = |BP| = |AQ| = |BQ| = i$ y $|AR| = |BR| = j$, probar que P, Q y R son colineales. Si los puntos A, B, P, Q y R se mueven conservando las distancias i y j, probar que el producto $|PR||QR|$ es constante.

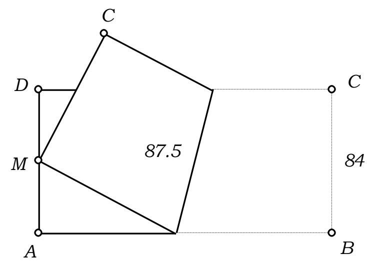
8.1049 (La Regla del Pulgar) Para calcular aproximadamente la longitud de la diagonal de un cuadrado:

multiplicar el lado del cuadrado por 10, restar al resultado el 1% de este producto y dividir el resultado por 7.

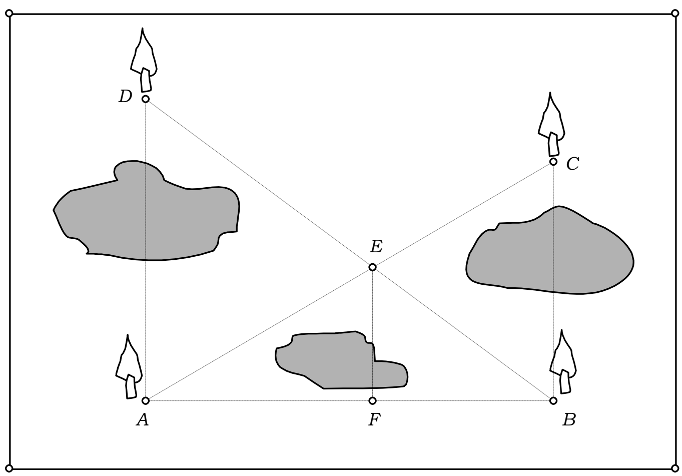
Explicar por qué este procedimiento da la longitud aproximada de la diagonal de un cuadrado.

8.1050 [l-260]. Se tienen 20 mosaicos de forma triangular con las mismas dimensiones y cada uno de ellos es un triángulo rectángulo en el cual un cateto mide el doble que el otro. ¿Puedes colocar estos 20 mosaicos, de tal manera que se forme un cuadrado?

8.1051 [Problem 1732, J. Recreational Math. 22 (11000), 232 – 233]. Tenemos una hoja de papel rectangular que mide de ancho 84 cm. Cuando la doblamos de tal forma que uno de sus esquinas coincida con el punto medio de del lado opuesto más corto, el pliegue tiene 87.5 cm (ver la figura adjunta). Con esta información, encontrar el largo de la hoja de papel.

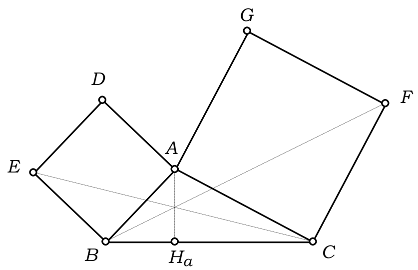


8.1052 [a-38] (El Tesoro Escondido). En un mapa pirata de una isla, se describe la ubicación secreta de un tesoro escondido. En él solamente se da la siguiente información:



Hay cuatro árboles A, B, C y D y tres charcas muy profundas en las cuales no se pueden medir los pasos sobre ellas. Las rectas que unen los árboles A y D y B y C son perpendiculares a la recta que une los árboles A y B. Del árbol A al árbol C hay 125 pasos, del árbol B al árbol D hay 145 pasos y del árbol A al árbol B hay 100 pasos. Si E es el punto de intersección de AC y BD y F es su proyección sobre AB, el tesoro se encuentra a la mitad del camino entre los puntos E y F. Encontrar la distancia en pasos entre el punto E y el lugar en donde se encuentra el tesoro.

8.1053 (El Problema del Bambú Roto, Chui-Suang). Hay un bambú de 10 pies de altura, el cual está roto y su extremo superior se apoya sobre el suelo a una distancia de 3 pies de su tronco base. Calcular la altura en donde se ha producido la rotura.
8.1054. Si una cierta caja tiene *a* cm de alto, *b* cm de ancho y *c* cm de largo, ¿cuál es la longitud del segmento más grande que se pueda meter en la caja?
8.1055[I-213]. Una iglesia está rodeada por cuatro torres que forman un cuadrado y al lado de la iglesia pasa una carretera. Si desde el punto, ubicado en el norte de la iglesia, de esta carretera en donde se ven las cuatro torres como si fueran dos, viajamos hacia el sur 2 km, nos damos cuenta, que las cuatro torres se ven como si fueran 3, y si después viajamos hacia el sur otros 3 km, desde este punto de la carretera sólo vemos dos torres.
¿Qué tan lejos estamos de la iglesia desde los tres sitios mencionados?
8.1056. Si una antena transmisora se encuentra a 200 m de altura, ¿en qué radio de distancia se debe colocar un transmisor de la misma?
8.1057. ¿Puede un radar que está a 100 m de altura detectar a un avión que vuela a 6000 m de altura y que se encuentra a una distancia de 200 km del radar?
8.1058. ¿Puede un salvavidas que está a una altura de 4 m ver a un nadador en el mar que se encuentra a 2 km de distancia?
8.1059. ¿Qué tan alto del nivel del mar debe una persona colocarse para observar un barco a 10 km de distancia de la orilla del mar?
8.1060 [I-75]. Cuatro pueblos se encuentran situados en los vértices de un cuadrado de lado 1 km. Los pobladores desean conectar los cuatro pueblos mediante una carretera, pero ellos sólo tienen material para hacer $1 + \sqrt{3}$ kilómetros de carretera. ¿Podrán los habitantes conectar los cuatro pueblos?
8.1061(Teorema de Vecten). En la figura:



tenemos un triángulo cualquiera ΔABC y sobre sus lados AB y AC tenemos dos cuadrados $\square BADE$ y $\square ACFG$. Probar que las rectas $\overleftrightarrow{AH_a}$, $\overleftrightarrow{BF}$ y $\overleftrightarrow{CE}$ son concurrentes.

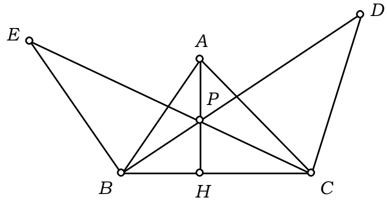
8.1062. Sean ΔABC un triángulo equilátero y $D \in \overleftrightarrow{BC} - BC$. Completamos el triángulo equilátero ΔADE, de tal forma que E y C estén en diferentes semiplanos determinados por la recta $\overleftrightarrow{AD}$. Probar que las mediatrices de los segmentos AC, AD y AE son concurrentes.
8.1063. Sea ΔABC un triángulo isósceles tal que $AB \cong AC$. Si $D \in AB$ y $E \in AC$ satisfacen la congruencia $AD \cong AE$, probar que la mediatrices de los segmentos BD, CE y el lado BC son concurrentes.
8.1064. Sea ΔABC un triángulo. Sobre los lados AB y AC y en el exterior del triángulo construimos cuadrados $\square ADEB$ y $\square ACFG$. Probar que BF, CE y AH_a son concurrentes.
8.1065. Sea ΔABC un triángulo. Extendemos el lado AB en dirección del vértice B hasta un punto D y el lado AC en dirección del vértice C hasta un punto E. Probar que las bisectrices de los ángulos $\angle BAC$, $\angle CBD$ y $\angle BCE$ son concurrentes.
8.1066. Sean ΔABC un triángulo y P un punto en el plano. Sean A', B' y C' los puntos simétricos de P con respecto a los puntos medios de BC, AC y AB, respectivamente. Probar las siguientes afirmaciones:

a. $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$ y $AC \parallel A'C'$.
b. $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.
c. Los segmentos AA', BB' y CC' son concurrentes.

8.1067 [I-297]. Sea ΔABC un triángulo. Dividimos cada uno de los lados BC, AC y AB en los puntos $A_1,\ldots, A_k$, $B_1,\ldots, B_k$ y $C_1,\ldots, C_k$ respectivamente, de tal forma que $\angle BAA_1 \cong \angle A_1AA_2 \cong \ldots \cong \angle A_kAC$, $\angle CBB_1 \cong \angle B_1BB_2 \cong \ldots \cong \angle B_kBA$ y $\angle ACC_1 \cong \angle C_1CC_2 \cong \ldots \cong \angle C_kCB$. Probar que AA_i, BB_i y CC_i son concurrentes o que I pertenece al interior del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección de los segmentos AA_i, BB_i y CC_i.

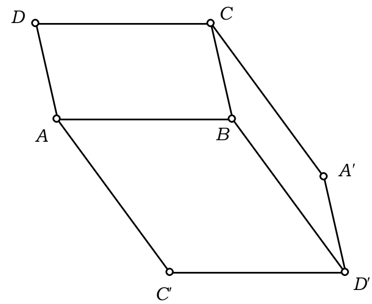
8.1068 [I-147] Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$. Trazamos una recta perpendicular a BC que corte a $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{AB}$ en los puntos A', B' y C', respectivamente. Trazamos rectas perpendiculares a $\overleftrightarrow{AA'}$ que pasen por los puntos A', B' y C' y corten a $\overleftrightarrow{BC}$ en los puntos A'', B'' y C'', respectivamente. Probar que los segmentos AA'', BB'' y CC'' tienen el mismo punto medio.

8.1069. En la figura:



ΔABC es un triángulo y h_a, BD y CE concurren en el punto P. Probar que h_a, la recta perpendicular a $\overleftrightarrow{EC}$ que pasa por B y la recta perpendicular a $\overleftrightarrow{BD}$ que pasa por C son concurrentes.

8.1070. En la figura:



$\square ABCD$, $\square AC'D'B$ y $\square BD'A'C$ son paralelogramos. Probar que AA', CC'y DD' son concurrentes.

8.1071 [Problem M104, Cruz Mathematicorum with Mathematical Mayhem 30 (2004), 406-408]. Si $\square ABCD$ es un paralelogramo y O_a, O_b, O_c y O_d son los centros de gravedad de los triángulos ΔBCD, ΔACD, ΔABD y ΔABC, respectivamente, probar las siguientes afirmaciones:

a. $\square O_a O_b O_c O_d$ es un paralelogramo.
b. Los paralelogramos $\square O_a O_b O_c O_d$ y $\square ABCD$ son semejantes.
c. $\square A O_b C O_d$ es un paralelogramo.
d. $\square O_a B O_c D$ es un paralelogramo.
e. Los paralelogramos $\square A O_b C O_d$ y $\square O_a B O_c D$ son semejantes.

8.1072 [Problem M102, Cruz Mathematicorum with Mathematical Mayhem 30 (2004), 405]. Si $\square ABCD$ es un paralelogramo y O_a, G_b, G_c y G_d son los centros de gravedad de los triángulos ΔBCD, ΔACD, ΔABD y ΔABC, respectivamente, probar que

a. $\square G_a G_b G_c G_d$ es un paralelogramo y
b. $are(\square G_a G_b G_c G_d) = \frac{1}{9} are(\square ABCD)$.

8.1073. Si los lados de un paralelogramo tienen longitudes 3 y 4 y su diagonal mayor tiene longitud 5, encontrar el área del paralelogramo.

8.1074 [I-243]. Sea ΔABC un triángulo. Prolongamos los lados BC y AC hasta los puntos D y E, respectivamente, de tal forma que $|CD| = \frac{a}{2}$ y $|CE| = \frac{b}{2}$. Si $\overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{AD}$. Probar que $c^2 = \frac{9}{5}(a^2 + b^2)$.

8.1075. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumple la identidad

$$|AM_a|^2 + |BM_b|^2 + |CM_c|^2 = \frac{3}{4}(|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2).$$

8.1076. Sea ΔABC un triángulo en el cual $\angle A$ es un ángulo obtuso. Si $|BC|^2 = |AB|^2 + 3|AC|^2$, probar que A es el punto medio de CH_b.

8.1077. Sean ΔABC un triángulo rectángulo con hipotenusa BC. Si $D \in BC$, probar que $|BD|^2 + |DC|^2 = 2|AD|^2$.

8.1078. Sean ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle C$ y $D \in BC$. Probar que $|AB|^2 + |CD|^2 = |AD|^2 + |CB|^2$.

8.1079. Sean ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$ y $D \in \overleftrightarrow{BC} - BC$. Probar que $|BD||DC| = |AD|^2 - |AB|^2$.

8.1080. Sean ΔABC un triángulo equilátero y $D \in \overleftrightarrow{BC} - BC$. Probar que $|AD|^2 = |BC|^2 + |CD|^2 + |BC||CD|$.

8.1081. Sea ΔABC un triángulo tal que $AM_a \cong AC$, Probar la identidad $|AB|^2 = |AM_a|^2 + 2|M_aC|^2$.

8.1082. Sea ΔABC un triángulo.

a. Si $P \in BC$ y $i|BP| = j|PC|$, probar que $i|AB|^2 + j|AC|^2 = i|BP|^2 + j|PC|^2 + (i+j)|AP|^2$.

b. Si $P \in \overleftrightarrow{BC} - BC$ y $i|BP| = j|PC|$, probar que $i|AB|^2 - j|AC|^2 = i|BP|^2 - j|PC|^2 + (i-j)|AP|^2$.

8.1083. Sean ΔABC un triángulo y L y M los puntos de trisección de BC. Probar las siguientes identidades:

a. $|AB|^2 + |AC|^2 = |AL|^2 + |AM|^2 + 4|LM|^2$.

b. $2|AB|^2 + |AC|^2 = 3|AL|^2 + 2|BL|^2 + |CL|^2$.

c. $|AM|^2 = \frac{1}{3}|AB|^2 + \frac{2}{3}|AC|^2 - \frac{2}{9}|BC|^2$.

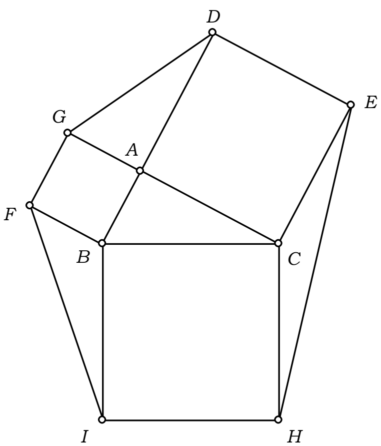
d. $|AB|^2 - |AC|^2 = 3(|AL|^2 - |AM|^2)$.

8.1084. Sean ΔABC un triángulo y $P \in int(\Delta ABC)$. Si D, E y F son las proyecciones de P sobre BC, AC y AB, respectivamente, probar que $|BD|^2 + |CE|^2 + |AF|^2 = |BF|^2 + |AE|^2 + |CD|^2$, ¿es cierto el resultado para cualquier punto P del plano?

8.1085. Sean ΔABC un triángulo y $P \in int(\Delta ABC)$. En el exterior del triángulo construimos cuadrados $\square BCML$, $\square CNRA$ y $\square ASTB$. Probar que $|PL|^2 + |PN|^2 + |PS|^2 = |PM|^2 + |PR|^2 + |PT|^2$.

8.1086. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$. Si trazamos exteriormente un cuadrado sobre la hipotenusa BC del triángulo, probar que b_a pasa por el centro de este cuadrado.

8.1087. En la figura:



tenemos tres cuadrados $\square ABFG$, $\square ACED$ y $\square IHCB$ sobre los lados de un triángulo rectángulo ΔABC con ángulo recto $\angle A$. Probar las siguientes afirmaciones:

a. $are(\Delta ABC) = are(\Delta ADG) = are(\Delta BFI) = are(\Delta CHE)$.

b. $AH \perp BE$ y $AI \perp CF$.

c. $|FI|^2 = a^2 + 3c^2 = b^2 + 4c^2$.

d. $|EH|^2 = a^2 + 3b^2 = c^2 + 4b^2$.

e. $|DG|^2 = b^2 + c^2$.

f. $|FI|^2 + |EH|^2 + |DG|^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2)$.

g. $c^2 + |AH|^2 = b^2 + |AI|^2$.

h. $|HE|^2 + |FI|^2 = 5a^2$.

8.1088. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$. En el exterior del triángulo trazamos los cuadrados $\square ACDE$ y $\square BAFG$. Probar que $|BD|^2 - |CG|^2 = b^2 - c^2$.

8.1089 [I-34, Problem 318]. Sean ΔABC y $\Delta AB'C'$ dos triángulos isósceles rectángulos en $\angle BAC$ y $\angle B'AC'$, respectivamente. Probar que $BB' \cong CC'$ y $BB' \perp CC'$.

8.1090 [I-34, Problem 318]. Sea ΔABC un triángulo. Sobre los lados AB y AC construimos cuadrados cuyos centros sean los puntos P y Q, respectivamente. Probar que el triángulo ΔPQM_a es isósceles y rectángulo.

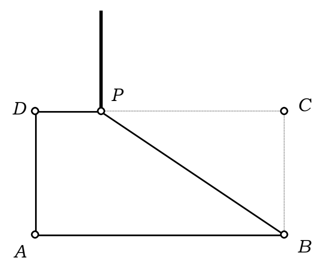
8.1091. En un cierto cuadrilátero se sabe que sus diagonales son perpendiculares y que $|AB|^2 + |BC|^2 = |AD|^2 + |CD|^2$. Probar que AC biseca a BD.
8.1092. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero cuyas diagonales son perpendiculares tal que $\angle A$ y $\angle C$ son ángulos rectos. Probar que $|AB|^2 + |DC|^2 = |AD|^2 + |BC|^2$.
8.1093. Sean A, B, C y D cuatro puntos consecutivos. Si P está fuera de la recta que contiene a los puntos dados, probar que $|PA|^2 + |PD|^2 = |PB|^2 + |PC|^2 - |AC|^2$.
8.1094. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero. Si para todo punto P en el plano se cumple que $|PA|^2 + |PC|^2 = |PB|^2 + |PD|^2$, probar que $\square ABCD$ tiene que ser un rectángulo.
8.1095. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero. Si existe un punto P en el plano tal que $|PA|^2 + |PC|^2 = |PB|^2 + |PD|^2$, ¿es el cuadrilátero $\square ABCD$ un rectángulo?
8.1096. Sea $\square ABCD$ un rectángulo. Si $P \in int(\square ABCD)$, probar que $|PA|^2 + |PC|^2 = |PB|^2 + |PD|^2$, ¿es cierta esta identidad si $P \in ext(\square ABCD)$?
8.1097. En un rectángulo $\square ABCD$, si P es la proyección del punto D sobre el segmento AC, probar que

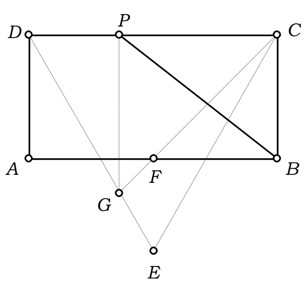
$$|AD|^2 = |AC||AP|.$$

8.1098. Sean $\square ABCD$ un cuadrado y $E \in \overleftrightarrow{BC} - BC$. Probar que $|AE|^2 = 2|BC||BE| + |CE|^2$.
8.1099. Sea $\square ABCD$ un papalote con $AB \cong AD$ y $BC \cong DC$. Si O es el punto de intersección de las diagonales del papalote, probar que $|BC|^2 + |AO|^2 = |AB|^2 + |CO|^2$.
8.1100. Sea $\square ABCD$ un paralelogramo. Probar que el número $|PA|^2 - |PB|^2 + |PC|^2 - |PD|^2$ no depende de la elección del punto P en el plano.
8.1101. Sean $\square ABCD$ un paralelogramo, O el punto de intersección de sus diagonales y M el punto medio de AB. Probar que $4|CM|^2 = 8|AO|^2 + 2|AD|^2 - |AB|^2$.
8.1102. Si las diagonales de un paralelogramo tienen longitudes 8 y 10 y uno de sus lados tiene longitud 5, encontrar las longitudes de todos los lados del paralelogramo.
8.1103. Sea $\square ABCD$ un trapecio tal que $AB \parallel CD$. Probar que $|BD|^2 + |AC|^2 = |AD|^2 + |BC|^2 + 2|AB||DC|$.
8.1104. Sean $\square ABCD$ un trapecio rectangular tal que $AB \parallel CD$ y M y N los puntos medios de sus diagonales. Si $m(\angle B) = 30$, $|MN| = 3$ y $|CD| = 5$, encontrar la longitud de los lados restantes del trapecio.
8.1105. Sea $\square ABCD$ un trapecio isósceles tal que $AB \parallel CD$ y sus diagonales son perpendiculares. Si $|AB| = 30$ y $|CD| = 20$, encontrar la longitud del segmento que une los puntos medios de los lados paralelos del trapecio.

8.1106[I-129, El acertijo de Pappus]. Tenemos una hoja rectangular de cartulina $\square ABCD$. Sobre el lado DC deseamos encontrar un punto P, de tal forma que si cortamos el triángulo ΔCPB y colgamos al trapecio restante del punto P, el trapecio quede colgado de manera horizontal.

a. Supongamos que P' es el punto de trisección del lado DC. Sea Q la proyección del punto P' sobre AB. Probar que el rectángulo $\square AQP'D$ y el triángulo $\Delta P'QB$ tienen la misma área. ¿Es P' el punto deseado?





b. Construimos el triángulo equilátero ΔECD y tomamos el punto $F \in AB$ tal que $FB \cong BC$. Sean G el punto de intersección de la recta $\overleftrightarrow{CF}$ y DF y P la proyección de G sobre DC. Probar que el punto P no depende de la longitud del segmento BC.

c. ¿Es el punto P del inciso anterior el buscado? Justificar la respuesta.

8.1107. Sea $\angle AOB$ un ángulo recto. Trazamos una recta perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ en el punto B que corte a $\overleftrightarrow{OA}$ en el punto C y otra recta perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ en el punto A que corte a $\overleftrightarrow{OB}$ en el punto D. Probar que

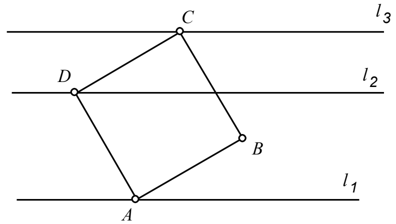
$$|OA||OB| = |OC||OD|.$$

8.1108. Se tiene una hoja de papel rectangular cuyos lados tiene longitudes de 10 cm y de 6 cm. Unimos dos de sus puntos diametralmente opuestos, formando así dos triángulos rectángulos como crestas.

a. Probar que dichos triángulos rectángulos son congruentes.

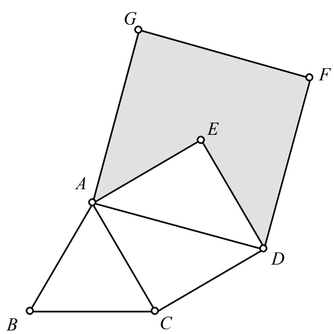
b. Calcular el área de estos dos triángulos rectángulos.

8.1109. En la figura:



tenemos un cuadrado $\square ABCD$ cuyos vértices A, D y C yacen sobre las rectas paralelas l_1, l_2 y l_3, respectivamente. Si $d(l_1, l_2) = 8$ y $d(l_2, l_3) = 4$, calcular el área del cuadrado.

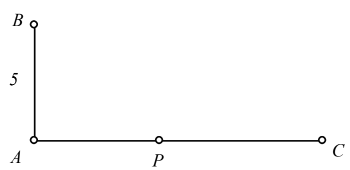
8.1110. En la figura:



ΔABC es un triángulo equilátero cuyos lados tienen longitud 18 y $\square CDEA$ y $\square DFGA$ son cuadrados. Calcular el área de la región sombreada.

8.1111. La diferencia entre los perímetros de dos cuadrados es igual a 9, ¿cuál es la diferencia entre la longitudes de sus diagonales?

8.1112. En la figura:



tenemos que $AB \perp AC$, $|AB| = 5$ y $|AC| = 15$. Se desea encontrar un punto $P \in AC$, de tal forma que AB, AP y PC sean los lados de un triángulo rectángulo. Encontrar las longitudes de uno de estos triángulos rectángulos.

CAPÍTULO 9

CÍRCULOS

9.1. Propiedades básicas de los círculos

9.1.1. Definición. Al conjunto de puntos que están ubicados a una distancia fija de un punto fijo dado se le llama *círculo*. Al punto dado se le llama *centro* del círculo y a la distancia se le llama *radio* del círculo.

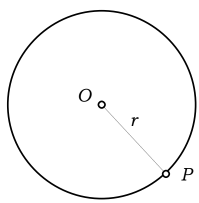


Figura 9.1

El círculo con centro O y radio r será denotado por el símbolo $C(O,r)$. Por definición, tenemos que $C(O,r) = \{ P : d(P,O) = r \}$.

9.1.2. Teorema. Para cualquier punto O en el plano y cualquier número real positivo r, $C(O,r) \neq \emptyset$.

Prueba: Sea l una recta que contenga al punto O (la cual existe por el Teorema 1.1.6). De acuerdo con el Corolario 1.10.6, existen puntos A, $B \in l$ tales que O es el punto medio de AB y $d(A,O) = d(B,O) = r$. Por definición, hallamos que A, $B \in C(O,r)$. Por lo tanto, $C(O,r) \neq \emptyset$. ♣

A continuación, enunciamos el Tercer Postulado de Euclides.

Postulado del Círculo. Por un punto dado, se puede trazar uno y solamente un círculo de radio dado.

El Postulado de Euclides nos garantiza el trazo de círculos en cualquier parte conveniente del plano.

9.1.3. Definición. Decimos que dos círculos son *congruentes* si tienen el mismo radio, y utilizamos el símbolo $\cong$ para señalar tal congruencia.

En símbolos, $C(O,r) \cong C(P,s)$ si y solo si $r = s$. Es evidente que $\cong$ establece una relación de equivalencia entre todos los círculos del plano.

9.1.4. Definición. Decimos que los puntos $A_1, \ldots, A_k$ son *concíclicos* si podemos encontrar un círculo que los contenga.

Claramente toda pareja de puntos son concíclicos, pues el círculo que los contiene es aquel cuyo centro es el punto medio del segmento que dichos puntos determinan y su radio es la mitad de la longitud de este segmento.

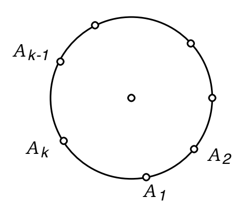


Figura 9.2

9.1.5. Teorema. Tres puntos concíclicos no son colineales.

Prueba: El resultado es consecuencia del Corolario 1.10.6 y el Teorema 8.1.18. ♣

9.1.6. Corolario. Un círculo y una recta se intersecan en a los más dos puntos.

9.1.7. Definición. Sea $\mathcal{C}(O,r)$ un círculo. El *interior* de $\mathcal{C}(O,r)$ es el conjunto $int(\mathcal{C}(O,r)) = \{ P : d(P,O) < r \}$ y su *exterior* es el conjunto $ext(\mathcal{C}(O,r)) = \{ P : d(P,O) > r \}$.

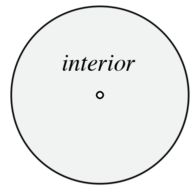


Figura 9.3

9.1.8. Teorema. El interior y el exterior de un círculo son conjuntos no vacíos.

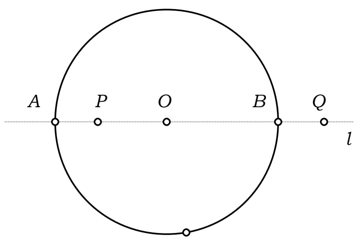


Figura 9.4

Prueba: Sea $\mathcal{C}(O,r)$ un círculo. Es obvio, por definición, que $O \in int(\mathcal{C}(O,r))$. Sea l una recta que pasa por el centro del círculo O. Por el Corolario 1.10.6, existen dos puntos A, $B \in l$ tales que O es el punto medio del segmento AB y $d(A,O) = d(B,O) = r$. Entonces, A, $B \in \mathcal{C}(O,r)$. Por el Axioma O_3, es posible tomar cualesquiera dos Puntos $P, Q \in l$ tales que P está entre A y O, y B precede a Q (ver la figura 9.4). Observemos que $Q \notin AB$ y B está entre O y Q. Del Teorema 1.9.4 encontramos las desigualdades $|OP| < |OA| = r = |OB| < |OQ|$. De la definición de interior y exterior de un círculo, vemos que

$$P \in int(\mathcal{C}(O,r)) \text{ y } Q \in ext(\mathcal{C}(O,r)).$$ ♣

9.1.9. Teorema. Si $\mathcal{C}(O,r)$ es un círculo cualquiera, entonces *plano* = $ext(\mathcal{C}(O,r)) \cup \mathcal{C}(O,r) \cup int(\mathcal{C}(O,r))$.

Prueba: Si P es un punto arbitrario, entonces una y solamente una de las siguientes desigualdades se debe cumplir: $d(P,O) > r$, o $d(P,O) = r$ o $d(P,O) < r$. En otras palabras, $P \in ext(\mathcal{C}(O,r)) \cup \mathcal{C}(O,r) \cup int(\mathcal{C}(O,r))$. ♣

9.1.10. Teorema. Por cada terna de puntos no colineales, existe un único círculo que los contiene.

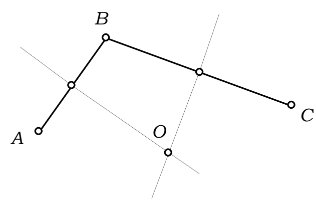


Figura 9.5

Prueba: Sean A, B y C son tres puntos no colineales. Sean m y l las mediatrices de los segmentos AB y BC, respectivamente. Si $m \parallel l$, por el Problema 3.158, entonces $AB \parallel BC$ y tendríamos que A, B y C serían colineales, lo cual es imposible. Por consiguiente, m y l se cortan en un punto, digamos O. Pongamos $r = |OA|$. Como O está en las mediatrices de AB y BC, tenemos que $r = |OA| = |OB| = |OC|$, es decir, A, B y $C \in \mathcal{C}(O,r)$. Ahora, supongamos que A, B y $C \in \mathcal{C}(O',r')$. Como $r' = |O'A| = |O'B| = |O'C|$, el centro O' yace en las mediatrices de los segmentos AB y BC. Por ello, hallamos que $O = O'$ y $r = |OA| = r' = |O'A|$. Con esto, probamos la unicidad del círculo $\mathcal{C}(O,r)$. ♣

El teorema anterior nos asegura que tres puntos no colineales son concíclicos. En general, los vértices de un cuadrilátero no son concíclicos, pero esto lo discutiremos más adelante (Teorema 9.9.4).

9.1.11. Corolario. Dos círculos se cortan en a lo más dos puntos.

Prueba: Si A, B y $C \in \mathcal{C}(O,r) \cap \mathcal{C}(O',r')$, por el teorema anterior, tenemos entonces que $\mathcal{C}(O,r) = \mathcal{C}(O',r')$. ♣

9.1.12. Teorema del Principio de la Continuidad Elemental. Un segmento que une a un punto interior de un círculo con un punto exterior de él mismo tiene un punto y solo un punto en común con el círculo.

Prueba: Sean C(O,r) un círculo, $P \in int$(C(O,r)) y $Q \in ext$(C(O,r)). Consideremos dos casos:

I. $O \in \overleftrightarrow{PQ}$ (figura 9.6). Por el Corolario 1.10.6, existen dos únicos puntos $A, B \in \overleftrightarrow{PQ}$ tales que $|OA| = |OB| = r$ y O es el punto medio del segmento AB. Como $|OP| < r < |OQ|$, por el Teorema 1.9.4, debemos tener que $A \in PQ$, o bien, $B \in PQ$, pues es claro que no pueden estar ambos. Por la unicidad de A y B, vemos que PQ y C(O,r) tienen solamente un punto en común.

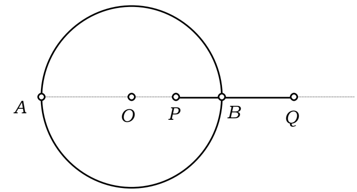


Figura 9.6

II. Los puntos O, P y Q no son colineales (figura 9.7). Puesto que $d(O, \overleftrightarrow{PQ}) \leq |OP| < r$. Entonces existen dos únicos puntos $A, B \in \overleftrightarrow{PQ}$ tales que $|OA| = |OB| = r$ (8.1.18). Como $|OP| < r = |OA| = |OB|$, por el Teorema 4.4.13 (3), hallamos que $P \in AB$ y como $|OA| = |OB| = r < |OQ|$, $Q \notin AB$. Afirmamos que A o $B \in PQ$. En efecto, si ambos A y B pertenecieran al segmento PQ, por el Teorema 4.4.13 (3), tendríamos la desigualdad $r = |OA| = |OB| < |OP|$, lo cual sería una contradicción. Por lo tanto, PQ y C(O,r) tienen solamente un punto en común. ♣

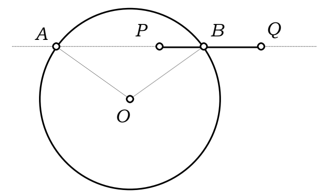


Figura 9.7

9.1.13. Teorema. Sean C(O,r) y C(O',r') dos círculos. Entonces, C(O,r) $\cap$ C(O',r') $\neq \emptyset$ si y solo si

$$|r - r'| \leq |OO'| \leq r + r'.$$

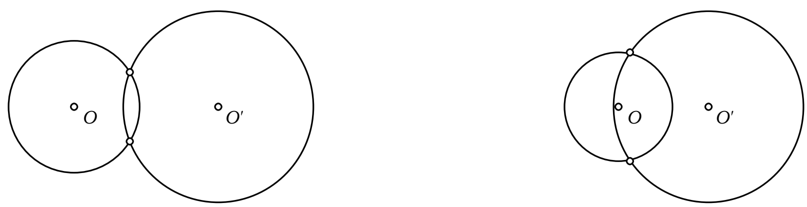


Figura 9.8

Prueba: *Necesidad*. Sea $A \in$ C(O,r) $\cap$ C(O',r'). Por el Teorema 1.8.2, la Desigualdad del Triángulo 4.4.9 y su Corolario 4.4.10, se cumplen las desigualdades

$$|r - r'| = ||OA| - |O'A|| \leq |OO'| \leq |OA| + |O'A| = r + r'.$$

Suficiencia. Consideremos tres casos:

I. Supongamos, sin perder generalidad, que $r - r' = |OO'|$. Mediante el Teorema 1.10.4, podemos encontrar un punto $A \in \overleftrightarrow{OO'}$, de tal forma que O' esté entre O y A y $|AO'| = r'$. En particular, $A \in$ C(O',r'). Por el Teorema 1.8.2, $|OA| = |OO'| + |O'A| = r - r' + r' = r$. Por lo consiguiente, $A \in$ C(O,r).

II. $|OO'| = r + r'$. Por el Teorema 1.10.4, existe un punto $A \in \overleftrightarrow{OO'}$ tal que O' y A están del mismo lado de la recta $\overleftrightarrow{OO'}$ con respecto a O y $|AO| = r$. Como consecuencia de esto, $A \in$ C(O,r). Ya que $r < |OO'|$, por el Teorema 1.9.4, A está entre O y O'. Según el Teorema 1.8.2, $|OO'| = |OA| + |O'A| = r + r' = |O'A| + r$. Entonces, $r' = |O'A|$. Por lo tanto, $A \in$ C(O',r').

III. $|r - r'| < |OO'| < r + r'$. Se tiene entonces que $|OO'| < r + r'$, $r < |OO'| + r'$ y $r' < |OO'| + r$. De aquí podemos entonces aplicar el Teorema 8.3.17 para construir un triángulo $\Delta AOO'$ tal que $|OA| = r$ y $|O'A| = r'$. Como consecuencia, hallamos que $A \in$ C(O,r) $\cap$ C(O',r'). ♣

9.1.14. Teorema del Principio de la Continuidad Circular. Si un círculo interseca el exterior e interior de otro círculo, entonces dichos círculos se cortan exactamente en dos puntos.

Prueba: Sean $\mathcal{C}(O,r)$ y $\mathcal{C}(O',r')$ dos círculos en los cuales existen puntos $P \in \mathcal{C}(O,r) \cap ext(\mathcal{C}(O',r'))$ y $Q \in \mathcal{C}(O,r) \cap int(\mathcal{C}(O',r'))$. Solo consideremos el caso en que ninguna terna de los puntos O, O', P y Q es colineal, los casos restantes se le dejan al lector. De la Desigualdad del Triángulo 4.4.9, sabemos que $|OO'| \leq |OQ| + |QO'| \leq r + r'$, $r' < |PO'| \leq |PO| + |OO'| \leq r + |OO'|$ y $r = |OQ| \leq |OO'| + |O'Q| \leq |OO'| + r'$. Así, por el teorema anterior, debemos tener que los círculos $\mathcal{C}(O,r)$ y $\mathcal{C}(O',r')$ se intersecan. En virtud del Corolario 9.1.11, dichos círculos no pueden tener más de un punto en común. Supongamos que ambos círculos se cortan en el punto R. Si O, R y O' no son colineales, con base en el Teorema 8.1.18, podemos encontrar un segundo punto S en el plano tal que $|SO| = |RO|$ y $|SO'| = |RO'|$ y, por tanto, S pertenece también a ambos círculos. Supongamos, pues que O, R y O' son colineales y, sin perder generalidad, que O precede a O' sobre la recta que determinan. Consideremos los tres posibles casos:

Caso I. O' está entre O y R. Como $|O'P| < r'$, tomemos un punto $T \in \overrightarrow{O'P}$ tal que $|O'T| = r'$, lo cual es posible por el Teorema 1.10.4. Entonces, tenemos que $OP \cong OR$ y $O'R \cong O'T$. De acuerdo con el Teorema 3.2.9, vemos que $\angle OPR \cong \angle PRO'$ y $\angle TRO' \cong \angle O'TR$. Pero, $\angle OPR > \angle O'PR > \angle O'TR$ y $\angle OPR \cong \angle PRO' < \angle TRO' \cong \angle O'TR$, lo cual es imposible.

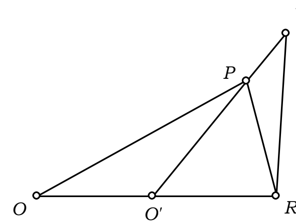


Figura 9.9

Caso II. R está entre O y O'. Sea l la recta perpendicular a OO' en el punto R. Tenemos por hipótesis que $|OR| = r$ y $|O'R| = r'$. Del hecho de que un cateto es más grande que la hipotenusa (4.4.6), podemos deducir que P tiene que estar en el semiplano determinado por l que contiene al punto O. Sea T el punto de intersección de $O'T$ y l. Según el Corolario 4.4.6, sabemos que $r' = |O'R| < |O'T| < |O'P|$, pero esto es una contradicción.

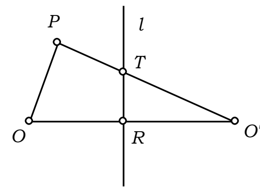


Figura 9.10

Caso III. O está entre R y O'. Puesto que $|O'Q| > r'$, podemos encontrar un punto $T \in \overrightarrow{O'Q}$ tal que $|O'T| = r'$ (Teorema 1.10.4). Entonces, tenemos que $OQ \cong OR$ y $O'R \cong O'T$. De los Teoremas 3.2.6, 4.3.4 y 4.3.8 obtenemos como resultado que

$$2m(\angle O'RT) + m(\angle QO'R) = 180 =$$
$$2m(\angle O'RQ) + m(\angle QO'R) + m(\angle OQO')$$
$$2m(\angle O'RT) = 2m(\angle O'RQ) + m(\angle OQO')$$
$$2m(\angle O'RT) > 2m(\angle O'RQ)$$
$$m(\angle O'RT) > m(\angle O'RQ)$$
$$\angle O'RT > \angle O'RQ.$$

Por otra parte, sabemos que $\angle O'RT < \angle O'RQ$, pero esto es una contradicción. Así, queda demostrado que los puntos O, R y O' no pueden ser colineales. Por lo tanto, los círculos se cortan en dos puntos. ♣

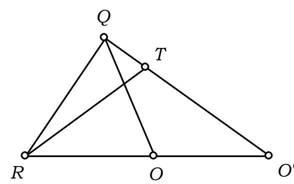


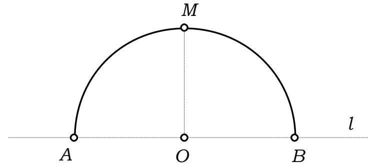
Figura 9.11

9.1.15. Definición. Un *semicírculo* es la intersección de un círculo con uno de los semiplanos determinados por una recta que pase por su centro.

Figura 9.12

De la definición, observamos que cada recta que pasa por el centro de un círculo determina dos semicírculos.

9.1.16. Definición. Los *puntos extremos de un semicírculo* son los puntos de intersección del círculo y la recta que lo determina. El *punto medio de un semicírculo* es el punto de intersección de la mediatriz del segmento determinado por los puntos extremos del semicírculo y el semicírculo.



A y B son los puntos extremos
M es el punto medio del semicírculo
Figura 9.13

9.2. Cuerdas, diámetros y radios

9.2.1. Definición. Una *cuerda* de un círculo es un segmento cuyos puntos extremos están sobre el mismo círculo. Un *diámetro* de un círculo es una cuerda de él mismo que pasa por el centro del círculo. Un *radio* de un círculo es un segmento con el centro del círculo como uno de sus puntos extremos y un punto del círculo como el otro punto extremo.

El *diámetro* de un círculo de radio r es el número $2r$. Cuado digamos radio o diámetro, el contexto nos dirá cuándo nos referimos a un segmento o a un número.

Los dos teoremas que a continuación presentamos se siguen directamente de las definiciones y del Teorema 1.8.1.

9.2.2. Teorema. Dos radios cualesquiera de un círculo son congruentes y su longitud es igual al radio del círculo.

9.2.3. Teorema. Dos diámetros cualesquiera de un círculo son congruentes y su longitud es igual al doble del radio del círculo.

9.2.4. Teorema. Un diámetro de un círculo es una de sus cuerdas de mayor longitud.

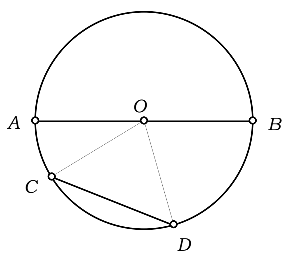


Figura 9.14

Prueba: Sean $\mathrm{C}(O,r)$ un círculo y AB uno de sus diámetros, en donde $A, B \in \mathrm{C}(O,r)$. Sea CD una cuerda arbitraría del círculo $\mathrm{C}(O,r)$. Aplicando la Desigualdad del Triángulo (4.4.9) al triángulo ΔOCD, vemos que $|CD| < |OC| + |OD|$. Sabemos que $OA \cong OB \cong OC \cong OD$, por ser estos radios de un mismo círculo (Teorema 9.2.2). Así, encontramos que

$$|CD| < |OC| + |OD| = |OA| + |OB| = |AB|. \clubsuit$$

Por el Teorema 9.2.4, nos damos cuenta, que la longitud de un diámetro de un círculo es mayor o igual que la longitud de cualquier otra cuerda del mismo círculo.

9.2.5. Teorema. La mediatriz de una cuerda de un círculo pasa por el centro del mismo círculo.

Prueba: Sea AB una cuerda del círculo $\mathrm{C}(O,r)$. Como $OA \cong OB$, por el Teorema 4.2.2, O está en la mediatriz de AB. ♣

Del Teorema 9.2.5 podemos ver que el centro de un círculo es el punto medio de todo diámetro de él mismo.

9.2.6. Corolario. Las mediatrices de dos cuerdas de un círculo se cortan en el centro de él mismo.

9.2.7. Teorema. Un radio de un círculo es perpendicular a una cuerda de él mismo si y solo si el radio corta a dicha cuerda en su punto medio.

Prueba: Sea AB una cuerda del círculo $\mathrm{C}(O,r)$ y OC un radio de él mismo.
Necesidad. Si OC es perpendicular a AB, por los Teoremas 3.7.3 y 9.2.5, tenemos entonces que OC yace en la mediatriz de la cuerda AB y, por tanto, corta a esta en su punto medio.
Suficiencia. Supongamos que OC biseca a AB. Sabemos que O pertenece a la mediatriz de AB, esto es cierto por el Teorema 9.2.5. Por lo cual, la cuerda OC está contenida en la mediatriz de AB. De aquí concluimos que OC es perpendicular a AB. ♣

9.2.8. Corolario. Un diámetro de un círculo es perpendicular a una cuerda de él mismo si y solo si el diámetro corta a la cuerda en su punto medio.

9.2.9. Teorema. Una cuerda de un círculo es un diámetro de él mismo si y solo si su longitud es igual al doble del radio del círculo.

Prueba: Sean $\mathrm{C}(O,r)$ un círculo y AB una cuerda de él mismo.
Necesidad. Supongamos que $O \in AB$. De acuerdo con el Teorema 1.8.2, se cumple la identidad

$$|AB| = |AO| + |OB| = r + r = 2r.$$

Suficiencia. Supongamos que $|AB| = 2r$. Si $O \notin AB$, por la Desigualdad del Triángulo 4.4.9, tenemos entonces que

$$2r = |AB| < |AO| + |OB| = 2r,$$

lo cual contradice nuestra hipótesis. Por lo tanto, $O \in AB$ y, por ello, AB es un diámetro del círculo $\mathrm{C}(O,r)$. ♣

El siguiente corolario no necesita prueba por ser consecuencia inmediata del teorema anterior.

9.2.10. Corolario. Si se tienen dos cuerdas congruentes de un mismo círculo y una de ellas es un diámetro, entonces la otra también es un diámetro.

A continuación, damos una fórmula para encontrar la distancia de una cuerda de un círculo al centro de él mismo.

9.2.11. Teorema. Si $\mathrm{C}(O,r)$ un círculo y AB una de sus cuerdas, entonces

$$d(O,AB) = \frac{\sqrt{4r^2 - |AB|^2}}{2}.$$

Prueba. Sea M el punto medio de AB y pongamos $a = |AB|$. Como ΔOAB es un triángulo isósceles, por el Teorema 8.3.39, OM es la altura correspondiente al vértice O. Según el Teorema de Pitágoras (8.5.1), se cumple la relación

$$d(O,AB)^2 = |OM| = r^2 - \frac{a^2}{4}.$$

Por lo tanto,

$$d(O,AB) = \frac{\sqrt{4r^2 - |AB|^2}}{2}. \clubsuit$$

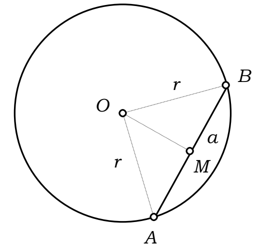


Figura 9.15

Comparar dos cuerdas de un círculo es lo mismo que comparar sus distancias al centro del mismo círculo:

9.2.12. Teorema. Sea $\mathcal{C}(O,r)$ un círculo y AB y CD dos cuerdas de mismo. Entonces, $AB < CD$ si y solo si $d(O,CD) < d(O,AB)$.

Prueba: Pongamos $a = |AB|$, $b = |CD|$, $x = d(O,AB)$ y $y = d(O,CD)$. Por la fórmula del teorema anterior, hallamos que

$$x^2 = r^2 - \frac{a^2}{4} \text{ y } y^2 = r^2 - \frac{b^2}{4}.$$

En consecuencia,

$$a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{4} < \frac{b^2}{4} \Leftrightarrow r^2 - \frac{a^2}{4} < r^2 - \frac{b^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$x^2 < y^2 \Leftrightarrow d(O,AB) = x < y = d(O,CD).$$

Con esto queda probado el teorema. ♣

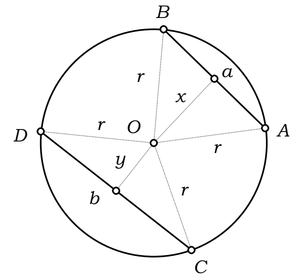


Figura 9.16

Los Teoremas 9.2.11 y 9.2.12 nos dan un criterio para ver cuándo dos cuerdas de un mismo círculo son congruentes:

9.2.13. Corolario. Dos cuerdas de un círculo son congruentes si y solo si están a la misma distancia del centro del círculo.

9.2.14. Teorema. Una cuerda AB de un círculo $\mathcal{C}(O,r)$ es un diámetro si y solo si el ángulo $\angle AOB$ es llano.

Prueba: *Necesidad*. Supongamos que AB es un diámetro del círculo $\mathcal{C}(O,r)$. Entonces, tenemos que $O \in AB$. Lo cual implica que el ángulo $\angle AOB$ es llano.

Suficiencia. Si el ángulo $\angle AOB$ es llano, entonces los puntos A, B y O son colineales y O resulta ser el punto medio de AB, lo cual es cierto por el Teorema 9.2.5. ♣

9.2.15. Definición. Dos círculos se llaman *concéntricos* si tienen el mismo centro.

9.2.16. Teorema. Sean $\mathcal{C}(O,r)$ y $\mathcal{C}(O,s)$ dos círculos concéntricos con $s < r$. Si l es una recta que corta a los círculos $\mathcal{C}(O,r)$ y $\mathcal{C}(O,s)$ en los puntos A y B, y C y D, respectivamente, entonces $AC \cong DB$ y $AD \cong CB$.

Prueba: Sabemos que los triángulos ΔOAB y ΔOCD son isósceles con $OA \cong OB$ y $OC \cong OD$, respectivamente. Sea OP el radio de $\mathcal{C}(O,s)$ que es perpendicular a su cuerda CD. En virtud del Teorema 9.2.7, OP corta a CD en su punto medio, digamos M. Como OP está contenido en el radio de $\mathcal{C}(O,r)$ que es perpendicular a su cuerda AB, por el mismo Teorema 9.2.7, resulta que M es también el punto medio de AB. Por consiguiente,

$$|AC| = |AM| - |CM| = |BM| - |DM| = |DB| \text{ y}$$

$$|AD| = |AC| + |CD| = |DB| + |CD| = |CB|.$$

Del Teorema 1.8.1 concluimos que $AC \cong DB$ y $AD \cong CB$. ♣

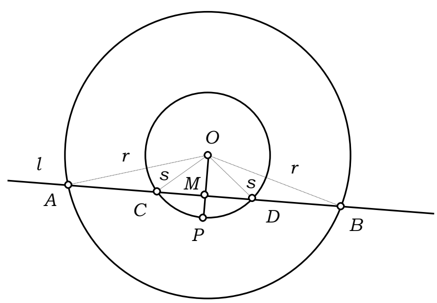


Figura 9.17

9.3. Rectas secantes y rectas tangentes a un círculo

9.3.1. Definición. Una *secante* a un círculo es una recta que corta al círculo en cualesquiera dos puntos. Una recta se llama *tangente* a un círculo si interseca al mismo en un solo punto.

En la figura 9.18, la recta s es una secante del círculo $\mathrm{C}(O,r)$ y la recta t es una tangente.

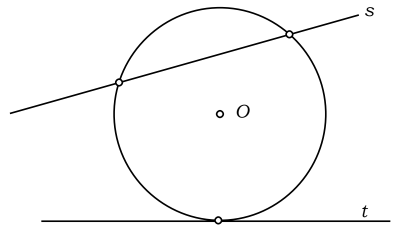


Figura 9.18

En el siguiente teorema, damos una condición para ver cuando una recta es secante a un círculo.

9.3.2. Teorema. Una recta que interseca al interior de un círculo corta al mismo en dos puntos cualesquiera.

Prueba: Sean $\mathrm{C}(O,r)$ un círculo y l una recta. Supongamos que existe $A \in l \cap int(\mathrm{C}(O,r))$. En virtud del Corolario 1.10.6 y el Teorema 8.1.18, podemos encontrar dos puntos cualesquiera P, $Q \in l$ tales que $r < |OP| = |OQ|$ y $A \in PQ$. Según el Principio de la Continuidad Elemental (9.1.12), cada uno de los segmentos AP y AQ corta al círculo $\mathrm{C}(O,r)$ en exactamente un punto. Por lo tanto, l es una recta secante al círculo $\mathrm{C}(O,r)$. ♣

Las posiciones de una recta con respecto a un círculo se analizan en el siguiente teorema.

9.3.3. Teorema. Si la distancia de una recta al centro del círculo es menor que el radio del círculo, entonces la recta es una secante al círculo. Si la distancia de una recta al centro del círculo es igual al radio del círculo, entonces la recta es tangente al círculo. Si la distancia de una recta al centro del círculo es mayor que el radio del círculo, entonces la recta no corta al círculo.

Prueba: Sean $\mathrm{C}(O,r)$ un círculo y l una recta. Sean AB el diámetro de $\mathrm{C}(O,r)$ perpendicular a l en el punto P. Del Teorema 9.2.5 sabemos que O es el punto medio de AB. Hay tres posibles posiciones de l con respecto a nuestro círculo $\mathrm{C}(O,r)$:

Caso I. $d(O,l) = |OP| < r$. Entonces, $P \in int(\mathrm{C}(O,r))$. De acuerdo con el Teorema 9.3.2, l corta a $\mathrm{C}(O,r)$ en dos puntos C y D. Por consiguiente, l es una secante a $\mathrm{C}(O,r)$.

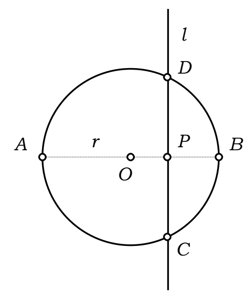


Figura 9.19

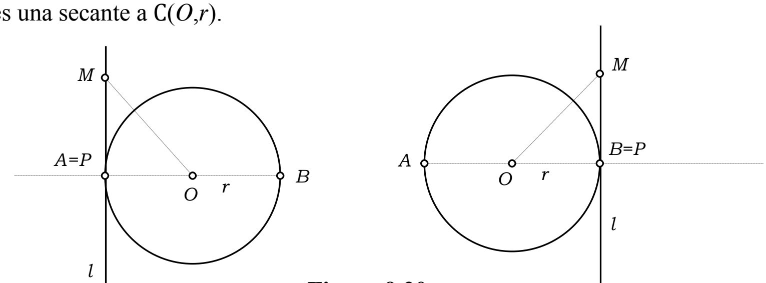


Figura 9.20

Caso II. $d(O,l) = |OP| = r$. En este caso, por el Corolario 1.10.6, tenemos que $P = A$ o $P = B$. Si $M \in l-\{P\}$, según el Corolario 4.4.6, $r = |OP| < |OM|$. Por lo tanto, l es tangente a $\mathrm{C}(O,r)$ en el punto P.

Caso III. $d(O,l) = |OP| > r$. Si $M \in l-\{P\}$, entonces

$$r < |OP| < |OM|$$

(esto se cumple por el Teorema 4.4.6). Por lo cual, l no puede cortar $\mathrm{C}(O,r)$. ♣

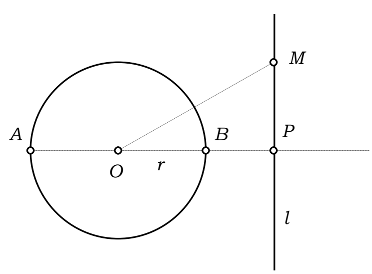


Figura 9.21

Se puede verificar muy fácilmente que los recíprocos de los enunciados del teorema anterior también se cumplen:

9.3.4. Teorema. Sean $\mathsf{C}(O,r)$ un círculo y l una recta. Entonces

$$l \text{ es secante a } \mathsf{C}(O,r) \text{ si y solo si } d(O,l) < r;$$
$$l \text{ es tangente a } \mathsf{C}(O,r) \text{ si y solo si } d(O,l) = r \text{ y}$$
$$l \text{ no corta a } \mathsf{C}(O,r) \text{ si y solo si } d(O,l) > r.$$

9.3.5. Teorema. Sean $\mathsf{C}(O,r)$ un círculo y P un punto fuera de él. Si una recta que pasa por P corta al círculo en los puntos A y B, y $PA < PB$, entonces $PA < PM < PB$, para todo punto $M \in \mathsf{C}(O,r) - \{A, B\}$.

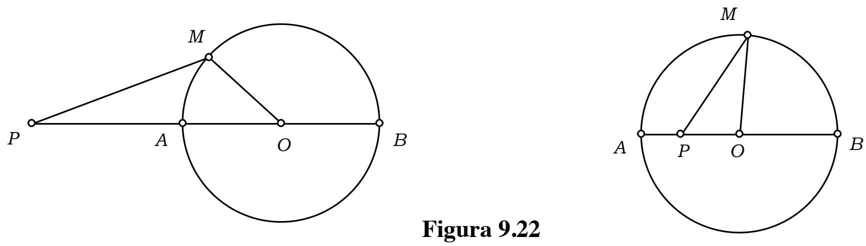


Figura 9.22

Prueba: Fijemos un punto $M \in \mathsf{C}(O,r) - \{A, B\}$. Sabemos que los segmentos OA, OB y OM son radios del círculo $\mathsf{C}(O,r)$ y, por tanto, son congruentes (9.2.2). La Desigualdad del Triángulo (4.4.9) nos asegura que $|PM| < |PO| + |OM| = |PO| + |OB| = |PB|$. Así, por el Teorema 1.9.2, obtenemos que $PM < PB$.
Para probar la primera desigualdad, necesitamos considerar dos casos por separado:

Primero supongamos que $P \in ext(\mathsf{C}(O,r))$. En este caso, se cumple la relación $|PA| = |PO| - |OA|$. De aquí se sigue la identidad $|PO| = |PA| + |OA|$. Según la Desigualdad del Triángulo (4.4.9), hallamos que

$$|PA| + |OA| = |PO| < |PM| + |OM|.$$

Canceladas las longitudes de los radios, vemos que $|PA| < |PM|$. Según el Teorema 1.9.2, $PA < PM$.

Ahora le toca al caso cuando $P \in int(\mathsf{C}(O,r))$. Sabemos que

$$|PA| = |OA| - |PO|$$
$$|OA| = |PA| + |PO|.$$

Si aplicamos la Desigualdad del Triángulo (4.4.9), de nueva cuenta, obtenemos que

$$|PA| + |PO| = |OA| = |OM| < |PO| + |PM|$$
$$|PA| < |PM|.$$

Es decir, $PA < PM$. ♣

9.3.6. Teorema. Sea l una recta que corta a un círculo $\mathsf{C}(O,r)$ en el punto A. Entonces, l es tangente al círculo $\mathsf{C}(O,r)$ en el punto A si y solo si $l \perp AO$.

Prueba: *Necesidad*. Supongamos que l no es perpendicular a AO. Como $O \notin l$, pues l es tangente al círculo, por el Teorema 3.7.3, podemos encontrar un punto $B \in l$ tal que $l \perp BO$. Como $A \neq B$, $B \in ext(\mathsf{C}(O,r))$ y, por ello, $d(B,O) > r$. Pero, por el Teorema 4.4.12, sabemos que $d(B,O) < d(A,O) = r$, lo cual es una contradicción.

Suficiencia. Supongamos que $l \perp AO$. Según el Teorema 4.4.12, tenemos que $r = d(A,O) < d(B,O)$, para todo punto $B \in l - \{A\}$. Lo cual significa que l corta solamente al círculo $\mathsf{C}(O,r)$ en el punto A. ♣

9.3.7. Corolario. La recta perpendicular a una recta tangente de un círculo que pasa por el punto de tangencia pasa por el centro del círculo.

Prueba: Sean l una recta tangente al círculo $\mathsf{C}(O,r)$ en el punto A y m la recta perpendicular a l en el punto A. Sabemos por el Teorema 9.3.6 que $l \perp AO$. Así, por la unicidad de la recta perpendicular (Teorema 3.7.4), concluimos que $O \in \overleftrightarrow{AO} = m$. ♣

9.3.8. Teorema. Los segmentos tangentes trazados desde un punto exterior a un círculo son congruentes.

Prueba: Sean $P \in ext(\mathrm{C}(O,r))$ y $A, B \in \mathrm{C}(O,r)$ tales que PA y PB son tangentes al círculo. Por el Teorema 9.3.6, $PA \perp OA$ y $PB \perp OB$. Lo cual nos dice que ΔAPO y ΔBPO son triángulos rectángulos. Como estos dos triángulos comparten su hipotenusa y $OA \cong OB$, por el Teorema 3.6.5, $\Delta APO \cong \Delta BPO$. En consecuencia, $PA \cong PB$. ♣

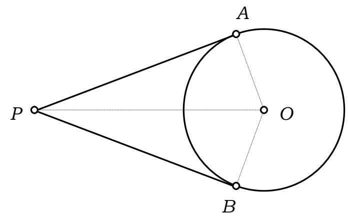


Figura 9.23

9.3.9. Corolario. Sean $\mathrm{C}(O,r)$ un círculo, $P \in ext(\mathrm{C}(O,r))$ y $A \in \mathrm{C}(O,r)$. Si PA es tangente al círculo y $B \in \mathrm{C}(O,r)$ satisface que $PA \cong PB$, entonces PB es también tangente al círculo.

Prueba: Supongamos que $PA \cong PB$. De acuerdo con el criterio 3.2.13, los triángulos ΔAPO y ΔBPO son congruentes, pues tienen un lado en común y sus otros lados correspondientes congruentes. Como el ángulo $\angle PAO$ es recto y $\angle PAO \cong \angle PBO$, el ángulo $\angle PBO$ también resulta ser recto. Por el Teorema 9.3.6, concluimos que PB es tangente al círculo en el punto B. ♣

9.3.10. Teorema. Sean $\mathrm{C}(O,r)$ un círculo y $P \in ext(\mathrm{C}(O,r))$. Si $A, B \in \mathrm{C}(O,r)$ satisfacen que PA y PB son tangentes al círculo, entonces $PO \perp AB$.

Prueba: Según el Teorema 9.3.8, sabemos que $PA \cong PB$. Es decir, P está en la mediatriz del segmento AB (4.2.2). Como O está también en la mediatriz de la cuerda AB (9.2.5), el segmento PO está contenido en la mediatriz del segmento AB. Por lo tanto, $PO \perp AB$. ♣

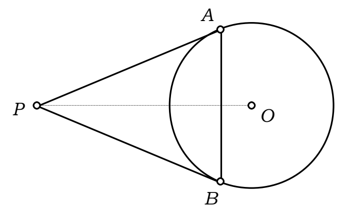


Figura 9.24

9.3.11. Teorema. Si dos rectas son tangentes a un círculo desde un punto de su exterior, entonces la bisectriz del ángulo formado por estas rectas es la semirrecta cuyo vértice es el punto de intersección de dichas rectas y que pasa por el centro del círculo.

Prueba: Sean $\mathrm{C}(O,r)$ un círculo y $P \in ext(\mathrm{C}(O,r))$. Supongamos que $A, B \in \mathrm{C}(O,r)$ son tales que PA y PB son tangentes al círculo. Por los Teoremas 9.3.6 y 9.3.8, $PO \perp PA$, $PO \perp PB$ y $PA \cong PB$. Según el criterio de congruencia 3.6.5, $\Delta APO \cong \Delta BPO$. Por lo tanto, $\angle OPA \cong \angle BPO$. Así, hemos probado que $\overrightarrow{PO}$ es la bisectriz del ángulo $\angle BPA$. ♣

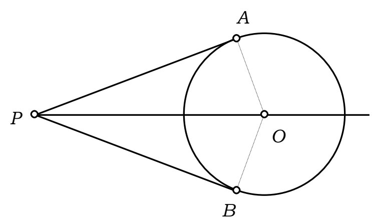


Figura 9.25

9.3.12. Teorema. Si dos rectas son tangentes a dos círculos desde un punto dado del exterior de ambos, entonces los centros de los dos círculos y el punto dado son colineales.

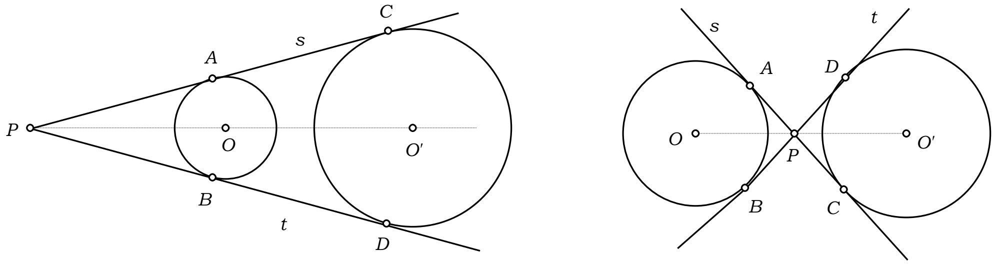
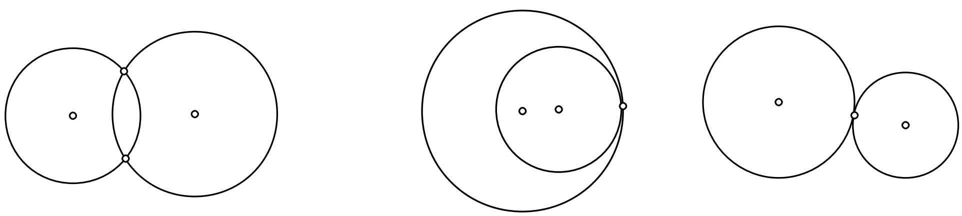


Figura 9.26

Prueba: Sean $\mathrm{C}(O,r)$ y $\mathrm{C}(O',r')$ dos círculos. Supongamos que s y t son dos rectas tangentes a ambos círculos desde un punto $P \in ext(\mathrm{C}(O,r)) \cap ext(\mathrm{C}(O',r'))$. Sean $A \in \mathrm{C}(O,r)$ y $C \in \mathrm{C}(O',r')$ los puntos donde la recta s es tangente a los círculos, y $B \in \mathrm{C}(O,r)$ y $D \in \mathrm{C}(O',r')$ los puntos donde la recta t es tangente a los círculos (ver la figura 9.26). Según el Teorema 9.3.11, sabemos que $\overrightarrow{PO}$ es la bisectriz del ángulo $\angle BPA$ y que $\overrightarrow{PO'}$ es la bisectriz del ángulo $\angle DPC$. Si $P \notin OO'$, entonces $\overrightarrow{PO} = \overrightarrow{PO'}$, y si $P \in OO'$, entonces, por el Teorema 2.12.5, hallamos que las semirrectas $\overrightarrow{PO}$ y $\overrightarrow{PO'}$ forman una recta. ♣

9.3.13. Definición. Se dice que dos círculos son *secantes* si se cortan en cualesquiera dos puntos. Si dos círculos se cortan en un solo punto, entonces decimos que son *tangentes*.



secantes tangentes

Figura 9.27

Diremos que dos círculos son *tangentes internamente* si son tangentes y el interior de uno de ellos está contenido en el interior de él otro. Dos círculos tangentes que no lo sean internamente se llaman *tangentes externamente*.

9.3.14. Teorema. Si dos círculos son secantes, entonces la recta que une sus centros es la mediatriz del segmento determinado por los puntos de intersección de los dos círculos.

Prueba: Sean $\mathrm{C}(O,r)$ y $\mathrm{C}(O',r')$ dos círculos que se cortan en los puntos A y B. Como $OA \cong OB$ y $O'A \cong O'B$, por el Teorema de la Mediatriz (4.2.2), O y O' están en la mediatriz del segmento AB. ♣

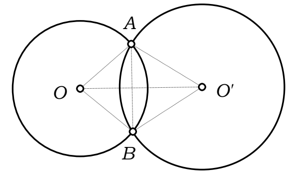


Figura 9.28

9.3.15. Corolario. Si dos círculos son secantes, entonces el segmento formado por sus centros es perpendicular al segmento formado por los puntos de intersección de ambos círculos y el primer segmento corta al segundo en su punto medio.

9.3.16. Teorema. Si dos círculos son tangentes, entonces los centros de los círculos y el punto de tangencia son colineales.

Figura 9.29

Prueba: Sean C(O,r) y C(O',r') dos círculos tangentes en el punto A. Supongamos que O, O' y A no son colineales. Sean A' el punto simétrico de A con respecto a la recta $\overleftrightarrow{OO'}$, y P la proyección de A sobre la recta $\overleftrightarrow{OO'}$. Por definición, P es el punto medio de AA' y $AA' \perp \overleftrightarrow{OO'}$. De acuerdo con el criterio 3.6.5, se tienen las congruencias $\Delta AOP \cong \Delta A'OP$ y $\Delta APO' \cong \Delta A'PO'$. En consecuencia, $r = |OA| = |OA'|$ y $r = |O'A| = |O'A'|$. Lo cual demuestra que los círculos C(O,r) y C(O',r') se cortan también en el punto A', pero esto contradice nuestra hipótesis. ♣

9.3.17. Corolario. Si dos círculos se cortan en un solo punto, entonces la recta tangente a uno de ellos en dicho punto es tangente al otro círculo.

Prueba:

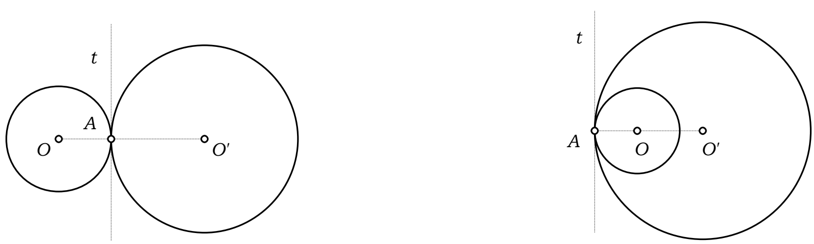


Figura 9.30

Sean C(O,r) y C(O',r') dos círculos tangentes en el punto A. Sea t la recta tangente a C(O,r) en el punto A. De acuerdo con el Teorema 9.3.6, sabemos que $OA \perp t$. Como O, O' y A son colineales, esto es cierto por el teorema anterior, $O'A \perp t$. Por ello, el Teorema 9.3.6 nos asegura que la recta t es tangente al círculo C(O',r') en el punto A. ♣

9.3.18. Corolario. Si dos círculos se cortan en un solo punto, entonces la recta que es perpendicular a la recta que une los centros de los círculos, en dicho punto es tangente a ambos círculos.

Prueba: Sean C(O,r) y C(O',r') dos círculos tangentes en el punto A y t la recta perpendicular a $\overleftrightarrow{OO'}$ en el punto A. El Teorema 9.3.16 nos dice que $A \in \overleftrightarrow{OO'}$. Por hipótesis, sabemos que $OA \perp t$ y $O'A \perp t$. Según el Teorema 9.3.6, la recta t resulta ser tangente a ambos círculos C(O,r) y C(O',r') en el punto A. ♣

El siguiente resultado corresponde a la Proposición 1 del libro *Liber Assumptorum* de Arquímedes (ver el libro [l-170]).

9.3.19. Teorema. Sean C(O,r) y C(O',r') dos círculos tangentes en el punto P. Supongamos que AB y CD son diámetros paralelos de C(O,r) y C(O',r'), respectivamente, tales que A y C pertenecen al mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{OO'}$.

1. Si uno de los círculos está contenido en el interior dell otro, entonces A, C y P, y B, D y P son dos hileras de puntos.

2. Si los interiores de ambos círculos no se intersecan, entonces A, P y D, y B, P y C son dos hileras de puntos.

Prueba:

Figura 9.31

1. Sin perder generalidad, supongamos que C(O',r') $\subseteq$ C(O,r). Sea $Q \in AB$ tal que $\overleftrightarrow{OO'} \parallel \overleftrightarrow{QC}$. Entonces, tenemos que $\square QOO'C$ es un paralelogramo. Del Teorema 5.3.1 se sigue que $QO \cong CO'$. Pero como $CO' \cong O'P$, entonces $QO \cong O'P$ y como $AO \cong OP$, obtenemos que $AQ \cong OO'$. Por lo cual, $AQ \cong QC$. Así, hemos probado que ΔAQC es un triángulo isósceles en el vértice Q. Según el Teorema 3.2.9, $\angle QAC \cong \angle ACQ$. Por ser $\Delta O'PC$ un triángulo isósceles en el vértice O', el Teorema 3.2.9 implica que $\angle O'CP \cong \angle CPO'$. Como $AB \parallel CD$ y $\overleftrightarrow{OO'} \parallel \overleftrightarrow{QC}$, por el Teorema 3.4.6, vemos que $\angle PO'C \cong \angle CQA$ y de aquí deducimos la congruencia $\angle QAC \cong \angle O'CP$. De acuerdo con el Teorema 3.4.8, los ángulos $\angle QAC$ y $\angle ACO'$ son suplementarios. Así pues

$$180 = m(\angle QAC) + m(\angle ACO') = m(\angle O'CP) + m(\angle ACO').$$

Lo cual quiere decir que los puntos A, C y P son colineales. Con un argumento similar, se establece la colinealidad de los puntos B, D y P.

2. Supongamos que int(C(O',r')) $\cap$ int(C(O,r)) = $\varnothing$. Como ΔOBP y $\Delta PCO'$ son triángulos isósceles, por el Teorema 3.2.9, sabemos que $\angle OBP \cong \angle BPO$ y $\angle CPO' \cong \angle O'CP$. Según el Teorema 9.3.16, los puntos O, P y O' son colineales. Así, el Teorema 3.4.4 nos asegura que $\angle POB \cong \angle PO'C$. De aquí y de los Teoremas 3.2.9 y 4.3.4 podemos deducir que $\angle BPO \cong \angle CPO'$. De acuerdo con los Teoremas 4.3.4 y 4.3.8, obtenemos la identidad

$$m(\angle BPO) + m(\angle OPC) = m(\angle CPO') + m(\angle O'CP) + m(\angle PO'C) = 180.$$

Por lo tanto, los puntos B, P y C son colineales. Con un argumento muy similar, se prueba que los puntos A, P y D también son colineales. ♣

El siguiente resultado es tomado del artículo [a-143].

9.3.20. Teorema. Sean C(O,r) y C(O',r') dos círculos tangentes cuyos interiores no se cortan. Si l es una recta tangente a ambos círculos, entonces la distancia entre los puntos de tangencia de los círculos con la recta es la media geométrica de los números $2r$ y $2r'$.

Prueba: Primero daremos una fórmula general para cualquier par de círculos cuyos interiores son ajenos. Supongamos que C(O,r) y C(O',r') son dos círculos cuyos interiores no se intersecan y que $r \leq r'$. Sean A y B los puntos de intersección de la recta $\overleftrightarrow{OO'}$ con los círculos C(O,r) y C(O',r'), respectivamente, P y P' las proyecciones de los puntos O y O' sobre la recta l, y Q el punto de intersección de la recta paralela a l que pasa por O y el radio $O'P'$(ver la figura izquierda 9.32). Pongamos $a = |AB|$. Por el Teorema de Pitágoras (8.5.1),

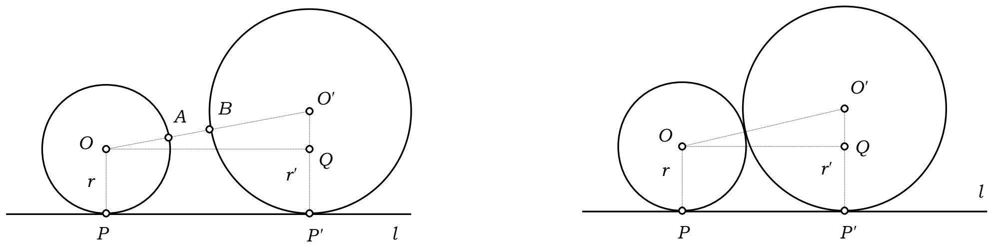


Figura 9.32

$$(a+r+r')^2 = |QO'|^2 + |PP'|^2 = (r'-r)^2 + |PP'|^2$$
$$a^2 + 2ar + r^2 + 2(a+r)r' + r'^2 = r'^2 - 2rr' + r^2 + |PP'|^2$$
$$a^2 + 2ar + 2ar' + 2rr' = -2rr' + |PP'|^2$$
$$a^2 + 2ar + 2ar' + 4rr' = |PP'|^2$$
$$|PP'| = \sqrt{a^2 + 2a(r+r') + 4rr'} = \sqrt{(2r+a)(2r'+a)} = \sqrt{4(r+\frac{a}{2})(r'+\frac{a}{2})} = 2\sqrt{(r+\frac{a}{2})(r'+\frac{a}{2})}.$$

Si $a = 0$, entonces

$$|PP'| = \sqrt{4(r+\frac{a}{2})(r'+\frac{a}{2})} = \sqrt{4rr'}$$
$$|PP'|^2 = 2r2r'. \clubsuit$$

9.3.21. Definición. Sean $C(O,r)$ un círculo y l una recta secante al círculo que lo corta en el punto P. El *ángulo que forman* el círculo $C(O,r)$ y la recta l es el ángulo formado por l y la recta tangente a $C(O,r)$ en el punto P.

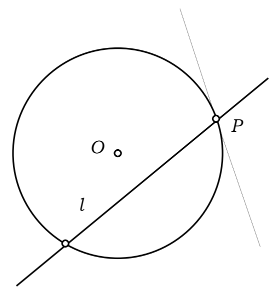


Figura 9.33

Supongamos que una recta l corta a un círculo $C(O,r)$ en los puntos P y Q. Cualquiera de los dos puntos P o Q sirve para definir el ángulo que forman $C(O,r)$ y l, pues los ángulos que se obtienen en cada caso son congruentes (la comprobación de esto se deja al lector, Problema 9.155).

9.4. Distancia de un punto a un círculo y de una recta a un círculo

9.4.1. Definición. Sean $C(O,r)$ un círculo y P un punto cualquiera. Sean A y B los punto de intersección de la recta $\overleftrightarrow{PO}$ con el círculo $C(O,r)$. La *distancia del punto P al círculo* $C(O,r)$ es el número

$$d(P,C(O,r)) = \min\{d(P,A), d(P,B)\}.$$

Observemos que si $P \in C(O,r)$, entonces que $d(P,C(O,r)) = 0$, puesto que $P = A$ o $P = B$. Si $P \notin C(O,r)$, entonces $d(P,C(O,r)) > 0$. El siguiente teorema nos da la explicación del porqué se escogieron los puntos de intersección para la definición de la distancia de un punto a un círculo.

9.4.2. Teorema. Sean C(O,r) un círculo y P un punto arbitrario. Entonces, $d(P,C(O,r)) \leq d(P,C)$ para todo punto $C \in C(O,r)$.

Prueba: Podemos suponer que $P \notin C(O,r)$. Fijemos un punto $C \in C(O,r)$ y sean A y B los puntos de intersección de la recta $\overleftrightarrow{PO}$ y el círculo C(O,r). Sin pérdida de generalidad, supongamos que $d(P,C(O,r)) = d(P,A)$. Consideremos dos casos:

Caso I. $P \notin int(C(O,r))$. Por la Desigualdad del Triángulo (4.4.9), hallamos que $|PO| < |PC| + |CO|$. De aquí,

$$|PA| = |PO| - |AO| = |PO| - |CO| < |PC|.$$

Por lo tanto, $d(P,C(O,r)) = d(P,A) < d(P,C)$.

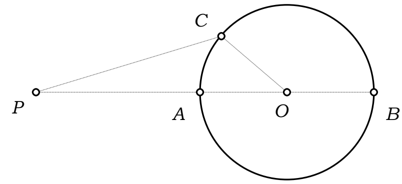


Figura 9.34

Caso II. $P \in int(C(O,r))$. Aplicando de nuevo la Desigualdad del Triángulo (4.4.9), vemos que

$$|CO| < |PO| + |PC|$$
$$|AO| < |PO| + |PC|.$$
$$|PA| = |AO| - |PO| < |PC|.$$

Como consecuencia de ello, $d(P,C(O,r)) = d(P,A) < d(P,C)$. ♣

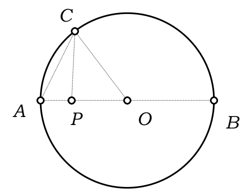


Figura 9.35

9.4.3. Definición. Sean l una recta y C(O,r) un círculo. Si $l \cap C(O,r) \neq \emptyset$, entonces decimos que *la distancia de la recta l al círculo* C(O,r) es igual a 0. Si l y C(O,r) no se intersecan, entonces definimos *la distancia de l al círculo* C(O,r) cómo el número min{ $d(P, C(O,r)) : P \in l$ }. La distancia de una recta l a un círculo C(O,r) será denotada por $d(l,C(O,r))$.

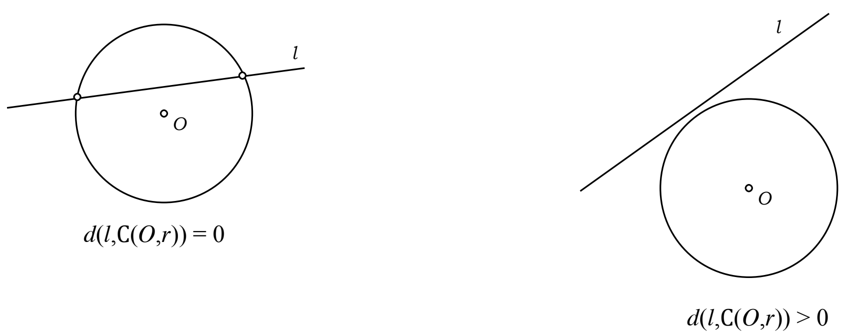


Figura 9.36

9.4.4. Teorema. Sean l una recta, C(O,r) un círculo y P la proyección de O sobre l.
1. Si $d(O,P) \leq r$, entonces $d(l,C(O,r)) = 0$.
2. Si $d(O,P) > r$, entonces $d(l,C(O,r)) = d(O,P) - r > 0$.

Prueba: 1. Supongamos que $d(O,P) \leq r$. En virtud del Teorema 9.3.3, sabemos que l es una recta secante al círculo C(O,r). Por definición, $d(l,C(O,r)) = 0$.

2. Si $d(O,P) > r$, por el Teorema 9.3.3, l no puede cortar al círculo $\mathrm{C}(O,r)$. Sean A y B los puntos de intersección de $\overleftrightarrow{OP}$ con $\mathrm{C}(O,r)$. Por definición, sabemos que $d(P,\mathrm{C}(O,r)) = \min\{d(P,A), d(P,B)\}$. Tomemos un punto cualquiera $Q \in l - \{P\}$. Del Corolario 4.4.12 se sigue la desigualdad $OQ > OP$. Sean A' y B' los puntos de intersección de $\overleftrightarrow{OQ}$ con $\mathrm{C}(O,r)$. Entonces,

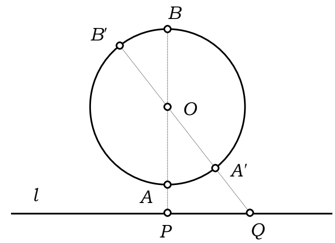


Figura 9.37

$$|OP| = |OA| + |PA| < |OQ| = |OA'| + |A'Q|$$
$$|PA| < |A'Q|,$$

pues $OA \cong OA'$. De aquí deducimos que

$$|QB'| = |A'Q| + 2r > |PA| + 2r = |PB|.$$

De donde se obtiene la desigualdad $d(P,\mathrm{C}(O,r)) \leq d(Q,\mathrm{C}(O,r))$. Por lo tanto,

$$d(l,\mathrm{C}(O,r)) = d(P,\mathrm{C}(O,r)) = d(P,A) = d(O,P) - r > 0. \clubsuit$$

9.5. Ángulos centrales y ángulos inscritos

9.5.1. Definición. Un ángulo se llama *ángulo central* de un círculo si su vértice es el centro del círculo. Un ángulo se llama *inscrito* en un círculo si su vértice está sobre el círculo.

Figura 9.38

Convenimos en que si $\angle APB$ representa un ángulo inscrito en el círculo $\mathrm{C}(O,r)$, entonces A, B y $P \in \mathrm{C}(O,r)$, y si $\angle AOB$ es un ángulo central del círculo $\mathrm{C}(O,r)$, entonces A y $B \in \mathrm{C}(O,r)$.

9.5.2. Teorema. Sea $\angle ABC$ un ángulo inscrito en un círculo $\mathrm{C}(O,r)$. Entonces, AC es un diámetro del círculo $\mathrm{C}(O,r)$ si y solo si $\angle ABC$ es un ángulo recto.

Prueba: *Necesidad*. Según el Teorema 9.2.2, sabemos que $AO \cong BO \cong CO$. Lo cual quiere decir que los triángulos ΔOBA y ΔOCB son isósceles Así, por el Teorema 3.2.9, $\angle OAB \cong \angle ABO$ y $\angle BCO \cong \angle OBC$. Por el Teorema 4.3.4,

$$180 = m(\angle OAB) + m(\angle ABO) + m(\angle OBC) + m(\angle BCO) =$$
$$2m(\angle ABO) + 2\, m(\angle OBC)$$
$$90 = m(\angle ABO) + m(\angle OBC)$$
$$90 = m(\angle ABC).$$

Esto nos asegura que $\angle ABC$ es un ángulo recto.

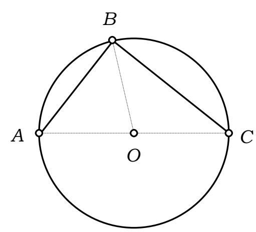


Figura 9.39

Suficiencia. Supongamos que $\angle ABC$ es un ángulo recto. Sabemos que los triángulos ΔOBA y ΔOCB son isósceles. Según el Teorema 3.2.9, hallamos que $\angle OAB \cong \angle ABO$ y $\angle BCO \cong \angle OBC$. Como $\angle ABO$ y $\angle OBC$ son complementarios, entonces

$$m(\angle BOA) + m(\angle COB) = 180 - 2m(\angle ABO) + 180 - 2m(\angle OBC) =$$
$$360 - 2(\angle ABO) + m(\angle OBC)) = 360 - 180 = 180.$$

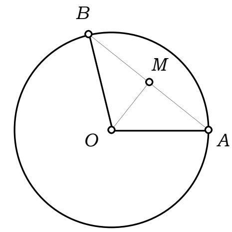
Por lo tanto, $\angle BOA + \angle COB = \angle COA$ es un ángulo llano. ♣

El corolario que a continuación enunciamos es una consecuencia directa de los Teoremas 8.1.2 (4) y 9.5.2.

9.5.3. Corolario. Sean AB un diámetro de un círculo $\mathrm{C}(O,r)$ y $P \in \mathrm{C}(O,r)$. Si Q es la proyección de P sobre AB, entonces $|PQ|$ es la media geométrica de $|AQ|$ y $|QB|$.

9.5.4. Teorema. Si $\angle AOB$ es un ángulo central del círculo $\mathrm{C}(O,r)$, entonces el diámetro perpendicular a la cuerda AB está sobre la bisectriz del ángulo $\angle AOB$.

Prueba: Sea $\angle AOB$ un ángulo central de un círculo $\mathrm{C}(O,r)$. Ya que OA y OB son radios del círculo, por el Teorema 9.2.2, vemos que $OA \cong OB$. Así tenemos que ΔOAB es un triángulo isósceles. Entonces, por el Teorema 8.3.39, obtenemos que la mediatriz de AB coincide con la bisectriz del ángulo $\angle AOB$. ♣



M es el punto medio de *AB*

Figura 9.40

9.5.5. Teorema. Sean $\angle AOB$ y $\angle COD$ dos ángulos centrales de un mismo círculo $\mathrm{C}(O,r)$. Entonces, $\angle AOB \cong \angle COD$ si y solo si $AB \cong CD$.

Prueba: *Necesidad*. Sabemos que en los triángulos ΔAOB y ΔCOD se cumplen las congruencias $OA \cong OC$ y $OB \cong OD$. Como $\angle AOB \cong \angle COD$, por el criterio 3.2.6, $\Delta AOB \cong \Delta COD$. Por ello, $AB \cong CD$.

Suficiencia. Los triángulos ΔAOB y ΔCOD tienen sus tres lados correspondientes congruentes. Así, por el criterio de 3.2.12, hallamos que $\Delta AOB \cong \Delta COD$ y, por tanto, $\angle AOB \cong \angle COD$. ♣

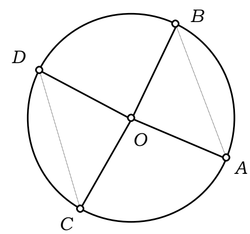


Figura 9.41

9.5.6. Teorema. Sean $\angle APB$ un ángulo inscrito en un círculo $\mathrm{C}(O,r)$.

1. Si $P \notin int(\angle AOB)$ o $\angle AOB$ es llano, entonces $m(\angle AOB) = 2m(\angle APB)$.
2. Si $P \in int(\angle AOB)$, entonces $m(\angle AOB) = 2(180 - m(\angle APB))$.

Prueba: 1. Si $\angle AOB$ es llano, por el Teorema 9.5.2, tenemos que el ángulo $\angle APB$ es recto y, por tanto, la igualdad se cumple trivialmente. Supongamos pues que $\angle AOB$ no es degenerado y que $P \notin int(\angle AOB)$. Consideraremos tres casos:

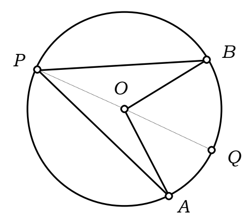


Figura 9.42

Caso I. $O \in int(\angle APB)$. Trazamos el diámetro PQ. Como OP y OB son radios del círculo, por el Teorema 9.2.2, $OP \cong OB$ y, por ello, ΔOBP es un triángulo isósceles. Así, el Teorema 3.2.9 nos asegura que $\angle OPB \cong \angle PBO$. Del Teorema 4.3.8, se sigue la identidad

$$m(\angle QOB) = m(\angle OPB) + m(\angle PBO) = 2m(\angle OPB).$$

Con el mismo argumento aplicado al triángulo ΔOAP, establecemos la igualdad

$$m(\angle AOQ) = m(\angle APO) + m(\angle OAP) = 2m(\angle APO).$$

Juntando las dos identidades encontramos que

$$m(\angle AOB) = m(\angle AOQ + \angle QOB) = m(\angle AOQ) + m(\angle QOB)$$
$$2m(\angle APO) + 2m(\angle OPB) = 2(m(\angle APO) + m(\angle OPB)) =$$
$$2m(\angle APO + \angle OPB) = 2m(\angle APB).$$

Caso II. $O \in \angle APB$. En este caso, se cumple que $O \in PA$ o que $O \in PB$. Sin perder generalidad, supongamos que $O \in PA$. Como ΔOBP es un triángulo isósceles, por los Teoremas 3.2.9 y 4.3.8,

$$m(\angle AOB) = 2m(\angle APB).$$

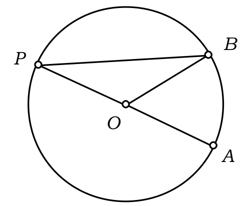


Figura 9.43

Caso III. $O \in ext(\angle APB)$. Sabemos que los triángulos ΔOPA y ΔOAB son isósceles, lo cual es cierto por el Teorema 9.2.2. De aquí se siguen las congruencias

$$\angle APO \cong \angle OAP \text{ y } \angle BPO \cong \angle OBP.$$

Del Teorema 4.3.4 podemos deducir que

$$m(\angle OBP) + m(\angle AOB) = m(\angle APB) + m(\angle OAP) =$$
$$m(\angle APB) + m(\angle APO) = m(\angle APB) + m(\angle APB) + m(\angle BPO)$$
$$m(\angle AOB) = m(\angle APB) + m(\angle APB) = 2m(\angle APB).$$

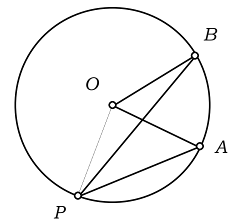


Figura 9.44

2. Sean $\angle AOB$ un ángulo no degenerado y $P \in int(\angle AOB)$. Sea PQ el diámetro del círculo que contiene al punto P. Tenemos entonces que $Q \notin int(\angle AOB)$. De la primera parte del teorema sabemos que

$$m(\angle AOB) = 2m(\angle AQB)$$

De acuerdo con el Teorema 9.5.2, obtenemos que $\angle PBQ$ y $\angle QAP$ son ángulos rectos. De donde se sigue que

$$m(\angle AOB) = 2\, m(\angle AQB) = 2(m(\angle AQP) + m(\angle PQB)) =$$
$$2((90 - m(\angle APQ)) + (90 - m(\angle QPB))) =$$
$$2(180 - (m(\angle APQ) + m(\angle QPB))) =$$
$$= 2(180 - m(\angle APB)). \clubsuit$$

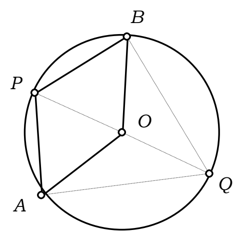


Figura 9.45

9.5.7. Corolario. Sean $\angle APB$ y $\angle AQB$ dos ángulos inscritos sobre un círculo $C(O,r)$.
1. Si $P \notin int(\angle AQB)$, entonces $\angle APB \cong \angle AQB$.
2. Si $P \in int(\angle AQB)$, entonces $\angle APB$ y $\angle AQB$ son suplementarios.

Prueba: Si AB es un diámetro, por el Teorema 9.5.2, tenemos entonces que $\angle APB$ y $\angle AQB$ son ángulos rectos y, por lo tanto, $\angle APB \cong \angle AQB$. Supongamos pues que los puntos A, B y O no son colineales.

Figura 9.46

Caso I. $P \notin int(\angle AOB)$. 1. Como $P \notin int(\angle AQB)$ y $Q \notin int(\angle AOB)$, por el Teorema 9.5.6,

$$m(\angle AOB) = 2m(\angle APB) = 2m(\angle AQB)$$
$$2m(\angle APB) = 2m(\angle AQB)$$
$$m(\angle APB) = m(\angle AQB)$$
$$\angle APB \cong \angle AQB.$$

2. Si $P \in int(\angle AQB)$, entonces $Q \in int(\angle AOB)$. Aplicando el Teorema 9.5.6, hallamos que

$$m(\angle AOB) = 2m(\angle APB) = 2(180 - m(\angle APB))$$
$$m(\angle APB) = 180 - m(\angle APB)$$
$$m(\angle APB) + m(\angle AQB) = 180.$$

Lo cual quiere decir que los ángulos $\angle APB$ y $\angle AQB$ son suplementarios.

Figura 9.47

Caso II. $P \in int(\angle AOB)$. 1. Ya que $P \notin int(\angle AQB)$ y $Q \in int(\angle AOB)$, de acuerdo con el Teorema 9.5.6,

$$m(\angle AOB) = 2(180 - m(\angle APB)) = 2(180 - m(\angle AQB))$$
$$180 - m(\angle APB) = 180 - m(\angle AQB)$$
$$m(\angle APB) = m(\angle AQB)$$
$$\angle APB \cong \angle AQB.$$

2. Supongamos que $P \in int(\angle AQB)$. Entonces, $Q \notin int(\angle AOB)$. Como $P \in int(\angle AOB)$, por el Teorema 9.5.6, $m(\angle AOB) = 2(180 - m(\angle APB))$ y como $Q \notin int(\angle AOB)$, por el mismo Teorema 9.5.6, $m(\angle AOB) = 2m(\angle AQB)$. Por consiguiente,

$$m(\angle AOB) = 2(180 - m(\angle APB)) = 2m(\angle AQB)$$
$$180 - m(\angle APB) = m(\angle AQB)$$
$$180 = m(\angle APB) + m(\angle AQB).$$

Esto demuestra que los ángulos $\angle APB$ y $\angle AQB$ son suplementarios. ♣

En vista del corolario anterior, cada una de las cuerdas de un círculo determina dos ángulos suplementarios $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ con la propiedad de que para cualquier punto $P \in C(O,r) - \{A, B\}$ se cumple que $\angle APB \cong \angle\alpha$ o $\angle APB \cong \angle\beta$.

Cuando digamos el ángulo determinado por una cuerda de un círculo, estaremos haciendo referencia a solo uno de estos dos ángulos. En algunos casos, será claro en el contexto a cuál de los dos ángulos nos referimos.

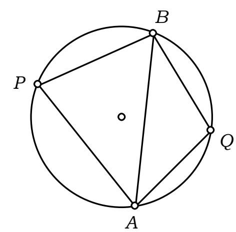


Figura 9.48

9.5.8. Teorema. Sean AB y CD dos cuerdas congruentes de un círculo y P un punto cualquiera del mismo círculo. Entonces, se cumple que $\angle APB \cong \angle CPD$ o que los ángulos $\angle APB$ y $\angle CPD$ son suplementarios.

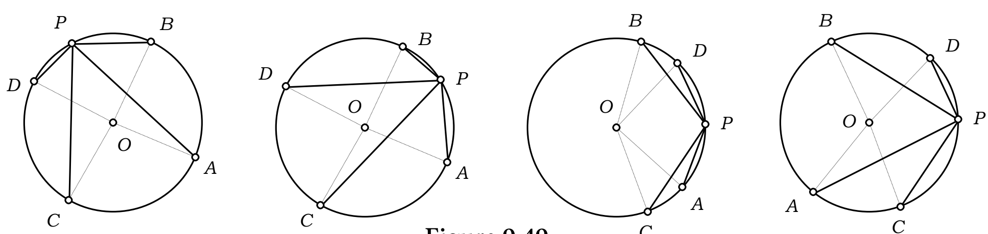


Figura 9.49

Prueba: Si AB es un diámetro, entonces CD es también un diámetro, lo cual es cierto por el Teorema 9.2.10. En este caso, según el Teorema 9.5.2, $\angle APB$ y $\angle CPD$ son ángulos rectos y, por lo tanto, congruentes. Supongamos pues que ninguno de los segmentos AB y CD es un diámetro. Hay que analizar cuatro casos por separado:

Caso I. $P \notin int(\angle AOB)$ y $P \notin int(\angle COD)$. Por los Teoremas 9.5.5 y 9.5.6,

$$2m(\angle APB) = m(\angle AOB) = m(\angle COD) = 2m(\angle CPD)$$
$$m(\angle APB) = m(\angle CPD)$$
$$\angle APB \cong \angle CPD.$$

Caso II. $P \in int(\angle AOB)$ y $P \notin int(\angle COD)$. De acuerdo con los Teoremas 9.5.5 y 9.5.6, hallamos que

$$2(180 - m(\angle APB)) = m(\angle AOB) = m(\angle COD) = 2m(\angle CPD)$$
$$180 - m(\angle APB) = m(\angle CPD)$$
$$180 = m(\angle APB) + m(\angle CPD).$$

Por lo tanto, los ángulos $\angle APB$ y $\angle CPD$ son suplementarios.

Caso III. $P \in int(\angle AOB)$ y $P \in int(\angle COD)$. De los Teoremas 9.5.5 y 9.5.6 se siguen las identidades

$$2(180 - m(\angle APB)) = m(\angle AOB) = m(\angle COD) = 2(180 - m(\angle CPD))$$
$$180 - m(\angle APB) = 180 - m(\angle CPD)$$
$$m(\angle APB) = m(\angle CPD)$$
$$\angle APB \cong \angle CPD.$$

Caso IV. $P \notin int(\angle AOB)$ y $P \in int(\angle COD)$. En virtud de los Teoremas 9.5.5 y 9.9.9,

$$2(m(\angle APB) = m(\angle AOB) = m(\angle COD) = 2(180 - m(\angle CPD))$$
$$m(\angle APB) = 180 - m(\angle CPD)$$
$$180 = m(\angle APB) + m(\angle CPD).$$

Es decir, los ángulos $\angle APB$ y $\angle CPD$ son suplementarios. ♣

9.5.9. Teorema. Sean AB y CD dos cuerdas de un círculo $\mathrm{C}(O,r)$. Si existen dos puntos cualesquiera P, $Q \in \mathrm{C}(O,r)$ tales que $\angle APB \cong \angle CQD$, entonces $AB \cong CD$.

Prueba: Supongamos primero que AB es un diámetro. Entonces, el Teorema 9.5.2 nos dice que $\angle APB$ es un ángulo recto y, por consiguiente, $\angle CQD$ es también un ángulo recto. Del mismo Teorema 9.5.2 obtenemos que CD es un diámetro. Así, por el Teorema 9.2.3, concluimos que $AB \cong CD$. Supongamos pues que AB no es un diámetro. De acuerdo con el Teorema 9.5.6, la medida del ángulo $\angle APB$ satisface una de las igualdades

$$m(\angle APB) = \frac{m(\angle AOB)}{2} \text{ o } m(\angle APB) = 180 - \frac{m(\angle AOB)}{2}.$$

En el primer caso, $\angle APB$ resulta ser un ángulo agudo y en él segundo resulta ser obtuso. Lo mismo pasa con el ángulo $\angle CQD$. Como resultado de esto, si $\angle APB$ es agudo, entonces $\angle CQD$ es también agudo y por el Teorema 9.5.6, hallamos que

$$\frac{m(\angle AOB)}{2} = m(\angle APB) = m(\angle CQD) = \frac{m(\angle COD)}{2}.$$

De donde deducimos la congruencia $\angle AOB \cong \angle COD$. La misma congruencia se obtiene si suponemos que el ángulo $\angle APB$ es obtuso. La conclusión se sigue del Teorema 9.5.5. ♣

El siguiente resultado es de N. A. Court [l-24] (el lector también lo puede encontrar en el libro [l-182, p. 126 – 127]).

9.5.10. Teorema de la Cuerda Constante. Sean A y B los puntos de intersección de dos círculos $\mathrm{C}(O,r)$ y $\mathrm{C}(O',r')$ y $P \in \mathrm{C}(O,r)$ fuera del interior del círculo $\mathrm{C}(O',r')$. Si C y D son los puntos de intersección de las rectas $\overleftrightarrow{PA}$ y $\overleftrightarrow{PB}$ y el círculo $\mathrm{C}(O',r')$, respectivamente, entonces la longitud de la cuerda CD no depende de la elección del punto P.

Prueba: Sean C' y D' los puntos de intersección de las rectas $\overleftrightarrow{P'A}$ y $\overleftrightarrow{P'B}$ con el círculo C(O',r'). Según el Teorema 9.5.7, sabemos que $\angle P'AP \cong \angle P'BP$. Por otra parte, de acuerdo con el Teorema 2.10.2, $\angle P'AP \cong \angle C'AC$ y $\angle P'BP \cong \angle D'BD$. Por ello, $\angle C'AC \cong \angle D'BD$. Así, por el Teorema 9.5.9, $CD \cong C'D'$. ♣

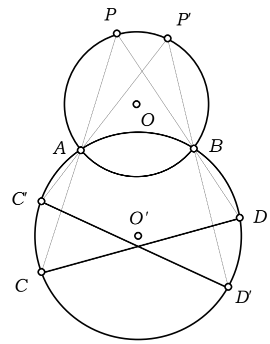


Figura 9.50

9.5.11. Teorema. Sean AB un segmento, y C y D dos puntos cualesquiera ubicados en un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{AB}$. Si $\angle ACB \cong \angle ADB$, entonces los puntos A, B, C y D son concíclicos.

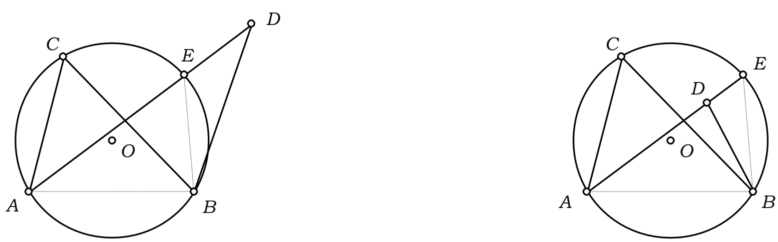


Figura 9.51

Prueba: Sea C(O,r) el círculo que pasa por los puntos A, B y C (dicho círculo existe por el Teorema 9.1.10). Veremos que $D \in$ C(O,r). En efecto, primero supongamos que $D \in ext$(C(O,r)). Sea E el punto de intersección del segmento AD y el círculo C(O,r). Por el Teorema 9.5.7, sabemos que $\angle ACB \cong \angle AEB$. Pero esto es imposible (Teorema 4.4.1), ya que $\angle AEB$ es el ángulo exterior del triángulo ΔDEB opuesto a su ángulo interior $\angle ADB \cong \angle ACB$. Ahora supongamos que $D \in int$(C(O,r)). Sea E el punto de intersección de $\overleftrightarrow{AE}$ y C(O,r). De acuerdo con el Teorema 9.5.7, $\angle ACB \cong \angle AEB$. En el triángulo ΔDBE, el ángulo $\angle ADB$ es un ángulo exterior opuesto al ángulo interior $\angle AEB \cong \angle ACB \cong \angle ADB$, pero esto contradice el Teorema 4.4.1. Con todo esto, concluimos que $D \in$ C(O,r). ♣

Si los puntos C y D están en diferentes semiplanos determinados por la recta $\overleftrightarrow{AB}$ y $\angle ACB \cong \angle ADB$, no se sigue necesariamente que los puntos A, B, C y D estén en un mismo círculo. En la figura, 9.52, los triángulos ΔCAB y ΔDAB son equiláteros y, por tanto, $\angle ACB \cong \angle ADB$, pero el punto D no pertenece al círculo que pasa por los tres puntos A, B y C.

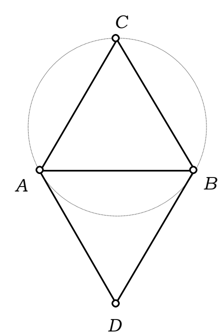


Figura 9.52

9.5.12. Teorema. Sea AB un segmento. Si P es un punto en el plano tal que $\angle APB$ es un ángulo recto, entonces P está en el círculo cuyo diámetro es el segmento AB.

Prueba: Sea $\mathrm{C}(M,r)$ un círculo de diámetro AB, en donde M es el punto medio de AB y $r = \dfrac{|AB|}{2}$. Por suposición, sabemos que ΔPAB es un triángulo rectángulo con hipotenusa AB. De acuerdo con el Teorema 8.3.19, encontramos que $AM \cong BM \cong PM$. Lo cual significa que $P \in \mathrm{C}(M,r)$. ♣

9.5.13. Teorema. Dos cuerdas AB y CD de un círculo $\mathrm{C}(O,r)$ son perpendiculares si y solo si los ángulos centrales $\angle DOA$ y $\angle COB$ son suplementarios.

Prueba: *Necesidad*. Supongamos que las cuerdas AB y CD son perpendiculares y que se cortan en el punto P. De nuestra hipótesis tenemos que el triángulo ΔAPC es rectángulo en $\angle APC$ y, por ello, $m(\angle DCA) + m(\angle CAB) = 90$, Por otra parte, sabemos, basándonos en el Teorema 9.5.6, que

$$2m(\angle DCA) = m(\angle DOA) \text{ y } 2m(\angle CAB) = m(\angle COB).$$

Lo cual implica que

$$m(\angle DOA) + m(\angle COB) = 2m(\angle DCA) + 2m(\angle CAB) = 180.$$

De aquí concluimos que $\angle DOA$ y $\angle COB$ son suplementarios.

Suficiencia. Supongamos que los ángulos $\angle DOA$ y $\angle COB$ son suplementarios. Entonces, por definición,

$$m(\angle DOA) + m(\angle COB) = 180.$$

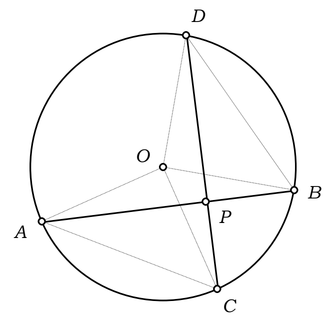


Figura 9.53

Del Teorema 9.5.6 se obtienen las identidades $2m(\angle DCA) = m(\angle DOA)$ y $2m(\angle CAB) = m(\angle COB)$. Sustituyendo y simplificando llegamos a la igualdad $m(\angle DCA) + m(\angle CAB) = 90$. De esta identidad y el Teorema 4.3.4 hallamos, que $\angle APC$ es un ángulo recto. Es decir, AB y CD son perpendiculares. ♣

El siguiente teorema establece la relación entre el ángulo formado por las dos rectas tangentes a un círculo desde un punto fuera de él mismo y el ángulo central cuyos lados pasan por los puntos de tangencia (una versión de este resultado en términos de arcos aparece en [a-25], pero este teorema no aparece en la mayoría de libros de geometría euclidiana).

9.5.14. Teorema. Sean $\mathrm{C}(O,r)$ un círculo y P un punto en su exterior. Si las rectas $\overleftrightarrow{PA}$ y $\overleftrightarrow{PB}$ son tangentes a $\mathrm{C}(O,r)$ en los puntos A y B, respectivamente, entonces los ángulos $\angle BPA$ y $\angle AOB$ son suplementarios.

Prueba: Por el Teorema 9.3.6, sabemos que los triángulos ΔAPO y ΔBPO son rectángulos en $\angle PAO$ y $\angle OBP$. Además, como $AO \cong BO$ y ambos triángulos comparten el lado PO, por el criterio de congruencia 3.6.5, $\Delta APO \cong \Delta BPO$. Por otro lado, del Teorema 4.3.4 observamos que

$$m(\angle AOP) + m(\angle OPA) = 90 = m(\angle POB) + m(\angle BPO).$$

Entonces,

$$m(\angle BPA) + m(\angle AOB) = m(\angle BPO) + m(\angle OPA) + m(\angle AOP) + m(\angle POB) = 180.$$

Lo cual demuestra que $\angle BPA$ y $\angle AOB$ son suplementarios. ♣

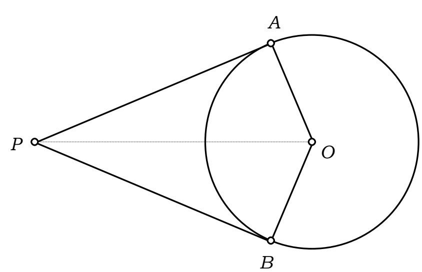


Figura 9.54

9.5.15. Teorema. En un punto extremo de una cuerda de un círculo se traza una recta tangente al mismo círculo. Si tomamos cualquier otro punto del círculo diferente de los extremos de dicha cuerda, entonces el ángulo inscrito cuyo vértice es el punto que tomamos y cuyos lados pasan por los extremos de la cuerda dada es congruente, o bien, suplementario con el ángulo formado entre la cuerda dada y la recta tangente.

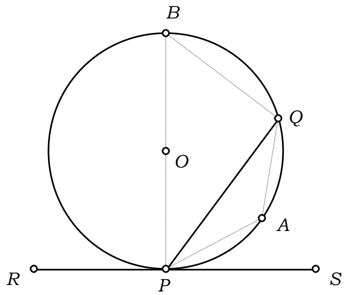
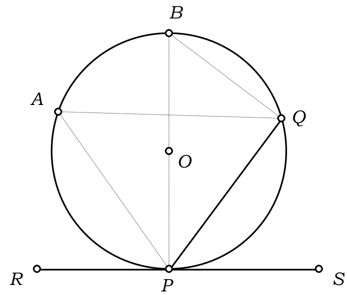


Figura 9.55



Prueba: Sean C(O,r) un círculo, PQ una de sus cuerdas y $\overleftrightarrow{RS}$ una recta tangente al círculo en el punto P. Trazamos el diámetro PB de C(O,r) que pase por el punto P y fijamos $A \in$ C(O,r) $-\{P, Q\}$. Por los Teoremas 9.3.6 y 9.5.2, tenemos que los ángulos $\angle BQP$ y $\angle SPB$ son rectos. De aquí se sigue la congruencia $\angle PBQ \cong \angle SPQ$. Según el Corolario 9.5.7, los ángulos $\angle PAQ$ y $\angle PBQ$ son congruentes o son suplementarios. ♣

El teorema precedente tiene un recíproco que es el siguiente:

9.5.16. Teorema. Supongamos que en el punto extremo de una cuerda de un círculo pasa una recta tal que el ángulo que forma con la cuerda es congruente a un ángulo inscrito del círculo, cuyos lados pasan por los puntos extremos de la cuerda dada. Entonces, la recta es tangente al círculo dado.

Prueba: Sean C(O,r) un círculo, PQ una de sus cuerdas y $\overleftrightarrow{RS}$ una recta que pasa el punto P tal que $\angle SPQ \cong \angle PAQ$ para algún punto $A \in$ C(O,r). En virtud del Teorema 9.3.6, basta demostrar que $OP \perp \overleftrightarrow{RS}$. Efectivamente, sea PB el diámetro del círculo que pasa por el punto P. Por el Teorema 9.5.2, sabemos que el ángulo $\angle BQP$ es recto. Por consiguiente, los ángulos $\angle PBQ$ y $\angle QPB$ son complementarios. Según el Corolario 9.5.7, $\angle PBQ \cong \angle PAQ$. Por lo cual, $\angle SPQ$ y $\angle QPB$ son complementarios. Lo cual significa que $OP \perp \overleftrightarrow{RS}$. ♣

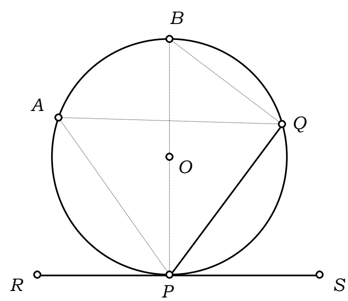


Figura 9.56

La proposición número 11 del libro *Liber Assumptorum* escrito por Arquímedes es la siguiente:

9.5.17. Teorema de Arquímedes. Sean AB y CD dos cuerdas perpendiculares de un círculo C(O,r). Si AB y CD se cortan en el punto $P \neq O$, entonces $|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2 = 4r^2$.

Prueba: Sea DE el diámetro del círculo C(O,r) que pasa por el punto D. Sabemos que los triángulos ΔPAD y ΔDBE son rectángulos en los vértices P y B (lo concerniente al segundo triángulo lo justifica el Teorema 9.5.2). Del Corolario 9.5.7 (1) nos damos cuenta, que $\angle PAD \cong \angle BED$. Aplicando el criterio de semejanza 8.1.9, hallamos que $\Delta PAD \sim \Delta DBE$ y $\angle ADC \cong \angle EDB$. Según el Teorema 9.5.9, $AC \cong BE$. Finalmente, por el Teorema de Pitágoras (8.5.1), se cumple la relación
$4r^2 = |DE|^2 = |BE|^2 + |BD|^2 = |AC|^2 + |BD|^2 = |PA|^2 + |PC|^2 + |PB|^2 + |PD|^2$. ♣

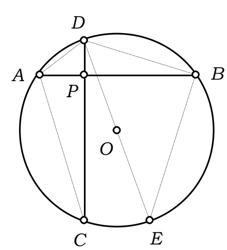


Figura 9.57

9.6. Potencia de un punto con respecto a un círculo

En el artículo [a-138], el J. V. Roberti introduce el Teorema de los Ángulos Congruentes (6.4.3) como una generalización de la demostración de dos teoremas de la geometría clásica en la que se basa la definición de potencia de un punto con respecto a un círculo. A continuación, enunciamos dichos teoremas en uno solo, tal y como lo llevó a cabo E. Maor [a-109] y veremos que son consecuencia directa del Teorema 6.4.3.

9.6.1. Teorema. Sean $\mathrm{C}(O,r)$ un círculo y $P \notin \mathrm{C}(O,r)$. Si una recta secante que pasa por el punto P corta al círculo en los puntos A y B, entonces el producto $|PA||PB|$ es una constante que no depende de la elección de las rectas secantes al círculo que pasan por el punto P. Si $P \in ext(\mathrm{C}(O,r))$, entonces dicho producto es igual al cuadrado de la longitud del segmento tangente al círculo que tiene como punto extremo a P. Si $P \in int(\mathrm{C}(O,r))$, entonces dicho producto es igual al cuadrado de la longitud del segmento tangente al círculo $\mathrm{C}(O,|OP|)$ que tiene como a uno de sus puntos extremos a cualquiera de los puntos A o B.

Prueba: Sean $\mathrm{C}(O,r)$ un círculo, $P \notin \mathrm{C}(O,r)$ y l una recta secante al círculo en los puntos A y B, y que pasa por el punto P. Primero analizaremos el caso cuando $P \in ext\mathrm{C}(O,r)$.

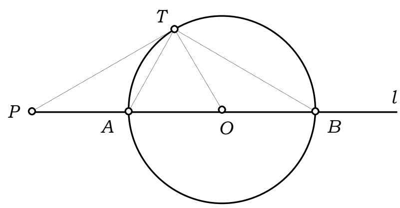


Figura 9.58

Supongamos que $O \in l$ y sea $T \in \mathrm{C}(O,r)$ tal que $\overleftrightarrow{PT}$ es tangente al círculo. Por los Teoremas 9.3.6 y 9.5.2, sabemos que $PT \perp TO$ y que el ángulo $\angle ATB$ es recto. Según el Corolario 6.4.4,

$$|PA||PB| = |PT|^2 .$$

Si $O \notin l$, entonces de manera auxiliar trazamos la recta m que pase por los puntos O y P y que corte al círculo en los puntos A' y B'. Del Teorema 9.5.7 (1), se sigue la congruencia $\angle AB'A' \cong \angle ABA'$. De acuerdo con el Teorema 6.4.3, obtenemos que

$$|PA||PB| = |PA'||PB'| = |PT|^2 ,$$

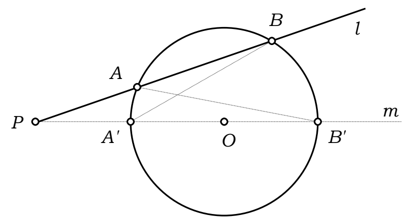


Figura 9.59

en donde $T \in \mathrm{C}(O,r)$ satisface que la recta $\overleftrightarrow{PT}$ es tangente al círculo $\mathrm{C}(O,r)$.

Ahora, consideremos el caso cuando $P \in int(\mathrm{C}(O,r))$.

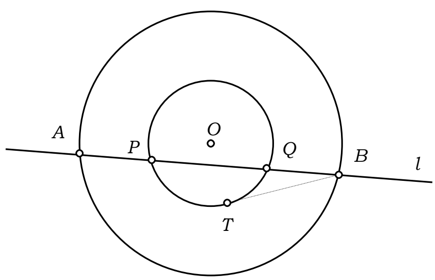


Figura 9.60

Fijamos un punto $T \in \mathrm{C}(O,|OP|)$ tal que $\overleftrightarrow{PB}$ sea tangente al círculo $\mathrm{C}(O,|OP|)$. Supongamos, además que l corta al círculo $\mathrm{C}(O,|OP|)$ en los puntos P y Q. Aplicando la primera parte de la demostración, hallamos la identidad

$$|BQ||BP| = |BT|^2 .$$

Según el Teorema 9.2.16, sabemos que $|BQ| = |PA|$ y, al sustituir, encontramos que $|PA||PB| = |BT|^2$. ♣

9.6.2. Definición. Sean $\mathrm{C}(O,r)$ un círculo y P un punto en el plano. Si $P \in ext(\mathrm{C}(O,r))$, entonces al valor constante del Teorema 9.6.1 se le llama la *potencia del punto P con respecto al círculo* $\mathrm{C}(O,r)$. Si $P \in \mathrm{C}(O,r)$, su *potencia con respecto al círculo* $\mathrm{C}(O,r)$ se define cómo 0. Si $P \in int(\mathrm{C}(O,r))$, entonces al negativo del valor constante dado en el Teorema 9.6.1 se le llama la *potencia del punto P con respecto al círculo* $\mathrm{C}(O,r)$.

Remarcamos que la potencia de un punto con respecto a un círculo será positiva si el punto se encuentra en el exterior de él mismo, y será negativa si yace en el interior del círculo.

9.6.3. Teorema. La potencia de un punto con respecto a un círculo es igual a la diferencia entre el cuadrado de su distancia al centro del círculo y el cuadrado del radio del mismo círculo.

Prueba: Sean C(O,r) un círculo y P un punto en el plano.

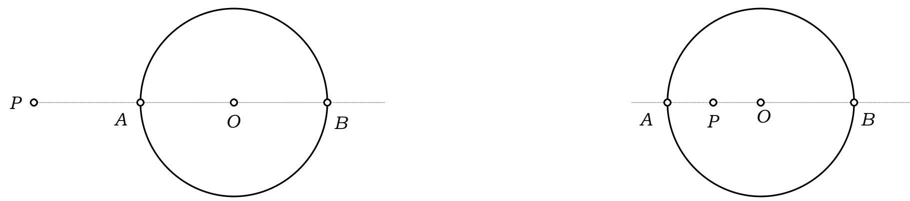


Figura 9.61

Si $P \in$ C(O,r), entonces tenemos $d(P,O)^2 - r^2 = 0$. Supongamos pues que $P \notin$ C(O,r) y sean A y B los puntos de intersección $\overleftrightarrow{PO}$ con el círculo C(O,r).Consideremos dos casos:

Caso I. $P \in ext$(C(O,r)). Por definición, la potencia de P con respecto a C(O,r) es igual a $|PA||PB|$. Como AB es un diámetro y OA y OB son radios del círculo, vemos que

$$|PA||PB| = (d(P,O) - r)(d(P,O) + r) = d(P,O)^2 - r^2.$$

Caso II. $P \in int$(C(O,r)). En este caso, tenemos que

$$-|PA||PB| = -(r - d(P,O))(d(P,O) + r) = -(r^2 - d(P,O)^2) = d(P,O)^2 - r^2. \clubsuit$$

El teorema anterior nos dice que la potencia de un punto P con respecto a un círculo C(O,r) es igual a $d(P,O)^2 - r^2$.

9.6.4. Teorema. Sean C(O,r) un círculo, AB uno de sus diámetros y CD una de sus cuerdas perpendiculares a AB. Si $d(A,CD) < r$, entonces $r = \dfrac{|AC|^2}{2|CM|}$, en donde M es el punto medio de CD.

Prueba: De acuerdo con el Corolario 9.2.8, AB y CD se cortan en M. Según el Teorema 9.6.1, hallamos que

$$|AM||BM| = |CM||DM|$$
$$(r + (r - |AM|))|AM| = |CM|^2$$
$$r|AM| + r|AM| - |AM|^2 = |CM|^2$$
$$2r|AM| = |AM|^2 + |CM|^2 = |AC|^2$$
$$r = \frac{|AC|^2}{2|CM|}. \clubsuit$$

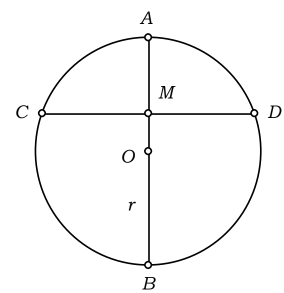


Figura 9.62

9.7. El ángulo entre dos círculos secantes

9.7.1. Definición. El *ángulo formado por dos círculos* que se intersecan es el ángulo formado por las rectas tangentes a los dos círculos en uno de sus puntos comunes. Si dicho ángulo es recto, entonces decimos que los círculos son *ortogonales*.

En la figura 9.63, $\angle PAQ$ es el ángulo formado por los dos círculos.

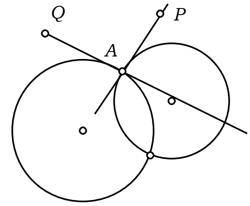


Figura 9.63

El siguiente teorema nos garantiza que la definición del ángulo entre cualesquiera dos círculos que se cortan en dos puntos es independiente de la elección del punto.

9.7.2. Teorema. Si dos círculos son secantes, entonces los ángulos formados por las rectas tangentes a los dos círculos en cada uno de los puntos de intersección son congruentes.

Prueba: Sean C(O,r) y C(O',r') dos círculos que se cortan en los puntos A y B. Sean m y l las rectas tangentes a los círculos C(O,r) y C(O',r') en el punto A. Consideremos los puntos de intersección P y Q de m y l con la recta $\overleftrightarrow{OO'}$, respectivamente. Por el Teorema 9.3.14, $\overleftrightarrow{OO'}$ es la mediatriz del segmento AB. Por consiguiente, $PA \cong PB$ y $QA \cong QB$. Del Corolario 9.3.9 se sigue que PB es tangente a C(O',r') y QB es tangente a C(O,r). De acuerdo con el criterio de congruencia 3.2.12, hallamos que $\Delta APQ \cong \Delta BPQ$. Por lo tanto, $\angle PAQ \cong \angle PBQ$. ♣

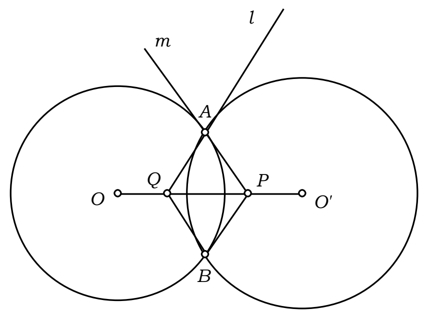


Figura 9.64

9.7.3. Teorema. Si dos círculos son ortogonales, entonces el radio de uno de ellos, trazado desde cualquier punto de intersección, es tangente al otro círculo.

Prueba: Sean C(O,r) y C(O',r') dos círculos ortogonales que se cortan en los puntos A y B. Como el ángulo formado por las rectas tangentes a los círculos en el punto A es recto, por el Teorema 9.3.6, los centros O y O' de los círculos se encuentran sobre dichas rectas tangentes. Por lo cual, OA es tangente a C(O',r') y $O'A$ es tangente a C(O,r). Similarmente se demuestra que OB es tangente a C(O',r') y $O'B$ es tangente a C(O,r). ♣

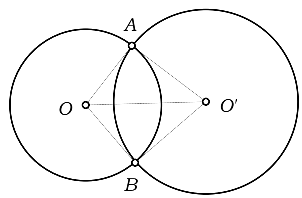


Figura 9.65

9.7.4. Teorema. Si dos círculos son secantes y el radio de uno de ellos trazado desde cualquier punto de intersección es tangente al otro, entonces los círculos son ortogonales.

Prueba: Sean C(O,r) y C(O',r') dos círculos que se cortan en los puntos A y B. Supongamos que $O'A$ es tangente a C(O,r) en el punto A y que OA es tangente a C(O',r') en el punto A. Por el Teorema 9.3.6, sabemos que $OA \perp O'A$. Por consiguiente, los círculos son ortogonales. ♣

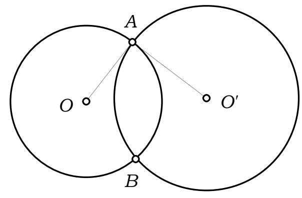


Figura 9.66

9.7.5. Teorema. Dos círculos secantes son ortogonales si y solo si el cuadrado de su distancia entre sus centros es igual a la suma de los cuadrados de sus radios.

Prueba: Sean C(O,r) y C(O',r') dos círculos que se cortan en los puntos A y B.

Necesidad. Supongamos que C(O,r) y C(O',r') son ortogonales. Según el Teorema 9.7.3, el radio OA es tangente al círculo C(O',r') en el punto A y el radio $O'A$ es tangente al círculo C(O,r) en el punto A. Así tenemos, por el Teorema 9.3.6, que $OA \perp O'A$ y como consecuencia, $\Delta AOO'$ es un triángulo rectángulo. De acuerdo con el Teorema de Pitágoras (8.5.1),

$$|OO'|^2 = |OA|^2 + |O'A|^2.$$

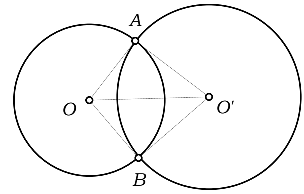


Figura 9.67

Suficiencia. Por hipótesis, sabemos que $|OO'|^2 = r^2 + r'^2 = |OA|^2 + |O'A|^2$. El recíproco del Teorema de Pitágoras (8.5.2) nos asegura que $\Delta AOO'$ es un triángulo rectángulo con hipotenusa OO'. Por lo cual, $OA \perp O'A$. Según el Teorema 9.3.6, OA es tangente al círculo C(O',r') en el punto A y $O'A$ es tangente al círculo C(O,r) en el punto A. Por lo tanto, C(O,r) y C(O',r') son ortogonales. ♣

9.7.6. Teorema. Si dos círculos son ortogonales, entonces el centro de cualquiera de ellos está en el exterior del otro.

Prueba: Sean C(O,r) y C(O',r') dos círculos ortogonales. De acuerdo con el Teorema 9.7.5, sabemos que $|OO'|^2 = r^2 + r'^2$. Lo cual implica que $|OO'| > r$ y $|OO'| > r'$. Pero esto significa que $O \in ext$(C(O',r')) y $O' \in ext$(C(O',r)). ♣

9.7.7. Teorema. Una condición necesaria y suficiente para que dos círculos secantes sean ortogonales es que la potencia del centro de uno de los círculos con respecto al otro sea igual al cuadrado del radio correspondiente al primero.

Prueba: Sean C(O,r) y C(O',r') dos círculos que se cortan en los puntos A y B.

Necesidad. Supongamos que C(O,r) y C(O',r') son ortogonales. Como OA es tangente a C(O',r') en el punto A, por el Teorema 9.6.1, la potencia de O con respecto a C(O',r') es igual a $|OA|^2 = r^2$. El mismo razonamiento establece que la potencia de O' con respecto a C(O,r) es igual a $|O'A|^2 = r'^2$.

Suficiencia. Por el Teorema 9.6.3, sabemos que $r^2 = \left||OO'|^2 - r'^2\right|$ y $r'^2 = \left||OO'|^2 - r^2\right|$. Claramente, $r \neq |OO'| \neq r'$. Supongamos que $r^2 = r'^2 - |OO'|^2$. Hay dos posibilidades para el valor de r':

Caso I. Si $r'^2 = |OO'|^2 - r^2$, entonces $|OO'|^2 - r^2 = r^2 + |OO'|^2$. De donde deducimos que $r = 0$, lo cual no es posible.

Caso II. Si $r'^2 = r^2 - |OO'|^2$, entonces $r^2 - |OO'|^2 = r^2 + |OO'|^2$. De aquí vemos que $|OO'| = 0$, pero esto es una contradicción.

Por lo tanto, $r^2 = |OO'|^2 - r'^2$. Es decir, $|OO'|^2 = r^2 + r'^2$. Se sigue del Teorema 9.7.5 que C(O,r) y C(O',r') son ortogonales. ♣

9.8. Eje radical

Primero daremos la definición del eje radical de dos círculos no concéntricos y, posteriormente, presentaremos la prueba de su existencia.

9.8.1. Definición. El *eje radical* de dos círculos no concéntricos es el lugar geométrico de los puntos que tienen la misma potencia con respecto a los dos círculos.

Si dos círculos C(O,r) y C(O,r’) son concéntricos y la potencia de un punto P con respecto a ambos círculos es la misma, entonces $||PO|^2 - r'^2| = ||PO|^2 - r^2|$ (esto es cierto por el Teorema 9.6.3). Pero de aquí se puede ver que $r = r'$. Es decir, los dos círculos son el mismo.

El siguiente teorema describe una de las propiedades básicas del eje radical de dos círculos no concéntricos.

9.8.2. Teorema. El eje radical de dos círculos no concéntricos es una recta perpendicular a la recta que une los centros de los dos círculos.

Prueba: Sean C(O,r) y C(O’,r’) dos círculos no concéntricos y, sin perder generalidad, supongamos que $r \geq r'$. Fijamos un punto P sobre el eje radical de C(O,r) y C(O’,r’) y sea M la proyección de P sobre la recta $\overleftrightarrow{OO'}$. Por los Teoremas 8.5.1 y 9.6.3, se sabe que

$$|PO|^2 - r^2 = |PO'|^2 - r'^2$$
$$|PM|^2 + |MO|^2 - r^2 = |PM|^2 + |MO'|^2 - r'^2$$
$$|MO|^2 - r^2 = |MO'|^2 - r'^2.$$

Lo cual quiere decir, con base en el Teorema 9.6.3, que el punto M también está en el eje radical de los círculos C(O,r) y C(O’,r’). Utilizando la última igualdad, vemos que

$$|MO|^2 - r^2 = |MO'|^2 - r'^2.$$
$$|MO|^2 - |MO'|^2 = r^2 - r'^2$$
$$(|MO| - |MO'|)(|MO| + |MO'|) = r^2 - r'^2.$$

Como consecuencia de esto, tenemos que $M \in OO'$ y $|MO| - |MO'| = \dfrac{r^2 - r'^2}{|MO| + |MO'|} = \dfrac{r^2 - r'^2}{|OO'|}$, o bien, O' está entre O y M, y $|MO| + |MO'| = \dfrac{r^2 - r'^2}{|MO| - |MO'|} = \dfrac{r^2 - r'^2}{|OO'|}$. Sin perder generalidad, supongamos que $M \in OO'$ y $|MO| - |MO'| = \dfrac{r^2 - r'^2}{|MO| + |MO'|} = \dfrac{r^2 - r'^2}{|OO'|}$. Sean Q otro punto en el eje radical de C(O,r) y C(O’,r’) y N su proyección sobre la recta $\overleftrightarrow{OO'}$. Siguiendo el razonamiento anterior, obtenemos que $N \in OO'$ o que O' está entre O y N. Si O' está entre O y N, entonces $|NO| + |NO'| = |MO| - |MO'|$, pero esto es una contradicción, ya que $|OO'| < |NO| + |NO'| = |MO| - |MO'| < |OO'|$. Por consiguiente, $M \in OO'$ y

$$|NO| - |NO'| = |MO| - |MO'|$$
$$|OM| + |MN| - |NO'| = |MO| - |MN| - |NO'|$$
$$2|MN| = 0$$
$$|MN| = 0$$
$$M = N.$$

Por lo tanto, $N \in \overleftrightarrow{PM}$. Esto demuestra que todo punto del eje radical de C(O,r) y C(O’,r’) pertenece a la recta $\overleftrightarrow{PM}$. Probaremos ahora que todo punto de $\overleftrightarrow{PM}$ pertenece al eje radical de C(O,r) y C(O’,r’). Fijemos $R \in \overleftrightarrow{PM}$. Por el Teorema de Pitágoras (8.5.1), $|RM|^2 + |MO|^2 = |RO|^2$ y $|RM|^2 + |MO'|^2 = |RO'|^2$. Como M está en el eje radical de C(O,r) y C(O’,r’), por el Teorema 9.6.3, se sigue que $|MO|^2 - r^2 = |MO'|^2 - r'^2$. Sustituyendo,

$$|MO|^2 - r^2 = |MO'|^2 - r'^2$$
$$|RO|^2 - |RM|^2 - r^2 = |RO'|^2 - |RM|^2 - r'^2$$
$$|RO|^2 - r^2 = |RO'|^2 - r'^2.$$

Lo cual nos dice que la potencia de R con respecto a C(O,r) es igual que potencia de R con respecto a C(O’,r’). Es decir, R está en el eje radical de C(O,r) y C(O’,r’). Con todo esto hemos probado que $\overleftrightarrow{PM}$ es el eje radical de C(O,r) y C(O’,r’). ♣

9.8.3. Construcción del Eje Radical. Consideremos tres casos.
Caso I. Supongamos que los círculos C(O,r) y C(O',r') no se cortan.

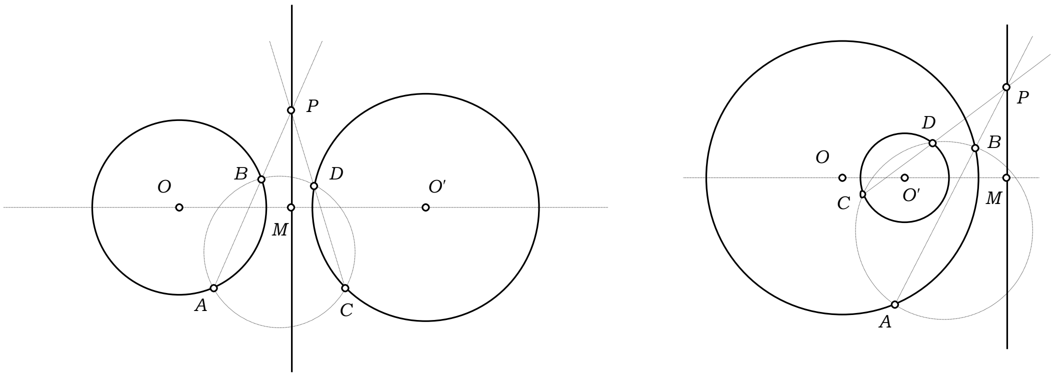


Figura 9.68

Trazamos un círculo que corte a C(O,r) y C(O',r') en los puntos A y B, y C y D, respectivamente. Sean P el punto de intersección de las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$, y M la proyección de P sobre la recta $\overleftrightarrow{OO'}$. Claramente, las potencias de P con respecto a los círculos C(O,r) y C(O',r') es la misma (figura 9.68). Es decir, P pertenece al eje radical de C(O,r) y C(O',r'). Según el Teorema 9.8.2, $\overleftrightarrow{PM}$ resulta ser el eje radical de C(O,r) y C(O',r').

Caso II. Supongamos que los círculos C(O,r) y C(O',r') son tangentes en el punto P.

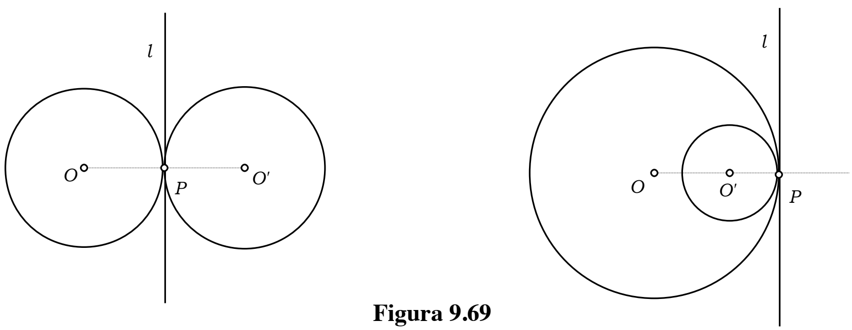


Figura 9.69

Como la potencia de P a ambos círculos es 0, entonces P está en el eje radical de dichos círculos y si trazamos una recta l perpendicular a $\overleftrightarrow{OO'}$ en el punto P, entonces l es el eje radical de C(O,r) y C(O',r'). Resumiendo, el eje radical de dos círculos tangentes es la recta perpendicular a la recta que une sus centros y que pasa por el punto de tangencia.

Caso III. Supongamos que los círculos C(O,r) y C(O',r') se cortan en los puntos A y B. Tenemos entonces que la potencia de A y B a ambos círculos es igual a 0. En consecuencia, A y B pertenecen al eje radical de C(O,r) y C(O',r'). Por ser dicho eje radical una recta (Teorema 9.8.2), hallamos que la recta que une a los puntos A y B es precisamente el eje radical de los círculos C(O,r) y C(O',r'). ♣

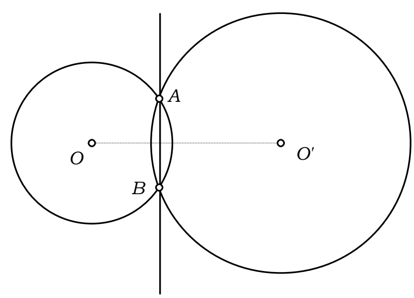


Figura 9.70

9.8.4. Teorema. Los ejes radicales de tres círculos no concéntricos cuyos centros no son colineales tomados de dos en dos son concurrentes.

Prueba: Sean C(O,r), C(O',r') y C(O'',r'') tres círculos con las condiciones del teorema. Sea P el punto de intersección de los ejes radicales de los círculos C(O,r) y C(O',r'), y de los círculos C(O',r') y C(O'',r''). Claramente, el punto P tiene la misma potencia con respecto a los tres círculos. En particular, la potencia de P con respecto a los círculos C(O,r) y C(O'',r'') es la misma. Por lo tanto, el punto P está en el eje radical de C(O,r) y C(O'',r''). Esto demuestra que los tres ejes radicales en cuestión concurren en el punto P. ♣

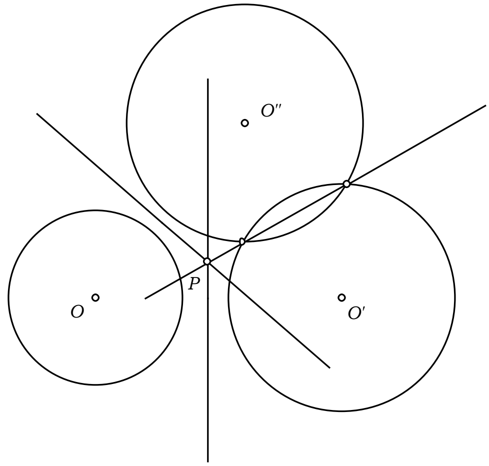


Figura 9.71

9.8.5. Corolario. Sean C(O,r) un círculo y A y B dos puntos cualesquiera en el plano. Entonces, existe un punto $P \in \overleftrightarrow{AB}$ tal que si C(O',r') es un círculo que pasa por los puntos A y B, y corta a C(O,r) en los puntos C y D, entonces $P \in \overleftrightarrow{CD}$.

Prueba: Sea C(O',r') un círculo que pasa por los puntos A y B. Sean C y D los puntos de intersección de C(O',r') y C(O,r), y P el punto de intersección de las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ (no es difícil ver que existe un círculo con estas propiedades, ver la figura 9.72). Tomemos un círculo arbitrario C(O'',r'') que pase por los puntos A y B, y corte a C(O,r) en los puntos E y F. De acuerdo con el Teorema 9.8.4, sabemos que las rectas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{EF}$ tienen que ser concurrentes. Por ello, $P \in \overleftrightarrow{EF}$. ♣

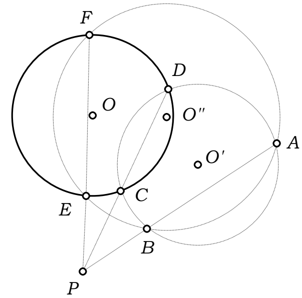


Figura 9.72

9.8.6. Teorema. El centro de un círculo que corta ortogonalmente a cada uno de otros dos círculos está en el eje radical de dichos círculos.

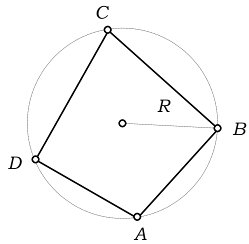
Prueba: Sean C(O,r), C(O',r') y C(O'',r'') tres círculos tales que C(O,r) corta ortogonalmente a los círculos C(O',r') y C(O'',r''). De acuerdo con el Teorema 9.7.7, la potencia de O con respecto a C(O',r') y a C(O'',r'') es igual a r^2. Por lo cual, O pertenece al eje radical de C(O',r') y C(O'',r''). ♣

9.8.7. Teorema. Si un círculo tiene su centro en el eje radical de dos círculos dados y es ortogonal a uno de estos círculos, entonces es también ortogonal al otro círculo.

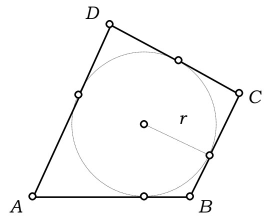
Prueba: Sean C(O,r), C(O',r') y C(O'',r'') tres círculos no concéntricos entre sí tales que O está en el eje radical de C(O',r') y C(O'',r''). Supongamos que C(O,r) y C(O',r') son ortogonales. Por el Teorema 9.7.7, la potencia de O con respecto a C(O',r') es igual a r^2, y por estar O en el eje radical de C(O',r') y C(O'',r''), la potencia de O con respecto a C(O'',r'') es también igual a r^2. Según el Teorema 9.7.7, concluimos que C(O,r) corta ortogonalmente a C(O'',r''). ♣

9.9. Cuadriláteros inscritos y cuadriláteros circunscritos

9.9.1. Definición. Se dice que un cuadrilátero es *cíclico* si sus vértices están sobre un círculo. Decimos que un cuadrilátero es *circunscrito* si hay un círculo tangente a sus cuatro lados.



Cuadrilátero cíclico



Cuadrilátero circunscrito

Figura 9.73

Si se tiene un cuadrilátero cíclico, entonces el radio del círculo que contiene sus vértices será denotado por R. En caso de que un cuadrilátero sea circunscrito, r denotará el radio del círculo inscrito en él.

La mayoría de las demostraciones que se conocen de la suficiencia del siguiente teorema clásico son por contradicción. Una excepción es el artículo de I. F. Sharygin [a-148] que contiene una prueba elegante y directa de dicho resultado. A continuación, presentaremos las ideas de I. F. Sharygin.

9.9.2. Teorema. Un cuadrilátero es circunscrito si y solo si las sumas de las longitudes de sus lados opuestos son iguales.

Prueba: *Necesidad*. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero circunscrito en el círculo $\mathrm{C}(I,r)$. Sean L, M, N y O los puntos de tangencia de los lados AB, BC, CD y DA y el círculo $\mathrm{C}(O,r)$, respectivamente. De acuerdo con el Teorema 9.3.8, se cumplen las congruencias $AL \cong AO$, $BL \cong BM$, $CM \cong CN$ y $DN \cong DO$. Lo cual implica que

$$|AB| + |DC| = |AL| + |LB| + |DN| + |NC| =$$
$$|AO| + |BM| + |DO| + |CM| =$$
$$|AO| + |DO| + |BM| + |CM| = |AD| + |BC|.$$

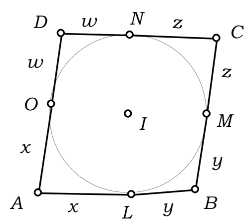


Figura 9.74

Suficiencia(I. F. Sharygin). Supongamos que las longitudes de los lados del cuadrilátero $\square ABCD$ cumplen con la identidad $|AB| + |DC| = |AD| + |BC|$. Consideremos primero el caso cuando $AB \cong AD$. Entonces, tenemos que $DC \cong BC$. Lo cual nos testifica que ΔABD y ΔCDB son triángulos isósceles y $\Delta DAC \cong \Delta BAC$, esto último es por el criterio 3.2.12. Observemos que el segmento AC está contenido en las bisectrices de los ángulos $\angle BAD$ y $\angle DCB$. Dichas bisectrices yacen sobre una misma recta. Sea I el punto de intersección de AC y BD. Del Teorema 3.2.9, podemos deducir que DI está contenido en la bisectriz del ángulo $\angle D$ y que BI yace en la bisectriz del ángulo $\angle B$. Así, por el Teorema 4.7.9, I es el centro de un círculo inscrito en el cuadrilátero $\square ABCD$. Esto prueba el primer caso. Para el segundo caso, sin perder generalidad, supongamos que $AD < AB$. De aquí y de la hipótesis, obtenemos que $DC < BC$. Fijamos puntos $E \in AB$ y $F \in BC$ tales que $AD \cong AE$ y $DC \cong CF$ (ver la figura 9.76). Entonces, los dos triángulos ΔAED y ΔCDF son isósceles y, por ello, las bisectrices de los ángulos $\angle A$ y $\angle C$ coinciden con las mediatrices de los segmentos DE y DF (4.3.1).

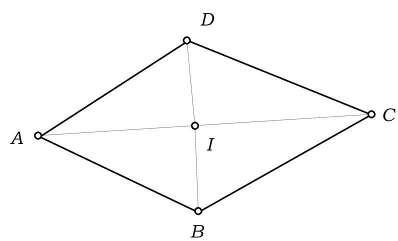


Figura 9.75

Por otra parte, sabemos que

$$|EB| = |AB| - |AE| = |AB| - |AD| = |BC| - |DC| = |BC| - |CF| = |EB/.$$

Esto nos dice que el triángulo ΔBFE es isósceles. De acuerdo con el Teorema 4.3.1, la bisectriz del ángulo $\angle B$ es la mediatriz del segmento EF. En virtud del Teorema 8.3.26, las mediatrices del triángulo ΔDFE concurren en un punto que será denotado por I. Pero como I está también en las bisectrices de los ángulos $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$. Por el Teorema 4.7.9, el punto I equidista de los cuatro lados del cuadrilátero. Por lo tanto, I es el centro de un círculo inscrito en $\square ABCD$. ♣

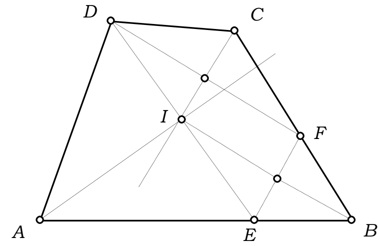


Figura 9.76

9.9.3. Corolario. Un rectángulo es un cuadrado si y solo si es circunscrito.

9.9.4. Teorema. Un cuadrilátero $\square ABCD$ es cíclico si y solo si $m(\angle A) + m(\angle C) = m(\angle B) + m(\angle D)$.

Prueba: *Necesidad*. Supongamos que $\square ABCD$ es un cuadrilátero cuyos vértices yacen en el círculo $\mathcal{C}(O,R)$. Según el Corolario 9.5.7 (2), $\angle A = \angle BAD$ y $\angle DCB = \angle C$, y $\angle B = \angle CBA$ y $\angle ADC = \angle D$ son suplementarios. Es decir, $m(\angle A) + m(\angle C) = 180 = m(\angle B) + m(\angle D)$.

Suficiencia [a-148]. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero tal que $m(\angle A) + m(\angle C) = m(\angle B) + m(\angle D)$. Supongamos que $\angle A \cong \angle D$. De donde vemos que $m(\angle C) = m(\angle B)$ y, por el Teorema 2.5.7, $\angle C \cong \angle B$. Según el Teorema 5.3.1, $\square ABCD$ es un paralelogramo y $\angle A$ y $\angle D$, y $\angle B$ y $\angle C$ son dos pares de ángulos suplementarios. Por ello,

$$360 = m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) + m(\angle D)$$
$$180 = m(\angle A) + m(\angle D) = 2m(\angle A)$$
$$90 = m(\angle A).$$

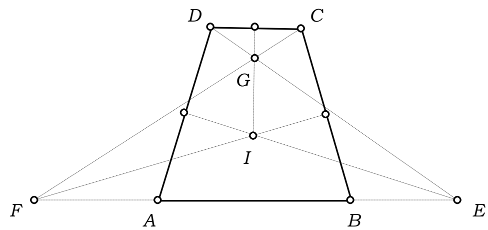


Figura 9.77

Esto prueba que $\angle A$ es un ángulo recto y, por el Teorema 5.3.1, hallamos que $\angle B$ y $\angle C$ y $\angle D$ también son ángulos rectos. Por consiguiente, $\square ABCD$ es un rectángulo que por el Corolario 5.5.4 es inscrito. Una situación análoga se obtiene al suponer que $\angle B$ y $\angle C$ son congruentes. Ahora, sin pérdida de generalidad, supongamos que $\angle A < \angle D$. En consecuencia, $\angle B < \angle C$. Basaremos nuestros argumentos en la figura 9.77. Sean $E, F \in \overleftrightarrow{AB}$ tales $\angle A \cong \angle ADE$ y $\angle B \cong \angle FCB$. Según el Teorema 3.2.9, los triángulos ΔEDA y ΔFBC son isósceles. Por el Teorema 4.3.1, las mediatrices de los segmentos AD y BC coinciden con las bisectrices de los ángulos $\angle DEA$ y $\angle BFC$. Sea I el punto de intersección de dichas bisectrices. De acuerdo con el Teorema 4.7.9, sabemos que $d(I, \overleftrightarrow{AB}) = d(I,DE)$ y $d(I, \overleftrightarrow{AB}) = d(I,FC)$, de donde se sigue la igualdad $d(I,DE) = d(I,FC)$. Así, por el Teorema 4.7.9, I está en la bisectriz del ángulo $\angle FGE$, en donde G es el punto de intersección de los segmentos DE y CF. Por otra parte, de nuestra hipótesis sabemos que

$$m(\angle D) - m(\angle A) = m(\angle C) - m(\angle B)$$
$$m(\angle ADC) - m(\angle ADE) = m(\angle DCB) - m(\angle FCB)$$
$$m(\angle GDC) = m(\angle DCG)$$
$$\angle GDC \cong \angle DCG.$$

Lo cual implica que el triángulo ΔGCD es isósceles en el vértice G. Como $\angle FGE$ y $\angle CGD$ son opuestos por el vértice, por los Teoremas 2.12.5 y 4.3.1, sus bisectrices forman una recta que es la mediatriz del segmento DC. Todo esto que hemos visto nos dice que I es el punto de concurrencia de las mediatrices de los segmentos AD, BC y DC. Del Teorema 4.2.2 concluimos que I es equidistante de los vértices del cuadrilátero $\square ABCD$. Por lo tanto, $\square ABCD$ es cíclico. ♣

9.9.5. Teorema. Para un cuadrilátero □*ABCD*, las siguientes afirmaciones son equivalentes:
1. □*ABCD* es cíclico.
2. Los ángulos opuestos de □*ABCD* son suplementarios.
3. Un par de ángulos opuestos de □*ABCD* son suplementarios.

Prueba: Sea □*ABCD* un cuadrilátero. Sabemos, por los Teoremas 5.1.13 y 9.9.4, que

$$\square ABCD \text{ es cíclico} \Leftrightarrow m(\angle A) + m(\angle C) = m(\angle B) + m(\angle D) \Leftrightarrow$$
$$2(m(\angle A) + m(\angle C)) = 2(m(\angle B) + m(\angle D)) = 360 \Leftrightarrow m(\angle A) + m(\angle C) = m(\angle B) + m(\angle D) = 180$$
$$\Leftrightarrow \angle A \text{ y } \angle C, \text{ y } \angle B \text{ y } \angle D \text{ son dos pares de ángulos suplementarios.}$$

Si dos ángulos opuestos del cuadrilátero □*ABCD* son suplementarios, por el Teorema 5.1.13, vemos que los otros dos ángulos opuestos también resultan ser suplementarios. Esto prueba el teorema.♣

9.9.6. Teorema. Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un cuadrilátero □*ABCD*:
1. □*ABCD* es cíclico.
2. $\angle ACB \cong \angle ADB$.
3. $\angle CAD \cong \angle CBD$.

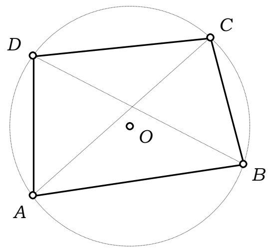


Figura 9.78

Prueba: Solo estableceremos la equivalencia entre las dos primeras afirmaciones.

1 ⇒ 2 Sea C(O,r) un círculo que contenga a los vértices A, B, C y D. Del Corolario 9.5.7 (1) deducimos que $\angle ACB \cong \angle ADB$.

2 ⇒ 1. Supongamos que $\angle ACB \cong \angle ADB$. Sabemos que los puntos C y D pertenecen a un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{AB}$. Según el Teorema 9.5.11, los puntos A, B, C y D son concíclicos. Lo cual quiere decir que el cuadrilátero □*ABCD* se puede inscribir en un círculo. ♣

9.9.7. Corolario. Todo rectángulo es cíclico.

9.9.8. Corolario. Tenemos un círculo C(O,r) y un punto P en su exterior. Si dos rectas que pasan por P cortan al círculo en los puntos A y B, y C y D, entonces $\Delta PAC \sim \Delta PDB$.

Prueba. Es consecuencia directa del Corolario 2.7.9, el criterio 6.2.6 y el Teorema 9.9.5. ♣

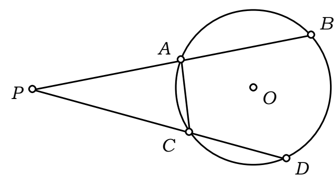


Figura 9.79

A continuación, presentamos otra caracterización de los cuadriláteros cíclicos (el nombre del autor de esta bonita caracterización se traspapeló en mis archivos y no fue posible encontrarlo).

9.9.9. Teorema. Un cuadrilátero □*ABCD* es cíclico si y solo si existe un cuadrilátero □*A'B'C'D'* tal que $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$, $CD \parallel C'D'$, $DA \parallel D'A'$ y $d(A,A') = d(B,B') = d(C,C') = d(D,D')$.

Prueba: *Necesidad*. Sea $\mathrm{C}(O,r)$ un círculo que contiene a los vértices del cuadrilátero $\square ABCD$. Trazamos un círculo $\mathrm{C}(O,r')$ concéntrico con $\mathrm{C}(O,r)$ tal que $r < r'$. Ahora trazamos una recta paralela a AB que corte a $\mathrm{C}(O,r')$ en los puntos A' y B'. Por B' trazamos una recta paralela a BC que corte a $\mathrm{C}(O,r')$ en el punto C' y por el punto C' trazamos una recta paralela a DC que corte a $\mathrm{C}(O,r')$ en el punto D'. Solo hay que demostrar que $DA \parallel D'A'$. Efectivamente, como los dos cuadriláteros $\square ABCD$ y $\square A'B'C'D'$ son cíclicos, por el Teorema 9.9.5, hallamos que $m(\angle B) + m(\angle D) = 180 = m(\angle B') + m(\angle D')$.
De acuerdo con el Teorema 3.7.6, obtenemos que $\angle B \cong \angle B'$ y, por ello, $m(\angle D) = m(\angle D')$. Es decir, $\angle D \cong \angle D'$. De igual manera, se establece la congruencia $\angle A \cong \angle A'$. Como $AB \parallel A'B'$, por el Problema 3.170, $DA \parallel D'A'$. Es entonces claro que $d(A,A') = d(B,B') = d(C,C') = d(D,D') = r' - r$.

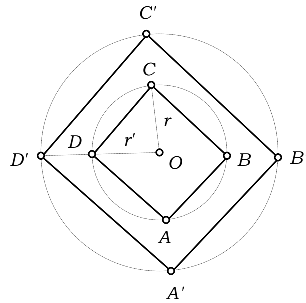


Figura 9.80

Suficiencia. Primero observamos que $\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$, $\angle C \cong \angle C'$ y $\angle D \cong \angle D'$, esto es cierto por el Teorema 3.7.6. De nuestras suposiciones podemos deducir que los cuadriláteros $\square AA'B'B$, $\square BB'C'C$, $\square CC'D'D$ y $\square DD'A'A$ son trapecios isósceles. De acuerdo con el Teorema 5.6.6, $\angle B'A'A \cong \angle BB'A'$, $\angle C'B'B \cong \angle CC'B'$, $\angle D'C'C \cong \angle DD'C'$ y $\angle A'D'D \cong \angle AA'D'$. Según el Teorema 5.1.13, hallamos que

$$m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) + m(\angle D) = m(\angle A') + m(\angle B') + m(\angle C') + m(\angle D') = 360.$$

De aquí se sigue la igualdad

$$m(\angle B'A'A) + m(\angle AA'D') + m(\angle BB'A') + m(\angle C'B'B) +$$
$$m(\angle CC'B) + m(\angle D'C'C) + m(\angle DD'C') + m(\angle A'D'D) = 360.$$

Por consiguiente,

$$2m(\angle B'A'A) + 2m(\angle AA'D') + 2m(\angle CC'B) + 2m(\angle D'C'C) = 360$$
$$m(\angle B'A'A) + m(\angle AA'D') + m(\angle CC'B) + m(\angle D'C'C) = 180$$
$$m(\angle A') + m(\angle C') = 180$$
$$m(\angle A) + m(\angle C) = 180.$$

Lo cual significa que los ángulos $\angle A$ y $\angle C$ son suplementarios. Del Teorema 9.9.5, concluimos que el cuadrilátero $\square ABCD$ es cíclico. ♣

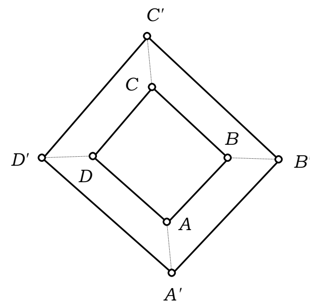


Figura 9.81

El enunciado que a continuación presentamos representa de alguna forma el inverso del Teorema 9.6.1.

9.9.10. Teorema. Sean A,B,C y D cuatro puntos en el plano y P el punto de intersección de $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$. Supongamos que P es el punto de intersección de AB y CD o P está fuera de ambos segmentos. Si $|PA||PB| = |PC||PD|$, entonces los puntos A, B, C y D son concíclicos.

Prueba:

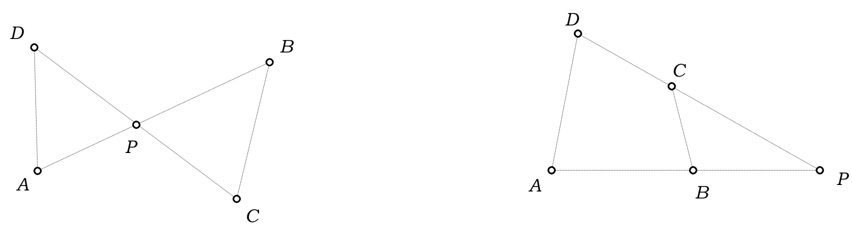


Figura 9.82

Consideremos los triángulos ΔPDA y ΔPCB. De nuestra hipótesis $|PA||PB| = |PC||PD|$ se sigue la identidad $\frac{|PA|}{|PC|} = \frac{|PD|}{|PB|}$. Pero como $\angle DPA \cong \angle CPB$ (esto se cumple por el Teorema 2.10.2), o bien, $\angle DPA = \angle BPC$, por el criterio de semejanza 6.2.10, hallamos que $\Delta PDA \sim \Delta PCB$. En consecuencia, $\angle ADP \cong \angle PBC$. Consideremos los dos posibles casos (ver la figura 9.82):

Caso I. P es el punto de intersección de AB y CD. Como $\angle ADC = \angle ADP \cong \angle PBC = \angle ABC$, del Teorema 9.5.11 se sigue que los puntos A, B, C y D son concíclicos.

Caso II. P no pertenece a ninguno de los segmentos en cuestión. Sabemos que $\angle ADP \cong \angle PBC$ y, como consecuencia de esto, los ángulos $\angle ADP$ y $\angle CBA$ son suplementarios. Según el Teorema 9.9.5, $\square ABCD$ es un cuadrilátero cíclico. ♣

El siguiente resultado aparece en el artículo de B. Greenberg [a-60] y también como un problema en la revista Math. Spectrum (Problem #18.5, cuya solución fue dada por Catlow). Este resultado es una fórmula que expresa las longitudes de las diagonales de un cuadrilátero cíclico en función de las longitudes de sus lados.

9.9.11. Teorema. Si $\square ABCD$ es un cuadrilátero cíclico, entonces

$$e = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}} \text{ y } f = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}},$$

en donde $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |DA|$, $e = |AC|$ y $f = |BD|$.

Prueba(Catlow): Por la Ley de los Cosenos (8.2.8) aplicada a los triángulos ΔDAC y ΔBCA, sabemos que

$$e^2 = d^2 + c^2 - 2dc\cos\angle ADC \text{ y } e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle CBA.$$

Ya que $\square ABCD$ es un cuadrilátero cíclico, por el Teorema 9.9.5, se tiene que $m(\angle ADC) + m(\angle CBA) = 180$. Según el Teorema 8.2.1 (2), $\cos\angle ADC = -\cos\angle CBA$. Sustituyendo vemos que

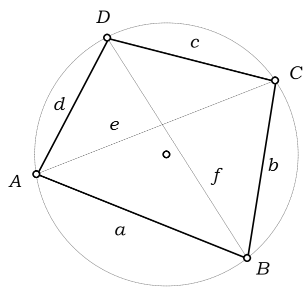
$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle CBA = a^2 + b^2 + 2ab\cos\angle ADC.$$

En consecuencia,

$$abe^2 = ab(d^2 + c^2) - 2abdc\cos\angle ADC \text{ y}$$

$$cde^2 = cd(a^2 + b^2) + 2abdc\cos\angle ADC.$$

Al sumar estas dos identidades, llegamos a que



$$abe^2 + cde^2 = ab(d^2 + c^2) + cd(a^2 + b^2)$$

Figura 9.83

$$e^2(ab + cd) = ab(d^2 + c^2) - dc(a^2 + b^2) = (ac + bd)(ad + bc)$$

$$e = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}.$$

La segunda fórmula se establece de manera similar. ♣

El siguiente resultado se le acredita a L. Puissant en la nota 403 de Scripta Math. 21 no. 1 (1955), 42 – 43.

9.9.12. Teorema de las Bisectrices de un Cuadrilátero. Las bisectrices de un cuadrilátero cualquiera forman un cuadrilátero cíclico.

Prueba: Sean $\square ABCD$ un cuadrilátero, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{CG}$ y $\overrightarrow{DH}$ las bisectrices de los ángulos $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ y $\angle D$, respectivamente, y L, M, N y O los puntos de intersección de $\overrightarrow{CG}$ y $\overrightarrow{DH}$, $\overrightarrow{CG}$ y $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{AE}$ y $\overrightarrow{BF}$, y $\overrightarrow{AE}$ y $\overrightarrow{DH}$, respectivamente. Según el Teorema 2.10.2, sabemos que $\angle LON \cong \angle DOA$ y, por ello,

$$m(\angle LON) = m(\angle DOA) = 180 - \frac{m(\angle BAD) + m(\angle CDA)}{2}.$$

De manera similar se prueba que

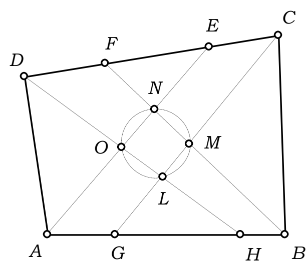


Figura 9.84

$$m(\angle NML) = m(\angle BMC) = 180 - \frac{m(\angle CBA) + m(\angle DCB)}{2}.$$

De las dos identidades anteriores y del Teorema 5.1.13 se sigue que

$$m(\angle LON) + m(\angle NML) = 360 - \left(\frac{m(\angle BAD) + m(\angle CDA)}{2} + \frac{m(\angle CBA) + m(\angle DCB)}{2}\right)$$

$$= 360 - \frac{m(\angle BAD) + m(\angle CDA) + m(\angle CBA) + m(\angle DCB)}{2} = 360 - \frac{360}{2} = 180.$$

Con un argumento similar probamos también que $m(\angle MLO) + m(\angle ONM) = 180$. Con base en el Teorema 9.9.5, concluimos que $\square LMNO$ es un cuadrilátero cíclico. ♣

En el Teorema 5.5.6 vimos que las bisectrices de un paralelogramo forman un rectángulo cuyas diagonales son paralelas a los lados del paralelogramo y su longitud es igual a la diferencia de las longitudes de dos lados adyacentes del paralelogramo. Claramente se puede ver que las bisectrices de un cuadrado son concurrentes y en el Teorema 5.5.7 probamos que las bisectrices de un rectángulo que no es un cuadrado forman un cuadrado.

Los siguientes dos teoremas son de J. H. Littlewood [a-97].

9.9.13. Teorema(J. H. Littlewood). Si en un cuadrilátero cíclico trazamos un círculo tangente a cada par de lados adyacentes y a la diagonal no comprendida entre ellos, entonces los centros de estos cuatro círculos forman un rectángulo.

Prueba: Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero cíclico. Trazamos el círculo $\mathcal{C}(P,p)$ tangente a AB, AD y BD; el círculo $\mathcal{C}(Q,q)$ tangente a AB, BC y AC; el círculo $\mathcal{C}(R,r)$ tangente a BC, CD y BD; y el círculo $\mathcal{C}(S,s)$ tangente a CD, AD y AC. Primero probaremos que el cuadrilátero $\square QBCR$ se puede inscribir en un círculo. En efecto, extendemos el segmento BQ hasta un punto T tal como lo muestra la figura 9.85. Por el Teorema 9.5.11, basta con probar que $\angle RBQ \cong \angle RCQ$. En efecto, tenemos que

$$m(\angle RBQ) = m(\angle CBQ) - m(\angle CBR) = \frac{m(\angle CBA)}{2} - \frac{m(\angle CBD)}{2} = \frac{m(\angle DBA)}{2} \text{ y}$$

$$m(\angle RCQ) = m(\angle RCB) - m(\angle QCB) = \frac{m(\angle DCB)}{2} - \frac{m(\angle ACB)}{2} = \frac{m(\angle DCA)}{2}.$$

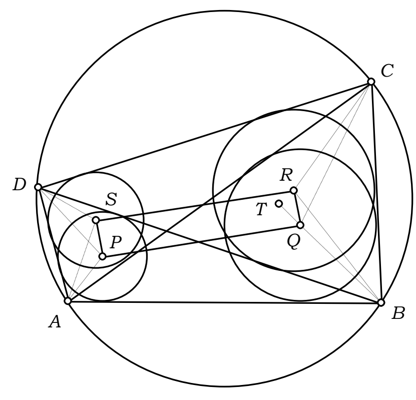


Figura 9.85

De acuerdo con el Corolario 9.5.7, $\angle DBA \cong \angle DCA$. Por ello,

$$m(\angle RBQ) = \frac{m(\angle DBA)}{2} = \frac{m(\angle DCA)}{2} = m(\angle RCQ).$$

Del Teorema 2.5.7 concluimos que $\angle RBQ \cong \angle RCQ$. Con argumentos similares, podemos probar que $\square RCDS$, $\square SDAP$ y $\square PABQ$ son cíclicos. Por lo cual, $\angle RQT \cong \angle RCB$ y $\angle TQP \cong \angle BAP$. Como resultado de esto,

$$m(\angle RQT) = m(\angle RCB) = \frac{m(\angle DCB)}{2} \text{ y } m(\angle TQP) = m(\angle BAP) = \frac{m(\angle BAD)}{2}.$$

Por el Teorema 9.9.5, sabemos que $m(\angle DCB) + m(\angle BAD) = 180$ y, por consiguiente,

$$m(\angle RQP) = m(\angle RQT) + m(\angle TQP) = \frac{m(\angle DCB)}{2} + \frac{m(\angle BAD)}{2} = 90.$$

Lo cual significa que $\angle RQP$ es un ángulo recto. Similarmente, se prueba que $\angle SRQ$, $\angle PSR$ y $\angle QPS$ también son ángulos rectos. Por lo tanto, $\square PQRS$ es un rectángulo. ♣

9.9.14. Teorema(J. H. Littlewood). Si en un cuadrilátero cíclico trazamos dos círculos, cada uno de los cuales es tangente a un par de lados adyacentes y a la diagonal no comprendida entre ellos, y ambos círculos son tangentes a un mismo lado del cuadrilátero, entonces la otra tangente común a ambos círculos es paralela al lado opuesto que es tangente a los dos círculos.

Prueba: Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero cíclico. Trazamos el círculo $C(P,p)$ tangente a BC, CD y BD, y el círculo $C(Q,q)$ tangente a DC, AD y AC. Sea E el punto de intersección de $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{DC}$ (esto lo podemos suponer, sin perder generalidad). De acuerdo con el Teorema 9.3.12, las dos rectas tangentes a los círculos $C(P,p)$ y

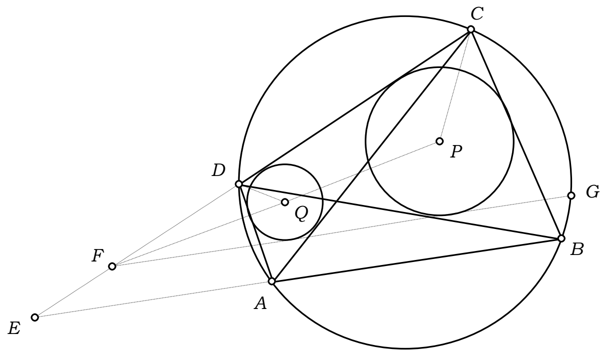


Figura 9.86

$C(Q,q)$ se cortan en un punto F que es colineal con los centros P y Q. Tomamos un punto $G \in C(O,r)$ tal que la recta $\overleftrightarrow{FG}$ sea tangente a los círculos $C(P,p)$ y $C(Q,q)$ y sea diferente de $\overleftrightarrow{DC}$. En la demostración del Teorema 9.9.13, se probó que el cuadrilátero $\square PCDQ$ es cíclico. Del Corolario 9.9.8 vemos que

$$m(\angle DQF) = m(\angle PCD) = \frac{m(\angle DCB)}{2}.$$

Por otra parte, sabemos que $m(\angle QDC) = \dfrac{m(\angle ADC)}{2}$. Por consiguiente,

$$m(\angle PFC) = m(\angle QDC) - m(\angle DQF) = \frac{m(\angle ADC)}{2} - \frac{m(\angle DCB)}{2}.$$

Según el Teorema 9.3.11, $\overrightarrow{FP}$ es la bisectriz de $\angle GFC$ y, por tanto,

$$m(\angle GFC) = 2m(\angle PFC) = m(\angle ADC) - m(\angle DCB).$$

De acuerdo con el Teorema 4.3.8,

$$m(\angle BEC) = m(\angle ADC) - m(\angle DAE) = m(\angle ADC) - m(\angle DCB),$$

la última igualdad se obtiene del Corolario 9.9.8. En consecuencia, $m(\angle GFC) = m(\angle BEC)$ y, por lo cual, $\angle GFC \cong \angle BEC$. Del Teorema 3.4.6 concluimos que $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{FG}$. ♣

9.9.15. Teorema de Brahmagupta. $\square ABCD$ es un cuadrilátero cíclico si y solo si

$$are(\square ABCD) = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

Prueba: *Necesidad*. Supongamos que $\square ABCD$ es un cuadrilátero cíclico. De acuerdo con la fórmula del Teorema 8.4.20, sabemos que

$$are(\square ABCD) = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd(\cos\angle\alpha)^2},$$

en donde $\angle\alpha$ es un ángulo tal que $2m(\angle\alpha)$ es la suma de las medidas de dos ángulos opuestos del cuadrilátero. Pero, por el Teorema 9.95, los ángulos opuestos del cuadrilátero $\square ABCD$ son suplementarios. En consecuencia, $2m(\angle\alpha) = 180$, lo cual implica que $\angle\alpha$ es un ángulo recto. Por consiguiente,

$$are(\square ABCD) = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd(\cos\angle\alpha)^2} = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)},$$

ya que $\cos\angle\alpha = 0$.

Suficiencia. Supongamos que se cumple la igualdad

$$Are(\square ABCD) = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

Según el Teorema 8.4.20, tenemos que

$$are(\square ABCD) = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd(\cos\angle\alpha)^2},$$

en donde $\angle\alpha$ es un ángulo tal que $2m(\angle\alpha)$ es la suma de las medidas de dos ángulos opuestos del cuadrilátero. Igualando, encontramos que

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd(\cos\angle\alpha)^2}$$

$$(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd(\cos\angle\alpha)^2$$

$$abcd(\cos\angle\alpha)^2 = 0$$

$$\cos\angle\alpha = 0.$$

La única posibilidad para que esto suceda es cuando $\angle\alpha$ sea un ángulo recto. Por consiguiente, dos ángulos opuestos del cuadrilátero$\square ABCD$ son suplementarios. Así, por el Teorema 9.9.5, $\square ABCD$ es cíclico. ♣

R. A. Johnson usó su fórmula (8.4.20) para encontrar el cuadrilátero de mayor área conociendo las longitudes de sus lados de la siguiente manera:

Si $\square ABCD$ es un cuadrilátero, entonces

$$are(\square ABCD) = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd(\cos\angle\alpha)^2},$$

en donde $\angle\alpha$ es un ángulo tal que $2m(\angle\alpha)$ es la suma de las medidas de dos ángulos opuestos del cuadrilátero. De aquí, es obvio que el cuadrilátero de mayor área entre aquellos de lados a, b, c y d es cuando $\cos\angle\alpha = 0$. Es decir, cuando el cuadrilátero en cuestión es cíclico.

9.9.16. Teorema(B. Greenberg, [a-59]). Si $\square ABCD$ es un cuadrilátero cíclico, entonces

$$\text{sen}\angle A = \frac{2are(ABCD)}{ad+bc} \text{ y } \cos\angle A = \frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)};\text{ y}$$

$$\text{sen}\angle B = \frac{2are(ABCD)}{ab+cd} \text{ y } \cos\angle B = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}.$$

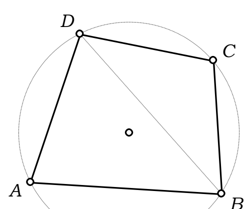


Figura 9.87

Prueba: Solamente probaremos las dos primeras identidades. Por el Teorema 8.4.1, sabemos que

$$are(\square ABCD) = are(\Delta ABD) + are(\Delta BCD)$$

$$4are(\square ABCD) = 4(are(\Delta ABD) + are(\Delta BCD))$$

$$4are(\square ABCD) = 4\left(\frac{ad\,\mathrm{sen}\,\angle A}{2} + \frac{bc\,\mathrm{sen}\,\angle C}{2}\right)$$
$$2are(\square ABCD) = ad\mathrm{sen}\angle A + bc\mathrm{sen}\angle C)$$
$$2are(\square ABCD) = ad\mathrm{sen}\angle A + bc\mathrm{sen}(180 - \angle A)$$
$$2are(\square ABCD) = ad\mathrm{sen}\angle A + bc\mathrm{sen}\angle A$$
$$2are(\square ABCD) = \mathrm{sen}\angle A(ad + bc)$$
$$\mathrm{sen}\angle A = \frac{2are(ABCD)}{ad + bc}.$$

De acuerdo con la Ley de los Cosenos (8.2.8), hallamos que $|BD|^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\angle A$ y $|BD|^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle C$. De aquí, vemos que se cumplen las identidades

$$a^2 + d^2 - 2ad\cos\angle A = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle C$$
$$a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = 2(ad\cos\angle A - bc\cos\angle C)$$
$$a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = 2(ad\cos\angle A - bc\cos(180 - \angle A))$$
$$a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = 2(ad\cos\angle A + bc\cos\angle A)$$
$$a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = 2\cos\angle A(ad + bc)$$
$$\cos\angle A = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)}. \clubsuit$$

Ahora, toca el turno al cálculo del área de los cuadriláteros circunscritos en función de algunas de sus partes. La fórmula que a continuación presentamos aparece en el artículo [a-60].

9.9.17. Teorema(B. Greenberg). Si $\square ABCD$ es un cuadrilátero circunscrito, entonces

$$are(\square ABCD) = \mathrm{sen}\,\frac{\angle A + \angle C}{2}\sqrt{abdc}.$$

Prueba: Según la fórmula del Teorema 8.4.20, sabemos que

$$are(\square ABCD) = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd(\cos\angle\alpha)^2},$$

en donde $\angle\alpha$ es un ángulo tal que $2m(\angle\alpha)$ es la suma de las medidas de dos ángulos opuestos del cuadrilátero. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\angle\alpha = \frac{\angle A + \angle C}{2}$. Según el Teorema 9.9.2, tenemos que $a + c = b + d$. Por consiguiente,

$$(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) = \frac{b+c+d-a}{2}\,\frac{a+c+d-b}{2}\,\frac{a+b+d-c}{2}\,\frac{a+b+c-d}{2} = abcd.$$

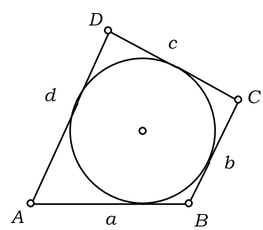


Figura 9.88

Sustituyendo,

$$are(\square ABCD) = \sqrt{abcd - abcd(\cos\angle\alpha)^2} = \sqrt{abcd(1 - (\cos\angle\alpha)^2)} =$$
$$\sqrt{abcd(\mathrm{sen}\angle\alpha)^2} = \mathrm{sen}\angle\alpha\sqrt{abdc} = \mathrm{sen}\,\frac{\angle A + \angle C}{2}\sqrt{abdc}. \clubsuit$$

V. Thébault [a-166] caracterizó aquellos cuadriláteros cíclicos cuya área es igual a $\sqrt{abcd}$ de la siguiente manera:

9.9.18. Teorema(V. Thébault). Un cuadrilátero cíclico $\square ABCD$ satisface la igualdad

$$are(\square ABCD) = \sqrt{abcd}$$

si y solo si se cumple una de las siguientes condiciones:

1. $\square ABCD$ es circunscrito.

2. La suma de las longitudes de dos lados adyacentes de $\square ABCD$ es igual a la suma de las longitudes de sus otros dos lados adyacentes.

Prueba: *Necesidad*. Supongamos que

$$are(\square ABCD) = \sqrt{abcd}\ .$$

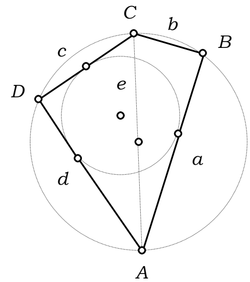


Figura 9.89

De acuerdo con la Ley de los Cosenos (8.2.8), sabemos que

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle B = e^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\angle D.$$

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2(ab\cos\angle B - cd\cos\angle D).$$

Por otra parte, tenemos que

$$2are(\square ABCD) = ab\,\mathrm{sen}\angle B + ab\,\mathrm{sen}\angle D$$

$$2\sqrt{abdc} = ab\,\mathrm{sen}\angle B + cd\,\mathrm{sen}\angle D$$

$$4abcd = (ab\,\mathrm{sen}\angle B + cd\,\mathrm{sen}\angle D)^2\ .$$

De aquí podemos ver que

$$(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 4(ab - cd)^2 = 4(ab\cos\angle B - cd\cos\angle D)^2 - 4a^2b^2 + 8abcd - 4c^2d^2 =$$

$$4a^2b^2(\cos\angle B)^2 - 8abcd\cos\angle B\cos\angle D + 4c^2d^2(\cos\angle D)^2 - 4a^2b^2 + 8abcd - 4c^2d^2 =$$

$$4a^2b^2((\cos\angle B)^2 - 1) - 8abcd\cos\angle B\cos\angle D + 4c^2d^2((\cos\angle D)^2 - 1) + 8abcd =$$

$$-4a^2b^2(\mathrm{sen}\angle B)^2 - 8abcd\cos\angle B\cos\angle D - 4c^2d^2(\mathrm{sen}\angle D)^2 + 8abcd.$$

Además, tenemos que

$$16abcd\left(\cos\left(\frac{\angle B + \angle D}{2}\right)\right)^2 = 16abcd\frac{1 + \cos(\angle B + \angle D)}{2} = 8abcd(1 + \cos\angle B\cos\angle D - \mathrm{sen}\angle B\,\mathrm{sen}\angle D) =$$

$$8abcd + 8abcd\cos\angle B\cos\angle D - 8abcd\,\mathrm{sen}\angle B\,\mathrm{sen}\angle D.$$

Sumando, obtenemos las identidades

$$(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 4(ab - cd)^2 + 16abcd\left(\cos\left(\frac{\angle B + \angle D}{2}\right)\right)^2 =$$

$$-4a^2b^2(\mathrm{sen}\angle B)^2 - 8abcd\cos\angle B\cos\angle D - 4c^2d^2(\mathrm{sen}\angle D)^2 + 8abcd + 8abcd +$$

$$8abcd\cos\angle B\cos\angle D - 8abcd\,\mathrm{sen}\angle B\,\mathrm{sen}\angle D =$$

$$-4a^2b^2(\mathrm{sen}\angle B)^2 - 8abcd\,\mathrm{sen}\angle B\,\mathrm{sen}\angle D - 4c^2d^2(\mathrm{sen}\angle D)^2 + 16abcd =$$

$$-4(ab\,\mathrm{sen}\angle B + cd\,\mathrm{sen}\angle D)^2 + 16abcd = 16abcd - 16abcd = 0.$$

Así, probamos que

$$(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 4(ab - cd)^2 + 16abcd\left(\cos\left(\frac{\angle B + \angle D}{2}\right)\right)^2 =$$

$$(a - b + c - d)(a - b - c + d)(a + b + c + d)(a + b - c - d) + 16abcd\left(\cos\left(\frac{\angle B + \angle D}{2}\right)\right)^2 = 0.$$

Según el Teorema 9.9.5, sabemos que los ángulos $\angle B$ y $\angle D$ son suplementarios y, por tanto,

$$\cos\left(\frac{\angle B + \angle D}{2}\right) = 0.$$

Por lo cual, se debe cumplir la igualdad

$$(a - b + c - d)(a - b - c + d)(a + b + c + d)(a + b - c - d) = 0$$

$$(a - b + c - d)(a - b - c + d)(a + b - c - d) = 0.$$

Si $a - b + c - d = 0$, por el Teorema 9.9.2, tenemos entonces $\square ABCD$ es circunscrito. La segunda propiedad se deduce de cualquiera de las dos suposiciones $a - b - c + d = 0$ o $a + b - c - d = 0$.

Suficiencia. Por hipótesis, sabemos que $\square ABCD$ es cíclico. Primero supongamos que el cuadrilátero $\square ABCD$ es circunscrito. De acuerdo con el Teorema 9.9.17**,** tenemos que

$$are(\square ABCD) = \mathrm{sen}\frac{\angle A + \angle C}{2}\sqrt{abdc}\,.$$

Pero, por el Teorema 9.9.5, sabemos que los ángulos $\angle A$y$\angle C$ son suplementarios. Como consecuencia de esto,

$$are(\square ABCD) = \sqrt{abdc}.$$

Ahora, supongamos que una de las dos condiciones $a - b - c + d = 0$ ó $a + b - c - d = 0$ se cumple. Supongamos que la igualdad $a - b - c + d = 0$ es cierta. Entonces, $a = b + c - d$. Por la fórmula de Brahmagupta (9.9.15) y sustituyendo el valor de a y $b + c$ en la misma, hallamos que

$$are(\square ABCD) = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

$$are(\square ABCD)^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$$

$$are(\square ABCD)^2 = \frac{b+c+d-a}{2}\,\frac{a+c+d-b}{2}\,\frac{a+b+d-c}{2}\,\frac{a+b+c-d}{2}$$

$$= \frac{b+c+d-(b+c-d)}{2}\,\frac{(b+c-d)+c+d-b}{2}\,\frac{(b+c-d)+b+d-c}{2}\,\frac{a+a+d-d}{2}$$

$$= \frac{2d}{2}\,\frac{2c}{2}\,\frac{2b}{2}\,\frac{2a}{2} = abcd$$

$$are(\square ABCD) = \sqrt{abdc}.$$

Con un argumento muy similar, vemos que la relación $a + b - c - d = 0$ nos conduce a la identidad

$$are(\square ABCD) = \sqrt{abdc}. \clubsuit$$

El resultado que a continuación probaremos es de R. F. Davis [a-37].

9.9.19. Teorema(R. F. Davis). Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero cíclico tal que $AC \perp BD$. Si P es el punto de intersección de las diagonales y E, FG y H son las proyecciones de P sobre los lados AB, BC, CD y DA, respectivamente, entonces el cuadrilátero $\square EFGH$ es cíclico y circunscrito.

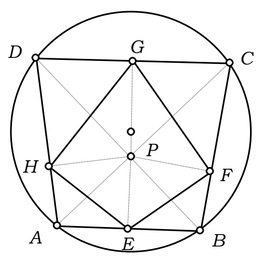


Figura 9.90

Prueba: De acuerdo con el Teorema 9.9.5, $\square AEPH$, $\square EBFP$ y $\square PFCG$ son cuadriláteros cíclicos. Aplicando ahora el Corolario 9.5.7 (1), hallamos que

$$\angle PEH \cong \angle PAH = \angle CAD \cong \angle CBD = \angle FBP \cong \angle FEP.$$

Lo cual nos garantiza que $\overrightarrow{EP}$ es la bisectriz del ángulo $\angle FEH$. De manera similar, se prueba que $\overrightarrow{GP}$ es la bisectriz del ángulo $\angle HGF$. Del Teorema de la Bisectriz 4.7.9, podemos ver de manera inmediata que el punto P equidista de los cuatro lados EF, FG, GH y HE del cuadrilátero $\square EFGH$. De donde hallamos que $\square EFGH$ es circunscrito. Por hipótesis, ΔPBC es un triángulo rectángulo con hipotenusa BC y, por ello, los ángulos$\angle FBP$ y $\angle PCF$ son complementarios. Como $\angle FBP \cong \angle FEP$ y $\angle PCF \cong \angle PGF$, se sigue entonces que los ángulos $\angle FEP$ y $\angle PGF$ son también complementarios. Por consiguiente,

$$m(\angle FEH) + m(\angle HGF) = 2m(\angle FEP) + 2m(\angle PGF) = 180.$$

Es decir,$\angle FEH$ y $\angle HGF$ son suplementarios. Según el Teorema 9.9.5, el cuadrilátero $\square EFGH$ es cíclico. ♣

9.9.20. Teorema(Housinger). Sean $\square ABCD$ un trapecio isósceles circunscrito tal que $AB \parallel CD$ y DH la altura correspondiente al vértice D y al lado AB. Si $h = |DH|$, entonces $h^2 = ac$, en donde $a = |AB|$ y $c = |DC|$.

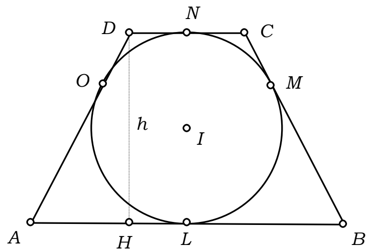


Figura 9.91

Prueba. Sin perder generalidad, supongamos que $CD \leq AB$. Sean $\mathcal{C}(I,r)$ el círculo inscrito en el trapecio $\square ABCD$ y L, M, N y O los puntos de tangencia del círculo $\mathcal{C}(I,r)$ con los lados del trapecio AB, BC, CD y DA, respectivamente. Por ser $\square ABCD$ un trapecio isósceles con $|BC| = |AD|$, sabemos que L y N son los puntos medios de AB y CD, respectivamente, y los puntos L, I y N son colineales. De acuerdo al Teorema 9.3.8, hallamos que

$$x = |AL| = |AO| = |BL| = |BM| \quad \text{y} \quad y = |CN| = |CM| = |DN| = |DO|.$$

Aplicando el Teorema de Pitágoras 8.5.1, obtenemos las identidades

$$|AD|^2 = h^2 + |AH|^2$$
$$(x+y)^2 = h^2 + (y-x)^2$$
$$x^2 + 2xy + y^2 = h^2 + x^2 - 2xy + y^2$$
$$4xy = h^2$$
$$2x2y = h^2$$
$$2|AL|2|DN| = h^2$$
$$ac = h^2\,. \clubsuit$$

Veamos a continuación que él recíproco del Teorema 9.9.20 también se cumple.

9.9.21. Teorema. Sean $\square ABCD$ un trapecio isósceles con $AB \parallel CD$, $h = |DH|$ la altura correspondiente al vértice D y al lado AB, $a = |AB|$ y $c = |DC|$. Si $h^2 = ac$, entonces $\square ABCD$ es circunscrito.

Prueba: Sean L y N son los puntos medios de AB y CD, respectivamente. Pongamos $x = |AL|$ y $y = |CN|$. Entonces, tenemos que

$$h^2 = ac = 2|AL|2|DN| = 2x2y = 4xy.$$

De donde se siguen las identidades

$$x^2 + 2xy + y^2 = h^2 + x^2 - 2xy + y^2$$
$$(x+y)^2 = h^2 + (y-x)^2$$
$$|AD|^2 = h^2 + |AH|^2 = (x+y)^2$$
$$|AD| = x + y = |BC|.$$

Por consiguiente,

$$|AD| + |BC| = 2x + 2y = |AB| + |CD|.$$

Así, por el Teorema 9.9.2, $\square ABCD$ es circunscrito. ♣

Vale la pena señalar que un trapecio es isósceles si y solo si es cíclico (Problema 9.819).

9.10. Círculos asociados a un triángulo

Del Teorema 9.10.9 sabemos que el circuncentro de un triángulo es equidistante de los tres vértices de él mismo. Por lo cual, podemos trazar un círculo con centro en el circuncentro del triángulo y radio igual a la distancia del circuncentro a cualquier vértice del triángulo. A dicho círculo se le llama el *circuncírculo* del triángulo y a su radio se le llama el *circunradio*. Por lo general, el circunradio de un triángulo se denotará por la letra R y el circuncírculo del mismo será denotado por $\mathcal{C}(O,R)$.

Figura 9.92

Por otra parte, según los Teoremas 8.3.29 y 8.3.32, el incentro y los tres excentros de un triángulo son equidistantes de las tres rectas que contienen a los tres lados del triángulo. Así que podemos trazar cuatro círculos cuyos centros son el incentro y cada uno de los tres excentros del triángulo, y cuyos radios son la distancia del centro elegido a cualquiera de las rectas que contienen los lados del triángulo. Cada uno de estos cuatro círculos es tangente a cada una de las rectas que contienen a los lados del triángulo. Dado un triángulo ΔABC, al círculo $\mathcal{C}(I,r)$, en donde $r = d(I, \overleftrightarrow{AB})$, se le llama el *incírculo* del triángulo y a r se le conoce como su *inradio*. La letra r denotará, en general, el inradio de un triángulo. Los *exradios* de un triángulo ΔABC son

$$r_a = d(I_a, \overleftrightarrow{AB}),\ r_b = d(I_b, \overleftrightarrow{AB}) \text{ y } r_c = d(I_c, \overleftrightarrow{AB}),$$

y sus *excírculos* son

$$\mathcal{C}(I_a, r_a),\ \mathcal{C}(I_b, r_b) \text{ y } \mathcal{C}(I_c, r_c).$$

Los símbolos P_a, P_b y P_c denotarán los puntos de tangencia del incírculo $\mathcal{C}(I,r)$ de un triángulo ΔABC con sus lados BC, AC y AB, respectivamente.

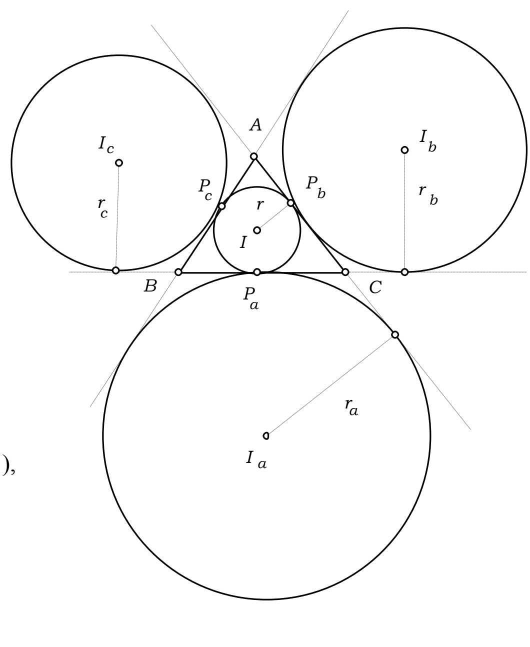


Figura 9.93

9.10.1. Teorema. Sea ΔABC un triángulo y O su circuncentro.
1. Si $O \in ext(\Delta ABC)$, entonces uno de los ángulos del triángulo es obtuso.
2. Si $O \in \Delta ABC$, entonces uno de los ángulos del triángulo es recto.
3. Si $O \in int(\Delta ABC)$, entonces todos los ángulos del triángulo son agudos.

Prueba: 1. Sin perder generalidad, supongamos que O y B están en diferentes semiplanos determinados por $\overleftrightarrow{AC}$. Sabemos que los triángulos ΔOAB, ΔOBC y ΔOAC son isósceles. De aquí se obtiene que $\angle CAO \cong \angle OCA$, $\angle BAO \cong \angle OBA$ y $\angle CBO \cong \angle OCB$. Por ello,

$$m(\angle B) = m(\angle CBO) + m(\angle OBA) = m(\angle OCB) + m(\angle BAO) =$$
$$m(\angle OCA) + m(\angle ACB) + m(\angle BAC) + m(\angle CAO) =$$
$$2m(\angle OCA) + m(\angle ACB) + m(\angle BAC) =$$
$$2m(\angle OCA) + m(\angle A) + m(\angle C).$$

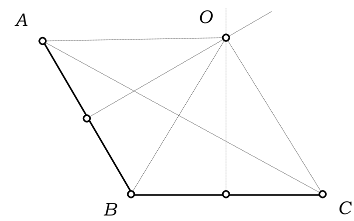


Figura 9.94

Esta identidad nos conduce a la igualdad

$$180 = m(\angle A) + m(\angle B)+ m(\angle C) = 2m(\angle B) - 2m(\angle OCA)$$
$$90 = m(\angle B) - m(\angle OCA)$$
$$m(\angle B) = 90 + m(\angle OCA).$$

Lo cual significa que $\angle B$ es un ángulo obtuso.

2. Supongamos que $O \in \Delta ABC$. Entonces, el lado del triángulo que contiene a O es un diámetro del circuncírculo de nuestro triángulo ΔABC. Por el Teorema 9.5.2, el ángulo opuesto a dicho diámetro es recto.

3. Si $O \in int(\Delta ABC)$, entonces

$$\angle OAC \cong \angle ACO,\ \angle BAO \cong \angle OBA \text{ y } \angle OCB \cong \angle CBO,$$

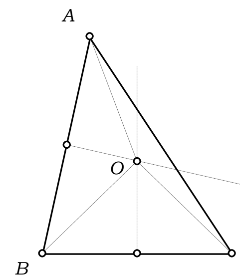
por ser ΔOAB, ΔOBC yΔOCA triángulos isósceles. Además, tenemos que

$$\angle A = \angle OAC + \angle BAO,\ \angle B = \angle OBA + \angle CBO \text{ y } \angle C = \angle OCB + \angle ACO.$$

De aquí, hallamos que

$$180 = m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) =$$
$$\angle OAC + \angle BAO + \angle OBA + \angle CBO + \angle OCB + \angle ACO =$$
$$2m(\angle OAC) + 2m(\angle OBA) + 2m(\angle CBO).$$

Esto implica que $m(\angle OAC) + m(\angle OBA) + m(\angle CBO) = 90$.Por lo cual, $m(\angle A) = m(\angle OAC) + m(\angle OBA) < 90$, $m(\angle B) = m(\angle OBA) + m(\angle CBO) < 90$ y $m(\angle C) = m(\angle CBO) + m(\angle OAC) < 90$.



Por lo tanto, en este caso, los ángulos del triángulo dado son todos agudos. ♣

Figura 9.95

9.10.2. Teorema. Si C(I,r) es el incírculo del triángulo ΔABC, entonces

$$|AP_c| = |AP_b| = s_a,$$
$$|BP_a| = |BP_c| = s_b \text{ y}$$
$$|CP_a| = |CP_b| = s_c.$$

Prueba: Probaremos solamente la primera relación. Según el Teorema 9.3.8,

$$|AP_c| = |AP_b|, |BP_a| = |BP_c| \text{ y } |CP_a| = |CP_b|.$$

Por otra parte, tenemos las identidades

$$a = |BP_a| + |CP_a|,\ b = |AP_b| + |CP_b| \text{ y } c = |AP_c| + |BP_c|.$$

Sumando, vemos que

$$a + b + c = 2|AP_c| + 2|BP_a| + 2|CP_b|$$
$$s = \frac{a+b+c}{2} = |AP_c| + |BP_a| + |CP_b|$$
$$|AP_c| = s - (|BP_a| + |CP_b|) = s - a = s_a. ♣$$

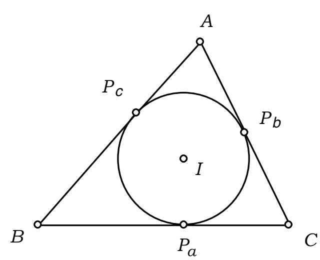


Figura 9.96

Dentro de un triángulo ΔABC, observemos que los puntos P_a, P_b y P_c resultan ser las proyecciones del incentro I sobre los lados BC, AC y AB, respectivamente.

9.10.3. Lema. En todo triángulo, la longitud del segmento tangente a uno de los excírculos del triángulo desde el vértice opuesto es igual al semiperímetro del triángulo.

Prueba: SeaΔABC un triángulo y consideremos su excírculo $C(I_a, r_a)$. Sean P_a^a, P_b^a y P_c^a los puntos de tangencia de $C(I_a, r_a)$ Con BC, $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{AB}$, respectivamente. De acuerdo con el Teorema 9.3.8, hallamos que $AP_c^a \cong AP_b^a$, $BP_c^a \cong BP_a^a$ y $CP_a^a \cong CP_b^a$. Por lo cual,

$$|AP_c^a| = |AB| + |BP_c^a| = c + |BP_a^a| = |AP_b^a| = |AC| + |CP_b^a| =$$
$$b + |CP_a^a|.$$

De aquí se sigue que

$$2|AP_c^a| = |AP_c^a| + |AP_b^a| = c + |BP_a^a| + b + |CP_a^a| = a + b + c$$
$$|AP_c^a| = \frac{a+b+c}{2} = s. \clubsuit$$

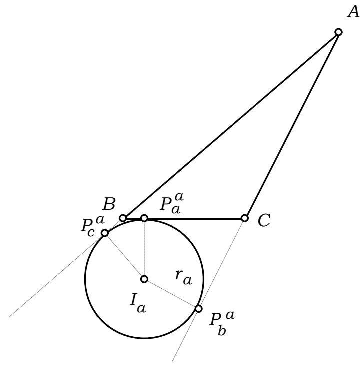


Figura 9.97

9.10.4. Corolario. En todo triángulo ΔABC se cumple la identidad

$$|AB| + |BP_a^a| = |AP_c^a| = |AP_b^a| = |AC| + |CP_a^a| = s.$$

9.10.5. Teorema. Si $C(O,R)$ es el circuncírculo del triángulo ΔABC, entonces

$$m(\angle OCB) = m(\angle CBO) = |90 - m(\angle A)|,$$
$$m(\angle ACO) = m(\angle OAC) = |90 - m(\angle B)| \text{ y}$$
$$m(\angle OBA) = m(\angle BAO) = |90 - m(\angle C)|.$$

Prueba:

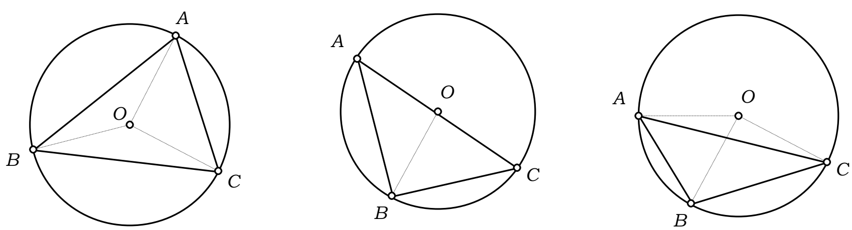


Figura 9.98

Observemos que los triángulos ΔOAB, ΔOBC y ΔOAC son isósceles en caso de que el circuncentro no esté en ninguno de los lados del triángulo. En particular, tenemos que $\angle BAO \cong \angle OBA$, $\angle OAC \cong \angle ACO$ y $\angle OCB \cong \angle CBO$. Primero analicemos el caso cuando $O \in int(\Delta ABC)$. En virtud del Teorema 9.10.1 (3), todos los ángulos del triángulo original son agudos. Como consecuencia de ello, tenemos que

$$m(\angle A) = m(\angle BAO) + m(\angle OAC), m(\angle B) = m(\angle CBO) + m(\angle OBA) \text{ y } m(\angle C) = m(\angle ACO) + m(\angle OCB).$$

De aquí,

$$m(\angle B) + m(\angle C) = 2m(\angle OCB) + m(\angle ACO) + m(\angle OBA) = 2m(\angle OCB) + m(\angle BAO) + m(\angle OAC)$$
$$= 2m(\angle OCB) + m(\angle A)$$
$$2m(\angle OCB) = m(\angle B) + m(\angle C) - m(\angle A) = 180 - 2m(\angle A)$$
$$m(\angle OCB) = 90 - m(\angle A) = m(\angle CBO).$$

De manera similar, se demuestra que $m(\angle ACO) = m(\angle OAC) = 90 - m(\angle B)$ y $m(\angle OBA) = m(\angle BAO) = 90 - m(\angle C)$. Supongamos que $O \in \Delta ABC$. Sin perder generalidad, podemos suponer que $O \in AC$. Entonces, por el Teorema 9.5.2, $\angle B$ es un ángulo recto y los ángulos $\angle ACO$ y $\angle OAC$ son nulos. De donde se sigue que

$$m(\angle OCB) = m(\angle CBO) = m(\angle C) = 90 - m(\angle A),$$
$$m(\angle ACO) = m(\angle OAC) = 90 - m(\angle B) = 0, \text{ y}$$
$$m(\angle OBA) = m(\angle BAO) = m(\angle A) = 90 - m(\angle C).$$

El último caso por considerar es cuando $O \in ext(\Delta ABC)$. Sin perder generalidad, supongamos que B y O están en diferentes semiplanos determinados por la recta $\overleftrightarrow{AC}$ (figura 9.98). Por el Teorema 9.10.1 (1), $\angle B$ es obtuso. Por lo cual,

$$m(\angle A) = m(\angle BAO) - m(\angle CAO),\ m(\angle B) = m(\angle CBO) + m(\angle OBA) \text{ y } m(\angle C) = m(\angle OCB) - m(\angle OCA).$$

De aquí se sigue que

$$m(\angle B) + m(\angle C) = 2m(\angle OCB) + m(\angle OBA) - m(\angle OCA) = 2m(\angle OCB) + m(\angle A)$$
$$2m(\angle OCB) = m(\angle B) + m(\angle C) - m(\angle A) = 180 - 2m(\angle A)$$
$$m(\angle OCB) = 90 - m(\angle A) = m(\angle CBO).$$

Verifiquemos la segunda identidad. Efectivamente,

$$m(\angle B) = m(\angle CBO) + m(\angle OBA) = m(\angle OCB) + m(\angle BAO) =$$
$$m(\angle ACB) + m(\angle OCA) + m(\angle BAC) + m(\angle CAO) = m(\angle C) + m(\angle A) + 2m(\angle OCA)$$
$$2m(\angle OCA) = m(\angle B) - m(\angle C) - m(\angle A) = 2m(\angle B) - 180$$
$$m(\angle OCA) = m(\angle B) - 90 = m(\angle ACO).$$

Para establecer la tercera identidad, tenemos que

$$m(\angle A) + m(\angle B) = 2m(\angle BAO) + m(\angle CBO) - m(\angle CAO) = 2m(\angle BAO) + m(\angle OCB) - m(\angle OCA)$$
$$2m(\angle BAO) + m(\angle C)$$
$$2m(\angle BAO) = m(\angle A) + m(\angle B) - m(\angle C) = 180 - 2m(\angle C)$$
$$m(\angle BAO) = 90 - m(\angle C) = m(\angle OBA).\ ♣$$

9.10.6. Teorema(Ley Extendida de los Senos). En todo triángulo ΔABC se cumple la identidad

$$2R = \frac{a}{\operatorname{sen}\angle A} = \frac{b}{\operatorname{sen}\angle B} = \frac{c}{\operatorname{sen}\angle C}.$$

Prueba:

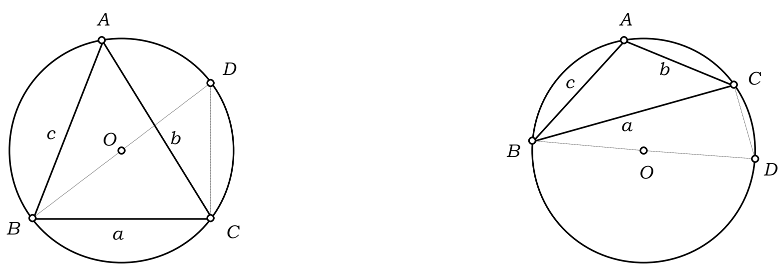


Figura 9.99

Sea C(O,R) el circuncírculo del triángulo ΔABC. Primero analicemos el caso cuando $O \in int(\Delta ABC)$. Sea BD el diámetro del circuncírculo que pasa por el punto B. Según el Corolario 9.5.7, sabemos que $\angle A \cong \angle BDC$ y, por el Teorema 9.5.2, $\angle DCB$ es un ángulo recto. Por lo cual, $\operatorname{sen}\angle A = \operatorname{sen}\angle BDC = \frac{a}{2R}$. Si $O \in BC$, por el Teorema 9.5.2, tenemos entonces que $\angle A$ es un ángulo recto y $2R = a$. Supongamos que $O \notin int(\Delta ABC) \cup \Delta ABC$. En este caso, $\angle A$ y $\angle CDB$ son suplementarios (esto lo justifica el Corolario 9.5.7 (2)). Por consiguiente,

$$\operatorname{sen}\angle A = \operatorname{sen}(180 - \angle A) = \operatorname{sen}(\angle CDB) = \frac{a}{2R}.$$

De manera completamente similar, se demuestra que $\operatorname{sen}\angle B = \frac{b}{2R}$ y $\operatorname{sen}\angle C = \frac{c}{2R}$. Por lo tanto,

$$2R = \frac{a}{\operatorname{sen}\angle A} = \frac{b}{\operatorname{sen}\angle B} = \frac{c}{\operatorname{sen}\angle C}.\ ♣$$

9.10.7. Teorema[a-139]. En todo triángulo ΔABC se cumplen las identidades

$$\text{sen}(\angle A + \angle B) = \frac{b\cos\angle A + a\cos\angle B}{2R},$$

$$\text{sen}(\angle A + \angle C) = \frac{b\cos\angle A + a\cos\angle B}{2R} \text{ y}$$

$$\text{sen}(\angle B + \angle C) = \frac{b\cos\angle A + a\cos\angle B}{2R}.$$

Prueba: Basta con probar la primera identidad. Tracemos el circuncírculo del triángulo ΔABC y sea BD el diámetro del mismo que pasa por el vértice B (ver figura 9.100). Según el Teorema 8.2.1 (2) y el Corolario 9.5.7 (1),

$$\text{sen}(\angle A + \angle B) = \text{sen}(180 - (\angle A + \angle B)) = \text{sen}\angle C = \text{sen}\angle ADB.$$

Ya que el ángulo $\angle BAD$ es recto (9.5.2),

$$\text{sen}\angle ADB = \frac{c}{2R} = \frac{AH_c + H_cB}{2R} = \frac{AH_c}{2R} + \frac{H_cB}{2R}.$$

Por otro lado, sabemos que

$$\cos\angle A = \frac{AH_c}{b} \text{ y } \cos\angle B = \frac{H_cB}{a}.$$

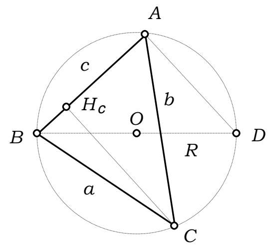


Figura 9.100

De donde se sigue que

$$\text{sen}(\angle A + \angle B) = \frac{AH_c}{2R} + \frac{H_cB}{2R} = \frac{b\cos\angle A}{2R} + \frac{a\cos\angle B}{2R} = \frac{b\cos\angle A + a\cos\angle B}{2R}. ♣$$

9.10.8. Teorema del Cardiólogo[a-157]. Si AB es una cuerda de un círculo $C(O,r)$, entonces

$$\text{sen}\frac{\angle AOB}{2} = \frac{|AB|}{2r}.$$

Prueba[a-158]: Sea BC el diámetro del círculo que pasa por B. De acuerdo con la Ley Extendida de los Senos (9.10.6),

$$2r = \frac{|AB|}{\text{sen}\angle ACB}.$$

Ya que $\angle OAC \cong \angle ACO$ (3.2.9), obtenemos que $\angle AOB = 2\angle ACB$ (4.3.8). Por lo tanto, $\text{sen}\angle ACB = \text{sen}\frac{\angle AOB}{2} = \frac{|AB|}{2r}$. ♣

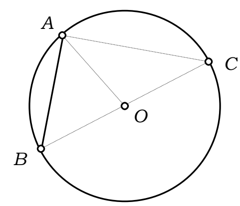


Figura 9.101

9.10.9. Teorema. En todo triángulo ΔABC se cumplen las identidades $h_a = \frac{bc}{2R}$, $h_b = \frac{ac}{2R}$ y $h_c = \frac{ab}{2R}$.

Probar: Es suficiente con establecer la primera identidad. Según la Ley Extendida de los Senos (9.10.6), se tiene que $2R = \frac{b}{\text{sen}\angle B}$. Pero como $\text{sen}\angle B = \frac{h_a}{c}$, hallamos entonces que

$$2R = \frac{bc}{h_a}$$

$$h_a = \frac{bc}{2R}. ♣$$

9.10.10. Teorema. En todo triángulo ΔABC se cumple la relación

$$are(\Delta ABC) = 2R^2 \operatorname{sen}\angle A \operatorname{sen}\angle B \operatorname{sen}\angle C.$$

Prueba: Sea ΔABC un triángulo. Los Teoremas 8.4.1 y 9.10.6 nos aseguran que

$$are(\Delta ABC) = \frac{1}{2} bc\operatorname{sen}\angle A = \frac{1}{2} 2R\operatorname{sen}\angle B 2R\operatorname{sen}\angle C\operatorname{sen}\angle A = 2R^2 \operatorname{sen}\angle A\operatorname{sen}\angle B\operatorname{sen}\angle C. \clubsuit$$

9.10.11. Teorema. En todo triángulo ΔABC se cumple la identidad $are(\Delta ABC) = rs$.

Prueba: Como $IP_a \perp BC$, $IP_b \perp AC$ y $IP_c \perp AB$, se tiene entonces que

$$are(\Delta ABC) = are(\Delta IBC) + are(\Delta ICA) + are(\Delta IAB) =$$
$$\frac{1}{2} a|IP_a| + \frac{1}{2} b|IP_b| + \frac{1}{2} c|IP_c| = \frac{1}{2} r(a+b+c) = rs. \clubsuit$$

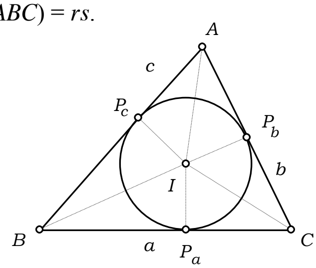


Figura 9.102

9.10.12. Teorema. En todo triángulo ΔABC se cumple la igualdad

$$R = \frac{abc}{4are(\Delta ABC)} = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}.$$

Prueba: Según la Ley Extendida de los Senos (9.10.6) y el Teorema 8.4.1,

$$2R = \frac{c}{\operatorname{sen}\angle C} = \frac{abc}{ab\operatorname{sen}\angle C} = \frac{abc}{2are(\Delta ABC)}$$

$$R = \frac{abc}{4are(\Delta ABC)} \quad \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} \quad (8.4.3). \clubsuit$$

Enunciamos a continuación dos identidades muy importantes que son consecuencia directa de los Teoremas 9.10.11 y 9.10.12.

9.10.13. Corolario. En todo triángulo ΔABC se cumple que $4Rrs = abc$.

9.10.14. Corolario. En todo triángulo ΔABC se cumple que $2rR = \dfrac{abc}{a+b+c}$.

9.10.15. Corolario. Si ΔABC es un triángulo rectángulo en $\angle C$, entonces $R = \dfrac{c}{2}$.

En nuestro próximo teorema, veremos cómo se expresa el inradio de un triángulo en función de sus tres ángulos y de la longitud de uno de sus lados.

9.10.16. Teorema. En todo triángulo ΔABC se cumplen las identidades

$$r = a\operatorname{sen}\frac{\angle B}{2}\operatorname{sen}\frac{\angle C}{2}\sec\frac{\angle A}{2} = b\operatorname{sen}\frac{\angle A}{2}\operatorname{sen}\frac{\angle C}{2}\sec\frac{\angle B}{2} = c\operatorname{sen}\frac{\angle A}{2}\operatorname{sen}\frac{\angle B}{2}\sec\frac{\angle C}{2}.$$

Prueba: Solamente demostraremos la primera identidad. Sabemos que

$$a = |BP_a| + |P_aC| = r\cot\frac{\angle B}{2} + r\cot\frac{\angle C}{2} = r(\cot\frac{\angle B}{2} + \cot\frac{\angle C}{2})$$

$$= r(\frac{\cos\frac{\angle B}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\angle B}{2}} + \frac{\cos\frac{\angle C}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\angle C}{2}}) a\operatorname{sen}\frac{\angle B}{2}\operatorname{sen}\frac{\angle C}{2} =$$

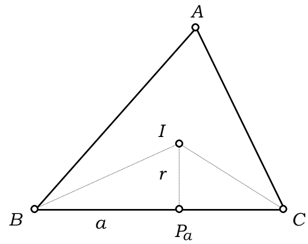


Figura 9.103

$$r(\operatorname{sen}\frac{\angle C}{2}\cos\frac{\angle B}{2} + \cos\frac{\angle C}{2}\operatorname{sen}\frac{\angle B}{2}) = r\operatorname{sen}(\frac{\angle B}{2} + \frac{\angle C}{2}) = r\operatorname{sen}(90 - \frac{\angle A}{2}) = r\cos\frac{\angle A}{2}$$

$$r = a\operatorname{sen}\frac{\angle B}{2}\operatorname{sen}\frac{\angle C}{2}\frac{1}{\cos\frac{\angle A}{2}}$$

$$r = a\operatorname{sen}\frac{\angle B}{2}\operatorname{sen}\frac{\angle C}{2}\sec\frac{\angle A}{2}. \clubsuit$$

Para los exradios de un triángulo, tenemos las siguientes relaciones.

9.10.17. Teorema. En todo triángulo ΔABC se cumplen las identidades

$$r_a = a\cos\frac{\angle B}{2}\cos\frac{\angle C}{2}\sec\frac{\angle A}{2},$$

$$r_b = b\cos\frac{\angle A}{2}\cos\frac{\angle C}{2}\sec\frac{\angle B}{2} \text{ y}$$

$$r_c = c\cos\frac{\angle A}{2}\cos\frac{\angle B}{2}\sec\frac{\angle C}{2}.$$

Prueba: Tenemos que

$$a = |BP_a^a| + |P_a^aC| = r_a\cot(\angle I_aBC) + r_a\cot(\angle BCI_a) =$$

$$r_a(\cot\frac{180 - \angle B}{2} + \cot\frac{180 - \angle C}{2}) =$$

$$r_a(\cot(90 - \frac{\angle B}{2}) + \cot(90 - \frac{\angle C}{2})) = r_a(\tan\frac{\angle B}{2} + \tan\frac{\angle C}{2})$$

$$= r_a(\frac{\operatorname{sen}\frac{\angle B}{2}}{\cos\frac{\angle B}{2}} + \frac{\operatorname{sen}\frac{\angle C}{2}}{\cos\frac{\angle C}{2}}).$$

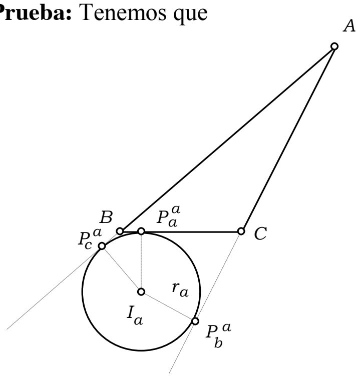


Figura 9.104

De aquí, se sigue que

$$a\cos\frac{\angle B}{2}\cos\frac{\angle C}{2} = r_a(\cos\frac{\angle C}{2}\operatorname{sen}\frac{\angle B}{2} + \operatorname{sen}\frac{\angle C}{2}\cos\frac{\angle B}{2}) =$$

$$r_a\operatorname{sen}(\frac{\angle B}{2} + \frac{\angle C}{2}) = r_a\operatorname{sen}(90 - \frac{\angle A}{2}) = r_a\cos\frac{\angle A}{2}$$

$$r_a = a\cos\frac{\angle B}{2}\cos\frac{\angle C}{2}\frac{1}{\cos\frac{\angle A}{2}}$$

$$r_a = a\cos\frac{\angle B}{2}\cos\frac{\angle C}{2}\sec\frac{\angle A}{2}.$$

Las identidades restantes se demuestran de manera análoga.♣

A continuación, damos las relaciones clásicas entre el circunradio, el inradio y los exradios de un triángulo.

9.10.18. Teorema. En todo triángulo se cumple que

$$r = 4R\operatorname{sen}\frac{\angle A}{2}\operatorname{sen}\frac{\angle B}{2}\operatorname{sen}\frac{\angle C}{2},$$

$$r_a = 4R\operatorname{sen}\frac{\angle A}{2}\cos\frac{\angle B}{2}\cos\frac{\angle C}{2},$$

$$r_b = 4R\operatorname{sen}\frac{\angle B}{2}\cos\frac{\angle A}{2}\cos\frac{\angle C}{2} \text{ y}$$

$$r_c = 4R\operatorname{sen}\frac{\angle C}{2}\cos\frac{\angle A}{2}\cos\frac{\angle B}{2}.$$

Prueba: Por la Ley Extendida de los Senos (9.10.6) y el Teorema 8.2.1 (6), sabemos que

$$R = \frac{a}{2\operatorname{sen}\angle A} = \frac{a}{4\operatorname{sen}\frac{\angle A}{2}\cos\frac{\angle A}{2}}$$

$$4R\operatorname{sen}\frac{\angle A}{2} = \frac{a}{\cos\frac{\angle A}{2}}.$$

Sustituyendo esta igualdad en la identidad de los dos teoremas anteriores, hallamos las relaciones

$$r = a\operatorname{sen}\frac{\angle B}{2}\operatorname{sen}\frac{\angle C}{2}\sec\frac{\angle A}{2} = \operatorname{sen}\frac{\angle B}{2}\operatorname{sen}\frac{\angle C}{2}\frac{a}{\cos\frac{\angle A}{2}} = 4R\operatorname{sen}\frac{\angle A}{2}\operatorname{sen}\frac{\angle B}{2}\operatorname{sen}\frac{\angle C}{2} \text{ y}$$

$$r_a = a\cos\frac{\angle B}{2}\cos\frac{\angle C}{2}\sec\frac{\angle A}{2} = \cos\frac{\angle B}{2}\cos\frac{\angle C}{2}\frac{a}{\cos\frac{\angle A}{2}} = 4R\operatorname{sen}\frac{\angle A}{2}\cos\frac{\angle B}{2}\cos\frac{\angle C}{2}.$$

Este mismo razonamiento se aplica para la demostración de las dos últimas identidades. ♣

En el teorema siguiente, daremos las fórmulas para encontrar el inradio y los exradios de un triángulo, conociendo las longitudes de sus lados.

9.10.19. Teorema. En todo triángulo ΔABC se cumple que

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}},$$

$$r_a = \frac{rs}{s-a} = \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}},$$

$$r_b = \frac{rs}{s-b} = \sqrt{\frac{s(s-a)(s-c)}{s-b}} \text{ y}$$

$$r_c = \frac{rs}{s-c} = \sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)}{s-c}}.$$

Prueba: Según la fórmula de Herón (8.4.3) y el Teorema 9.10.11, sabemos que

$$are(\Delta ABC) = rs = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,.$$

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}\,.$$

Esto demuestra la primera identidad. Sea P_c^a el punto de tangencia del excírculo $C(I_a, r_a)$ con la recta $\overleftrightarrow{AB}$. Por el Teorema 9.10.2 y el Corolario 9.10.4, hallamos que

$$|AP_c| = s-a \text{ y } |AP_c^a| = s.$$

Ya que los triángulos ΔAP_cI y $\Delta AP_c^aI_a$ son semejantes,

$$\frac{r}{r_a} = \frac{|AP_c|}{|AP_c^a|} = \frac{s-a}{s}$$

$$r_a = \frac{rs}{s-a}\,.$$

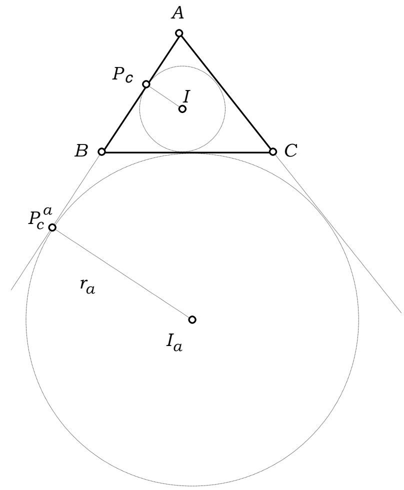


Figura 9.105

La primera igualdad nos da la relación

$$r_a = \frac{rs}{s-a} = \frac{s}{s-a}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} = \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}\,.$$

De manera muy similar, se establecen las dos identidades restantes. ♣

El siguiente corolario es consecuencia inmediata de los Teoremas 9.10.6 y 9.10.18.

9.10.20. Corolario. Si $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, entonces $\dfrac{R}{R'} = \dfrac{r}{r'} = \dfrac{r_a}{r_{a'}} = \dfrac{r_b}{r_{b'}} = \dfrac{r_c}{r_{c'}}$.

El inradio y los exradios de un triángulo rectángulo se pueden expresar en función de las longitudes de los lados de él mismo de la siguiente manera:

9.10.21. Teorema[a-63]. Si $\Delta(a,b,c)$ es un triángulo rectángulo con hipotenusa c, entonces

$$r = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{a+b-c}{2},$$

$$r_a = \frac{a+c-b}{2},\ r_b = \frac{b+c-a}{2} \text{ y } r_c = \frac{a+b+c}{2}.$$

Prueba: De acuerdo con el Teorema 9.10.11, $are(\Delta(a,b,c)) = rs = \dfrac{ab}{2}$. Tenemos entonces que

$$r = \frac{ab}{2s} = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{ab}{a+b+c}\,\frac{a+b-c}{a+b-c} = \frac{ab(a+b-c)}{(a+b)^2-c^2} = \frac{ab(a+b-c)}{2ab+a^2+b^2-c^2} =$$

$$\frac{ab(a+b-c)}{2ab} = \frac{a+b-c}{2}.$$

Así, queda demostrada la primera identidad. Procedamos a probar la segunda igualdad. Por el Teorema 9.10.19,

$$r_a = \frac{rs}{s-a} = \frac{ab}{2(s-a)} = \frac{ab}{b+c-a} = \frac{ab}{b+c-a}\,\frac{a-b+c}{a-b+c} = \frac{ab(a-b+c)}{c^2-(b-a)^2} =$$

$$\frac{ab(a-b+c)}{c^2+2ab-a^2-b^2} = \frac{ab(a-b+c)}{2ab} = \frac{a+c-b}{2}.$$

Las demostraciones de las otras dos identidades son similares. ♣

Del teorema anterior, se sigue que en un triángulo rectángulo ΔABC con hipotenusa c el diámetro de su incírculo es igual a $a + b - c$.

A continuación veremos otras relaciones entre el circunradio, inradio y los exradios de un triángulo.

9.10.22. Teorema. Si ΔABC es triángulo rectángulo en $\angle C$, entonces $a + b = 2R + 2r$.

Prueba: De acuerdo con el Corolario 9.10.15, sabemos que $2R = c$ y, según el Teorema 9.10.20,

$$2r + c = a + b.$$

Por consiguiente, $a + b = 2R + 2r$. ♣

El siguiente Teorema es de E. Bobillier y J. Steiner.

9.10.23. Teorema. En todo triángulo ΔABC se cumple la igualdad $r_a + r_b + r_c - r = 4R$.

Prueba: Según el Teorema 9.10.12, tenemos que $4R = \dfrac{abc}{\sqrt{ss_as_bs_c}}$ y, por el Teorema 9.10.19, sabemos que

$$r = \sqrt{\frac{s_as_bs_c}{s}},\ r_a = \frac{rs}{s_a},\ r_b = \frac{rs}{s_b}\ \text{y}\ r_c = \frac{rs}{s_b}.$$

Entonces, hallamos que

$$4R + r = \frac{abc}{\sqrt{ss_as_bs_c}} + \sqrt{\frac{s_as_bs_c}{s}} = \frac{abc}{\sqrt{ss_as_bs_c}} + \frac{\sqrt{ss_as_bs_c}}{s} = \frac{sabc + ss_as_bs_c}{s\sqrt{ss_as_bs_c}} = \frac{abc+s_as_bs_c}{\sqrt{ss_as_bs_c}}\ \text{y}$$

$$r_a + r_b + r_c = \frac{rs}{s_a} + \frac{rs}{s_b} + \frac{rs}{s_b} = \sqrt{ss_as_bs_c}\left(\frac{1}{s_a} + \frac{1}{s_b} + \frac{1}{s_b}\right) = \sqrt{ss_as_bs_c}\ \frac{s_bs_c + s_as_c + s_as_b}{s_as_bs_c} =$$

$$\frac{s}{\sqrt{ss_as_bs_c}}(s_b\,s_c + s_a\,s_c + s_a\,s_b).$$

Del Problema 7.53 (22), tenemos que

$$s\,s_a\,s_b\,s_c\left(\frac{1}{s_a} + \frac{1}{s_b} + \frac{1}{s_c} - \frac{1}{s}\right) = abc$$

$$s(s_b\,s_c + s_a\,s_c + s_a\,s_b) - s_a\,s_b\,s_c = abc$$

$$s(s_b\,s_c + s_a\,s_c + s_a\,s_b) = abc + s_a\,s_b\,s_c$$

$$\frac{s}{\sqrt{ss_as_bs_c}}(s_b\,s_c + s_a\,s_c + s_a\,s_b) = \frac{abc+s_as_bs_c}{\sqrt{ss_as_bs_c}}$$

$$r_a + r_b + r_c = 4R + r.\ ♣$$

9.10.24. Teorema. En todo triángulo ΔABC se cumple la relación $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c}$.

Prueba: De acuerdo con el Teorema 9.10.19, encontramos que

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{s-a}{rs} + \frac{s-b}{rs} + \frac{s-c}{rs} = \frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{rs} = \frac{s}{rs} = \frac{1}{r}.\ ♣$$

En los próximos dos teoremas usaremos la siguiente notación:

Sea ΔABC un triángulo cualquiera. Los puntos donde la Mediatriz t_a del lado BC corta al circuncírculo del triángulo ΔABC serán denotados por U_a y $U_a^{'}$. De manera similar, se definen los puntos U_b, $U_b^{'}$, U_c y $U_c^{'}$ (ver la figura 9.106).

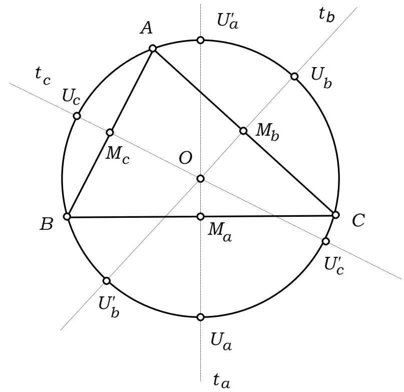


Figura 9.106

9.10.25. Teorema(M. J. Mention). Sea ΔABC un triángulo. Entonces, los puntos medios de los lados del triángulo $\Delta I_a I_b I_c$ yacen sobre el circuncírculo del triángulo ΔABC.

Prueba: Sea C(O,R) el circuncírculo del triángulo ΔABC. Solo probaremos que el punto medio de $I_b I_c$ yace en el círculo C(O,R). Para esto, consideramos el otro punto de intersección de $I_b I_c$ y C(O,R), al cual lo denotaremos por P. Primero probaremos que $P = U_a^{'}$. En efecto, como $BU_a \cong CU_a$, por el Teorema 9.5.8, $\angle BAU_a \cong \angle U_a AC$. Es decir, $\overrightarrow{AU_a} = b_a$. Por otro lado, según el Problema 8.635, los puntos I_b, A y I_c son colineales y, por el Teorema 2.12.3, sabemos que el ángulo $\angle U_a AP$ es recto. Así, según el Teorema 9.5.2, $U_a P$ resulta ser un diámetro de C(O,R) y, por ello, $O \in U_a P$. De aquí se deduce que $P = U_a^{'}$. Para probar que $U_a^{'}$ es el punto medio de $I_b I_c$ recurrimos al Problema 9.715(3) que nos asegura que $|P_a^c M_a| = |M_a P_a^b|$, es decir, M_a es el punto medio de $P_a^c P_a^b$. Aplicando el Problema 6.44, concluimos que $U_a^{'}$ es el punto medio del segmento $I_b I_c$. ♣

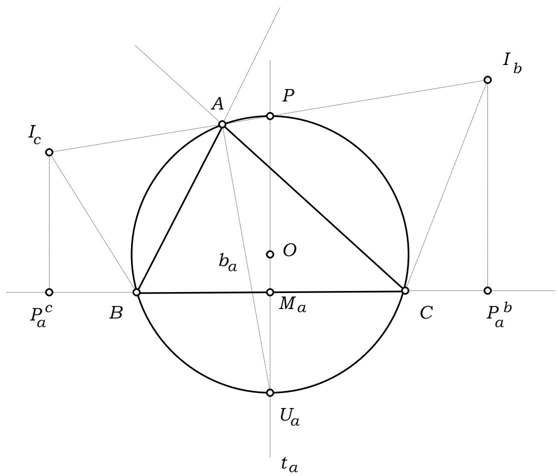


Figura 9.107

9.10.26. Teorema. En cualquier triángulo ΔABC se cumplen las identidades:

a. $|M_a U_a^{'}| = \dfrac{r_b + r_c}{2}$, $|M_b U_b^{'}| = \dfrac{r_a + r_c}{2}$ y $|M_c U_c^{'}| = \dfrac{r_a + r_b}{2}$.

b. $|M_a U_a| = \dfrac{r_a - r}{2}$, $|M_b U_b| = \dfrac{r_b - r}{2}$ y $|M_c U_c| = \dfrac{r_c - r}{2}$.

Prueba: Basamos nuestros argumentos en la figura 9.107. Del Problema 6.44, se sigue directamente que $|M_a U_a^{'}| = \dfrac{r_b + r_c}{2}$. Utilizando el Teorema 9.10.9 y la primera identidad, hallamos que

$$|U'_a U_a| = |M_a U'_a| + |M_a U_a| = 2R = \frac{r_a + r_b + r_c - r}{2}$$

$$\frac{r_b + r_c}{2} + |M_a U_a| = \frac{r_a + r_b + r_c - r}{2}$$

$$|M_a U_a| = \frac{r_a - r}{2}.$$

De manera similar, se establecen las identidades restantes.♣

El célebre Teorema de Carnot se obtiene directamente del teorema anterior y el Teorema 9.10.23:

9.10.27. Teorema de Carnot. En cualquier triángulo ΔABC se cumplen las identidades:

a. $d(O, \overleftrightarrow{BC}) = R - \frac{r_a - r}{2}$, $d(O, \overleftrightarrow{AC}) = R - \frac{r_b - r}{2}$ y $d(O, \overleftrightarrow{AB}) = R - \frac{r_c - r}{2}$.

b. $d(O, \overleftrightarrow{BC}) + d(O, \overleftrightarrow{AC}) + d(O, \overleftrightarrow{AB}) = R + r$.

9.10.28. Teorema. En todo triángulo ΔABC se cumple la relación $r = 2\,\frac{are(\Delta ABC)}{per(\Delta ABC)}$.

Prueba: De la primera fórmula del Teorema 9.10.19 y la fórmula de Herón (8.4.3), hallamos que

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s} = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{2s} = 2\,\frac{are(\Delta ABC)}{per(\Delta ABC)}.$$ ♣

Dos consecuencias directas del teorema que acabamos de ver son las siguientes.

9.10.29.Corolario. Dos triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ tienen el mismo inradio si y solo si

$$\frac{are(\Delta ABC)}{per(\Delta ABC)} = \frac{are(\Delta A'B'C')}{per(\Delta A'B'C')}.$$

El siguiente corolario es una bonita caracterización de aquellos triángulos cuya área es igual a su perímetro.

9.10.30. Corolario[a-154]. El área de un triángulo es igual al perímetro si y solo si su inradio es igual a 2.

Una caracterización elemental pero interesante de los triángulos rectángulos es la siguiente.

9.10.31. Teorema. En un triángulo ΔABC, el ángulo $\angle C$ es recto si y solo si $r = s - c$.

Prueba: *Necesidad*. Se sigue directamente del Teorema 9.10.21.
Suficiencia. Según el Teorema 9.10.2 y, de acuerdo a nuestra suposición,

$$|CP_a| = |CP_b| = s - c = r.$$

Por lo cual, $\square\, P_a C P_b I$ es un cuadrado y, por lo tanto, $\angle C$ es un ángulo recto. ♣

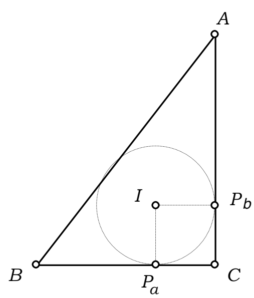


Figura 9.108

El siguiente resultado es de J. Lawrence y aparece en la nota de A. S. di Domenico [a-40].

9.10.32. Teorema(Lawrence). Si $\Delta(a,b,c)$ es un triángulo rectángulo con hipotenusa c, entonces

$$are(\Delta(a,b,c)) = |AP_c||BP_c|.$$

Prueba: Pongamos $x = |BP_c|$ y $y = |AP_c|$. Tenemos entonces que

$$are(\Delta(a,b,c)) = \frac{ab}{2} = \frac{(x+r)(y+r)}{2}.$$

Calculando el área del triángulo de una manera alternativa, vemos que

$$are(\Delta(a,b,c)) = are(\square IP_aCP_b) + are(\Delta IBP_a) + are(\Delta IP_bA) + are(\Delta IAB)$$

$$= r^2 + \frac{rx}{2} + \frac{ry}{2} + \frac{r(x+y)}{2} = r^2 + rx + ry.$$

Por consiguiente, $\dfrac{(x+r)(y+r)}{2} = r^2 + rx + ry$

$$(x+r)(y+r) = 2r^2 + 2rx + 2ry$$
$$xy + xr + r^2 + yr = 2r^2 + 2rx + 2ry$$
$$xy = r^2 + rx + ry.$$

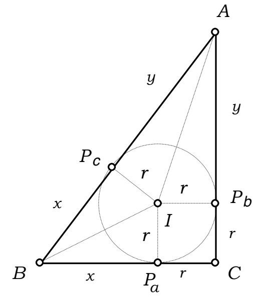


Figura 9.109

Por lo tanto,

$$|AP_c||BP_c| = r^2 + rx + ry = are(\Delta(a,b,c)). \clubsuit$$

9.10.33. Teorema. Sea ΔABC un triángulo. Si AD es el diámetro de su circuncírculo que pasa por A, entonces

$$|AB||AC| = |AH_a||AD|.$$

Prueba: Sea $C(O,R)$ el círcuncírculo del triángulo ΔABC. Según el Teorema 9.5.2, el ángulo $\angle DBA$ es recto y, por el Corolario 9.5.7 (1), sabemos que $\angle ACB \cong \angle ADB$. El criterio de semejanza 8.1.9 nos asegura que $\Delta ABD \sim \Delta AH_aC$. Por lo tanto,

$$\frac{|AB|}{|AH_a|} = \frac{|AD|}{|AC|}$$

$$|AB||AC| = |AH_a||AD|. \clubsuit$$

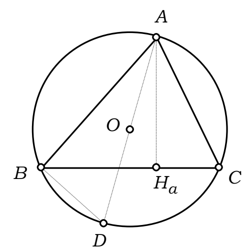


Figura 9.110

A continuación daremos un ejemplo más de una demostración sin palabras.

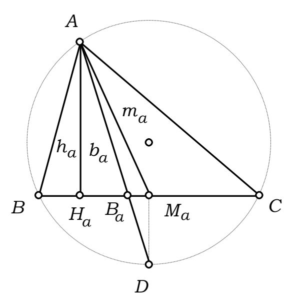
9.10.34. Teorema. En todo triángulo ΔABC se cumplen las desigualdades

$$h_a \le b_a \le m_a, \quad h_b \le b_b \le m_b \quad \text{y} \quad h_c \le b_c \le m_c.$$

Prueba[a-111]:

La primera desigualdad se deduce de la figura:

Con una figura similar, se prueban las otras dos desigualdades.



$\clubsuit$

Figura 9.111

9.10.35. Teorema[a-19]. Para cualquier punto sobre el circuncírculo de un triángulo equilátero, la suma de sus distancias a los vértices adyacentes es igual a su distancia al tercer vértice.

Prueba: Sean ΔABC un triángulo equilátero y $C(O,R)$ su circuncírculo. Fijemos un punto $P \in C(O,R)$. Supongamos,sin perder generalidad, que P está en el arco determinado por la cuerda AC y es diferente de los vértices del triángulo. Tomemos un punto $Q \in \overset{\frown}{BC}$ tal que $AP \cong QC$ y $PC \cong BQ$. De acuerdo con el criterio 3.2.12, sabemos que $\Delta PAC \cong \Delta QCB$. Como una consecuencia de esta congruencia, hallamos que $\angle CAP \cong \angle BCQ$ y $\angle PCA \cong \angle QBC$. Por otro lado, con base en el Corolario 9.5.6, obtenemos que $\angle APB \cong \angle C \cong \angle A \cong \angle BPC$. De aquí concluimos que $\overrightarrow{PB}$ es la bisectriz del ángulo $\angle APC$. De la misma manera, se prueba que $\overrightarrow{QA}$ es la bisectriz del ángulo $\angle CQB$. Ya que

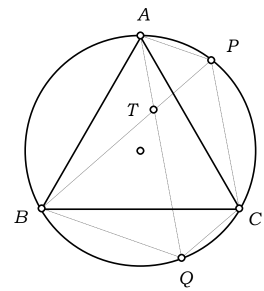


Figura 9.112

$$m(\angle AQB) = m(\angle C) = 60 = m(\angle A) = m(\angle APB),$$

del Teorema 4.3.4 se sigue que

$$m(\angle CAP) + m(\angle PCA) = 180 - m(\angle APC) = 180 - 120 = 60.$$

Según el Corolario 9.5.9, sabemos que $\angle CAP \cong \angle CBP$. Por lo cual,

$$m(\angle QBP) = m(\angle QBC) + m(\angle CBP) = m(\angle PCA) + m(\angle CAP) = 60.$$

Sea T el punto de intersección de AQ y BP. Arriba hemos demostrado que ΔTBQ es un triángulo equilátero. De manera análoga, se demuestra que ΔTAP es un triángulo equilátero. Por lo tanto,

$$|PB| = |PT| + |TB| = |PA| + |BQ| = |PA| + |PC|. \clubsuit$$

Como una aplicación directa del teorema anterior tenemos que si P pertenece al circuncírculo de un triángulo equilátero ΔABC, entonces PA, PB y PC no forman los lados de un triángulo (ver el Teorema 4.4.9).

El resultado que en seguida presentamos, relaciona las áreas de dos triángulos que tienen el mismo circuncírculo.

9.10.36. Teorema[a-166]. Si los triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ tienen el mismo circuncírculo, entonces

$$\frac{are(\Delta ABC)}{are(\Delta A'B'C')} = \frac{abc}{a'b'c'}.$$

Prueba: En los triángulos ΔABC y $\Delta A'BC$, sabemos, por el Corolario 9.5.7, que los ángulos $\angle A$ y $\angle BA'C$ son suplementarios o son congruentes. En ambos casos, se cumple la igualdad $\operatorname{sen}\angle A = \operatorname{sen}\angle BA'C$. De aquí y por el Teorema 8.4.1, hallamos que

$$\frac{are(\Delta ABC)}{are(\Delta A'BC)} = \frac{bc}{|A'C||A'B|}.$$

De igual manera, se obtienen las identidades

$$\frac{are(\Delta A'BC)}{are(\Delta A'B'C)} = \frac{|A'B|a}{c'|B'C|} \text{ y } \frac{are(\Delta A'B'C)}{are(\Delta A'B'C')} = \frac{|A'C||B'C|}{b'a'}.$$

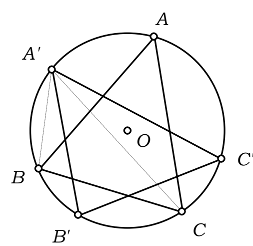


Figura 9.113

Por consiguiente,

$$\frac{are(\Delta ABC)}{are(\Delta A'B'C')} = \frac{are(\Delta ABC)}{are(\Delta A'BC)} \frac{are(\Delta A'BC)}{are(\Delta A'B'C)} \frac{are(\Delta A'B'C)}{are(\Delta A'B'C')}$$

$$= \frac{bc}{|A'C||A'B|} \frac{|A'B|a}{c'|B'C|} \frac{|A'C||B'C|}{b'a'} = \frac{abc}{a'b'c'}. \clubsuit$$

9.10.37. Teorema. Sean ΔABC un triángulo y P un punto en el plano.
1.Si $P \in int(\Delta ABC) \cup \Delta ABC$, entonces

$$d(P, \overleftrightarrow{BC})\text{sen}\angle A + d(P, \overleftrightarrow{AC})\text{sen}\angle B + d(P, \overleftrightarrow{AB})\text{sen}\angle C = 2R\text{sen}\angle A\text{sen}\angle B\text{sen}\angle C.$$

2. Si $P \in ext(\Delta ABC) \cup ((\overleftrightarrow{BC} \cup \overleftrightarrow{AC} \cup \overleftrightarrow{AB}) - \Delta ABC)$, entonces

$$\pm d(P, \overleftrightarrow{BC})\text{sen}\angle A \pm d(P, \overleftrightarrow{AC})\text{sen}\angle B \pm d(P, \overleftrightarrow{AB})\text{sen}\angle C = 2R\text{sen}\angle A\text{sen}\angle B\text{sen}\angle C.$$

Prueba: Sean L, M y N las proyecciones del punto P sobre las rectas $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{AB}$, respectivamente. Tenemos entonces que $|PL| = d(P, \overleftrightarrow{BC})$, $|PM| = d(P, \overleftrightarrow{AC})$ y $|PN| = d(P, \overleftrightarrow{AB})$. Consideremos los cuatro casos posibles:

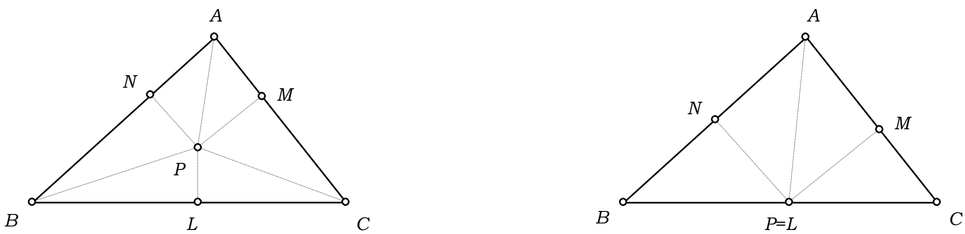


Figura 9.114

I. $P \in int(\Delta ABC)$. Sabemos que

$$are(\Delta PBC) + are(\Delta PCA) + are(\Delta PAB) = are(\Delta ABC)$$

$$\frac{a\,|PL|}{2} + \frac{b\,|PM|}{2} + \frac{c\,|PN|}{2} = 2R^2\,\text{sen}\angle A\text{sen}\angle B\text{sen}\angle C \quad (9.10.10)$$

$$|PL|R\text{sen}\angle A + |PM|R\text{sen}\angle B + |PN|R\text{sen}\angle C = 2R^2\,\text{sen}\angle A\text{sen}\angle B\text{sen}\angle C \quad (9.10.6)$$

$$|PL|\text{sen}\angle A + |PM|\text{sen}\angle B + |PN|\text{sen}\angle C = 2R\text{sen}\angle A\text{sen}\angle B\text{sen}\angle C$$

$$d(P, \overleftrightarrow{BC})\text{sen}\angle A + d(P, \overleftrightarrow{AC})\text{sen}\angle B + d(P, \overleftrightarrow{AB})\text{sen}\angle C = 2R\text{sen}\angle A\text{sen}\angle B\text{sen}\angle C.$$

II. $P \in \Delta ABC$. Sin perder generalidad, supongamos que $P \in BC$. Tenemos entonces que

$$are(\Delta PCA) + are(\Delta PAB) = are(\Delta ABC)$$

$$0 + are(\Delta PCA) + are(\Delta PAB) = are(\Delta ABC)$$

$$|PL|\text{sen}\angle A + |PM|\text{sen}\angle B + |PN|\text{sen}\angle C = 2R\text{sen}\angle A\text{sen}\angle B\text{sen}\angle C$$

$$d(P, \overleftrightarrow{BC})\text{sen}\angle A + d(P, \overleftrightarrow{AC})\text{sen}\angle B + d(P, \overleftrightarrow{AB})\text{sen}\angle C = 2R\text{sen}\angle A\text{sen}\angle B\text{sen}\angle C.$$

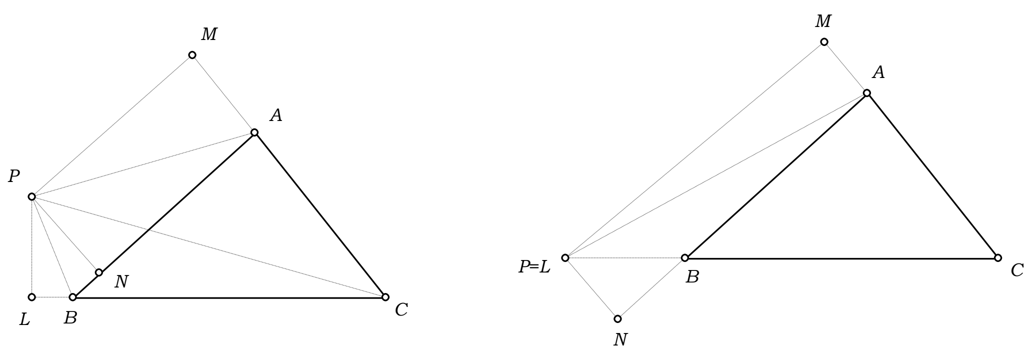


Figura 9.115

III. $P \in ext(\Delta ABC)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que P está en el semiplano determinado por $\overleftrightarrow{AB}$ que no contiene a C. En este caso, vemos que

$$are(\Delta PBC) + are(\Delta PCA) - are(\Delta PAB) = are(\Delta ABC)$$

$$\frac{a|PL|}{2} + \frac{b|PM|}{2} - \frac{c|PN|}{2} = 2R^2 \operatorname{sen}\angle A \operatorname{sen}\angle B \operatorname{sen}\angle C \quad (9.10.10)$$

$$|PL|R\operatorname{sen}\angle A + |PM|R\operatorname{sen}\angle B - |PN|R\operatorname{sen}\angle C = 2R^2 \operatorname{sen}\angle A \operatorname{sen}\angle B \operatorname{sen}\angle C \quad (9.10.6)$$

$$|PL|\operatorname{sen}\angle A + |PM|\operatorname{sen}\angle B - |PN|\operatorname{sen}\angle C = 2R\operatorname{sen}\angle A \operatorname{sen}\angle B \operatorname{sen}\angle C$$

$$d(P, \overleftrightarrow{BC})\operatorname{sen}\angle A + d(P, \overleftrightarrow{AC})\operatorname{sen}\angle B - d(P, \overleftrightarrow{AB})\operatorname{sen}\angle C = 2R\operatorname{sen}\angle A \operatorname{sen}\angle B \operatorname{sen}\angle C.$$

IV. $P \in (\overleftrightarrow{BC} \cup \overleftrightarrow{AC} \cup \overleftrightarrow{AB}) - \Delta ABC$. Sin perder generalidad, supongamos que $P \in \overleftrightarrow{BC} - BC$. Entonces,

$$are(\Delta PCA) - are(\Delta PAB) = are(\Delta ABC)$$

$$0 + \frac{b|PM|}{2} - \frac{c|PN|}{2} = 2R^2 \operatorname{sen}\angle A \operatorname{sen}\angle B \operatorname{sen}\angle C \quad (9.10.10)$$

$$0 + |PM|R\operatorname{sen}\angle B - |PN|R\operatorname{sen}\angle C = 2R^2 \operatorname{sen}\angle A \operatorname{sen}\angle B \operatorname{sen}\angle C \quad (9.10.6)$$

$$0\operatorname{sen}\angle A + |PM|\operatorname{sen}\angle B - |PN|\operatorname{sen}\angle C = 2R\operatorname{sen}\angle A \operatorname{sen}\angle B \operatorname{sen}\angle C$$

$$d(P, \overleftrightarrow{BC})\operatorname{sen}\angle A + d(P, \overleftrightarrow{AC})\operatorname{sen}\angle B - d(P, \overleftrightarrow{AB})\operatorname{sen}\angle C = 2R\operatorname{sen}\angle A \operatorname{sen}\angle B \operatorname{sen}\angle C. ♣$$

9.10.38. Teorema. En todo triángulo ΔABC, se cumplen las identidades

$$d(O, \overleftrightarrow{BC}) = R|\cos\angle A|, \quad d(O, \overleftrightarrow{AC}) = R|\cos\angle B| \quad \text{y} \quad d(O, \overleftrightarrow{AB}) = R|\cos\angle C|.$$

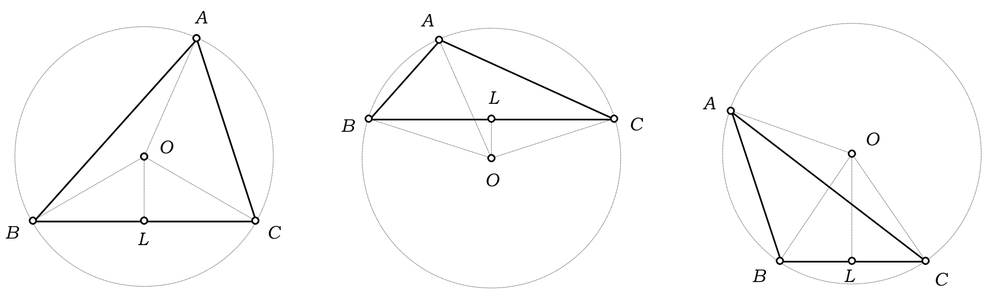


Figura 9.116

Prueba: Probaremos solamente la primera identidad. Sea L la proyección del circuncentro O sobre la recta $\overleftrightarrow{BC}$. De acuerdo con el Corolario 9.5.7, sabemos que los ángulos $\angle BOL$ y $\angle A$ o son congruentes o son suplementarios. Por definición, tenemos que

$$\cos\angle BOL = \frac{|OL|}{|BO|} = \frac{|OL|}{R} = \pm\cos\angle A$$

$$d(O, \overleftrightarrow{BC}) = |OL| = R|\cos\angle A|. ♣$$

9.10.39. Teorema. Sea ΔABC un triángulo. Entonces,

1. $|HA| = 2R|\cos\angle A|$, $|HB| = 2R|\cos\angle B|$ y $|HC| = 2R|\cos\angle C|$; y
2. $d(H, \overleftrightarrow{BC}) = |HH_a| = 2R|\cos\angle B\cos\angle C|$,

$$d(H, \overleftrightarrow{AC}) = |HH_b| = 2R|\cos\angle A\cos\angle C| \text{ y}$$

$$d(O, \overleftrightarrow{AB}) = |HH_c| = 2R|\cos\angle A\cos\angle B|.$$

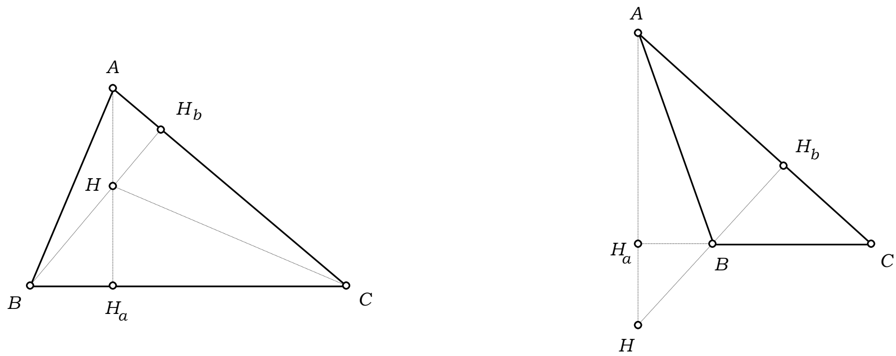


Figura 9.117

Prueba: Probaremos solamente las primeras identidades de los dos incisos. Sin perder generalidad, supongamos que todos los ángulos del triángulo en cuestión son agudos. Claramente, tenemos que $d(H, \overleftrightarrow{BC}) = |HH_a|$. Por otra parte, sabemos que

$$|HH_a| = |BH_a|\tan(\angle H_aBH) = |BH_a|\tan(\angle 90 - \angle C) = |BH_a|\cot\angle C = c\cos\angle B\cot\angle C =$$

$$c\cos\angle B\frac{\cos\angle C}{\operatorname{sen}\angle C} = \frac{c}{\operatorname{sen}\angle C}\cos\angle B\cos\angle C = 2R\cos\angle B\cos\angle C.$$

Y, además, sabemos que

$$|HA| = |AH_b|\sec\angle H_aAC = |AH_b|\sec(\angle 90 - \angle C) = |AH_b|\csc\angle C = \frac{|AH_b|}{\operatorname{sen}\angle C} = \frac{c\cos\angle A}{\operatorname{sen}\angle C} = 2R\cos\angle A. \clubsuit$$

9.10.40. Teorema. En todo triángulo ΔABC se cumplen las siguientes identidades:

1. $|IA| = 4R\operatorname{sen}\frac{\angle B}{2}\operatorname{sen}\frac{\angle C}{2}$, $|IB| = 4R\operatorname{sen}\frac{\angle A}{2}\operatorname{sen}\frac{\angle C}{2}$ y $|IC| = 4R\operatorname{sen}\frac{\angle A}{2}\operatorname{sen}\frac{\angle B}{2}$.
2. $d(I, \overleftrightarrow{BC}) = d(I, \overleftrightarrow{AC}) = d(I, \overleftrightarrow{AB}) = 4R\operatorname{sen}\frac{\angle A}{2}\operatorname{sen}\frac{\angle B}{2}\operatorname{sen}\frac{\angle C}{2}$.

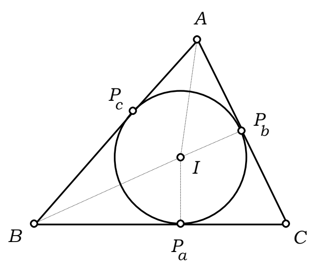


Figura 9.118

Prueba: Como ya se hizo costumbre, basta con probar la primera identidad del primer inciso. Sabemos que

$$|IA| = \frac{|IP_b|}{\operatorname{sen}\frac{\angle A}{2}} = \frac{r}{\operatorname{sen}\frac{\angle A}{2}} = (4R\operatorname{sen}\frac{\angle A}{2}\operatorname{sen}\frac{\angle B}{2}\operatorname{sen}\frac{\angle C}{2})\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\angle A}{2}} = 4R\operatorname{sen}\frac{\angle B}{2}\operatorname{sen}\frac{\angle C}{2}. \qquad (9.10.18)$$

La identidad del segundo inciso se sigue directamente del Teorema 9.10.18. ♣

9.10.41. Teorema. En todo triángulo ΔABC se cumplen las siguientes identidades:

$$d(G, \overleftrightarrow{BC}) = \frac{2R}{3}\operatorname{sen}\angle B\operatorname{sen}\angle C,\quad d(G, \overleftrightarrow{AC}) = \frac{2R}{3}\operatorname{sen}\angle A\operatorname{sen}\angle C \text{ y } d(G, \overleftrightarrow{AB}) = \frac{2R}{3}\operatorname{sen}\angle A\operatorname{sen}\angle B.$$

Prueba: Sea L la proyección de G sobre la recta $\overleftrightarrow{BC}$. Primero calcularemos sen$\angle CBM_b$. Según la Ley Extendida de los Senos (9.10.6), se cumple la relación

$$\frac{\text{sen}\angle CBM_b}{\text{sen}\angle C} = \frac{|CM_b|}{m_b} = \frac{b}{2m_b}.$$

Por definición y el Teorema 9.10.6, hallamos que

$$\text{sen}\angle CBM_b = \frac{|GL|}{|BG|}$$

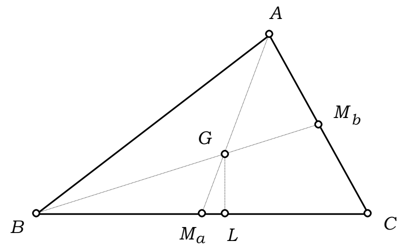


Figura 9.119

$$|GL| = |BG|\text{sen}\angle CBM_b = \frac{2m_b}{3}\frac{b\text{sen}\angle C}{2m_b} = \frac{b\text{sen}\angle C}{3} = \frac{2R}{3}\text{sen}\angle B\text{sen}\angle C. \clubsuit$$

9.10.42. Corolario[a-29]. En todo triángulo ΔABC cuyos ángulos sean agudos, se cumplen las siguientes identidades:

1. $4\text{sen}\angle A\text{sen}\angle B\text{sen}\angle C = \text{sen}(2\angle A) + \text{sen}(2\angle B) + \text{sen}(2\angle C)$.
2. $\text{sen}\angle A\text{sen}\angle B\text{sen}\angle C = \text{sen}\angle A\cos\angle B\cos\angle C + \text{sen}\angle B\cos\angle A\cos\angle C + \text{sen}\angle C\cos\angle A\cos\angle B$.
3. $4\cos\frac{\angle A}{2}\cos\frac{\angle B}{2}\cos\frac{\angle C}{2} = \text{sen}\angle A + \text{sen}\angle B + \text{sen}\angle C$.

Prueba: 1. Sabemos, por el Teorema 9.10.37, que

$$d(O, \overleftrightarrow{BC})\text{sen}\angle A + d(O, \overleftrightarrow{AC})\text{sen}\angle B + d(O, \overleftrightarrow{AB})\text{sen}\angle C = 2R\text{sen}\angle A\text{sen}\angle B\text{sen}\angle C,$$

y, por el Teorema 9.10.38, $d(O, \overleftrightarrow{BC}) = R|\cos\angle A|$, $d(O, \overleftrightarrow{AC}) = R|\cos\angle B|$ y $d(O, \overleftrightarrow{AB}) = R|\cos\angle C|$. Por lo cual,

$$2R\text{sen}\angle A\text{sen}\angle B\text{sen}\angle C = R\cos\angle A\text{sen}\angle A + R\cos\angle B\text{sen}\angle B + R\cos\angle C\text{sen}\angle C$$
$$4\text{sen}\angle A\text{sen}\angle B\text{sen}\angle C = 2\cos\angle A\text{sen}\angle A + 2\cos\angle B\text{sen}\angle B + 2\cos\angle C\text{sen}\angle C$$
$$= \text{sen}(2\angle A) + \text{sen}(2\angle B) + \text{sen}(2\angle C).$$

2. De acuerdo con el Teorema 9.10.37, encontramos que

$$d(H, \overleftrightarrow{BC})\text{sen}\angle A + d(H, \overleftrightarrow{AC})\text{sen}\angle B + d(H, \overleftrightarrow{AB})\text{sen}\angle C = 2R\text{sen}\angle A\text{sen}\angle B\text{sen}\angle C.$$

Sustituyendo por las identidades del segundo inciso del Teorema 9.10.39, encontramos que

$$2R\text{sen}\angle A\text{sen}\angle B\text{sen}\angle C = 2R\cos\angle B\cos\angle C\text{sen}\angle A + 2R\cos\angle A\cos\angle C\text{sen}\angle B + 2R\cos\angle A\cos\angle B\text{sen}\angle C$$
$$\text{sen}\angle A\text{sen}\angle B\text{sen}\angle C = \text{sen}\angle A\cos\angle B\cos\angle C + \text{sen}\angle B\cos\angle A\cos\angle C + \text{sen}\angle C\cos\angle A\cos\angle B.$$

3. Usando las identidades de los Teoremas 9.10.37 y 9.10.40, concluimos que

$$d(I, \overleftrightarrow{BC})\text{sen}\angle A + d(I, \overleftrightarrow{AC})\text{sen}\angle B + d(I, \overleftrightarrow{AB})\text{sen}\angle C = 2R\text{sen}\angle A\text{sen}\angle B\text{sen}\angle C,$$

$$4R\text{sen}\frac{\angle A}{2}\text{sen}\frac{\angle B}{2}\text{sen}\frac{\angle C}{2}(\text{sen}\angle A + \text{sen}\angle B + \text{sen}\angle C) = 2R\text{sen}\angle A\text{sen}\angle B\text{sen}\angle C$$

$$2\text{sen}\frac{\angle A}{2}\text{sen}\frac{\angle B}{2}\text{sen}\frac{\angle C}{2}(\text{sen}\angle A + \text{sen}\angle B + \text{sen}\angle C) = 8\text{sen}\frac{\angle A}{2}\cos\frac{\angle A}{2}\text{sen}\frac{\angle B}{2}\cos\frac{\angle B}{2}\text{sen}\frac{\angle C}{2}\cos\frac{\angle C}{2}$$

$$\text{sen}\angle A + \text{sen}\angle B + \text{sen}\angle C = 4\cos\frac{\angle A}{2}\cos\frac{\angle B}{2}\cos\frac{\angle C}{2}. \clubsuit$$

W. W. Willson [a-180] observó que la primera identidad del teorema anterior se obtiene aplicando la tercera identidad del mismo teorema al triángulo $\Delta I_a I_b I_c$ y usando el Problema 8.638.

9.10.43. Definición. El número *áureo* es el número irracional $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339887...$

No es difícil ver que $\frac{1}{\phi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. El número ϕ es uno de los más fascinantes dentro del mundo de las matemáticas. Este número está asociado con la división áurea de un segmento (Definición 11.5.3) y también aparece en las sucesiones de Fibonacci. El lector puede encontrar las propiedades básicas del número de áureo y su historia en el excelente libro [l-178]. El libro [l-185] también es recomendable. El siguiente resultado concerniente al número áureo es tomado del artículo de J. F. Rigby [a-136].

9.10.44. Teorema. Sea ΔABC un triángulo equilátero. Si L y M son los puntos de intersección de la recta $\overleftrightarrow{M_bM_c}$ y el circuncírculo del triángulo ΔABC, entonces $\frac{|M_bM_c|}{|M_bL|} = \phi$.

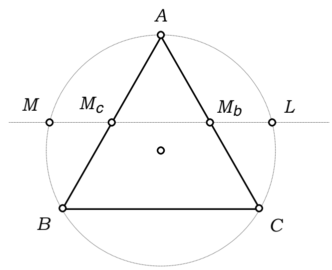


Figura 9.120

Prueba: Sabemos que $|M_c M_b| = |M_bA| = |M_bC| = x$. Según el Teorema 9.6.1, la potencia del punto M_b con respecto al circuncírculo del triángulo satisface que

$$|M_bM||M_bL| = |M_bA||M_bC| = x^2$$

$$(|MM_c| + |M_c M_b|)|M_bL| = x^2.$$

Pongamos $y = |MM_c| = |M_bL|$. Entonces, $(y + x)y = x^2$ y, por consiguiente, $x^2 - yx - y^2 = 0$. Aplicando la fórmula para encontrar las raíces de una ecuación de segundo grado, encontramos que

$$x = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4(-y^2)}}{2} = y\frac{1+\sqrt{5}}{2} = y\phi.$$

De aquí se obtiene la igualdad $\frac{|M_bM_c|}{|M_bL|} = \frac{y\phi}{y} = \phi$. ♣

A continuación, damos la fórmula del radio de dos círculos congruentes que están inscritos en un triángulo. Lo interesante de esta fórmula es que el radio de dichos círculos se puede expresar en función del inradio del triángulo y de la longitud del lado tangente a los dos círculos.

9.10.45. Teorema[a-69] Sea ΔABC un triángulo. Supongamos que en el interior de ΔABC hay dos círculos congruentes y tangentes entre sí, de tal forma que son tangentes a un mismo lado del triángulo, y cada uno de ellos es tangente a otro lado del triángulo.

1. Si ambos círculos son tangentes al lado a del triángulo, entonces sus radios son iguales a $r_1 = \frac{2}{a} + \frac{1}{r}$.
2. Si ambos círculos son tangentes al lado b del triángulo, entonces sus radios son iguales a $r_2 = \frac{2}{b} + \frac{1}{r}$.
3. Si ambos círculos son tangentes al lado c del triángulo, entonces sus radios son iguales a $r_3 = \frac{2}{c} + \frac{1}{r}$.

Prueba: Basta considerar el caso cuando ambos círculos sean tangentes al lado a del triángulo. Sean $C(O_1, r_1)$ y $C(O_2, r_1)$ dos círculos tangentes entre sí tales que son tangentes al lado a en los puntos D y E, respectivamente, $C(O_1, r_1)$ es tangente al lado c y $C(O_2, r_1)$ es tangente al lado b. Tenemos entonces que

$$\cot\frac{\angle B}{2} = \frac{|BD|}{r_1} \text{ y } \cot\frac{\angle C}{2} = \frac{|EC|}{r_1}.$$

De aquí se sigue que

$$a = |BD| + |DE| + |EC| = r_1\cot\frac{\angle B}{2} + 2r_1 + r_1\cot\frac{\angle C}{2}$$

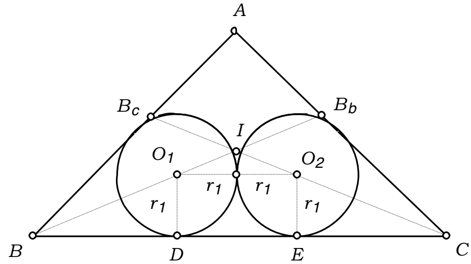


Figura 9.121

$$a = r_1(2 + \cot\frac{\angle B}{2} + \cot\frac{\angle C}{2})$$

$$\frac{1}{r_1} = \frac{2}{a} + \frac{1}{a}(\cot\frac{\angle B}{2} + \cot\frac{\angle C}{2}) = \frac{2}{a} + \frac{1}{a}\left(\frac{\cos\frac{\angle B}{2}\operatorname{sen}\frac{\angle C}{2} + \cos\frac{\angle C}{2}\operatorname{sen}\frac{\angle B}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\angle B}{2}\operatorname{sen}\frac{\angle C}{2}}\right) =$$

$$\frac{2}{a} + \left(\frac{1}{2R\operatorname{sen}\angle A}\right)\left(\frac{\operatorname{sen}(\frac{\angle B}{2} + \frac{\angle C}{2})}{\operatorname{sen}\frac{\angle B}{2}\operatorname{sen}\frac{\angle C}{2}}\right) = \frac{2}{a} + \left(\frac{1}{2R\operatorname{sen}\frac{\angle A}{2}\cos\frac{\angle A}{2}}\right)\left(\frac{\cos\frac{\angle A}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\angle B}{2}\operatorname{sen}\frac{\angle C}{2}}\right) =$$

$$\frac{2}{a} + \left(\frac{1}{4R\operatorname{sen}\frac{\angle A}{2}\operatorname{sen}\frac{\angle B}{2}\operatorname{sen}\frac{\angle C}{2}}\right) = \frac{2}{c} + \frac{1}{r} \quad (9.10.18). ♣$$

A continuación, probaremos que el radio de un círculo con un cuadrilátero inscrito en él se puede expresar en función de las longitudes de los lados del cuadrilátero (la fórmula aparece por primera vez en [a-60] y 26 años después en [a-72]):

9.10.46. Teorema. Si $\square ABCD$ es un cuadrilátero inscrito en un círculo de radio R, entonces

$$2R = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)(ab+dc)}{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}.$$

Prueba: De acuerdo con Ley Extendida de los Senos 9.10.6 y los Teoremas 9.9.11 y 9.9.16, hallamos que

$$R = \frac{e}{2\operatorname{sen}\angle B} = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+dc}}\,\frac{ab+cd}{4are(ABCD)}$$

$$= \frac{\sqrt{(ac+bd)(ad+bc)(ab+cd)}}{4are(ABCD)}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)(ab+dc)}{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}. ♣$$

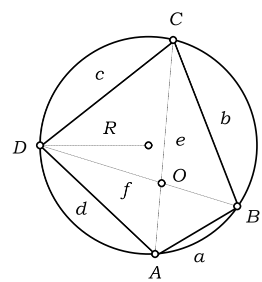


Figura 9.122

9.10.47. Teorema[a-46]. Si $\square ABCD$ es un cuadrilátero cíclico, entonces $\dfrac{e}{f} = \dfrac{ad+bc}{ab+cd}$.

Prueba: Sea O el punto de intersección de las diagonales AC y BD. Por el criterio 6.2.6, sabemos que $\Delta OAB \sim \Delta OCD$ y $\Delta OBC \sim \Delta ODA$. De donde se sigue que

$$\frac{|OA|}{|OD|}=\frac{|AB|}{|DC|}=\frac{|OB|}{|OC|} \text{ y } \frac{|OA|}{|OB|}=\frac{|AD|}{|BC|}=\frac{|OD|}{|OC|}.$$

Por ello,

$$\frac{e}{f}=\frac{|OA|+|OC|}{|OB|+|OD|}=\frac{|OA|cd+|OC|cd}{|OB|cd+|OD|cd}$$

$$=\frac{|AB||OD|d+|OD||BC|c}{|AB||OC|d+|OD|cd}=\frac{|AB||OD|d+|OD||BC|c}{|AB||OD||BC|+|OD|cd}$$

$$=\frac{|AB|d+|BC|c}{|AB||BC|+cd}=\frac{ad+bc}{ab+cd}.♣$$

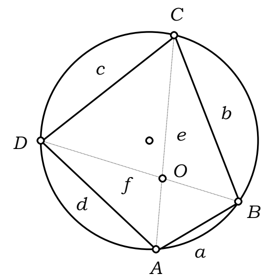


Figura 9.123

La siguiente caracterización de los cuadriláteros circunscritos aparece en el artículo [a-148].

9.10.48. Teorema[a-148]. Un cuadrilátero $\square ABCD$ es circunscrito si y solo si los incírculos de los triángulos ΔABC y ΔACD son tangentes.

Prueba: Sean $C(I,r)$ y $C(I',r')$ los incírculos de los triángulos ΔABC y ΔACD, respectivamente.

Necesidad. Supongamos que $\square ABCD$ es un cuadrilátero circunscrito. Sean $M, N \in AC$ los puntos de tangencia de los círculos $C(I,r)$ y $C(I',r')$, respectivamente. Por el Teorema 9.9.2, sabemos que

$$|AB|+|DC|=|AD|+|BC|.$$

Entonces, según el Teorema 9.10.2, vemos que

$$|MN|=||AM|-|AN||=$$

$$\left|\left(\frac{|AB|+|BC|+|AC|}{2}-|BC|\right)-\left(\frac{|AD|+|DC|+|AC|}{2}-|DC|\right)\right|$$

$$=\left|\frac{|AB|+|BC|+|AC|}{2}-|BC|-\frac{|AD|+|DC|+|AC|}{2}+|DC|\right|$$

$$=\left|\frac{|AB|}{2}+\frac{|BC|}{2}-|BC|-\frac{|AD|}{2}-\frac{|DC|}{2}+|DC|\right|=$$

$$\left|\frac{|AB|}{2}-\frac{|BC|}{2}-\frac{|AD|}{2}+\frac{|DC|}{2}\right|=$$

$$\left|\frac{|AB|+|DC|-|AD|-|BC|}{2}\right|=0.$$

Por lo tanto, $M=N$.

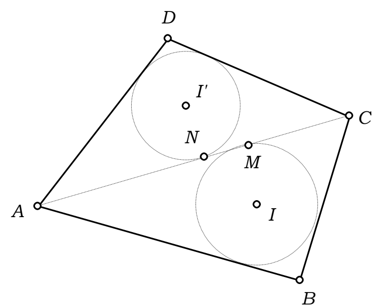


Figura 9.124

Suficiencia. Supongamos que $C(I,r)$ y $C(I',r')$ son tangentes en el Punto $M\in AC$. Sean E y F los puntos de tangencia de $C(I,r)$ con los Lados AB y BC del triángulo ΔABC, respectivamente, y G y H los puntos de tangencia de $C(I',r')$ con los lados DC y DA del triángulo ΔACD, respectivamente. De acuerdo con el Teorema 9.3.8,

$$|AB|+|DC|=|AE|+|EB|+|DG|+|GC|=$$

$$|AM|+|FB|+|DH|+|MC|=|AH|+|FB|+|DH|+|CF|=$$

$$|AH|+|DH|+|FB|+|CF|=|AD|+|BC|.$$

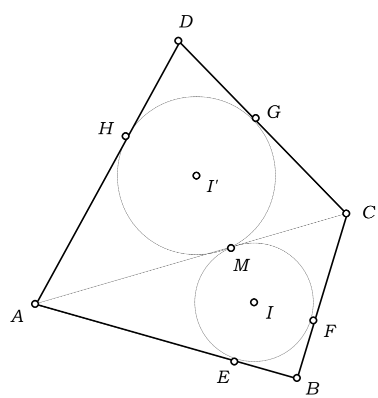


Figura 9.125

El Teorema 9.9.2 nos garantiza que $\square ABCD$ es un cuadrilátero circunscrito. ♣

9.11. Arcos

9.11.1. Definición. Sean $\mathcal{C}(O,r)$ un círculo y $A,B \in \mathcal{C}(O,r)$ tales que AB no es un diámetro. El *arco menor* del círculo $\mathcal{C}(O,r)$, determinado por los puntos A y B, es el conjunto formado por los puntos A y B, y la intersección $int(\angle AOB) \cap \mathcal{C}(O,r)$. El *arco mayor* del círculo $\mathcal{C}(O,r)$, determinado por los puntos A y B, es el conjunto que está formado por los puntos A y B, y la intersección $ext(\angle AOB) \cap \mathcal{C}(O,r)$. A los puntos A y B se les llama los *puntos extremos* de ambos arcos.

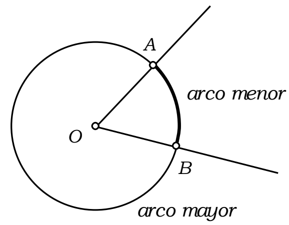


Figura 9.126

Hemos visto que cualesquiera dos puntos A y B de un círculo $\mathcal{C}(O,r)$ que no sean los puntos extremos de un diámetro, determinan dos arcos (a saber el arco menor y el arco mayor). Cualquiera de dichos arcos será denotado por el símbolo $\overset{\frown}{AB}$ en circunstancias que no sea necesario determinar a cuál de los dos arcos nos referimos. En algunos casos, para saber a qué arco nos referimos, sin hacer uso de los adjetivos menor y mayor, elegimos un tercer punto P sobre el arco en cuestión y lo denotamos por $\overset{\frown}{APB}$. En la figura 9.127, podemos ver que $\overset{\frown}{APB}$ es el arco menor y $\overset{\frown}{AQB}$ es el arco mayor del círculo $\mathcal{C}(O,r)$. Al decir que $\overset{\frown}{AB}$ es un arco de un círculo, entenderemos que AB no es un diámetro de él mismo. El arco mayor y el arco menor parten al círculo en dos conjuntos cuya intersección son los puntos extremos de ambos**.**

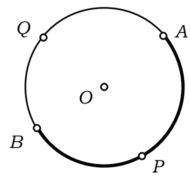


Figura 9.127

9.11.2. Teorema. Tres puntos no colineales determinan un único arco que los contiene, de manera que dos de ellos son los puntos extremos del arco.

Prueba: Sean L, M y N tres puntos no colineales. Según el Teorema 9.1.10, existe un único círculo $\mathcal{C}(O,r)$ que contiene a los tres puntos L, M y N. De estos tres puntos, podemos escoger a dos de ellos que no sean los puntos extremos de un diámetro del círculo $\mathcal{C}(O,r)$. Llamémosles A y B. Tenemos entonces que los puntos A y B determinan dos arcos cuya unión es todo el círculo $\mathcal{C}(O,r)$ y el tercer punto pertenece a uno de estos dos arcos. La unicidad se cumple por el Teorema 9.1.10. ♣

La demostración del siguiente teorema es evidente y, por ello, la omitimos.

9.11.3. Teorema. Sean $\mathcal{C}(O,r)$ un círculo, $\overset{\frown}{AB}$ uno de sus arcos y $C \in \overset{\frown}{AB}$. Entonces, $\overset{\frown}{ACB}$ es el arco menor si y solo si $C \in int(\angle AOB)$.

9.11.4. Definición. Sean $\mathcal{C}(O,r)$ un círculo y $\overset{\frown}{AB}$ uno de sus arcos. La *medida del arco menor* $\overset{\frown}{AB}$ es el número $m(\overset{\frown}{AB}) = m(\angle AOB)$ y la *medida del arco mayor* $\overset{\frown}{AB}$ es el número $m(\overset{\frown}{AB}) = 360 - m(\angle AOB)$.

Vale la pena observar que la medida de un arco mayor es más grande que la medida del arco menor correspondiente. La suma de las medidas de los arcos mayor y menor de un círculo es igual a 360.

9.11.5. Teorema de Adición de la Medida de los Arcos. Sea $\overset{\frown}{AB}$ un arco de un círculo $\mathcal{C}(O,r)$. Si $C \in \overset{\frown}{AB}$, entonces $m(\overset{\frown}{AB}) = m(\overset{\frown}{AC}) + m(\overset{\frown}{CB})$, en donde $\overset{\frown}{AC}$ y $\overset{\frown}{CB}$ son los arcos menores.

Prueba: Consideremos los dos posibles casos por separado:

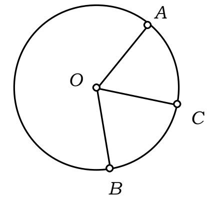


Figura 9.128

Caso I. $\overset{\frown}{ACB}$ es el arco menor. De la definición vemos que

$m(\overset{\frown}{AB}) = m(\angle AOB)$, $m(\overset{\frown}{AC}) = m(\angle AOC)$ y $m(\overset{\frown}{CB}) = m(\angle COB)$.
Según el Teorema 9.11.3, $C \in int(\angle AOB)$. Entonces, por el Axioma del Transportador (4),

$$m(\angle AOB) = m(\angle AOC) + m(\angle COB)$$

$$m(\overset{\frown}{AB}) = m(\overset{\frown}{AC}) + m(\overset{\frown}{CB}).$$

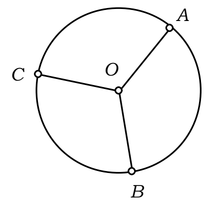


Figura 9.129

Caso II. $\overset{\frown}{ACB}$ es el arco mayor. Entonces, $m(\overset{\frown}{AB}) = 360 - m(\angle AOB)$.

Por ser $\overset{\frown}{AC}$ y $\overset{\frown}{CB}$ los arcos menores, tenemos que

$$m(\overset{\frown}{AC}) = m(\angle AOC) \text{ y } m(\overset{\frown}{CB}) = m(\angle COB).$$
Del Teorema 2.5.8 (4) hallamos que

$$m(\angle AOB) = 360 - (m(\angle AOC) + m(\angle COB))$$
$$m(\angle AOC) + m(\angle COB) = 360 - m(\angle AOB)$$

$$m(\overset{\frown}{AC}) + m(\overset{\frown}{CB}) = m(\overset{\frown}{AB}). \clubsuit$$

Si en el Teorema 9.11.5 no requerimos que $\overset{\frown}{AC}$ y $\overset{\frown}{CB}$ sean arcos menores, entonces la igualdad no es cierta, en general. En efecto, supongamos que la identidad se da cuando $\overset{\frown}{ACB}$, $\overset{\frown}{AC}$ y $\overset{\frown}{CB}$ son todos arcos mayores. Por definición, sabemos que

$$m(\overset{\frown}{AB}) = 360 - m(\angle AOB), m(\overset{\frown}{AC}) = 360 - m(\angle AOC) \text{ y } m(\overset{\frown}{CB}) = m(\angle COB).$$
De donde se siguen las identidades

$$360 - m(\angle AOB) = 360 - m(\angle AOC) + 360 - m(\angle COB)$$
$$m(\angle AOB) + 360 = m(\angle AOC) + m(\angle COB) > 360,$$
lo cual es una contradicción.

Los arcos que más consideración tienen en la geometría son los menores. Por ello, convenimos en que a los arcos menores les llamaremos simplemente arcos y el símbolo $\overset{\frown}{AB}$ hará referencia al arco menor determinado por los puntos A y B de un círculo. Si hay la necesidad de mencionar un arco mayor, lo haremos usando tres letras $\overset{\frown}{ACB}$, en donde C será un punto de dicho arco.

9.11.6. Definición. Sean $\mathcal{C}(O,r)$ un círculo y $\overset{\frown}{AB}$ uno de sus arcos. Al conjunto $OA \cup OB \cup \overset{\frown}{AB}$ se le llama un *sector* del círculo, y al conjunto $AB \cup \overset{\frown}{AB}$ se le llama un *segmento* del círculo.

Figura 9.130

9.11.7. Definición. Sean $\overset{\frown}{AB}$ un arco del círculo C(O,r) y $\overset{\frown}{A'B'}$ un arco del círculo C(O',r'). Decimos que $\overset{\frown}{AB}$ es congruente con $\overset{\frown}{A'B'}$, en símbolos $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{A'B'}$ si $r = r'$ y $\angle AOB \cong \angle A'O'B'$.

De la definición, vemos directamente que dos arcos de un círculo son congruentes si y solo si tienen la misma medida. La demostración del siguiente resultado se deja al lector como un ejercicio.

9.11.8. Teorema. Sean $\overset{\frown}{AB}$ un arco del círculo C(O,r), $\overset{\frown}{A'B'}$ un arco del círculo C(O',r') y $\overset{\frown}{A''B''}$ un arco del círculo C(O'',r''). Tenemos entonces las siguientes afirmaciones:

1.(Reflexiva) $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{AB}$.

2.(Antisimétrica) Si $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{A'B'}$, entonces $\overset{\frown}{A'B'} \cong \overset{\frown}{AB}$.

3.(Transitiva) Si $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{A'B'}$ y $\overset{\frown}{A'B'} \cong \overset{\frown}{A''B''}$, entonces $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{A'B'}$.

Por lo general, cuando hablemos de dos arcos congruentes, supondremos que ambos pertenecen a un mismo círculo.

9.11.9. Teorema. Sean C(O,r) un círculo y A, B, C, D $\in$C(O,r). Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{CD}$.
2. $\angle AOB \cong \angle COD$.
3. $m(\angle AOB) = m(\angle COD)$.
4. $AB \cong CD$.
5. $|AB| \cong |CD|$.
6. Para todo par de puntos $P \in$ C(O,r) $- \overset{\frown}{AB}$ y $Q \in$ C(O,r) $- \overset{\frown}{CD}$, se tiene que $\angle APB \cong \angle CQD$.
7. Existen puntos $P \in$ C(O,r) $- \overset{\frown}{AB}$ y $Q \in$ C(O,r) $- \overset{\frown}{CD}$ tales que $\angle APB \cong \angle CQD$.

Prueba: Las equivalencias 2 $\Leftrightarrow$ 3, 4 $\Leftrightarrow$ 5 y 2 $\Leftrightarrow$ 4 son consecuencias directas de los Teoremas 2.5.7, 1.8.1 y 9.5.5, respectivamente. La implicación 1 $\Rightarrow$ 2 se sigue directamente de la definición y las implicaciones 2 $\Rightarrow$ 1 y 6 $\Rightarrow$ 7 son triviales.

2 $\Rightarrow$ 6. Por hipótesis, sabemos que $\angle AOB \cong \angle COD$. Fijemos un punto P $\in$C(O,r) $- \overset{\frown}{AB}$ y un punto $Q \in$ C(O,r) $- \overset{\frown}{CD}$. Tenemos entonces que $P \notin int(\angle AOB)$ y $Q \notin int(\angle COD)$. De acuerdo con el Teorema 9.5.6 (1), obtenemos que $m(\angle AOB) = 2m(\angle APB)$ y $m(\angle COD) = 2m(\angle CQD)$. Por consiguiente, $m(\angle APB) = m(\angle CQD)$. De donde se sigue, por el Teorema 2.5.7, que $\angle APB \cong \angle CQD$.

7 $\Rightarrow$ 4. Esta implicación se obtiene directamente del Teorema 9.5.9. ♣

9.11.10. Teorema. Sea $\overset{\frown}{AB}$ un arco de un círculo C(O,r). La mediatriz de la cuerda AB divide al arco en dos arcos congruentes.

Prueba: Sean m la mediatriz de la cuerda AB y M el punto de intersección de m y la cuerda $\overset{\frown}{AB}$. Por el Teorema de la Mediatriz (4.2.2), hallamos que $AM \cong MB$. De acuerdo con el criterio de congruencia 3.2.12, obtenemos que $\Delta AOM \cong \Delta BOM$. Como una consecuencia de esta congruencia, $\angle MOA \cong \angle BOM$. Del Teorema 9.11.9 concluimos que $\overset{\frown}{AM} \cong \overset{\frown}{MB}$. ♣

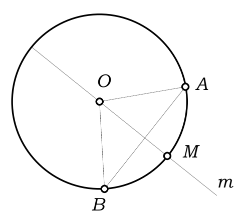


Figura 9.131

9.11.11. Definición. Sean $\mathrm{C}(O,r)$ un círculo y $\overset{\frown}{AB}$ uno de sus arcos. El *punto medio* del arco $\overset{\frown}{AB}$ es el punto de intersección de $\overset{\frown}{AB}$ con la mediatriz del segmento AB.

No es difícil ver que el punto medio de un arco es único.

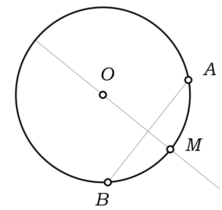


Figura 9.132

9.11.12. Teorema. Sea $\overset{\frown}{AB}$ un arco de un círculo $\mathrm{C}(O,r)$ cualquiera. Si M es el punto medio del arco $\overset{\frown}{AB}$, entonces $OM \perp AB$.

Prueba: El teorema se sigue del hecho de que los puntos O y M pertenecen a la mediatriz de la cuerda AB, la cual es perpendicular a AB por definición.♣

El Teorema 9.5.6 (1) tiene la siguiente formulación en el contexto de arcos.

9.11.13. Teorema. Sean $\mathrm{C}(O,r)$ un círculo y AB una de sus cuerdas. Si C pertenece a uno de los arcos determinados por la cuerda AB, entonces $m(\angle ACB) = \dfrac{m(\overset{\frown}{AB})}{2}$.

En el siguiente teorema, damos varias caracterizaciones del punto medio de un arco.

9.11.14. Teorema. Sean $\overset{\frown}{AB}$ un arco de un círculo $\mathrm{C}(O,r)$ y $M \in \overset{\frown}{AB}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. M es el punto medio del arco $\overset{\frown}{AB}$.
2. $\overset{\frown}{AM} \cong \overset{\frown}{MB}$.
3. $\angle AOM \cong \angle MOB$.
4. $m(\angle AOM) = m(\angle MOB)$.
5. $AM \cong MB$.
6. $|AM| \cong |MB|$.
7. M es el punto de intersección del arco $\overset{\frown}{AB}$ y la bisectriz del ángulo $\angle AOB$.
8. Para todo punto $C \in \mathrm{C}(O,r) - \overset{\frown}{AB}$ se tiene que $\angle ACM \cong \angle MCB$.
9. Existe un punto $C \in \mathrm{C}(O,r) - \overset{\frown}{AB}$ tal que $\angle ACM \cong \angle MCB$.

Prueba: Las equivalencias $2 \Leftrightarrow 3 \Leftrightarrow 4 \Leftrightarrow 5 \Leftrightarrow 6$ son consecuencias del Teorema 9.11.9, la equivalencia $1 \Leftrightarrow 5$ es una consecuencia de la definición y el Teorema de la Mediatriz 4.2.2, y la implicación $8 \Rightarrow 9$ y la equivalencia $3 \Leftrightarrow 7$ son evidentes.

$5 \Rightarrow 8$. Si $C \in \mathrm{C}(O,r) - \overset{\frown}{AB}$, por el Teorema 9.5.8, tenemos entonces que $\angle ACM \cong \angle MCB$.

$9 \Rightarrow 5$. Supongamos que existe un punto $C \in \mathrm{C}(O,r) - \overset{\frown}{AB}$ tal que $\angle ACM \cong \angle MCB$. De acuerdo con el Teorema 9.5.9, $AM \cong MB$. ♣

9.11.15. Teorema. Sean $\overset{\frown}{AB}$ un arco de un círculo C(O,r) y M su punto medio. Si P pertenece al arco mayor determinado por la cuerda AB, entonces $\overrightarrow{PM}$ es la bisectriz del ángulo $\angle APB$.

Prueba: Sea P un punto arbitrario sobre el arco mayor cuyos puntos extremos son A y B. De acuerdo con el Teorema 9.11.14, sabemos que $\angle AOM \cong \angle MOB$. Esto y los Teoremas 9.5.5 y 9.5.8 implican que $\angle APM \cong \angle MPB$. Es decir, $\overrightarrow{PM}$ es la bisectriz del ángulo $\angle APB$. ♣

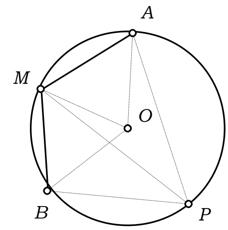


Figura 9.133

9.11.16. Teorema. Sean C(O,r) un círculo y AB y CD dos de sus cuerdas que se intersecan en el punto P. Entonces, $m(\angle APC) = \dfrac{m(\overset{\frown}{AC}) + m(\overset{\frown}{BD})}{2}$.

Prueba: Consideremos el triángulo ΔPCB. Según el Teorema 4.3.8, sabemos Que $m(\angle APC) = m(\angle BCP) + m(\angle PBC)$. Del Teorema 9.11.13 obtenemos que

$$m(\angle BCP) = m(\angle BCD) = \frac{m(\overset{\frown}{BD})}{2} \text{ y } m(\angle PBC) = m(\angle ABC) = \frac{m(\overset{\frown}{AC})}{2}.$$

Por consiguiente, $m(\angle APC) = \dfrac{m(\overset{\frown}{AC}) + m(\overset{\frown}{BD})}{2}$. ♣

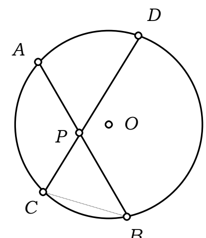


Figura 9.134

9.11.17. Teorema. Sean C(O,r) un círculo y P un punto en su exterior. Si desde P trazamos dos rectas secantes l y m al círculo que lo corten en los puntos A y B, y C y D, respectivamente, entonces

$$m(\angle CPA) = \frac{m(\overset{\frown}{BC}) - m(\overset{\frown}{AC})}{2}.$$

Prueba: De acuerdo con el Teorema 4.3.8, tenemos que

$$m(\angle DAB) = m(\angle CPA) + m(\angle ADP)$$
$$m(\angle CPA) = m(\angle DAB) - m(\angle ADP).$$

Sabemos que

$$m(\angle DAB) = \frac{m(\overset{\frown}{BD})}{2} \text{ y } m(\angle ADP) = \frac{m(\overset{\frown}{AC})}{2},$$

esto se cumple por el Teorema 9.11.13. Por lo tanto,

$$m(\angle CPA) = \frac{m(\overset{\frown}{BC}) - m(\overset{\frown}{AC})}{2}. \clubsuit$$

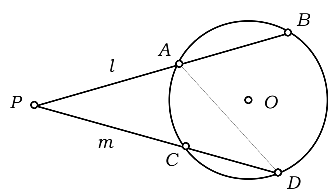


Figura 9.135

9.11.18. Lema. La medida del ángulo formado por una cuerda de un círculo y una tangente al círculo en uno de los puntos extremos de la cuerda, es igual a la mitad de la medida del arco que determinan los puntos extremos de la cuerda.

Prueba: Sean C(O,r) un círculo, AB una de sus cuerdas y t una recta tangente al círculo en el punto B. Tomemos cualquier punto D en el arco mayor de C(O,r) determinado por los puntos A y B. Del Teorema 9.5.15 podemos ver que $\angle BDA \cong \angle CBA$. Según el Teorema 9.11.13,

$$m(\angle CBA) = m(\angle BDA) = \frac{m(\overset{\frown}{AB})}{2}. \clubsuit$$

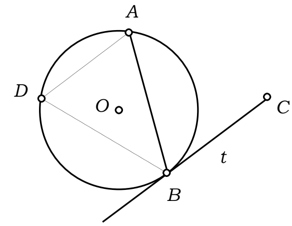


Figura 9.136

9.11.19. Teorema. Sean C(O,r) un círculo y P un punto en el exterior del círculo. Si desde P trazamos dos rectas l y m tales que l corta al círculo en los puntos A y B, y m es tangente al círculo en el punto C, entonces

$$m(\angle CPA) = \frac{m(\overset{\frown}{BC}) - m(\overset{\frown}{AC})}{2}.$$

Prueba: Por el Teorema 4.3.8, se cumple que

$$m(\angle CAB) = m(\angle CPA) + m(\angle ACP)$$
$$m(\angle CPA) = m(\angle CAB) - m(\angle ACP).$$

Del Lema 9.11.18 vemos que $m(\angle ACP) = \frac{m(\overset{\frown}{AC})}{2}$ y, por el Teorema 9.11.13, obtenemos la identidad $m(\angle CAB) = \frac{m(\overset{\frown}{BC})}{2}$. Por lo tanto,

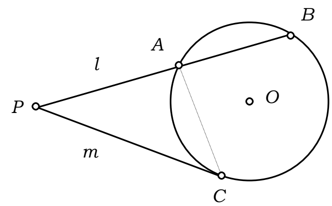


Figura 9.137

$$m(\angle CPA) = \frac{m(\overset{\frown}{BC}) - m(\overset{\frown}{AC})}{2}. \clubsuit$$

9.11.20. Teorema. Sean C(O,r) un círculo y P un punto en el exterior del círculo. Si desde P trazamos dos rectas l y m que sean tangentes al círculo en los puntos A y B, respectivamente, entonces

$$m(\angle BPA) = \frac{m(\overset{\frown}{ACB}) - m(\overset{\frown}{AB})}{2},$$

en donde C es un punto del arco mayor, determinado por los puntos A y B.

Prueba: Aplicando el Teorema 4.3.8, obtenemos la identidad

$$m(\angle BAD) = m(\angle BPA) + m(\angle ABP)$$
$$m(\angle BPA) = m(\angle BAD) - m(\angle ABP)$$
$$= (180 - m(\angle PAB)) - m(\angle ABP),$$

ver la figura 9.138. El Lema 9.11.18 establece las identidades

$$m(\angle ABP) = \frac{m(\overset{\frown}{AB})}{2} \text{ y } m(\angle PAB) = \frac{m(\overset{\frown}{AB})}{2}.$$

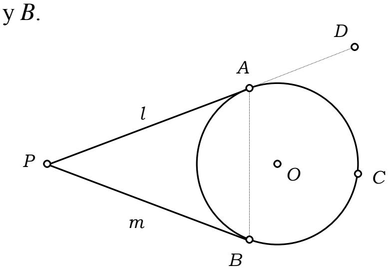


Figura 9.138

Sustituyendo,

$$m(\angle BPA) = (180 - \frac{m(\overset{\frown}{AB})}{2}) - \frac{m(\overset{\frown}{AB})}{2} = \frac{360 - m(\overset{\frown}{AB})}{2} - \frac{m(\overset{\frown}{AB})}{2} = \frac{m(\overset{\frown}{ACB}) - m(\overset{\frown}{AB})}{2}. \clubsuit$$

9.11.21. Teorema. Sean C(O,r) un círculo y P un punto en su exterior. Si desde P trazamos dos rectas l y m que sean tangentes al círculo en los puntos A y B, respectivamente, entonces

$$m(\angle BPA) + m(\overset{\frown}{AB}) = 180.$$

Prueba: Fijemos un punto C en el arco mayor del círculo determinado por los puntos A y B. De acuerdo con el teorema anterior, $m(\angle BPA) = \dfrac{m(\overset{\frown}{ACB}) - m(\overset{\frown}{AB})}{2}$. Por consiguiente,

$$m(\angle APC) + m(\overset{\frown}{AB}) = \frac{m(\overset{\frown}{ACB}) - m(\overset{\frown}{AB})}{2} + m(\overset{\frown}{AB}) = \frac{m(\overset{\frown}{ACB}) + m(\overset{\frown}{AB})}{2} = \frac{360}{2} = 180. \clubsuit$$

9.11.22. Teorema. Sean C(O,r) un círculo y AB y AC dos cuerdas de él mismo. Si prolongamos el segmento AC en la dirección del punto A hasta un punto D fuera del círculo, entonces

$$m(\angle BAD) = \frac{m(\overset{\frown}{AB}) + m(\overset{\frown}{AC})}{2}.$$

Prueba: Tenemos que

$$m(\angle BAD) = 180 - m(\angle CAB) = 180 - \frac{m(\angle COB)}{2} \qquad (9.5.6\ 1)$$

$$= 180 - \frac{360 - (m(\angle AOC) + m(\angle BOA))}{2}$$

$$= \frac{m(\angle BOA)}{2} + \frac{m(\angle AOC)}{2} = \frac{m(\overset{\frown}{AB}) + m(\overset{\frown}{AC})}{2}. \clubsuit$$

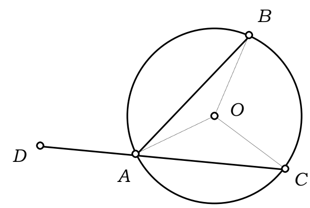


Figura 9.139

9.11.23. Teorema. Sean $\overset{\frown}{AB}$ un arco de un círculo C(O,r) y M su punto medio. Entonces,

$$|PA| + |PB| < 2|AM| = 2|MB|,$$

para todo punto $P \in \overset{\frown}{AB} - \{M\}$.

Prueba: Consideremos los triángulos ΔMAB y ΔPAB. Ya que la altura con respecto al lado AB del triángulo ΔMAB es r y la del triángulo ΔPAB es menor que r, hallamos que $are(\Delta PAB) < are(\Delta MAB)$. De acuerdo con el Teorema 8.4.1, sabemos que

$$\frac{|PA||PB|\operatorname{sen}\angle APB}{2} < \frac{|MA||MB|\operatorname{sen}\angle AMB}{2}$$

y como $\angle APB \cong \angle AMB$ (9.5.7 (1)), $|PA||PB| < |MA||MB|$. Aplicando la Ley de los Cosenos (8.2.8), obtenemos que

$$\cos\angle AMB = \frac{|MA|^2 + |MB|^2 - |AB|^2}{2|MA||MB|} = \cos\angle APB = \frac{|PA|^2 + |PB|^2 - |AB|^2}{2|PA||PB|}.$$

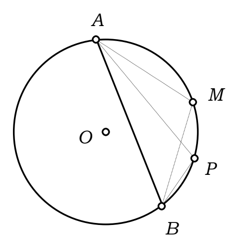


Figura 9.140

Como consecuencia de esto, encontramos que

$$|PA|^2 + |PB|^2 - |AB|^2 < |MA|^2 + |MB|^2 - |AB|^2$$
$$|PA|^2 + |PB|^2 < |MA|^2 + |MB|^2$$
$$|PA|^2 + |PB|^2 + 2|PA||PB| < |MA|^2 + |MB|^2 + 2|MA||MB|$$
$$(|PA| + |PB|)^2 < (|MA| + |MB|)^2$$
$$|PA| + |PB| < |MA| + |MB|.$$

Puesto que M yace en la mediatriz de la cuerda AB, $|MA| = |MB|$. ♣

9.11.24. Teorema. Sean C(O,r)y C(O',r') dos círculos tangentes en un punto C tales que C(O',r') $- \{C\} \subseteq$ int(C(O,r)). Si AB es una cuerda de C(O,r) tangente a C(O',r') en el punto D, entonces $\angle BCD \cong \angle DCA$.

Prueba: Prolongamos el segmento DC hasta que corte al círculo C(O,r) en el punto F y trazamos los segmentos EC y ED tangentes a C(O',r') en los puntos C y D, respectivamente (ver la figura 9.141). De acuerdo con el Teorema 9.3.9, sabemos que $EC \cong ED$. Según el Teorema 3.2.9, $\angle ECD \cong \angle CDE$. Por los Teoremas 9.11.5 y 9.11.18, hallamos que

$$m(\angle ECD) = \frac{m(\overset{\frown}{FC})}{2} = \frac{m(\overset{\frown}{FB}) + m(\overset{\frown}{BC})}{2}.$$

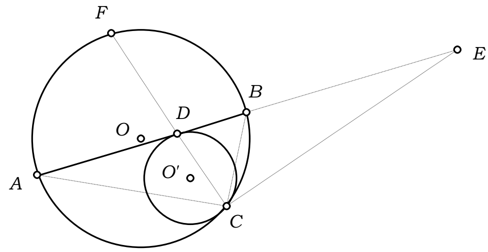


Figura 9.141

Por otra parte, del Teorema 9.11.16 vemos que

$$m(\angle CDE) = \frac{m(\overset{\frown}{AF}) + m(\overset{\frown}{BC})}{2}.$$

Igualando, obtenemos las identidades

$$m(\angle ECD) = \frac{m(\overset{\frown}{FB}) + m(\overset{\frown}{BC})}{2} = \frac{m(\overset{\frown}{AF}) + m(\overset{\frown}{BC})}{2} = m(\angle CDE)$$

$$\frac{m(\overset{\frown}{FB})}{2} = \frac{m(\overset{\frown}{AF})}{2}$$

$$m(\overset{\frown}{FB}) = m(\overset{\frown}{AF})$$

$$\overset{\frown}{FB} \cong \overset{\frown}{AF}.$$

Lo cual significa que F es el punto medio del arco $\overset{\frown}{AB}$. Del Teorema 9.11.14 concluimos que $\angle BCD \cong \angle DCA$.♣

9.12. El área y el perímetro de un círculo

No ahondaremos en los detalles del cálculo del perímetro de un círculo sino que lo daremos como definición. Recomendamos al lector el libro [l-45] que contiene información interesante sobre el famoso número π.

9.12.1. Teorema. El *perímetro* de un círculo de radio r es el número $2\pi r$ y su *área* es el número πr^2.

Para un círculo C(O,r), su perímetro será denotado por per(C(O,r)) = $2\pi r$ y su área por are(C(O,r)) = πr^2. Es claro que el área de un semicírculo es igual a la mitad del área del círculo que lo contiene. Al perímetro de un círculo también se le llama la circunferencia del círculo. Recordemos que el número π representa la razón entre el perímetro de un círculo y su diámetro (ver los detalles en el libro [l-45]).

9.12.2. Definición. Un *anillo* es la región limitada por dos círculos concéntricos de diferente radio. En la figura de la derecha, podemos ver señalado el anillo determinado por los círculos C(O,r) y C(O,s).

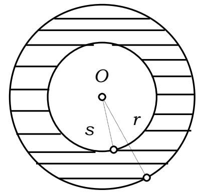


Figura 9.142

A continuación, enunciamos la fórmula para determinar el área de un anillo:

9.12.3. Teorema. El área del anillo determinado por los círculos concéntricos C(O,r) y C(O,s) es igual a

$$\pi(r^2 - s^2).$$

9.12.4. Definición. La *longitud de un arco* $\overset{\frown}{AB}$ de un círculo C(O,r) es el número

$$l(\overset{\frown}{AB}) = \pi r \frac{m(\overset{\frown}{AB})}{180}.$$

El *área del sector del circulo* C(O,r) determinada por los puntos A y B es

$$\pi r^2 \frac{m(\overset{\frown}{AB})}{360}.$$

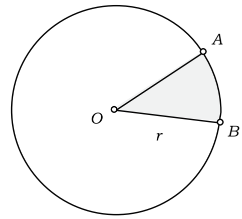


Figura 9.143

9.12.5. Teorema. Sean AB una cuerda de un círculo C(O,r). Para cada punto $C \in \overset{\frown}{AB}$, se cumple la igualdad

$$l(\overset{\frown}{AB}) = l(\overset{\frown}{AC}) + l(\overset{\frown}{CB}).$$

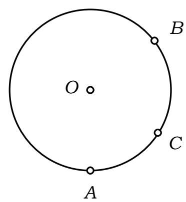


Figura 9.144

Prueba: Según el Teorema 9.11.4, sabemos que

$$m(\overset{\frown}{AB}) = m(\overset{\frown}{AC}) + m(\overset{\frown}{CB}).$$

De aquí y de la definición, hallamos que

$$l(\overset{\frown}{AC}) + l(\overset{\frown}{CB}) = \pi r \frac{m(\overset{\frown}{AC})}{180} + \pi r \frac{m(\overset{\frown}{CB})}{180} =$$

$$\pi r \frac{m(\overset{\frown}{AC}) + m(\overset{\frown}{CB})}{180} = \pi r \frac{m(\overset{\frown}{AB})}{180} = l(\overset{\frown}{AB}). ♣$$

9.12.6. Teorema. El *área de un segmento de uncírculo* C(O,r) determinado por los puntos A y B es igual al área del sector determinado por A y B, menos el área del triángulo ΔAOB (esto es cuando $\overset{\frown}{AB}$ es el arco menor), o bien, a el área del sector determinado por A y B, más el área del triángulo ΔAOB (esto es cuando $\overset{\frown}{AB}$ es el arco mayor).

Prueba:

Figura 9.145

♣

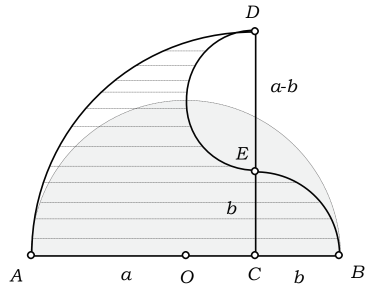
El resultado que a continuación presentamos es de Leon Bankoff (Problem 2377, School Sci. And Math. 53 (1953), 665) y su demostración es sin palabras.

9.12.7. Teorema. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. Consideremos un semicírculo de diámetro AB y fijamos un punto $C \in AB$. Trazamos una recta perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ en el punto C y sobre ella colocamos dos puntos cualesquiera D y E, de tal forma que D y E estén en un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{AB}$ y que $AC \cong CD$ y $CB \cong CE$. Trazando semicírculos, formamos la figura 9.146. Tenemos entonces que el área del semicírculo de diámetro AB es igual al área de la región curvilínea $ACBED$.

2. $(a+b)^2 = 2a^2 + 2b^2 - (a-b)^2$, siempre que a, b y c sean tres números reales positivos tales que $a > b$.

Prueba:



♣

Figura 9.146

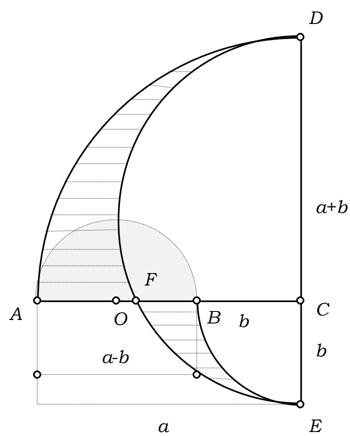
La siguiente equivalencia es de H. F. Fehr [a-47] y su prueba es esencialmente la figura 9.147.

9.12.8. Teorema. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. Consideremos un semicírculo de diámetro AB y extendemos AB hasta un punto C. Trazamos una recta perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ en el punto C y, sobre la misma, ubicamos dos puntos cualesquiera D y E, de tal forma D y E estén en diferentes semiplanos determinados por la recta $\overleftrightarrow{AB}$ y que $AC \cong CD$ y $CB \cong CE$. Trazando círculos, formamos la figura 9.147. Entonces, el área del semicírculo de diámetro AB es igual a la diferencia de las áreas de las regiones curvilíneas AFD y OEB.

2. $(a-b)^2 = 2a^2 + 2b^2 - (a+b)^2$, siempre que a, b y c sean tres números reales positivos tales que $a > b$.

Prueba:

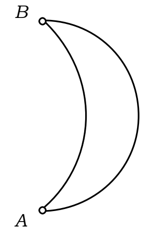


♣

Figura 9.147

9.13. Lúnulas

Los árabes llamaron *lúnula* ó media luna a la figura que se forma por dos semicírculos con dos puntos en común, tal y como lo muestra la figura 9.148.



lúnula
Figura 9.148

Uno de los primeros intentos serios para resolver el problema de la cuadratura del círculo fue llevado a cabo por Hipócrates de Chios (430 b.C.). En su intento descubrió el siguiente resultado.

9.13.1. Teorema de las Lúnulas de Hipócrates. Sea ΔABC un triángulo rectángulo con hipotenusa a. Consideremos el circuncírculo del triángulo y los semicírculos de diámetros AB y AC. Entonces, la suma de las áreas de las lúnulas que se forman, como muestra la figura 9.149, es igual al área del triángulo ΔABC.

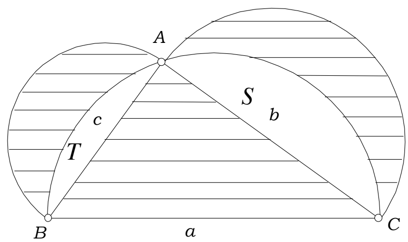


Figura 9.149

Prueba: Sea R el circunradio del triángulo ΔABC. Sabemos que el área del semicírculo de diámetro BC es $\frac{1}{2}\pi R^2$, el área del semicírculo de diámetro AC es $\frac{1}{8}\pi b^2$ y área del semicírculo de diámetro AB es $\frac{1}{8}\pi c^2$. Según el Teorema de Pitágoras (8.5.1) y el Corolario 9.10.15,

$$a^2 = 4R^2 = b^2 + c^2 .$$

Por consiguiente,

$$\frac{1}{8}\pi b^2 + \frac{1}{8}\pi c^2 = \frac{1}{8}\pi(b^2 + c^2) = \frac{1}{2}\pi R^2 .$$

Si S y T son las áreas de las regiones no sombreadas, entonces

$$are(\Delta ABC) = \frac{1}{2}\pi R^2 - (S+T) = (\frac{1}{8}\pi b^2 - S) + (\frac{1}{8}\pi c^2 - T),$$

en donde

$$\frac{1}{8}\pi b^2 - S \quad \text{y} \quad \frac{1}{8}\pi c^2 - T$$

son las áreas de las lúnulas sombreadas.♣

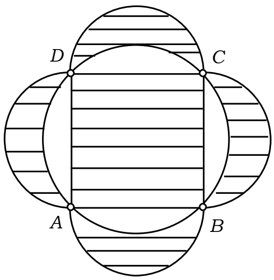


Figura 9.150

Aplicando de manera directa el teorema anterior, Hipócrates descubrió uno de los resultados geométricos más interesantes de su época:

El área del cuadrado es igual a la suma de las áreas de las lúnulas formadas por los semicírculos sobre los lados del cuadrado y el círculo circunscrito en el mismo.

De esta forma, se encuentra la primera cuadratura de una región curvilínea en la historia de las matemáticas. Una extensión del Teorema de las Lúnulas de Hipócrates a cuadriláteros circunscritos arbitrarios la llevaron a cabo los matemáticos A. R. Amir-Moéz y J. D. Hamilton en su artículo [a-3]. A continuación, presentamos dicha generalización.

9.13.2. Teorema[a-3]. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero circunscrito en el círculo $\mathrm{C}(O,r)$. Trazamos los semicírculos de diámetros AB, BC, CD y DA. Entonces, el área del cuadrilátero $\square ABCD$ es igual a la suma de las áreas de las lúnulas que forman $\mathrm{C}(O,R)$ y los semicírculos si y solo si una de las siguientes condiciones se cumple:

1. Los puntos A, O y C son colineales.
2. Los puntos B, O y D son colineales.
3. Las diagonales del cuadrilátero son perpendiculares.

Prueba: Es suficiente con analizar cuando el área del círculo $\mathrm{C}(O,r)$ es igual a la suma de las áreas de los cuatro semicírculos. Efectivamente, las áreas de los semicírculos de diámetros AB, BC, CD y DA son

$$S_1 = \frac{\pi}{8}a^2,\ S_2 = \frac{\pi}{8}b^2,\ S_3 = \frac{\pi}{8}c^2 \text{ y } S_4 = \frac{\pi}{8}d^2,$$

respectivamente. Igualando al área del círculo, obtenemos que

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = are(\mathrm{C}(O,R)) = \pi R^2$$

$$\frac{\pi}{8}a^2 + \frac{\pi}{8}b^2 + \frac{\pi}{8}c^2 + \frac{\pi}{8}d^2 = \pi R^2$$

$$\frac{\pi}{8}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = \pi R^2.$$

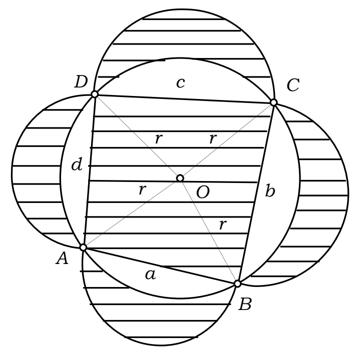


Figura 9.151

Por la Ley de los Cosenos (8.2.8), sabemos que

$a^2 = 2R^2 - R^2 \cos\angle AOB$, $b^2 = 2R^2 - R^2\cos\angle BOC$, $c^2 = 2R^2 - R^2\cos\angle COD$ y $d^2 = 2R^2 - R^2\cos\angle DOA$.

Sustituyendo, hallamos que

$$\pi R^2 = \frac{\pi}{8}R^2(8 - \cos\angle AOB - \cos\angle BOC - \cos\angle COD - \cos\angle DOA)$$

$$\cos\angle AOB + \cos\angle BOC + \cos\angle COD + \cos\angle DOA = 0$$

$$\cos\angle COD + \cos\angle DOA = -(\cos\angle AOB + \cos\angle BOC).$$

Como $m(\angle AOB) + m(\angle BOC) + m(\angle COD) + m(\angle DOA) = 360$, por la periodicidad de la función coseno,

$$\cos(\angle AOB + \angle BOC + \angle COD) = \cos\angle DOA.$$

Entonces, $\cos(\angle AOB + \angle BOC + \angle COD) + \cos\angle COD = -(\cos\angle AOB + \cos\angle BOC)$. Usando una de las fórmulas del Teorema 8.2.1 (9), vemos que

$$2\cos\frac{\angle AOB+\angle BOC+2\angle COD}{2}\cos\frac{\angle AOB+\angle BOC}{2}=-2\cos\frac{\angle AOB+\angle BOC}{2}\cos\frac{\angle AOB-\angle BOC}{2}.$$

Supongamos que $\cos\frac{\angle AOB+\angle BOC}{2}=0$. Entonces, $\angle AOB + \angle BOC = 180$. Es decir, los puntos A, O y C son colineales. Supongamos pues que $\cos\frac{\angle AOB+\angle BOC}{2}\neq 0$. De donde se sigue que

$$2\cos\frac{\angle AOB+\angle BOC+2\angle COD}{2} = -2\cos\frac{\angle AOB-\angle BOC}{2}$$

$$2\cos\left(\frac{\angle AOB+\angle BOC}{2}+\angle COD\right) = -2\cos\frac{\angle AOB-\angle BOC}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\angle AOB+\angle BOC}{2}+\angle COD\right) = \cos\left(180-\frac{\angle AOB-\angle BOC}{2}\right).$$

Por las propiedades de la función coseno (8.2.1 (2)), se tienen dos posibles identidades:

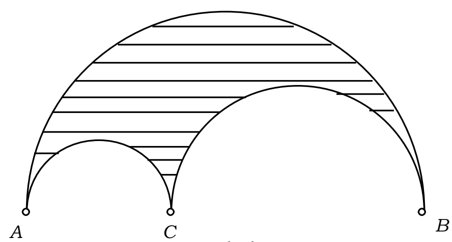
$$\frac{\angle AOB+\angle BOC}{2}+\angle COD-\frac{\angle AOB-\angle BOC}{2}=180 \text{ ó}$$

$$\frac{\angle AOB+\angle BOC}{2}+\angle COD+\frac{\angle AOB-\angle BOC}{2}=180.$$

El primer caso nos conduce a la identidad $\angle BOC + \angle COD = 180$, lo cual significa que los puntos B, O y D son colineales. Y la igualdad del segundo caso, implica que $\angle AOB + \angle COD = 180$. Entonces, por el Problema 9.793, obtenemos que las diagonales del cuadrilátero $\square ABCD$ son perpendiculares. La manera en que se analizaron las condiciones nos da la demostración de la necesidad y suficiencia del teorema. ♣

9.14. Arbelos

9.14.1. Definición. Un *arbelo* es una superficie determinada por tres semicírculos como lo muestra la figura 9.152. Los diámetros de los semicírculos son colineales y el radio del semicírculo mayor, es igual a la suma de los radios de los otros dos semicírculos.



arbelo
Figura 9.152

Podemos ver en la figura 9.152 que los semicírculos de diámetros AB, AC y CB determinan el arbelo.

La palabra griega arbelo significa literalmente *cuchillo de zapatero*. Los arbelos fueron introducidos por Arquímedes en su libro *Liber Assumptorum* (El libro de los Lemas). Para aquellos lectores que tengan curiosidad sobre el tema, el libro de L. T. Heath [1-170] contiene el tratado completo de Arquímedes sobre los arbelos. Los arbelos han sido intensamente estudiados en los últimos siglos y poseen una amplia variedad de propiedades geométricas.

9.14.2. Teorema. Si el arbelo A está determinado por semicírculos de los círculos $C(O,r)$, $C(O',r')$ y $C(O'',r'')$, siendo $C(O,r)$ el círculo mayor, y los diámetros colineales AC y CB de $C(O',r')$ y $C(O'',r'')$, respectivamente, entonces:

1. $r = r' + r''$,
2. $are(\mathrm{A}) = \pi r' r''$ y
3. $per(\mathrm{A}) = per(C(O,r))$.

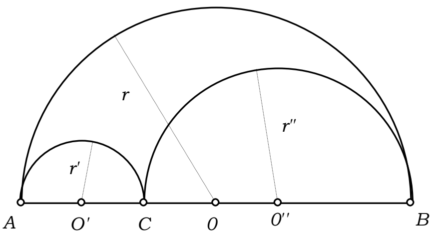


Figura 9.153

Prueba: La primera identidad se sigue del hecho de que AB, BC y AC son diámetros de C(O,r), C(O’,r’) y C(O’’,r’’), respectivamente. Por una parte, sabemos de la definición que se cumple la igualdad

$$are(\mathrm{A}) = \frac{\pi r^2}{2} - \left(\frac{\pi r'^2}{2} + \frac{\pi r''^2}{2}\right) = \frac{\pi}{2}(r^2 - r'^2 - r''^2) = \frac{\pi}{2}(r'^2 + 2r''r' + r''^2 - r'^2 - r''^2) =$$

$$\frac{\pi}{2} 2r'r'' = \pi r'r''.$$

Y, por otra parte, tenemos que $per(\mathrm{A}) = \dfrac{per(\mathrm{C}(O,r))}{2} + \dfrac{per(\mathrm{C}(O',r'))}{2} + \dfrac{per(\mathrm{C}(O'',r''))}{2}$

$$= \frac{2\pi r}{2} + \frac{2\pi r'}{2} + \frac{2\pi r''}{2} = \pi(r + r' + r'') = 2\pi r = per(\mathrm{C}(O,r)).\ ♣$$

En su libro, Arquímedes estableció las siguientes propiedades de los arbelos:

9.14.3. Teorema de Arquímedes. Sea A un arbelo determinado por semicírculos de los círculos C(O,r), C(O’,r’) y C(O’’,r’’), en donde C(O,r) es el círculo mayor, y los diámetros colineales AC y CB de los círculos C(O’,r’) y C(O’’,r’’), respectivamente. Siendo AB un diámetro del círculo C(O,r) y $C \in AB$. Trazamos una recta perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ en el punto C que corte al semicírculo de diámetro AB en el punto D. Sean P y P’ los puntos de intersección de DA y DB con los semicírculos de diámetro AC y CB, respectivamente. Entonces, se cumplen las siguientes afirmaciones:

1. Los segmentos CD y PP’ son congruentes y se cortan en su punto medio.
2. El segmento PP’ es tangente a los semicírculos de diámetros AC y CB en los puntos P y P’, respectivamente.
3. El área del arbelo A es igual al área del círculo de diámetro CD.
4. $\left(\dfrac{|CD|}{2}\right)^2 = r'r''$.
5. $|AD|^2 = 4r'(r' + r'')$ y $|BD|^2 = 4r''(r' + r'')$.
6. $|O'M|^2 = r'(r' + r'')$ y $|O''M|^2 = r''(r' + r'')$.

Prueba: 1 y 2. Sean O’ y O’’ los puntos medios de AC y CB, respectivamente. Entonces, O’ y O’’ son los centros de los semicírculos de diámetro AC y CB, respectivamente. Por el Teorema 9.5.2, los ángulos $\angle ADB$, $\angle APC$ y $\angle CP'B$ son rectos. De aquí, por el Teorema 3.7.1, se obtiene que $\overleftrightarrow{DB} \parallel \overleftrightarrow{PC}$ y $\overleftrightarrow{DA} \parallel \overleftrightarrow{P'C}$. Por ello, el cuadrilátero □$CP'PD$ es un rectángulo. De donde vemos que los segmentos CD y PP’ se cortan en su punto medio, al cual lo denotamos por M (Teoremas 5.3.1 y 5.5.2). Esto prueba la primera afirmación. Para probar el segundo enunciado, sabemos

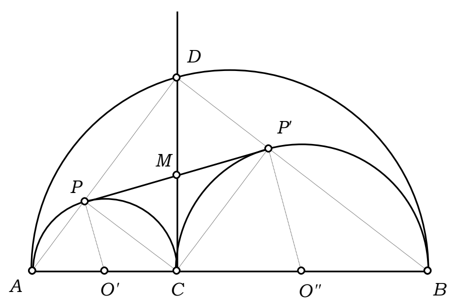


Figura 9.154

que los triángulos $\Delta O'CP$ y ΔMPC son isósceles y, por ello, se tiene que $\angle PCO' \cong \angle O'PC$ y $\angle DCP \cong \angle CPM$. Como $m(\angle PCO') + m(\angle DCP) = 90$, los ángulos $\angle O'PC$ y $\angle CPM$ son complementarios adyacentes.

Por lo tanto, $\overleftrightarrow{PO'} \perp \overleftrightarrow{PP'}$. De acuerdo con el Teorema 9.3.6, PP' es tangente al semicírculo de diámetro AC en el punto P. De igual manera, se demuestra que PP' es tangente al semicírculo de diámetro CB en el punto P'. Así, queda probado el segundo enunciado.

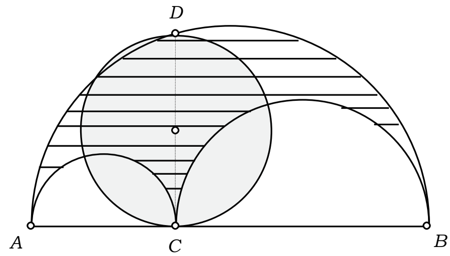


Figura 9.155

3. Las áreas de los tres semicírculos son

$$\frac{\pi}{2}\frac{|AB|^2}{4},\quad \frac{\pi}{2}\frac{|AC|^2}{4}\quad \text{y}\quad \frac{\pi}{2}\frac{|CB|^2}{4}.$$

Por lo cual, el área del arbelo es igual a

$$\frac{\pi}{2}\frac{|AB|^2}{4}-\frac{\pi}{2}\frac{|AC|^2}{4}-\frac{\pi}{2}\frac{|CB|^2}{4} = \frac{\pi}{2}\frac{(|AC|+|CB|)^2}{4}-\frac{\pi}{2}\frac{|AC|^2}{4}-\frac{\pi}{2}\frac{|CB|^2}{4} =$$

$$\frac{\pi}{2}\frac{(|AC|^2+2|AC||CB|+|CB|^2)}{4}-\frac{\pi}{2}\frac{|AC|^2}{4}-\frac{\pi}{2}\frac{|CB|^2}{4} = \frac{\pi}{2}\frac{2|AC||CB|}{4} = \frac{\pi|AC||CB|}{4}.$$

Sabemos, por el Corolario 9.5.3, que $|CD|^2 = |AC||CB|$ y, por consiguiente, el área del arbelo es igual a $\frac{\pi|CD|^2}{4}$, pero esta es el área del círculo de diámetro CD.

4. De acuerdo con el Teorema 9.14.2 (2), el área del arbelo A es igual a

$$are(\mathrm{A}) = are(\mathrm{C}(M,|MC|)) = \pi r'r'' = \pi|MC|^2.$$

Como M es el punto medio de CD, concluimos que $r'r'' = |MC|^2 = \left(\frac{|CD|}{2}\right)^2$.

5. Tenemos que ΔDAC y ΔDCB son triángulos rectángulos. Según el Teorema de Pitágoras (8.5.1) y el cuarto inciso, hallamos que

$$|AD|^2 = |AC|^2 + |CD|^2 \text{ y } |BD|^2 = |CB|^2 + |CD|^2$$

$$|AD|^2 = 4r'^2 + 4r'r'' = 4r'(r'+r'') \text{ y } |BD|^2 = 4r''^2 + 4r'r'' = 4r''(r'+r'').$$

6. De nueva cuenta, aplicamos el Teorema de Pitágoras (8.5.1) y el cuarto inciso para obtener las identidades

$$|O'M|^2 = |O'C|^2 + |MC|^2 = r'^2 + \left(\frac{|DC|}{2}\right)^2 = r'^2 + r'r'' = r'(r'+r'').$$

Similarmente, se demuestra la igualdad

$$|O''M|^2 = r''(r'+r''). \clubsuit$$

Los resultados que enunciamos a continuación fueron tomados del artículo de L. Raphael [a-134].

9.14.4. Teorema. Sea A un arbelo determinado por semicírculos de los círculos $\mathrm{C}(O,r)$, $\mathrm{C}(O',r')$ y $\mathrm{C}(O'',r'')$, en donde $\mathrm{C}(O,r)$ es el círculo mayor, y AC y CB son diámetros colineales de los círculos $\mathrm{C}(O',r')$ y $\mathrm{C}(O'',r'')$, respectivamente. Se tiene que AB es un diámetro del círculo $\mathrm{C}(O,r)$ y $C \in AB$. Con la notación del Teorema 9.14.3 y poniendo $g = \frac{r'r''}{r'+r''}$, sabemos que las siguientes afirmaciones se cumplen:

1. $|PC|^2 = 4gr'$ y $|P'C|^2 = 4gr''$.
2. $are(\square CP'DP) = 2g|DC|$.
3. $\frac{1}{g} = \frac{1}{r'} + \frac{1}{r''}$.

Prueba: 1. Según el Teorema 8.1.1, $\Delta PAC \sim \Delta DCB$. De aquí vemos que $\dfrac{|PC|}{|CB|} = \dfrac{|AC|}{|DB|}$ y, por tanto,

$$|PC|^2 = \frac{|CB|^2|AC|^2}{|BD|^2} = \frac{4r''^2\,4r'^2}{4r''(r'+r'')} = \frac{4r'^2\,r''}{r'+r''} = 4gr'.$$

Con un argumento completamente similar, se establece la igualdad $|P'C|^2 = 4gr''$.

2. De la definición y la primera cláusula hallamos que

$$are(\square CP'DP) = |PC||P'C| = \sqrt{4gr'}\,\sqrt{4gr''} = 2g\sqrt{4r'r''} = 2g|DC|.$$

3. Por definición, $\dfrac{1}{g} = \dfrac{r'+r''}{r'r''} = \dfrac{1}{r'} + \dfrac{1}{r''}$. ♣

9.14.5. Teorema. Sea A un arbelo determinado por semicírculos de los círculos $\mathcal{C}(O,r)$, $\mathcal{C}(O',r')$ y $\mathcal{C}(O'',r'')$, siendo $\mathcal{C}(O,r)$ el círculo mayor, y los diámetros colineales AC y CB de $\mathcal{C}(O',r')$ y $\mathcal{C}(O'',r'')$ respectivamente. Tenemos que AB es un diámetro del círculo $\mathcal{C}(O,r)$ y $C\in AB$. Trazamos rectas l y m perpendiculares a $\overleftrightarrow{AB}$ en los puntos A y B, respectivamente. Sean $A'\in l$ y $B'\in m$, tal que $|AA'| = r'$ y $|BB'| = r''$, y T el punto de intersección de AB' y BA'. Entonces, se cumplen los siguientes enunciados:

1. $T\in DC$.
2. $|TC| = g$.

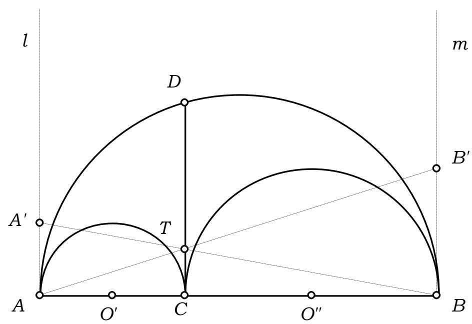


Figura 9.156

Prueba: Sean R y S los puntos de intersección de AB' y DC, y BA' y DC, respectivamente.

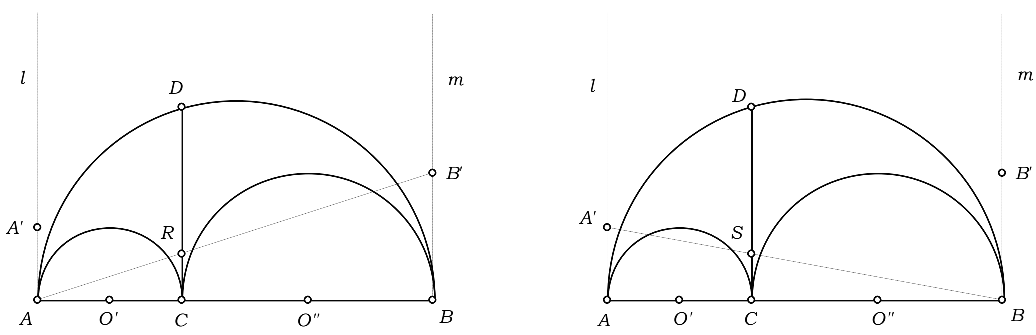


Figura 9.157

De acuerdo con el Primer Criterio de Semejanza (6.2.6), sabemos que $\Delta RAC \sim \Delta B'AB$ y $\Delta SCB \sim \Delta A'AB$. Por lo cual, $\dfrac{|RC|}{|BB'|} = \dfrac{2r'}{2(r'+r'')}$ y $\dfrac{|SC|}{|AA'|} = \dfrac{2r''}{2(r'+r'')}$. De aquí se sigue que

$$|RC| = |SC| = \frac{2r'r''}{2(r'+r'')} = \frac{r'r''}{r'+r''}.$$

El Teorema 1.10.4 nos asegura que $R = S = T$. Esto prueba la primera parte del teorema.

2. En la demostración del primer inciso, vimos que $|TC| = \dfrac{r'r''}{r'+r''} = g$. ♣

El teorema que a continuación presentamos es de L. Raphael [a-134].

9.14.6. Teorema. Sea A un arbelo determinado por semicírculos de los círculos C(O,r), C(O',r') y C(O'',r''), en donde C(O,r) es el círculo mayor, y los diámetros colineales AC y CB de los círculos C(O',r') y C(O'',r''), respectivamente. Sean T, A' y B' son los puntos considerados en el teorema anterior. Por el punto T trazamos rectas tangentes a C(O',r') y C(O'',r'') en los puntos E y E', respectivamente, que corten a las rectas $\overleftrightarrow{BB'}$ y $\overleftrightarrow{AA'}$ en los puntos F y F', respectivamente. Entonces, se cumplen las siguientes afirmaciones:

1. $|FE| = \dfrac{r'(r'+r'')}{r''}$, $|F'E'| = \dfrac{r''(r'+r'')}{r'}$ y $|FF'| = \dfrac{(r'+r'')(r'^2+r''^2)}{r'r''}$.
2. FF' es tangente al círculo C(O,r).
3. Si G es el punto de tangencia de FF' y C(O,r), entonces $FG \cong FA$ y $F'G \cong F'B$.
4. [a-9]. $|TC| = |PE| = |PE'| = g$.

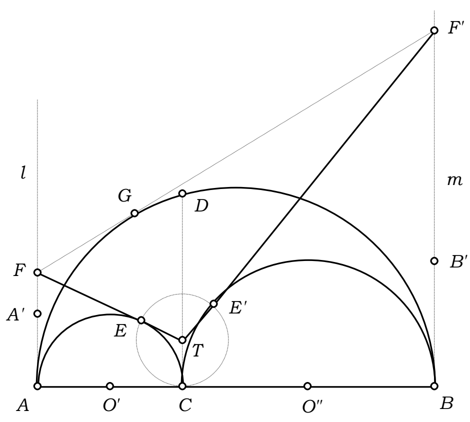


Figura 9.158

Prueba: De los Teoremas 9.3.8 y 9.14.5 deducimos que los puntos E, E' y C pertenecen al círculo C(T,g).

1. De acuerdo con el Teorema de Pitágoras (8.5.1), hallamos que

$$|FT|^2 = |AC|^2 + (|AF| - |TC|)^2 = |AC|^2 + |AF|^2 - 2|AF||TC| + |TC|^2 =$$
$$4r'^2 + |AF|^2 - 2|AF||TC| + |TC|^2 = 4r'^2 + |AF|^2 - 2|AF|g + g^2$$
$$(|FE| + |ET|)^2 = 4r'^2 + g^2 + |AF|^2 - 2|AF|g$$
$$|FE|^2 + 2|FE||ET| + |ET|^2 = |FE|^2 + 2|AF|g + g^2 = 4r'^2 + g^2 + |AF|^2 - 2|AF|g$$
$$4|AF|g = 4r'^2$$
$$|AF| = \frac{r'^2}{g}$$

$$|AF| = |FE| = \frac{r'(r'+r'')}{r''}.$$

De manera análoga, se demuestra la igualdad

$$|F'E'| = \frac{r''(r'+r'')}{r'}.$$

Por el Teorema de Pitágoras (8.5.1),

$$|FF'|^2 = (2(r' + r''))^2 + (|F'E'| - |AF|)^2 = 4(r' + r'')^2 + (|F'E'| - |FE|)^2 =$$

$$4(r' + r'')^2 + \left(\frac{r''(r'+r'')}{r'} - \frac{r'(r'+r'')}{r''}\right)^2 = 4(r' + r'')^2 + \left(\frac{r''^2 - r'^2}{r'r''}\right)^2 (r' + r'')^2$$

$$(r' + r'')^2 \left(4 + \frac{(r''^2 - r'^2)^2}{r'^2 r''^2}\right) = (r' + r'')^2 \frac{4r'^2 r''^2 + r''^4 - 2r'^2 r''^2 + r'^4}{r'^2 r''^2} = (r' + r'')^2 \frac{(r''^2 + r'^2)^2}{r'^2 r''^2}$$

$$|FF'| = \frac{(r'+r'')(r''^2+r'^2)}{r'r''}.$$

2. Fijemos un punto $G \in FF'$ tal que $FG \cong AF$. Del Teorema 9.3.8 y el primer inciso encontramos que

$$|FG| = |FE| = \frac{r'(r'+r'')}{r''} \text{ y } |FF'| = \frac{(r'+r'')(r'^2+r''^2)}{r'r''}.$$

Restando obtenemos que

$$|F'G| = |FF'| - |FG| = \frac{(r'+r'')(r'^2+r''^2)}{r'r''} - \frac{r'(r'+r'')}{r''} =$$

$$\frac{(r'+r'')(r'^2+r''^2-r'^2)}{r'r''} = \frac{(r'+r'')r''^2}{r'r''}$$

$$= \frac{r''(r'+r'')}{r'} = |F'E'|,$$

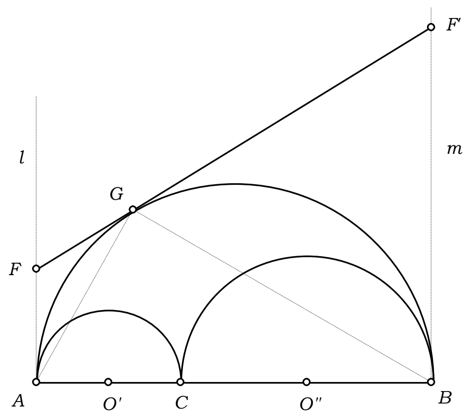


Figura 9.159

la última igualdad se sigue del primer inciso. El Teorema 9.3.8 implica que $F'E' \cong F'B$. Así, con base al Teorema 1.8.1, $F'G \cong F'B$. Aplicando el Problema 4.77, podemos ver que el ángulo $\angle AGB$ es recto y, por el Teorema 9.5.12, obtenemos que $G \in \mathcal{C}(O,r)$. Por otra parte, el Problema 4.78 nos asegura que $GO \perp FF'$. Del Teorema 9.3.6 deducimos que FF' es tangente al círculo $\mathcal{C}(O,r)$ en el punto G.

La afirmación de la tercera cláusula se sigue directamente del Teorema 9.3.8, y el enunciado de la cuarta cláusula es una consecuencia directa del Teorema 9.14.5 y el Teorema 9.3.8, pues $|TC| = |TE| = |TE'|$. ♣

9.14.7. Teorema. Sea A un arbelo determinado por semicírculos de los círculos $\mathcal{C}(O,r)$, $\mathcal{C}(O',r')$ y $\mathcal{C}(O'',r'')$, en donde $\mathcal{C}(O,r)$ es el círculo mayor, y por los diámetros colineales AC y CB de los círculos $\mathcal{C}(O',r')$ y $\mathcal{C}(O'',r'')$, respectivamente. Con la notación del Teorema 9.14.6, sea Q el punto de intersección de las semirrectas $\overrightarrow{O'E}$ y $\overrightarrow{OG}$. Si $t = |QE|$, entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

1. El círculo $\mathcal{C}(Q,t)$ es tangente a los tres círculos $\mathcal{C}(O,r)$, $\mathcal{C}(O',r')$ y $\mathcal{C}(O'',r'')$.
2. $t = \dfrac{rr'r''}{r'^2+r'r''+r''^2}$.
3. $d(Q, \overleftrightarrow{AB}) = 2t$.
4. $\dfrac{1}{g} = \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{r'+r''}$.

Prueba: 1. En la demostración del teorema anterior, vimos que $GO \perp FF'$ y $FG \cong FE$. Ahora, consideremos los triángulos rectángulos ΔQGF y ΔQFE. Por el criterio de congruencia (3.6.5), hallamos que $\Delta QGF \cong \Delta QFE$. Por ello, $GQ \cong QE$. Con un argumento similar, se demuestra que $GQ \cong QE'$. Así, hemos probado que los puntos G, E y E' pertenecen al círculo $\mathrm{C}(Q,t)$. No es difícil ver que $E'Q \perp E'F'$ y puesto que $GQ \perp FF'$, hallamos que $EQ \perp FE$. Según el Teorema 9.3.6, se obtiene que $\mathrm{C}(Q,t)$ es tangente a $\mathrm{C}(O,r)$, $\mathrm{C}(O',r')$ y $\mathrm{C}(O'',r'')$.

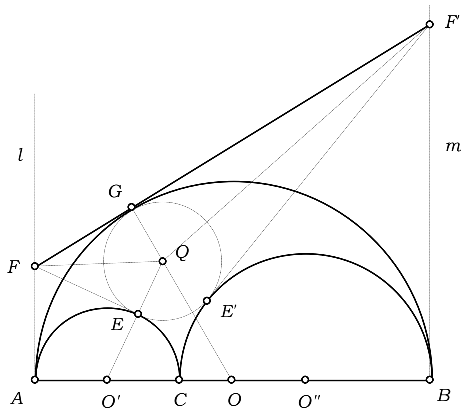


Figura 9.160

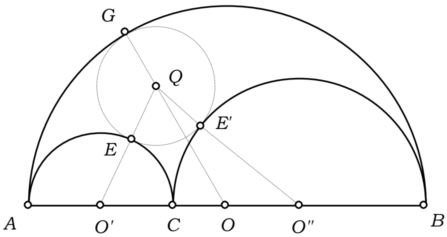


Figura 9.161

2. Sea h la altura correspondiente al lado $O'O''$ del triángulo $\Delta QO'O''$. Aplicando la fórmula del Teorema 8.3.16, hallamos que

$$h = \frac{2}{r'+r''}\sqrt{(r'+r''+t)r'r''t}$$

$$h^2 = \frac{4r'r''t(r'+r''+t)}{(r'+r'')^2}.$$

Como además se tiene que h es la altura del triángulo $\Delta QO'O$ correspondiente al lado $O'O$, usando la misma fórmula del Teorema 8.3.16, obtenemos la identidad $h^2 = \dfrac{4rr't(r''-t)}{(r-r')^2}$. Igualando ambas expresiones de h, llegamos a que

$$\frac{4r'r''t(r'+r''+t)}{(r'+r'')^2} = \frac{4rr't(r''-t)}{(r-r')^2}$$

$$\frac{r''(r'+r''+t)}{(r'+r'')^2} = \frac{r(r''-t)}{(r-r')^2}$$

$$\frac{r''t}{(r'+r'')^2} + \frac{rt}{(r-r')^2} = \frac{rr''}{(r-r')^2} - \frac{r''(r'+r'')}{(r'+r'')^2}$$

$$t = \frac{rr''(r'+r'')^2 - r''(r'+r'')(r-r')^2}{r''(r-r')^2 + r(r'+r'')^2} = \frac{(r'+r'')(rr''(r'+r'') - r''(r-r')^2)}{r''(r-r')^2 + r(r'+r'')^2}$$

$$= \frac{rr''(r-r'')(r+r'')}{r''r^2 - 2rr'r'' + r''r'^2 + rr'^2 + 2rr'r'' + rr''^2} = \frac{rr''(r-r'')(r+r'')}{rr''(r+r'') + r'^2(r+r'')} = \frac{rr'r''}{r'^2 + rr''}$$

$$= \frac{rr'r''}{r'^2 + (r'+r'')r''} = \frac{rr'r''}{r'^2 + r'r'' + r''^2}.$$

3. Sustituyendo el valor de t en función de los radios, según el primer inciso, vemos que

$$h^2 = \frac{4r'r''t(r'+r''+t)}{(r'+r'')^2} = \frac{4r^2r'^2r''^2(r'^2 + 2r'r'' + r''^2)}{(r'+r'')^2(r'^2 + r'r'' + r''^2)^2} = \frac{4r^2r'^2r''^2}{(r'^2 + r'r'' + r''^2)^2} = 4t^2.$$

Por lo tanto, $h = d(Q, \overleftrightarrow{AB}) = 2t$.

4. De la segunda cláusula se siguen las relaciones

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{r'+r''} = \frac{r'^2+r'r''+r''^2}{rr'r''} + \frac{1}{r'+r''} = \frac{r'^2+rr''+r''^2+r'r''}{(r'+r'')r'r''}$$

$$= \frac{r'^2+2r'r''+r''^2}{(r'+r'')r'r''} = \frac{(r'+r'')^2}{(r'+r'')r'r''} = \frac{r'+r''}{r'r''} = \frac{1}{g}. \ ♣$$

El siguiente teorema corresponde a la Proposición 5 del libro de Arquímedes *Liber Assumptorum*.

9.14.8. Teorema de los Círculos Gemelos de Arquímedes. Sea A un arbelo determinado por semicírculos de los círculos C(O,r), C(O',r') y C(O'',r''), en donde C(O,r) es el círculo mayor, y los diámetros colineales AC y CB de los círculos C(O',r') y C(O'',r''), respectivamente. Con la notación del Teorema 9.14.3, tenemos que el círculo tangente a los círculos C(O,r) y C(O',r') y al segmento CD tiene el mismo radio que el círculo tangente a los círculos C(O,r) y C(O'',r''), y al segmento CD.

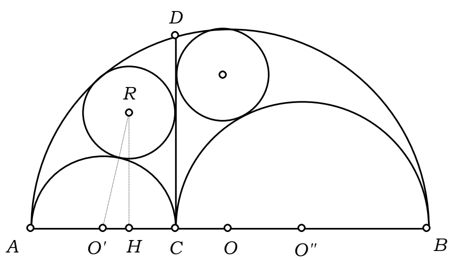


Figura 9.162

Prueba: Sean C(R,x) el círculo tangente a los círculos C(O,r) y C(O',r') y al segmento CD, y H la proyección del punto R sobre AB. Por definición, sabemos que

$$\cos\angle HO'R = \frac{|O'H|}{|OR|} = \frac{r'-x}{r'+x}.$$

Por la Ley de los Cosenos (8.2.8) aplicada al triángulo $\Delta RO'O$, hallamos la identidad

$$|OR|^2 = |O'O|^2 + |O'R|^2 - 2|O'O||O'R|\cos\angle HO'R$$

$$(r-x)^2 = (r-r')^2 + (r'+x)^2 - 2(r-r')(r'+x)\frac{r'-x}{r'+x} =$$

$$(r-r')^2 + (r'+x)^2 - 2(r-r')(r'-x) = (r-r')(r-r'-r'+x) + (r'+x)^2 = (r-r')(r+x-2r') + (r'+x)^2$$

$$= (r'+x)^2 + r''^2 - 2r''(r'-x).$$

De aquí se sigue la igualdad

$$r^2 - 2rx + x^2 = r'^2 + 2r'x + x^2 + r''^2 - 2r''r' + 2r''x$$

$$r^2 - 4rx = (r''-r')^2$$

$$x = \frac{r^2-(r''-r')^2}{4r} = \frac{(r''+r')^2-(r''-r')^2}{4r} = \frac{2r''r'+2r''r'}{4r} = \frac{r'r''}{r'+r''} = g.$$

Con un razonamiento similar, se demuestra que el radio tangente a los círculos C(O,r) y C(O'',r''), y al segmento CD es igual a g. ♣

La proposición número 6 del libro de Arquímedes se puede demostrar de manera directa, tal y como se explica a continuación:

9.14.9. Teorema de Arquímedes. Sea A un arbelo determinado por semicírculos de los círculos C(O,r), C(O',r') y C(O'',r''), en donde C(O,r) es el círculo mayor, y los diámetros colineales AC y CB de los círculos C(O',r') y C(O'',r''), respectivamente. Con la notación del Teorema 9.14.7, si $\frac{|AC|}{|CB|} = k$, entonces

$$\frac{2t}{|AB|} = \frac{k}{1+k+k^2}.$$

Prueba: Sabemos que $\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{r'}{r''} = k$ y, por el Teorema 9.14.7, tenemos que

$$t = \frac{rr'r''}{r'^2+r'r''+r''^2}.$$

Por consiguiente,

$$\frac{k}{1+k+k^2} = \frac{\frac{r'}{r''}}{r''\left(\frac{r'^2+r'r''+r''^2}{r''^2}\right)} = \frac{r'r''}{r'^2+r'r''+r''^2} = \frac{2(r'+r'')r'r''}{2(r'+r'')(r'^2+r'r''+r''^2)} = \frac{2t}{|AB|}. \clubsuit$$

L. Bankoff observó en su artículo [a-8] que en realidad se puede hablar de tres círculos trillizos relacionados con un arbelo: los dos círculos del Teorema 9.14.8 y el círculo C(T,g) (ver la prueba del Teorema 9.14.6). El lector puede encontrar más propiedades de los arbelos en el artículo de M. G. Gaba [a-51], en el trabajo de P. N. Ruane [a-142] y en los artículos [a-8] y [a-9] de L. Bankoff.

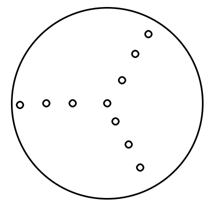
Problemas

9.1. Probar que una recta no puede ser un círculo.
9.2. Probar que un círculo no puede ser una recta.
9.3. Fijemos un punto O en el plano. Definimos $A \sim B$ si $d(O,A) = d(O,B)$, para cualesquiera par de puntos A y B.

a. Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia en el plano.
b. Describir las clases de equivalencia de la relación $\sim$.

9.4[l-126, el acertijo de Betsy Ross]. Plegar un trozo de papel circular, de tal modo que con un solo corte de tijera se obtenga una estrella perfecta de cinco puntas.

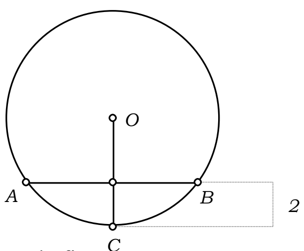
9.5[l-126, los gatos del hechicero]. Un hechicero metió diez gatos en una jaula circular y los colocó tal y como se muestra en la figura de la derecha. Trazar tres círculos, de tal forma que cada gato tenga su propio espacio.



9.6. Con un cierto alambre se puede formar un círculo de diámetro 8. Partimos en dos el mismo alambre y formamos dos círculos, de tal forma que el radio del mayor sea el doble que el radio del menor. Encontrar el radio de cada uno de estos círculos.
9.7. Tenemos k puntos en el plano, en donde $k > 1$ es un número natural. Si i es un número natural positivo menor que k, ¿es posible trazar un círculo tal que i de los k puntos estén en su interior y los restantes en su exterior?
9.8. Dados k puntos tales que ninguna terna de ellos es colineal y ningún círculo contiene a cuatro de ellos, en donde $k > 2$ es un número natural, ¿cuántos círculos se pueden trazar, de tal forma que cada uno de ellos pase por tres de los puntos dados?
9.9[l-32, Problem 26]. Tenemos cinco puntos tales que ninguna terna de ellos es colineal y ningún círculo contiene a cuatro de dichos puntos. Probar que es posible trazar un círculo por tres de los puntos dados, de tal forma que uno de los puntos restantes esté en el interior del círculo y el otro en su exterior.
9.10[l-32, Problem 115]. Dados $2k + 3$ puntos, en donde $k > 0$ es un número natural, tales que ninguna terna de ellos es colineal y ningún círculo contiene a cuatro de estos puntos, probar que podemos encontrar un círculo que pase por tres de los puntos dados, k de los puntos dados estén en el interior de dicho círculo y los otros k puntos dados estén en el exterior del mismo.
9.11. Dado un número natural $k > 1$, ¿es posible partir el plano en k regiones distintas y ajenas entre sí mediante el trazo de círculos?
9.12. Dado un número natural $k > 1$, ¿cuál es el mayor y menor número de regiones en que se puede dividir al plano con k círculos?
9.13. Si $\mathrm{C}(O,r)$ es un círculo que no corta a una recta l, probar que $\mathrm{C}(O,r)$ está contenido en uno de los semiplanos determinados por l.
9.14. Si $\mathrm{C}(O,r)$ es un círculo tangente a la recta l en el punto P, probar que $\mathrm{C}(O,r) - \{P\}$ está contenido en uno de los semiplanos determinados por l.
9.15. Si l es una recta l secante al círculo $\mathrm{C}(O,r)$, probar que los dos semiplanos determinados por l cortan al interior del círculo $\mathrm{C}(O,r)$.
9.16. Dados tres puntos no colineales, trazar dos círculos tales que cada uno de ellos tengan como un diámetro a un segmento cuyos puntos extremos se encuentren entre los puntos dados. Claramente, uno de los tres puntos dados es un punto común de los dos círculos. Probar que el otro punto común de los dos círculos es colineal con los otros dos puntos dados que no son comunes a ambos círculos.

9.17. Sean $C(O,r)$ un círculo y $A \in C(O,r)$. Si a es un número real positivo, probar que $C(A,a) \cap C(O,r) \neq \emptyset$ si y solo si $a \leq 2r$.
9.18. Dados k puntos en un círculo, en donde $k > 1$ es un número natural, ¿cuántas cuerdas distintas se pueden formar con estos k puntos?
9.19. Dados i puntos y j puntos en un círculo, en donde i, $j > 1$ son números naturales, ¿cuántas cuerdas distintas se pueden formar, de tal manera que uno de sus puntos extremos sea uno de los i puntos y el otro punto extremo sea uno de los j puntos?
9.20. Si dos cuerdas de un círculo se bisecan perpendicularmente una a otra, probar que su punto de intersección es el centro del círculo, ¿es necesario que las cuerdas sean perpendiculares?
9.21. Sean AB y CD dos cuerdas congruentes de un círculo $C(O,r)$ que se intersecan en el punto P. Probar que AP es congruente ya sea con CP o con DP.

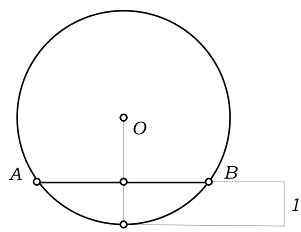
9.22. Sean AB y CD dos cuerdas paralelas de un círculo tales que $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{BD}$ se cortan en un punto P. Probar las siguientes congruencias:
a. $PA \cong PB$. b. $PC \cong PD$. c. $AC \cong BD$. d. $AD \cong BC$.
Sea Q el punto de intersección de AD y BC.
e. $QA \cong QB$. f. $QC \cong QD$.
9.23. Probar que dos cuerdas de un círculo son paralelas si y solo si el centro del círculo está en la recta que une los puntos medios de ambas cuerdas.
9.24. Tenemos dos cuerdas perpendiculares AC y BD de un círculo $C(O,r)$ que se cortan en el punto P. Sean M y N los puntos medios de AB y CD, respectivamente.
a. Probar que los puntos M, P y N son colineales.
b. Si R y S son los puntos medios de BC y AD, respectivamente, probar que $MN \cong RS$.
c. Probar que los segmentos MN, RS y OP tienen el mismo punto medio que lo denotamos con la letra Q.
d. Sean H, I, J y K las proyecciones de P sobre los segmentos AB, BC, CD y DA, respectivamente. Probar que los puntos H, I, J, K, M, N, R y S yacen en un círculo de centro Q.
9.25. Probar que dos cuerdas de un círculo perpendiculares a una tercera cuerda del mismo círculo, y ubicadas a una misma distancia de los puntos extremos de esta última son congruentes.
9.26. En la figura:



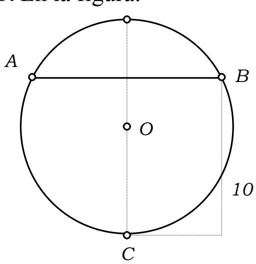
AB es una cuerda del círculo $C(O,r)$ de longitud 12 y OC es el radio del círculo perpendicular a AB tal que $d(C, \overleftrightarrow{AB}) = 2$.Encontrar el radio del círculo.

9.27. En la figura:

tenemos un círculo de radio 4 y AB una de sus cuerdas. Calcular la longitud de la cuerda con la información que se da en la figura.



9.28. En la figura:



tenemos un círculo de diámetro 12 y AB una de sus cuerdas. Calcular la longitud de la cuerda con la información que se proporciona en la figura.

9.29. Sean AB y CD dos cuerdas de un círculo $C(O,r)$. Probar que $AB \parallel CD$ si y solo si $d(O, \overleftrightarrow{AC}) = d(O, \overleftrightarrow{BD})$.
9.30. Sean AC y BD dos cuerdas de un círculo $C(O,r)$. Si AB es un diámetro del círculo y $AC \parallel BD$, probar que $AC \cong BD$.
9.31. Dado un círculo, ¿a qué distancia del centro se encuentra una cuerda de longitud igual al radio del círculo?
9.32. Hallar la longitud de una cuerda de un círculo de radio 5 cuya distancia al centro del círculo es igual a 2.
9.33. La distancia de una cuerda de longitud 6 de un círculo al centro del mismo es igual a 1. Calcular la longitud de una cuerda del círculo cuya distancia a su centro es igual a 2.
9.34. En un círculo de radio 6, se tiene una cuerda de longitud 3. Dar las longitudes de los dos segmentos en que queda dividido el diámetro del círculo que es perpendicular a la cuerda dada.
9.35. Sea AB una cuerda del círculo $C(O,14)$ de longitud 8. Si movemos la cuerda AB una distancia de 4 unidades hacia el centro del círculo, calcular la longitud de AB es su nueva posición.
9.36[I-238] Fijamos una cuerda AB de un círculo y sea $P \in AB$. Trazamos una cuerda CD del mismo círculo, de tal forma que P sea su punto medio. Describir la variación de la longitud de CD cuando P varía sobre AB.
9.37. Sean AB y CD dos cuerdas paralelas de un círculo $C(O,r)$ tales que $|AB| = 5, |CD| = 3$ y $d(\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}) = 1$.

a. Calcular el radio del círculo en cada uno de los siguientes casos:

i. O está entre las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$.

ii. O no está entre las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$.

b. Calcular las distancias de las cuerdas al centro del círculo.

9.38. Dos cuerdas paralelas de un círculo tienen longitudes 3 y 4, y se encuentran del mismo lado del centro del círculo. Si el radio del círculo es 5, calcular la distancia entre dichas cuerdas.
9.39. Dos cuerdas paralelas de un círculo tienen longitudes 2 y 3. Si la distancia entre ellas es igual a 1, calcular el radio del círculo.
9.40. Dos cuerdas congruentes y paralelas del círculo $C(O,5)$ se encuentran a una distancia de 4 unidades. Encontrar la longitud de cada una de las cuerdas.
9.41. Sean AB y CD dos cuerdas del círculo $C(O,4)$ que se cortan formando un ángulo de medida 60. Sea P el punto de intersección de $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{BC}$.

a. Probar que $\cos\angle APC = \cos(\angle DOB - \angle 60)$.

b. Si $|BD| = 6$, calcular $\cos(\angle APC)$.

9.42. Sean AC y CD dos cuerdas de un círculo de diámetro AB. Si $|AB| = 10$ y $CD \parallel AB$, calcular la longitud de CD.
9.43. Probar que la cuerda de menor tamaño de un círculo dado que pasa por un punto dado en el interior del mismo es aquella cuerda que es perpendicular al diámetro que pasa por el punto dado.
9.44. Dado un punto en el interior de un círculo, ¿cuál es la cuerda mayor del círculo que pasa por el punto dado?
9.45. Sean $C(O,12)$ un círculo y $P \in int(C(O,12))$ tales que $d(P,O) = 4$. Encontrar la longitud de la cuerda menor del círculo que pasa por el punto P.
9.46. Sean $C(O,r)$ un círculo, AB uno de sus diámetros y CD una de sus cuerdas que corta a AB en el punto P y es perpendicular al mismo.

a. Probar que $|AP||PB| = |PC|^2$.

b. Si $a = |AB|$ y $p = |AP|$, ¿cuál es el valor máximo de $p(a - p)$ cuando p varía?

9.47[I-238]. Sean AB y CD dos cuerdas perpendiculares de un círculo $C(O,r)$ que se cortan en el punto P. Fijamos un punto $Q \in \overleftrightarrow{CD}$ tal que $PQ \cong PD$. Probar que $AQ \perp \overleftrightarrow{BC}$.
9.48[I-238]. Sean AB y CD dos cuerdas perpendiculares de un círculo $C(O,r)$ y M y N los puntos medios de AD y BC, respectivamente. Probar que $\Delta OMA \cong \Delta ONC$.
9.49. Sean AB una cuerda de un círculo $C(O,r)$ y CD el diámetro del mismo perpendicular a AB. Si $a = d(O,AB)$, expresar $|AC|$ y $|BD|$ en función del radio r y a.

9.50. Sean AB y CD dos diámetros distintos de un círculo $C(O,r)$. Probar las siguientes afirmaciones:
a. $AC \cong DB$ y $AD \cong BC$. b. $\max\{|AC|,|AD|\} < 2r$.

9.51[I-22]. Sean AB un diámetro de un círculo $C(O,r)$ y AC y BD dos cuerdas paralelas del mismo. Si CE y DF son cuerdas de $C(O,r)$ perpendiculares a AB, probar que $CE \cong DF$.

9.52. Sean AB una cuerda de un círculo y M el punto medio del arco $\overset{\frown}{AB}$. Probar que $|AM| > \dfrac{|AB|}{2}$.

9.53. Sean $C(O,r)$ un círculo, AB una de sus cuerdas y M su punto medio. Sea CD otra cuerda del círculo que pasa por el punto M. Trazamos uno de los semicírculos de diámetro CD y sea E el punto en donde la recta perpendicular a CD en el punto M corta a dicho semicírculo. Probar que $ME \cong MA$.

9.54. Sean $C(O,r)$ un círculo y AB una de sus cuerdas. Probar que el círculo de diámetro OB biseca a la cuerda AB.

9.55. Sean $C(O,r)$ un círculo y $P \in ext(C(O,r))$. Si l es una recta que pasa por el punto P y corta a $C(O,r)$ en los puntos A y B, y a $C(P,|PO|)$ en el punto M, probar que M es el punto medio de AB.

9.56. Dado un círculo $C(O,r)$ y dos de sus radios OA y OB que sean perpendiculares, determinar un punto $M \in \overset{\frown}{AB}$ tal que $MP \cong AM$, en donde P es la proyección de M sobre OB.

9.57. Dadas dos cuerdas congruentes de un círculo, probar que son equidistantes de cualquier punto de la cuerda mayor del mismo círculo que pasa por su punto de intersección.

9.58. Si AB y AC son dos cuerdas de un círculo, probar $AB \cong AC$ si y solo si la bisectriz del ángulo $\angle BAC$ pasa por el centro del círculo.

9.59. Sean AB y CD dos cuerdas congruentes de un círculo $C(O,r)$ y M y N sus puntos medios, respectivamente. Sean E y F los puntos de intersección de $\overleftrightarrow{MN}$ con el círculo $C(O,r)$. Probar que $ME \cong NF$.

9.60. Sean AB y CD dos cuerdas congruentes de un círculo $C(O,r)$ y M y N sus puntos medios, respectivamente. Probar que la recta $\overleftrightarrow{MN}$ forma con las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ dos ángulos congruentes.

9.61. Si dos cuerdas congruentes de un círculo se cortan, probar que los segmentos en que queda dividida una de ellas son congruentes a los segmentos en que queda divida la otra.

9.62[I-132]. Probar que es imposible que las longitudes de los cuatro segmentos que determinan dos cuerdas que se cortan de un círculo sean cuatro números enteros positivos.

9.63. Sean $C(O,r)$ un círculo y AB y CD dos de sus cuerdas que se cortan en el punto P. Si $\overrightarrow{OP}$ es la bisectriz de uno de los ángulos formados por las rectas que contienen a dichas cuerdas probar que $AB \cong CD$.

9.64. Sean AB y CD dos diámetros de un círculo $C(O,r)$. Si M es el punto medio de AD, probar que $\overleftrightarrow{MO} \perp \overleftrightarrow{BC}$.

9.65. Sean $C(O,r)$ un círculo, AB una de sus cuerdas y OC el radio del círculo perpendicular a AB. Si D es el punto de intersección de AB y OC, probar que $DC < AD$.

9.66. Si AB y CD son dos cuerdas paralelas de un círculo $C(O,r)$, probar que $\square ABCD$ es un trapecio isósceles.

9.67. Si un radio de un círculo tiene longitud $x + 1$ y uno de sus diámetros tiene longitud $5x + 1$, calcular el radio del círculo.

9.68. Sean $C(O,r)$ un círculo y AB una de sus cuerdas de longitud 14. Si $r = x + y$, uno de los diámetros del círculo tiene longitud $3x - y$ y $d(O,AB) = x$, calcular el radio del círculo.

9.69. Sean $C(O,r)$ un círculo, AB una de sus cuerdas tal que $d(O,AB) = 4$ y M el punto medio de esta cuerda. Si $r = x + y$, $|AM| = 2x - 3$ y $|MB| = 2y + 1$, calcular el radio del círculo y la longitud de la cuerda.

9.70. Sea P un punto en el exterior de un círculo $C(O,2 + x)$ tal que $d(P,C(O,2 + x)) = x$. Si $d(P,O) = 3x$, calcular el radio del círculo y la distancia del punto P al mismo círculo.

9.71. Sean $C(O,r)$ un círculo y AB y CD dos de sus cuerdas que se cortan en el punto P. Si $|AP| = 10$, $|PB| = 3$ y $|CD| = 16$, calcular la longitud de AC y BD.

9.72. Sean $C(O,r)$ un círculo y AB y CD dos de sus cuerdas que se cortan en el punto P y son perpendiculares. Si $|AP| = 20$ y $|PC| = 8$ y $|PB| = 4$, calcular el radio del círculo.

9.73. Sean $C(O,4)$ un círculo y AB una de sus cuerdas de longitud 6. Si la mediatriz de AB corta a $C(O,4)$ en los puntos P y Q, calcular la longitud de los segmentos AP y AQ.

9.74. Tenemos dos cuerdas perpendiculares AB y CD del círculo C(O,10) y P su punto de intersección. Si $|AB|$ = 16 y $|CD|$ = 12, calcular la distancia entre los puntos O y P.
9.75. Sean C(O,6) un círculo y AB y CD dos de sus cuerdas que se cortan en el punto P y son perpendiculares. Si $|AB| = 7$ y $|CD| = 5$, encontrar la longitud del segmento PO.
9.76. Sean C(O,6) un círculo y $P \in int$(C(O,6)). Si $d(P,O) = 5$ y una cuerda AB del círculo que pasa por P satisface que $|AP|= 3|PB|$, encontrar la longitud de los segmentos AP y PB.
9.77. Sean C(O,r) un círculo y $P \in int$(C(O,r)). La longitud de la menor cuerda de C(O,r) que pasa por P es 8 y $d(P$,C$(O,r)) = 2$. Calcular el radio del círculo.
9.78. Sean C(O,r) un círculo y $P \in$ C(O,r). Si la longitud de la menor cuerda del círculo que pasa por P es igual 4 y sup$\{ |AP|: A \in$C$(O,r) \} = 8$, encontrar el radio del círculo.
9.79. Sean C(O,r) un círculo y AB y CD dos de sus cuerdas. Prolongamos AB y CD hasta unos puntos P y Q tales que $|PA||PB| = |QC||QD|$. Probar que $d(P$,C$(O,r)) = d(Q$,C$(O,r))$.
9.80. Sean C(O,r) un círculo, AB uno de sus diámetros y CD la cuerda del círculo perpendicular a AB. Probar las siguientes identidades:

a. $|CD| = 2\sqrt{2|BM|r - |BM|^2}$.

b. $|AB|^2 = |AM|^2 + |BM|^2 + |CM|^2 + |DM|^2$.

9.81[I-238]. Sean AB y CD dos cuerdas perpendiculares de un círculo C(O,r) que se cortan en el punto P. Probar que $|AB|^2 + |CD|^2 + 4|PO|^2 = 8|OA|^2$.
9.82. Sea AB un diámetro de un círculo C(O,2). Determinar un punto $C \in$ C(O,2) tal que si M es el punto medio de la cuerda AC, entonces $|AC|^2 + |OM|^2 = 9$.
9.83. Una cuerda de un círculo y uno de los diámetros del mismo forman un ángulo de medida 45. Probar que la suma de los cuadrados de las longitudes de los segmentos en que queda dividida la cuerda por dicho diámetro es igual al doble del cuadrado del radio.
9.84. Sea AB un diámetro de un círculo C(O,r). Calcular la longitud de una de sus cuerdas AP que satisface la congruencia $AP \cong QB$, en donde Q es la proyección de P sobre AB. También calcular la razón $\dfrac{|PQ|^2}{|OQ|}$.
9.85. Sean AB y AC dos cuerdas de un círculo C(O,r) tales que B y C yacen en el mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{AO}$. Si P y Q son las proyecciones de B y C sobre la recta $\overleftrightarrow{AO}$, probar que $\dfrac{|AB|^2}{|AC|^2} = \dfrac{|AP|}{|AQ|}$.
9.86. Sea AB un diámetro de un cierto círculo C(O,8). Prolongamos AB hasta un punto P tal que $|BP| = 4$. Trazamos el círculo C(P,$|PO|$). Sean C y D los puntos donde este último círculo corta a C(O,8) y E el punto de intersección de PC y C(O,8).

a. Probar que $\Delta PBE \sim \Delta PCA$.

b. Calcular la longitud de los segmentos PE y EC.

c. Probar que $|AC| = 2|EC|$.

9.87[I-238]. Sean AB un diámetro del círculo C(O,r), AC una de sus cuerdas y $P \in$C(O,r) tales que $\overrightarrow{AP}$ es la bisectriz del ángulo $\angle BAC$. Prolongamos AC hasta un punto D, de tal forma que $PA \cong PD$.

a. Probar que $OP \parallel AD$.

b. $\angle DPA \cong \angle CPB$.

c. $m(\angle DPC) = 90$.

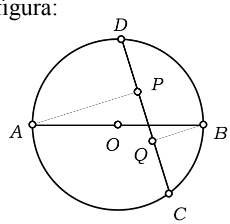
d. $\Delta APB \cong \Delta DPC$.

9.88. Sean AB y CD dos cuerdas de un círculo C(O,r) tales que $AB > CD$, y M y N los puntos medios de AB y CD respectivamente. Sea P el punto de intersección de $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$.

a. Comparar los ángulos $\angle POM$ y $\angle NPO$.

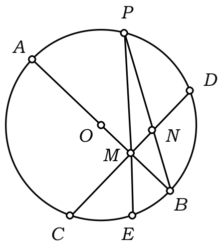
b. Comparar los segmentos PM y PN.

9.89. En la figura:



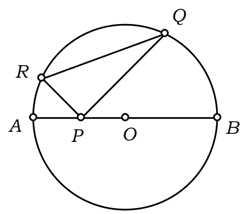
tenemos un diámetro AB y una cuerda CD de un círculo $C(O,r)$. Si P y Q son las proyecciones de A y B sobre CD, respectivamente, probar que $PD \cong QC$.

9.90[l-32, Problem 20](P. Erdös y M. Klamkin). En la figura:



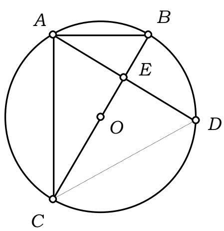
AB es un diámetro del círculo y CD es una cuerda perpendicular a este. Probar que $ME \leq NB$.

9.91[l-39]. En la figura:



tenemos que AB es un diámetro del círculo y $m(\angle BPQ)= 45 = m(\angle RPA)$. Si $|RQ| = 10$, encontrar el radio del círculo.

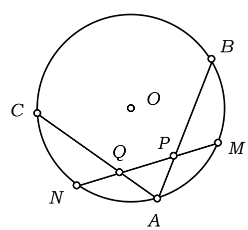
9.92[l-25]. En la figura:



tenemos una cuerda AB de un círculo $C(O,r)$ tal que $|AB| = r$. Sea D el punto de intersección de la recta perpendicular a AB en el punto A y el círculo. La recta perpendicular a BC que pasa por A corta al círculo en el punto D y a BC en el punto E.

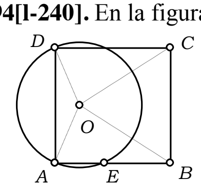
a. Calcular la media del arco $\overset{\frown}{AB}$.
b. Encontrar las medidas del los ángulos del triángulo ΔABC.
c. Expresar las longitudes de los lados deltriángulo ΔABC y también su área en función de r .
d. Probar que el triángulo ΔACD es equilátero.
e. Expresar las longitudes de CE y AE en función de r.

9.93. En la figura:



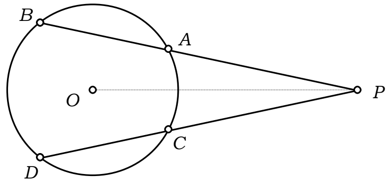
si M y N son los puntos medios de los arcos $\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{AC}$, respectivamente, probar que $AP \cong AQ$.

9.94[l-240]. En la figura:



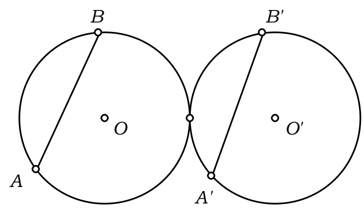
tenemos un cuadrado $\square ABCD$ y un círculo $C(O,r)$ tales que $OB \cong OC \cong AB$. Si $|AB| = 4$, calcular la longitud de AE.

9.95. En la figura:



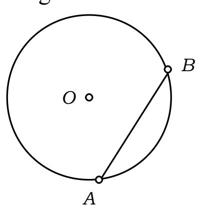
probar que $\overrightarrow{PO}$ es la bisectriz del ángulo $\angle BPD$ si y solo si $AB \cong CD$.

9.96. Sea AB una cuerda de un círculo $C(O,r)$. Prolongamos ambos lados de la cuerda hasta unos puntos C y D de tal forma que $CA \cong BD$. Probar que $\angle AOB \cong \angle DOB$.
9.97. Sean $C(O,4)$ un círculo y $P \in int(C(O,4))$. Si $|PO| = 1$, encontrar la longitud de la cuerda del círculo $C(O,4)$ que pasa por P y forma con OP un ángulo de medida 60.
9.98[I-22]. Prolongamos una cuerda AB de un círculo $C(O,r)$ hasta un punto C tal que $|BC| = r$. Sea D el punto de intersección de $\overleftrightarrow{CO}$ y el círculo $C(O,r)$. Probar que $m(\angle AOD) = 3m(\angle BOC)$.
9.99. Sean $C(O,r)$ un círculo, AB una de sus cuerdas y $D \in AB$. Si $\overrightarrow{OA}$ es la bisectriz del ángulo central $\angle AOB$, probar que D es el punto medio de AB.
9.100. Sean ABy CD dos cuerdas perpendiculares de un círculo $C(O,r)$.
a. Si $m(\angle AOC) = 100$, encontrar la medida del ángulo $\angle BOD$.
b. Si $m(\angle CAB) = 50$, encontrar la medida del ángulo $\angle DBA$.
9.101[I-238]. Sean AB y AC dos cuerdas congruentes de un círculo y D el punto de intersección del círculo y la bisectriz del ángulo $\angle CBA$. Si E es el punto de intersección de $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{AD}$, probar que $AC \cong CE$.
9.102. En la figura:



tenemos dos círculos con el mismo radio y $AB \parallel A'B'$. Si el círculo de la izquierda da media vuelta sobre el círculo de la derecha, ¿las cuerdas AB y $A'B'$ siguen siendo paralelas?

9.103. En la figura:

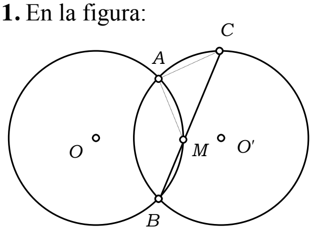


tenemos una cuerda AB de un círculo $C(O,r)$. Dar la posición de la cuerda AB, después de girar el círculo una vuelta y media.

9.104. Tenemos una carreta cuyas ruedas delanteras tienen 80 cm de diámetro y sus ruedas traseras tienen 1.20 m de diámetro. Marcamos sobre las ruedas los puntos donde tocan el suelo. Si la carreta empieza a caminar, ¿qué distancia debe de recorrer para que los puntos marcados estén de nueva cuenta tocando el suelo?
9.105. Se tienen dos ruedas de una carreta, una de ellas tiene 60 cm de radio y la otra tiene 40 cm de radio, ¿a qué distancia la rueda más pequeña dará dos vueltas más que la grande?
9.106. Sean $C(O,3)$ y $C(O',4)$ dos círculos que se cortan. Si $|OO'| = 6$, calcular la longitud de la cuerda común de ambos círculos.
9.107. Una recta corta a dos círculos no congruentes y es paralela a la recta que une los centros de dichos círculos.Probar que la cuerda que se forma en el círculo pequeño es menor que la cuerda que se forma en el círculo mayor.
9.108. Sean $C(O,3)$ y $C(O,9)$ dos círculos concéntricos. Una recta corta a $C(O,9)$ en los puntos A y D y a $C(O,3)$ en los puntos B y C. Si $|BC| = 4$, calcular la longitud de la cuerda AD.
9.109. Dados dos círculos concéntricos, probar que la suma de los cuadrados a las distancias de un punto cualquiera de uno de los círculos a los puntos extremos de un diámetro del segundo círculo es constante.

9.110. Sean $\mathcal{C}(O,r)$ y $\mathcal{C}(O,2r)$ dos círculos concéntricos y P un punto en el exterior de $\mathcal{C}(O,r)$. Sean C y D los puntos de intersección del círculo $\mathcal{C}(P,|PO|)$ y el círculo $\mathcal{C}(O,2r)$, y A y B los puntos de intersección de $\mathcal{C}(O,r)$ con los radios OC y OB, respectivamente. Probar que PA y PB son tangentes a $\mathcal{C}(O,r)$.

9.111. En la figura:



tenemos dos círculos congruentesque se cortan en los puntos A y B. Si M es el punto medio del arco $\overset{\frown}{AB}$, probar que $AM \cong AC$.

9.112. Una recta corta a tres círculos, ¿cómo deben estar situados los tres círculos para que los puntos medios de las tres cuerdas que forman coincidan?

9.113(MOP-98). Sean $\mathcal{C}(O,r)$ y $\mathcal{C}(O',r)$ dos círculos congruentes que se intersecan en los puntos A y B. Sean M el punto medio de AB, CD una cuerda de $\mathcal{C}(O,r)$ que pasa por M, P el punto de intersección de CD y $\mathcal{C}(O',r)$, EF una cuerda de $\mathcal{C}(O',r)$ que pasa por M y Q el punto de intersección de EF y $\mathcal{C}(O,r)$. Probar que AB, CQ y EP son concurrentes.

9.114. Definición. Dos puntos de un círculo se dice que son *diametralmente opuestos* si son los puntos extremos de un diámetro del círculo.

Tres círculos congruentes pasan por un punto A y entre ellos se cortan en los puntos B, C y D. Sean P, Q y R los puntos diametralmente opuestos de A con respecto a cada uno de los tres círculos.

a. Probar que B, C y D son los puntos medios de los lados del triángulo ΔPQR.

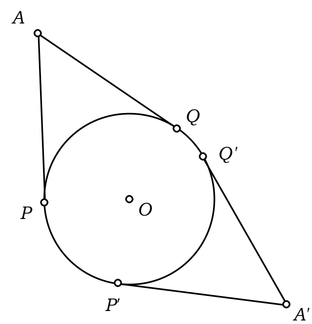
b. ¿Qué representa el punto A para el triángulo ΔPQR?

c. Probar que el circuncírculo del triángulo ΔABC es congruente con cada uno de los tres círculos.

d. Comparar el segmento CD con el segmento que une los centros de los círculos que pasan por los puntos A, B y C, y A, B y D.

e. Comparar el segmento AB con el segmento que une los centros de los círculos que pasan por los puntos A, C y D, y B, C y D.

9.115. En la figura:



tenemos que AP, AQ, $A'P'$ y $A'Q'$ son tangentes al círculo $\mathcal{C}(O,r)$. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

a. $PA \cong P'A'$.

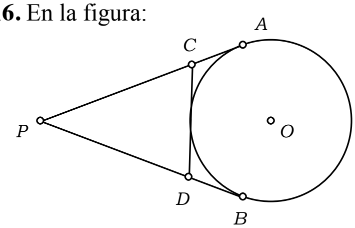
b. $AO \cong A'O$.

c. $\angle PAQ \cong \angle P'A'Q'$.

d. $PQ \cong P'Q'$.

e. $\angle QOP \cong \angle Q'OP'$.

9.116. En la figura:



tenemos que PA, PB y CD son tangentes al círculo $\mathcal{C}(O,r)$. Probar que $|PC| + |CD| + |DP| = 2|PA|$.

9.117. Sean PA y PB dos segmentos tangentes al círculo $\mathcal{C}(O,6)$. Si $|PO| = 14$, calcular la longitud de la cuerda AB.

9.118. En el exterior de un círculo de radio 5 fijamos un punto. Si las longitudes de los segmentos tangentes al círculo desde el punto fijo es igual a 6, encontrar la longitud de la cuerda del círculo que une a los puntos de tangencia.

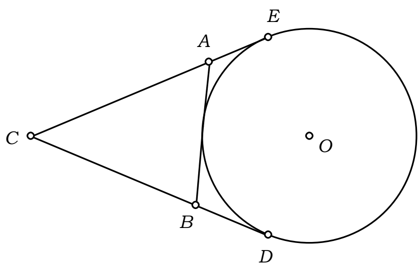
9.119. Desde un punto P en el exterior de un círculo $C(O,r)$ trazamos los segmentos tangentes PA y PB al mismo y una recta secante l que corte al círculo en los puntos C y D. Probar que $|AC||BD| = |BC||AD|$.

9.120. Sean $C(O,r)$ un círculo y P un punto en su exterior. Por P trazamos la recta tangente al círculo en el punto $A \in C(O,r)$ y sea B el punto de intersección de PO y el círculo. Probar que $r = \dfrac{|PA|^2 - |PB|^2}{2|PB|}$.

9.121. Sean $C(O,r)$ un círculo, l la recta tangente al círculo en el punto P y $A \in C(O,r) - \{P\}$. Si Q es la proyección de A sobre l, probar que $r = \dfrac{|AQ|^2 + |QP|^2}{2|AQ|^2}$.

9.122. Sean $C(O,r)$ un círculo y P un punto en su exterior. Por P trazamos la recta tangente al círculo en el punto $A \in C(O,r)$. Sean B y C los puntos de intersección de la recta $\overleftrightarrow{PO}$ y el círculo, y sea Q la proyección de A sobre PO. Probar la identidad $|PB||PC| - |QB||QC| = |PQ|^2$.

9.123. En la figura:



tenemos un círculo $C(O,r)$ y sabemos que los segmentos CE, CD y AB son tangentes al círculo.

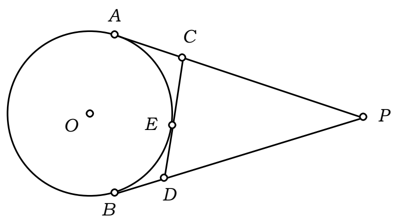
a. Si $|EC| = 20$, calcular el perímetro del triángulo ΔABC.

b. Si el segmento tangente AB se mueve, probar que el perímetro del triángulo ΔABC permanece constante

c. Si $m(\angle DCE) = 40$, calcular la medida del arco $\overset{\frown}{DE}$.

d. Probar que las bisectrices de los ángulos $\angle DBA$ y $\angle BAE$ se cortan en O.

9.124. En la figura:



tenemos que PA, PB y CD son segmentos tangentes al círculo, este último en el punto E. Si $|PA| = 2x + y$, $|PC| = 3x$, $|CE| = 3$, $|ED| = x$ y $|DP| = y + 2$, calcular las longitudes de los lados del triángulo ΔPCD y el radio del círculo.

9.125. Desde un punto P fuera de un círculo $C(O,r)$ trazamos los segmentos tangentes PA y PB al mismo círculo.

a. Sea BC una cuerda del círculo paralela a PA. Si $|PB| = 10$ y $|AB| = 4$, calcular la longitud de la cuerda BC.

b. Si $r = 5$ y $d(P,C(O,5)) = 10$, calcular las longitudes de PA y PB.

9.126. Sean PA y PB dos segmentos tangentes al círculo $C(O,r)$ y AC una cuerda del mismo tal que $PB \parallel AC$. Si $m(\angle BPA) = 40$, encontrar las medidas de los ángulos del triángulo ΔABC.

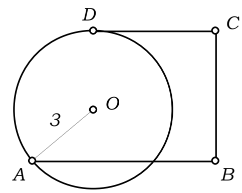
9.127. Sean $C(O,r)$ un círculo y P un punto en su exterior. Sean $A, B \in C(O,r)$ tales que PA y PB son tangentes al círculo. Probar que el incírculo del triángulo ΔPAB yace sobre el círculo $C(O,r)$.

9.128. Desde un punto P en el exterior de un círculo $C(O,r)$ trazamos los dos segmentos tangentes PA y PB. Si ΔPAB es un triángulo equilátero, expresar $|OP|$ y las longitudes de los lados del triángulo en función del radio del círculo.

9.129[I-238]. Sean PA y PB dos segmentos tangentes al círculo $C(O,r)$. Si Q es el punto de intersección de la recta $\overleftrightarrow{OA}$ y la recta perpendicular a $\overleftrightarrow{PB}$ en el punto A, probar que $QO \cong QP$.

9.130. Sean $C(O,r)$ un círculo y AB una de sus cuerdas de longitud 5. Prolongamos AB hasta un punto P tal que $|PA| = 9$. Calcular la longitud del segmento tangente al círculo con punto extremo P.

9.131. Sean PA y PB segmentos tangentes al círculo C(O,r), C el punto de intersección de $\overleftrightarrow{PA}$ y $\overleftrightarrow{BO}$, y D el punto de intersección de $\overleftrightarrow{PB}$ y $\overleftrightarrow{AO}$. Probar que $AB \parallel CD$.
9.132. Sean PA y PB dos segmentos tangentes al círculo C(O,r) y C el punto de intersección de PO y el círculo C(O,r). Probar que $\overrightarrow{AC}$ es la bisectriz del ángulo $\angle PAB$.
9.133. Sean PA y PB segmentos tangentes al círculo C(O,r). El círculo C(P,$|PA|$) corta a PO en un punto C. Probar que $\overrightarrow{AC}$ es la bisectriz del ángulo $\angle BAO$.
9.134[I-238]. Sean PA y PB dos segmentos tangentes al círculo C(O,r), BC un diámetro del mismo círculo y Q el punto de intersección $\overleftrightarrow{PB}$ y $\overleftrightarrow{AC}$. Probar que $m(\angle BPA) = 2m(\angle AQB)$.
9.135. Sea PA un segmento tangente al círculo C(O,r). Supongamos que una recta que pasa por P corta al círculo en los puntos B y C. Sea D el punto de intersección de la bisectriz del ángulo $\angle BAC$ y BC. Probar que $PA \cong PD$.
9.136[I-240]. En la figura:



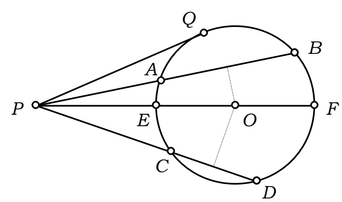
tenemos un círculo C(O,4), CD un segmento tangente al mismo en el punto D, $DC \perp CB$ y $CB \perp AB$. Si $|BC| = 5$ y $|AB| = 7$, calcular la longitud del segmento BD

9.137. Una recta corta a dos rectas tangentes fijas de un círculo C(O,r) en los puntos P y Q. Probar que

$$m(\angle POQ) = \frac{m(\angle AOB)}{2},$$

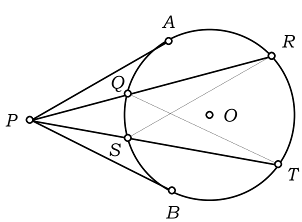
en donde A y B son los puntos de tangencia de las rectas tangentes fijas.

9.138. Sean PA y PB dos segmentos tangentes a un círculo C(O,r). Una recta que pasa por O corta a $\overleftrightarrow{PA}$ y a $\overleftrightarrow{PB}$ en los puntos C y D, respectivamente. Las rectas tangentes al círculo C(O,r) en los puntos C y D se cortan en el punto Q. Probar que $PO \cong OQ$.
9.139. Sean PA y PB dos segmentos tangentes a un círculo C(O,r) y $C \in$ C(O,r). Por P trazamos una recta paralela a la recta tangente al círculo en el punto C, la cual corta a las rectas $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{BC}$ en los puntos Q y R, respectivamente. Probar que $PQ \cong PA \cong PB \cong PR$.
9.140. En la figura:



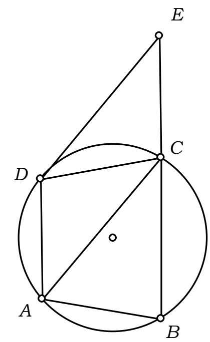
tenemos un círculo de radio 2, PQ es tangente al círculo y sabemos que $|PA| = 3$, $|AB| = 9$ y $|PC| = 3$. Calcular las longitudes de los segmentos PD, PQ, PO, PF y PE.

9.141[Problem 66.F, Math. Gazette 66 No. 437 (1982), 237]. En la figura:



PA y PB son tangentes al círculo C(O,r) y las rectas $\overleftrightarrow{PR}$ y $\overleftrightarrow{PT}$ cortan al círculo C(O,r) en los puntos Q y R, y S y T, respectivamente. Probar que el punto de intersección de QT y SR yace sobre la cuerda AB.

9.142. En la figura:



tenemos que ED es tangente al círculo y $AB \cong DA \cong CD \cong CE$. Probar que $AC \parallel DE$.

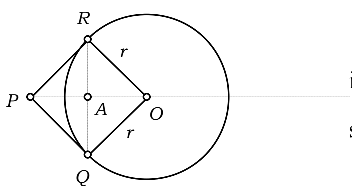
9.143. Sean C(O,r) un círculo y P un punto en su exterior. Dos rectas secantes al círculo que pasan por el punto P lo cortan en los puntos A, B, C y D, de tal forma que $B \in AP$ y $C \in DP$.

a. Si $|AB| = 6$, $|BP| = 5$ y $|CP| = 4$, calcular la longitud de CD.

b. Si $d(P,O) = 9$, calcular el radio del círculo.

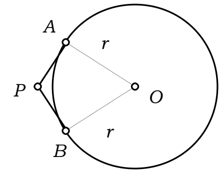
9.144[I-238]. Sean P un punto en el exterior del círculo C(O,r) y AB un diámetro del mismo. Sea Q la proyección de P sobre $\overleftrightarrow{AB}$. Si Q está también en el exterior del círculo C(O,r) probar que las diferencias de los cuadrados de las longitudes de los segmentos tangentes de P y Q al círculo es igual a $|PQ|^2$.

9.145. En la figura:



tenemos que PQ y PR son tangentes al círculo C(O,r) y A el punto de intersección de QR y $\overleftrightarrow{PO}$. Probar que □$PQOR$ es un cuadrado si y solo si $|AO| = \dfrac{r}{\sqrt{2}}$.

9.146. En la figura:



PA y PB son tangentes al círculo C(O,r). Si $|AB| = r$, calcular la medida del ángulo $\angle APB$.

9.147. Probar que dos rectas tangentes a un círculo son paralelas si y solo si los puntos de tangencia son los puntos extremos de un diámetro del círculo.

9.148. La suma de las distancias de dos puntos extremos de un diámetro de un círculo a cualquier recta tangente del mismo es igual al diámetro del círculo.

9.149. Sea AB un diámetro de un círculo C(O,r). Probar que toda cuerda paralela a la recta tangente al círculo en el punto A es bisecada por AB.

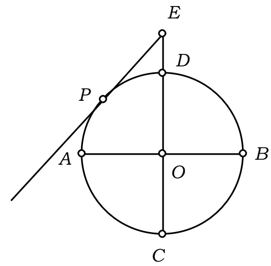
9.150. Sean AB un diámetro del círculo C(O,r) y $M \in$ C(O,r) $-$ $\{A, B\}$. Sea l la recta tangente a C(O,r) en el punto M. Por A y B trazamos rectas tangentes al círculo C(O,r) que corten a l en los puntos C y D, respectivamente. Si $|OC| = 10$ y $|OD| = 8$, encontrar el radio del círculo.

9.151. Sean C(O,r) un círculo, AB uno de sus diámetros y OC uno de sus radios perpendiculares a AB y $P \in AB$. Sean D el punto de intersección de C(O,r) y $\overleftrightarrow{CP}$ y E el punto de intersección de $\overleftrightarrow{AB}$ y la recta tangente a C(O,r) en el punto D. Probar las siguientes congruencias:

a. $\angle DPE \cong \angle CDE$.

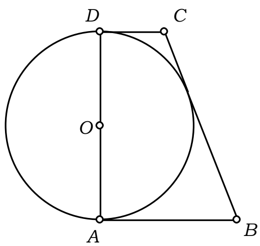
b. $EP \cong ED$.

9.152. En la figura:



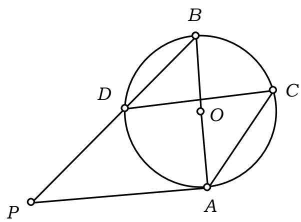
tenemos dos diámetros AB y CD del círculo que son perpendiculares. Si $\overleftrightarrow{PE}$ es la recta tangente al círculo en el punto P, la cual corta a $\overleftrightarrow{CD}$ en el punto E, probar que $2m(\angle PBA) = m(\angle PEC)$.

9.153(FCM STA. CASA 77). En la figura:



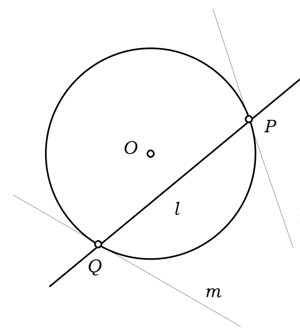
tenemos que los segmentos AB, BC y CD son tangentes al círculo, $AB \parallel CD$ y $AB \perp AD$. Probar que el radio del círculo es igual a $\sqrt{|AB||DC|}$.

9.154. En la figura:



PA es un segmento tangente al círculo y AB uno de sus diámetros. Si $m(\angle APB) = 40$, encontrar la medida del ángulo $\angle DAC$.

9.155. En la figura:



la recta l corta al círculo $C(O,r)$ en los puntos P y Q. Si m y n son las rectas tangentes a $C(O,r)$ en los puntos P y Q, respectivamente, probar que el ángulo que forman l y m es congruente con el ángulo que forman l y n.

9.156. Sea AB una cuerda de un círculo $C(O,r)$ tal que $m(\angle AOB) = 100$. Calcular la medida del ángulo que forman las rectas tangentes al círculo en los puntos A y B.

9.157[I-238]. Sean $C(O,r)$ un círculo y AB y AC dos de sus cuerdas congruentes.

a. Probar que BC es paralelo a la recta tangente al círculo en el punto A.

b. Sean D, E y F las proyecciones de A sobre BC, la recta tangente al círculo en el punto A y la recta tangente al círculo en el punto B, respectivamente. Probar que $AD \cong AE \cong AF$.

9.158. Sean $C(O,r)$ un círculo y AB una de sus cuerdas. Probar que cada punto $P \in C(O,r)$ cumple que $d(P, \overleftrightarrow{AB})$ es la media proporcional de las distancias de P a las rectas tangentes al círculo en los puntos A y B.

9.159. Sean OD y OE dos radios perpendiculares de un círculo $C(O,1)$. Sea A el punto de intersección de las rectas tangentes al círculo en los puntos D y E, prolongamos AD del lado de D hasta un punto B tal que $|DB| = 2$, y sea C el punto de intersección de la recta tangente al círculo que pasa por el punto B y la recta $\overleftrightarrow{EA}$. Calcular las longitudes de los lados del triángulo ΔABC.

9.160[I-22]. Sea AB un diámetro de un círculo $C(O,r)$. Prolongamos AB hasta un punto C tal que $|BC| = r$. Fijamos un punto P en la recta tangente al círculo en el punto B y desde este trazamos una recta tangente al círculo en el punto D. Probar que $m(\angle CPD) = 3m(\angle BPC)$.

9.161. Sean $\mathrm{C}(O,r)$ un círculo, l una recta tangente al círculo en el punto P y $A \in \mathrm{C}(O,r) - \{P\}$. Supongamos que la recta tangente al círculo en A corta a l en el punto B, y la recta $\overleftrightarrow{AO}$ corta a l en el punto C. Si P es el punto medio de BC, probar que BC es el lado de un triángulo isósceles circunscrito sobre el círculo.
9.162(E.N.E. 1951). Tenemos un círculo $\mathrm{C}(O,5)$ tangente a una recta l en un punto P. Sea $A \in \mathrm{C}(O,5)$ tal que $d(A,l) = 9$. Si Q es la proyección de A sobre l, calcular la longitud del segmento PQ.
9.163. Sean AB un diámetro del círculo $\mathrm{C}(O,r)$ y CD una cuerda perpendicular a AB. Trazamos los círculos de diámetros AC y CB, los cuales cortan a AD y BD en los puntos E y F, respectivamente.

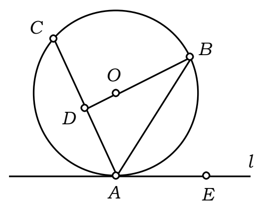
a. ¿Cuál es la naturaleza del cuadrilátero $\square DECF$?

b. Probar que EF es tangente al círculo que pasa por los puntos A, E y C y al círculo que pasa por los puntos B, F y C.

c. Probar que DE es paralelo a la recta tangente al círculo que pasa por los puntos A, B y D en el punto D.

9.164[l-238]. Sea PA un segmento tangente a un círculo $\mathrm{C}(O,r)$. Una recta que pasa por P corta al círculo en los puntos B y C. El círculo de diámetro PA corta a $\overleftrightarrow{AB}$ y a $\overleftrightarrow{AC}$ en los puntos R y S, respectivamente. Probar que $RS \perp PC$.
9.165. Supongamos que el círculo $\mathrm{C}(O,r)$ es tangente a dos rectas perpendiculares. Expresar los radios de los círculos que son tangentes a las dos rectas y al círculo dado en función de r.
9.166. En un lado de un ángulo recto cuyo vértice es el punto O se fijan dos puntos A y B. Si $a = |OA|$ y $b = |OB|$, expresar en función de a y b el radio del círculo que pasa por los puntos A y B, y es tangente al segundo lado del ángulo recto dado.
9.167. Sean $\angle AOC$ un ángulo y $B \in \overrightarrow{OA}$. Si $|OA| = 2$, $|OB| = \dfrac{9}{2}$ y $|OC| = 3$. Probar que el círculo que pasa por los puntos A, B y C es tangente a $\overrightarrow{OC}$ en el punto C.
9.168. Sean AB un segmento, l una recta que pasa por A, $C \in l-\{A\}$ y P un punto en la mediatriz del segmento AC. Probar que $d(P,l) = d(P,B)$ si y solo si P es el centro de un círculo tangente a l que pasa por el punto B.
9.169. En la figura:

tenemos un círculo $\mathrm{C}(O,r)$ y una recta l tangente al círculo en el punto A. Si $\angle EAB \cong \angle BAC$ y D es el punto de intersección de AC y $\overleftrightarrow{OB}$, probar que el ángulo$\angle ADB$ es recto y $2|BD||BO| = |AB|^2$.



9.170. Sean AB un diámetro del círculo $\mathrm{C}(O,r)$ y $C \in \mathrm{C}(O,r)$. Sean P la proyección de C sobre el radio OA, Q la proyección de P sobre la recta tangente l al círculo en el punto A, R el punto de intersección de l y $\overleftrightarrow{OC}$, S el punto de intersección de l y $\overleftrightarrow{BC}$, y T el punto de intersección de l y la recta tangente al círculo en el punto C. Probar las siguientes identidades:

a. $|AS| = 2|AT|$. b. $\dfrac{2}{|AS|} = \dfrac{1}{|AR|} + \dfrac{1}{|CP|}$. c. $\dfrac{2}{|AC|^2} = \dfrac{1}{|AS||CP|}$.

9.171. Sean $\mathrm{C}(O,r)$ un círculo, AB uno de sus diámetros y $P \in \mathrm{C}(O,r) - \{A, B\}$. Sean C la proyección de P sobre AB, D el punto de intersección de PA y el círculo de diámetro AC, y E el punto de intersección de PB y el círculo de diámetro CB.

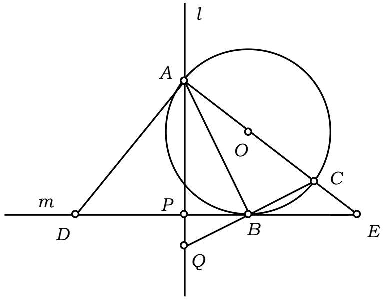
a. ¿Cuál es la naturaleza del cuadrilátero $\square PDCE$?

b. Probar que DEes tangente a los circuncírculos de los triángulos ΔADC y ΔBEC.

c. Probar que DE es paralelo a la recta tangente al circuncírculo del triángulo ΔABP en el punto A.

9.172. Sean $\mathrm{C}(O,8)$ un círculo y AB una de sus cuerdas. Si $m(\angle AOB) = 60$, calcular el radio del círculo que es tangente a $\mathrm{C}(O,8)$, OA y OB.

9.173[I-25]. En la figura:



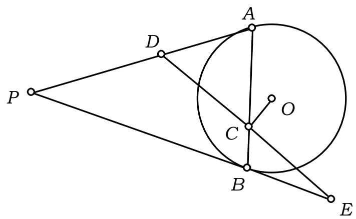
tenemos dos rectas perpendiculares l y m. Sabemos que m es tangente al círculo C(O,r) en el punto B, la recta perpendicular a AB en el punto B corta a l en el punto Q y a C(O,r) en el punto C, $\overleftrightarrow{AC}$ corta a m en el punto E y DA es tangente al círculo.

a. Probar que el triángulo ΔAQC es isósceles.

b. Expresar el radio del círculo r en función de $|PA|$ y $|PB|$.

c. Para que valor de $|PB|$ el punto B es el punto medio de DE. ¿Cuál será el valor de r para este caso?

9.174. En la figura:



tenemos que PA y PB son tangentes al círculo, $C \in AB$ es arbitrario y la recta perpendicular a CO en el punto C corta a $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PB}$ en los puntos D y E, respectivamente. Probar las siguientes afirmaciones.

a. Los cuadriláteros $\square OCBE$ y $\square ADCO$ son cíclicos.

b. El triángulo ΔODE es isósceles.

c. C es el punto medio de DE.

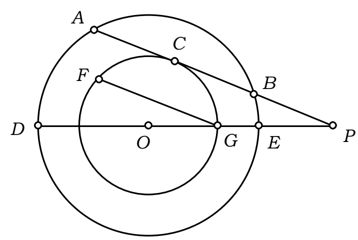
d. El cuadrilátero $\square ODPE$ es cíclico.

e. $AD \cong BE$.

9.175. Si un círculo está en el interior de otro círculo, ¿es posible trazar una recta tangente a ambos?

9.176[I-39]. En la figura:

tenemos dos círculos concéntricos, PA es tangente al círculo pequeño en el punto C y DE es un diámetro del círculo mayor cuya recta que lo contiene pasa por P y $FG \parallel AB$. Si $|PB| = 6$, $|PC| = 14$ y $|PE| = 4$, calcular la longitud de la cuerda FG.

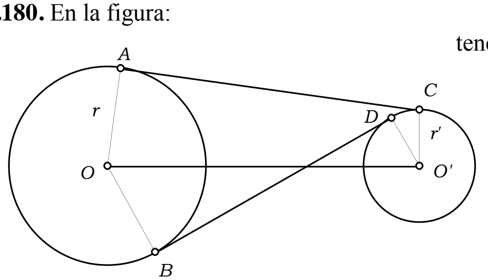


9.177. Calcular los radios de los círculos tangentes a dos círculos concéntricos de radios 4 y 7.

9.178. Tenemos dos círculosC(O,2) y C(O',5) tales que $d(O,O') = 1$. Calcular la longitud de la menor cuerda de C(O',5) que sea tangente a C(O,2).

9.179. Un círculo C(O,r) es tangente a una recta l en un punto A. Si $P \in$ C(O,r) satisface que $|PA| = 5$ y $d(P,l) = 4$, calcular el radio del círculo.

9.180. En la figura:



tenemos dos círculos C(O,r) y C(O',r') con $r \geq r'$ y dos segmentos AC y BD tangentes a ambos círculos. Probar las siguientes fórmulas:

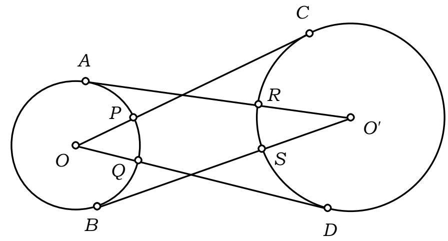
a. $|OO'| = \sqrt{|AC|^2 + (r + r')^2} = \sqrt{|BD|^2 + (r + r')^2}$.

b. $|AC| = \sqrt{|OO'|^2 - (r - r')^2}$.

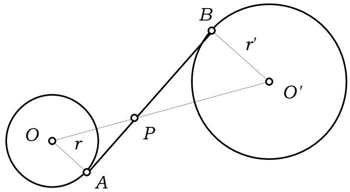
c. $|BD| = \sqrt{|OO'|^2 - (r + r')^2}$.

9.181[l-32, Problem 185]. En la figura:

tenemos dos círculos C(O,r) y C(O',r') y segmentos tangentes OC, OD, $O'A$ y $O'B$. Probar que $PQ \cong RS$.



9.182. En la figura:



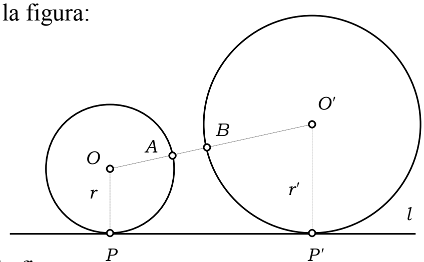
el segmento AB es tangente a los círculos C(O,r) y C(O',r'). Si $d = |OO'|$ y P es el punto de intersección de AB y OO', probar que $|PO| = \dfrac{rd}{r+r'}$ y $|PO'| = \dfrac{r'd}{r+r'}$.

9.183. Si las distancias entre los centros de los círculos C(O,3) y C(O',4) es igual a 12, calcular las longitudes de los segmentos tangentes a ambos círculos.

9.184. Sean C(O,r) y C(O',r') dos círculos no tangentes cuyos interiores no se intersecan. Supongamos que la recta $\overleftrightarrow{OO'}$ corta a C(O,r) en los puntos A y B y a C(O',r') en los puntos A' y B', de tal forma que $B, A' \in OO'$. Fijamos dos puntos $P \in$ C(O,r) y $Q \in$ C(O',r').

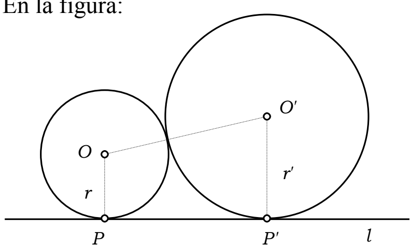
a. Comparar $|OO'|$ con la suma $|OP| + |PQ| + |QO'|$.
b. Comparar $|PQ|$ con la suma $|PO| + |OO'| + |O'Q|$.
c. Probar que $|BA'| \le |PQ| \le |AB'|$.

9.185. En la figura:



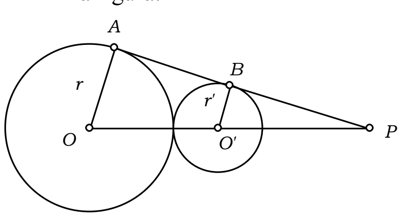
si $r = 5$, $r' = 9$ y $d(O,O') = 20$, hallar la distancia entre los puntos de tangencia P y P'.

9.186. En la figura:



sean C(O,r) y C(O',r') dos círculos tangentes y l una recta tangente a ambos círculos. Si $r = 8$, $r' = 20$, hallar la distancia entre los puntos de tangencia P y P'.

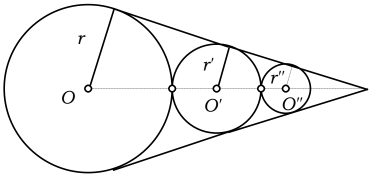
9.187. En la figura:



tenemos dos círculos tangentes C(O,r) y C(O',r') y la recta $\overleftrightarrow{AB}$ que pasa por P es tangentea ambos.

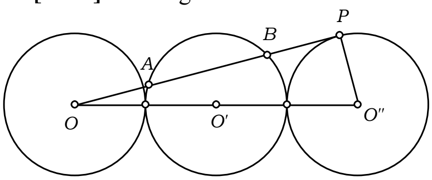
a. Si $r = 8$ y $r' = 2$, calcular la longitud de $O'P$.
b. Si $|AB| = 6$ y $r = 4$, calcular r'.

9.188. En la figura:



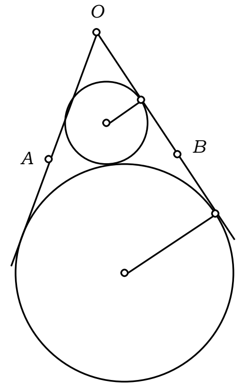
tenemos tres círculos de radios r, r' y r''. Expresar el radio r' en función de los radios r y r''.

9.189[I-223] En la figura:



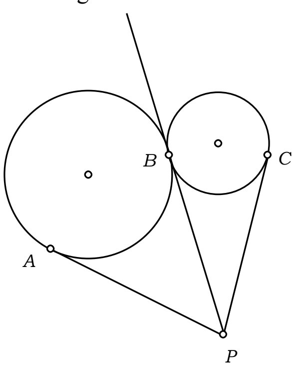
tenemos tres círculos C(O,r), C(O',r) y C(O'',r) congruentes y tangentes entre sí. También tenemos que OP es un segmento tangente al círculo C(O'',r) que corta al círculo C(O',r) en los puntos A y B. Probar que $|AB| = \frac{8}{5}r$.

9.190(Univ. Fed. Uberlandia, 1980).



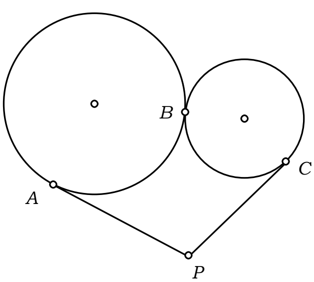
Tenemos un ángulo agudo $\angle AOB$ y tres círculos tangentes como señala la figura. Si los radios de los círculos están en progresión geométrica, probar que su razón es igual a $\dfrac{1-\dfrac{\operatorname{sen}\angle AOB}{2}}{1+\dfrac{\operatorname{sen}\angle AOB}{2}}$.

9.191. En la figura:



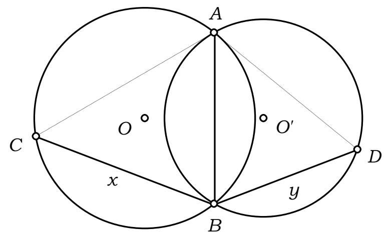
tenemos dos círculos tangentes en el punto B y tres segmentos PA, PB y PC cada uno de los cuales es tangente a uno de los círculos tal como lo muestra .Si $m(\angle CPA) = 80$, calcular la medida del ángulo $\angle ABC$.

9.192. En la figura:



tenemos dos círculos tangentes en el punto B y dos segmentos PA y PC cada uno de los cuales es tangente a uno de los círculos como lo muestra la figura. Si $m(\angle CPA) = 140$, calcular la medida del ángulo $\angle ABC$.

9.193. En la figura:



tenemos dos círculos $\mathcal{C}(O,r)$ y $\mathcal{C}(O',r')$ que se cortan en los puntos A y B, CA es tangente a $\mathcal{C}(O',r')$ y DA es tangente a $\mathcal{C}(O,r)$. Pongamos $|CB| = x$ y $|DB| = y$.

a. Probar que $\Delta ACB \sim \Delta ADB$.

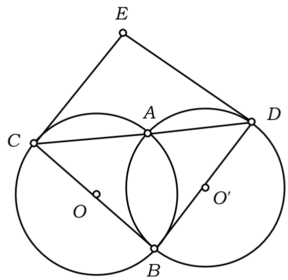
b. Si C, B y D son colineales, probar que el ángulo $\angle CAD$ es recto.

c. Probar que $|AC|^2\, y = |AD|^2\, x$.

d. Probar que $|AB|^2 = xy$.

9.194. Sean $\mathcal{C}(O,r)$ un círculo y $A, B, C, D \in \mathcal{C}(O,r)$ puntos colocados en orden contrario a las manecillas del reloj. Si $|AB| = |BC| = |CD| = r$, probar que A, O y D son colineales.

9.195. En la figura:



tenemos dos círculos congruentes $\mathcal{C}(O,r)$ y $\mathcal{C}(O',r)$ que se cortan en los puntos A y B. Por A trazamos una recta que corte a $\mathcal{C}(O,r)$ y $\mathcal{C}(O',r)$ en los puntos C y D, respectivamente. Tenemos además que EC y ED son tangentes a los círculos $\mathcal{C}(O,r)$ y $\mathcal{C}(O',r)$, respectivamente.

a. Probar que los ángulos $\angle DBC$ y $\angle CED$ son suplementarios.

b. Probar que el cuadrilátero $\square CBDE$ es cíclico.

9.196. Si una recta tangente internamente a dos círculos que no se cortan y la recta que une los centros de estos círculos forman un ángulo de medida 30, probar que la distancia entre los centros de dichos círculos es igual a la suma de los diámetros de los círculos.

9.197. Sean $\mathcal{C}(O,r)$ y $\mathcal{C}(O',r')$ dos círculos que se cortan en los puntos A y B. Si CD es un segmento tangente a ambos, probar que los ángulos $\angle DAC$ y $\angle DBC$ son suplementarios.

9.198[I-238]. Sean $\mathcal{C}(O,r)$ y $\mathcal{C}(O',r)$ dos círculos congruentes que se cortan en los puntos A y B. Sean $C \in \mathcal{C}(O',r)$ tal que AC es tangente al círculo $\mathcal{C}(O,r)$ y $D \in \mathcal{C}(O,r)$. Si E es el punto de intersección de AD y $\mathcal{C}(O',r)$, probar que $AD \cong CE$.

9.199. Los segmentos tangentes internamente y externamente a dos círculos tienen longitudes 4 y 6, respectivamente. Si las distancias entre los centros de los círculos es 12, calcular los radios de ambos círculos.

9.200. Sean $\mathcal{C}(O,4)$ y $\mathcal{C}(O',6)$ dos círculos tales que $|OO'| = 18$. Si P es el punto de intersección de las tangentes externas a ambos círculos y Q es el punto de intersección de las tangentes internas a ambos círculos, calcular $|PQ|$, $|PO|$, $|PO'|$, $|QO|$ y $|QO'|$.

9.201. Sean $\mathcal{C}(O,r)$ y $\mathcal{C}(O',r')$ dos círculos. Probar las siguientes afirmaciones:

a. Los círculos son tangentes externamente si y solo si $|OO'| = r + r'$.

b. Los círculos son tangentes internamente si y solo si $|OO'| = |r - r'|$.

c. Uno de los círculos está contenido en el interior del otro si y solo si $|OO'| < |r - r'|$.

d. Uno de los círculos está contenido en el exterior del otro si y solo si $|OO'| > r + r'$.

e. Los círculos son secantes si y solo si $|r - r'| < |OO'| < r + r'$.

9.202. Si el interior de uno de dos círculos dados contiene puntos de exterior del otro, probar que ambos círculos se cortan en dos puntos.

9.203. Tenemos k círculos tangentes entre sí en un punto A, en donde $k > 1$ es un número natural. Si una recta que pasa por A corta a cada uno de los círculos en los puntos $B_1, B_2, \ldots, B_{k-1}$ y B_k, probar que las rectas tangentes a cada uno de los círculos en los puntos $B_1, B_2, \ldots, B_{k-1}$ y B_k son paralelas entre sí.

9.204. Si un círculo tiene como diámetro el radio de un segundo círculo, probar que dichos círculos tienen que ser tangentes.

9.205. Calcular los radios de dos círculos internamente tangentes si la distancia entre sus centros es igual a 2 y la suma de sus radios es igual a 8.

9.206. Dos círculos no congruentes son tangentes exteriormente. Si las dos rectas tangentes a ambos círculos forman un ángulo de medida 60, expresar el radio de uno de los círculos en función del radio del otro círculo.

9.207. Sean AB un segmento y $P \in AB$ tal que $|AP| = 6$ y $|PB| = 10$. Encontrar el radio de uno de los círculos que sea tangente a AB en P y tangente al círculo de diámetro AB.

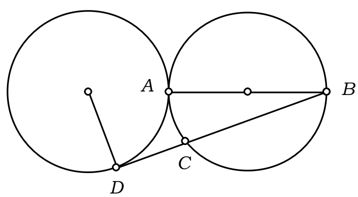
9.208. Sean $\mathrm{C}(O,5)$ y $\mathrm{C}(O',2)$ dos círculos externamente tangentes en el punto B. Supongamos que una recta secante a ambos pasa por el punto B, corta al primero en el punto A y al segundo en el punto C. Si $|AB| = 6$, calcular la longitud de BC.

9.209. Tenemos dos círculos $\mathrm{C}(O,r)$ y $\mathrm{C}(O',r')$ tangentes exteriormente en el punto P. Una de sus rectas tangentes corta a $\mathrm{C}(O,r)$ y $\mathrm{C}(O',r')$ en los puntos A y B, respectivamente, y la otra recta tangente corta a $\mathrm{C}(O,r)$ y $\mathrm{C}(O',r')$ en los puntos C y D, respectivamente.

a. Probar que AO es tangente al circuncírculo del triángulo ΔPAB.

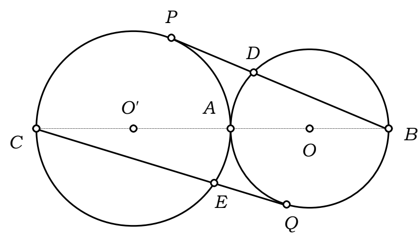
b. Probar que los circuncírculos de los triángulos ΔABP y ΔCDP son tangentes entre sí.

9.210. En la figura:



los dos círculos tienen el mismo radio y son tangentes en el punto A, AB es el diámetro de uno de ellos y DB es tangente al segundo círculo en el punto D. Probar que $|BC| = 2|DC|$.

9.211. En la figura:



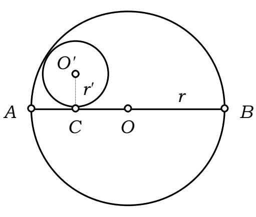
tenemos dos círculos $\mathrm{C}(O,r)$ y $\mathrm{C}(O',r')$ tangentes en el punto A, AB y AC son diámetros de $\mathrm{C}(O,r)$ y $\mathrm{C}(O',r')$, respectivamente, CQ es tangente a $\mathrm{C}(O,r)$ y BP es tangente a $\mathrm{C}(O',r')$.

a. Evaluar $\dfrac{|BD|}{|DP|}$ en función de r y r'.

b. Probar que $|BD||EC| = 4|DP||QE|$.

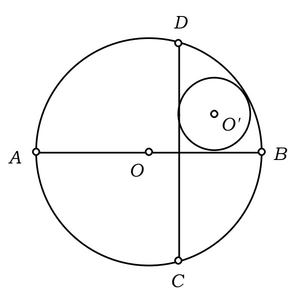
9.212. Sean $\mathrm{C}(O,r)$ y $\mathrm{C}(O',r')$ dos círculos tangentes exteriormente en el punto P. Si AB es un segmento tangente a ambos círculos, probar que $\angle APB$ es un ángulo recto.

9.213. En la figura:



AB es un diámetro del círculo $\mathrm{C}(O,r)$, el círculo $\mathrm{C}(O',r')$ es tangente a $\mathrm{C}(O,r)$ y a AB en el punto C. Expresar $|AC|$ en función de r y r'.

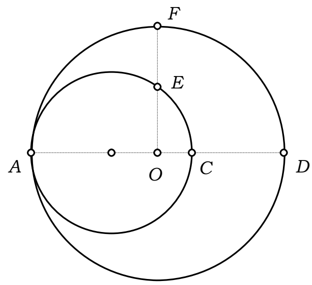
9.214. En la figura:



AB es un diámetro y CD una cuerda del círculo $\mathrm{C}(O,r)$ tales que $AB \perp CD$. Si el círculo pequeño $\mathrm{C}(O',r')$ es tangente a $\mathrm{C}(O,r)$, AB y CD, probar que

$$r' = \sqrt{2r(r + d(O,CD))} - (r + d(O,CD)).$$

9.215[I-126]. En la figura:



los dos círculos son tangentes en A y O es el centro del círculo mayor. Sabemos que $|CD| = 9$ y $|EF| = 5$. Calcular los diámetros de los dos círculos.

9.216. Dados dos círculos tangentes exteriormente, probar que son congruentes si y solo si las dos rectas tangentes a ambos son paralelas.

9.217. Sean $C(O,r)$ y $C(O',r')$ dos círculos externamente tangentes en el punto P. Por P trazamos una recta que corte a $C(O,r)$ y $C(O',r')$ en los puntos A y B, respectivamente. Probar que las rectas tangentes a los círculos en los puntos A y B son paralelas. ¿Es cierta la afirmación si los círculos son internamente tangentes?

9.218. Sean $C(O,r)$ y $C(O',r')$ dos círculos exteriormente tangentes en el punto A, BC un diámetro de $C(O,r)$ y D el punto de intersección de $C(O',r')$ y $\overleftrightarrow{AC}$.

a. Comparar las direcciones de las rectas $\overleftrightarrow{OB}$ y $\overleftrightarrow{O'D}$.

b. Comparar las direcciones de las rectas tangentes a los círculos en los puntos B y D.

c. La recta tangente a $C(O,r)$ en B corta a $C(O',r')$ en los puntos E y F. Probar que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son las bisectrices de $\angle EAF$ y su suplementario adyacente.

9.219. Sean $C(O,r)$ y $C(O',r')$ dos círculos externamente tangentes en el punto A. Sean AB y AC cuerdas de $C(O,r)$ y $C(O',r')$, respectivamente. Si $AB \perp AC$, probar que $OB \parallel O'C$.

9.220. Tenemos dos círculos $C(O,r)$ y $C(O',r')$ no congruentes y tangentes en el punto A. Si una recta que pasa por A corta a $C(O,r)$ y $C(O',r')$ en los puntos B y C, respectivamente, probar que $OB \parallel O'C$.

9.221. Sean $C(O,r)$ y $C(O',r')$ dos círculos tangentes en el punto P. Si AB y CD son cuerdas de $C(O,r)$ y $C(O',r')$, respectivamente, tales que AC y BD se cortan en P, probar que $AB \parallel CD$.

9.222. Sean $C(O,r)$ y $C(O',r')$ dos círculos tangentes en el punto P, y $A, B \in C(O,r)$. Si $\overrightarrow{AP}$ corta al círculo $C(O',r')$ en el punto A' y $\overrightarrow{BP}$ corta al círculo $C(O',r')$ en el punto B', probar que $AB \parallel A'B'$.

9.223. Tenemos dos círculos tangentes en un punto P. Probar que las rectas secantes a ambos círculos que pasan por el punto P son cortadas proporcionalmente por dichos círculos.

9.224[I-22]. Tenemos dos círculos $C(O,2r)$ y $C(O',3r)$ internamente tangentes. Trazamos una recta perpendicular a $\overleftrightarrow{OO'}$ en el punto O, la cual corta a $C(O',3r)$ en los puntos A y B. Probar que las rectas tangentes a $C(O,2r)$ trazadas desde los puntos A y B son perpendiculares.

9.225. Sean $C(O,r)$ y $C(O',r')$ dos círculos internamente tangentes en el punto P. Una recta corta al círculo interior en los puntos A y B y al círculo exterior en los puntos C y D. Las rectas $\overleftrightarrow{PA}$ y $\overleftrightarrow{PB}$ cortan al círculo exterior en los puntos E y F, respectivamente. Probar las siguientes afirmaciones:

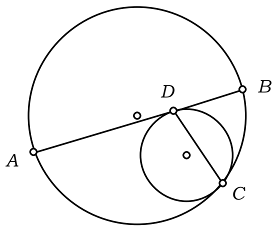
a. $AB \parallel EF$. b. $\angle EPC \cong \angle DPF$.

9.226. Sean $C(O,r)$ y $C(O',r')$ dos círculos tangentes exteriormente en el punto Q. Sean $A \in C(O,r)$ y $B \in C(O',r')$ tales que PA y PB son tangentes a $C(O,r)$ y $C(O',r')$. Si $m(\angle BPA) = 60$, calcular la medida del ángulo $\angle AQB$.

9.227[I-238]. Tenemos dos círculos no congruentes externamente tangentes en el punto P. Sea l la recta tangente a ambos círculos en el punto P. Tomamos puntos $A, C \in l$, de tal forma que P esté entre A y C y fuera del segmento formado en l por las otras dos rectas tangentes a los dos círculos. Por A y C trazamos rectas tangentes al primer círculo que se cortan en el punto D y por A y C trazamos rectas tangentes al segundo círculo que se cortan en el punto B. Probar que $|AB| + |CD| = |BC| + |DA|$.

9.228[I-238]. Sean C(O,r) y C(O',r') dos círculos no congruentes tangentes externamente en el punto P. Fijamos un punto A en la recta tangente a ambos círculos en el punto P. Desde A trazamos rectas tangentes a los círculos C(O,r) y C(O',r') en los puntos B y C, respectivamente. Sean D y E los puntos de intersección del segmento BC y los círculos C(O,r) y C(O',r'), respectivamente. Probar que las rectas tangentes a los círculos en los puntos B, F, D y C forman un paralelogramo.

9.229. En la figura:



tenemos dos círculos tangentes en el punto C y la cuerda AB del círculo mayor es tangente al círculo pequeño en el punto D. Probar que

$$\frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|BD|}.$$

9.230. Sean C(O,r) y C(O', $\frac{r}{2}$) dos círculos tangentes internamente en el punto A.

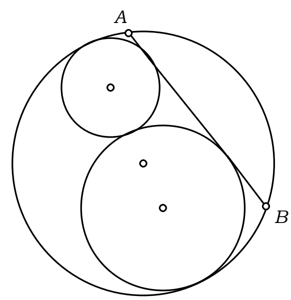
a. Una recta que pasa por A corta a C(O', $\frac{r}{2}$) y C(O',r) en los puntos B y C, respectivamente, probar que B es el punto medio a AC.

b. Expresar el radio del círculo que es tangente a ambos círculos y a la recta $\overleftrightarrow{OO'}$ en función de r.

9.231. Sean C(O,r) un círculo y AB uno de sus diámetros. Expresar en función de r el radio de uno de los círculos tangentes a C(O,r) y a los dos círculos de diámetros AO y OB.

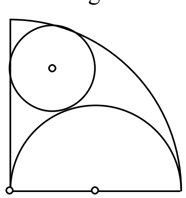
9.232. Sean C(O,r) y C(O',r') dos círculos tangentes. Trazamos un círculo tangente a los dos círculos dados y que también sea tangente a uno de los segmentos tangentes de ambos círculos. Probar que el radio de dicho círculo es igual a $\dfrac{rr'}{r + r' + 2\sqrt{rr'}}$.

9.233. En la figura:



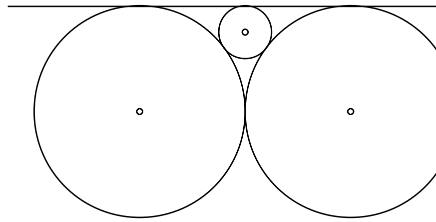
tenemos tres círculos tangentes entre sí. Los círculos que se encuentran en el interior del círculo mayor tienen radios iguales a 4 y 10, y la cuerda AB del círculo mayor es tangente a los dos círculos menores. Hallar la longitud de la cuerda AB.

9.234. En la figura:



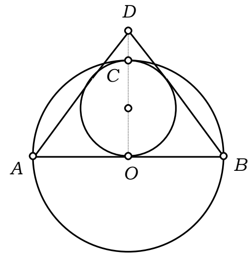
expresar el radio del círculo mayor en función del radio del círculo menor.

9.235. En la figura:



tenemos tres círculos tangentes entre sí tales que los dos grandes son congruentes, los tres son tangentes a la recta, y el radio del círculo pequeño es igual a 3. Encontrar el radio de los círculos grandes.

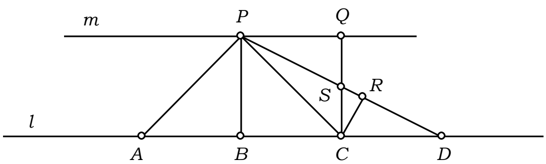
9.236. En la figura:



tenemos dos círculos, AB es un diámetro del círculo mayor, OC es perpendicular a AB, OC es un diámetro del círculo menor y AD y BD son tangentes a este mismo círculo. Expresar la longitud de OD en función del radio del círculo grande.

9.237. ¿Es posible trazar tres círculos de radios 2, 5 y 6 que sean tangentes entre sí y que el interior de cualquiera de ellos no esté contenido en el interior de otro?

9.238[I-25]. En la figura:



tenemos cuatro puntos A, B, C y $D \in l$ tales que $AB \cong BC \cong CD$. Pongamos $|AD| = x$. Sobre la recta perpendicular a l en el punto B ubicamos un punto P tal que $|BP| = x$ y por P trazamos una una recta m paralela a l y sobre ella ubicamos un punto Q tal que $|PQ| = x$. Sean R la proyección de C sobre PD y S el punto de intersección de PD y QC.

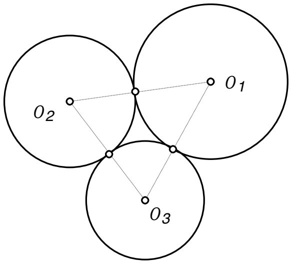
a. Probar que los puntos P, B, C, R y Q yacen en un círculo C(O,r).
b. Probar que AP es tangente al círculo C(O,r).
c. Expresar las longitudes de los segmentos PD, RC y RD en función de x.
d. Probar que $QD \parallel PC$.
e. Expresar el área del cuadrilátero □$PASQ$ en función de x.

9.239. Tenemos dos círculos de radio 4 tales que cada uno de ellos pasa por el centro del otro. Determinar el radio del círculo que sea tangente a ambos círculos y tangente a la recta que une los centros de dichos círculos.

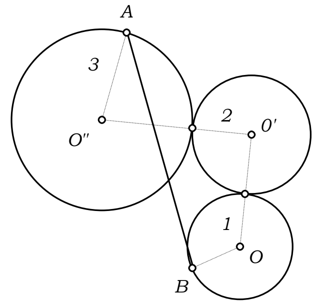
9.240. Tenemos un círculo C(O,r) y en su interior dos círculos externamente tangentes que son internamente tangentes a C(O,r). Probar que el perímetro del triángulo formado por los centros de dichos círculos es igual a $2r$.

9.241. Sean C(O,r), C(O',r') y C(O'',r'') tres círculos tales que C(O',r') y C(O'',r'') son externamente tangentes e internamente tangentes al círculo C(O,r). Si $|OO'| = 4$, $|O'O''| = 5$ y $|O''O| = 3$, calcular el radio de cada uno de los tres círculos.

9.242. Sean C(O_1, r_1), C(O_2, r_2) y C(O_3, r_3) tres círculos tangentes entre sí como muestra la figura:



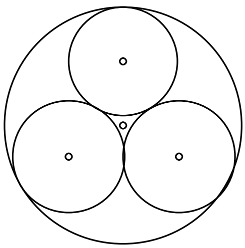
Si $|O_1\, O_2| = 32$, $|O_2\, O_3| = 37$ y $|O_3\, O_1| = 25$, encontrar los radios r_1, r_2 y r_3.



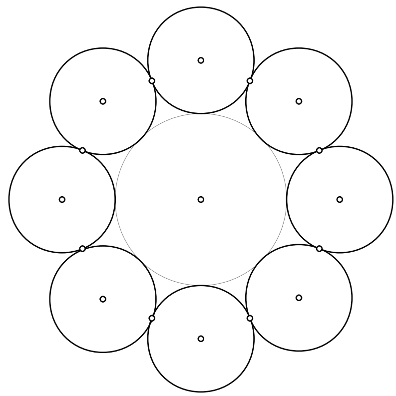
9.243. En la figura:

tenemos tres círculos tangentes, como lo muestra la figura: de radios 1, 2 y 3. Si $m(\angle O'O''A) = 80$, $m(\angle O''O'O) = 90$ y $m(\angle O'OB) = 120$, calcular la longitud de segmento AB.

9.244. En la figura:



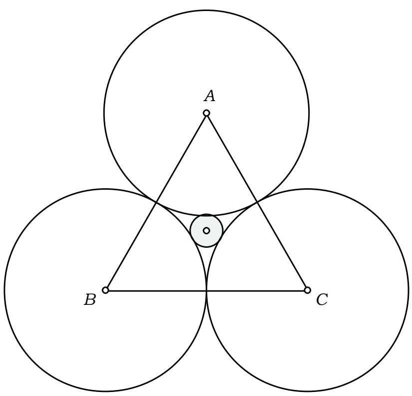
tenemos cuatro círculos tangentes entre sí y los tres círculos pequeños son congruentes entre sí. Expresar el radio de los círculos pequeños en función del radio del círculo mayor.



9.245[a-22]. Supongamos que tenemos k círculos tangentes, todos de radio r, colocados tal y como lo muestra la figura de la derecha. Si s es el radio del círculo del centro, probar que

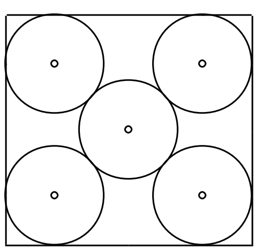
$$s = r\left(\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}\right)^{-1} - 1\right).$$

9.246. En la figura:



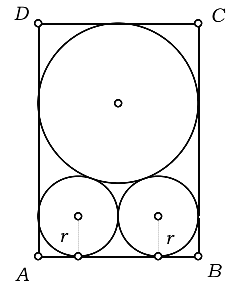
tenemos un triángulo equilátero ΔABC cuyos lados tienen longitud a. Calcular el radio del círculo pequeño en función de a.

9.247. En la figura:



tenemos un cuadrado de lado a y 5 círculos congruentes. Expresar el radio de los círculos en función de a.

9.248. En la figura:

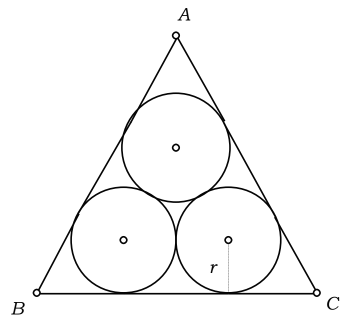


□*ABCD* es un rectángulo y los dos círculos pequeños tienen el mismo radio, digamos que es r.

1. Calcular las longitudes de los lados del rectángulo en función de r.
2. Encontrar el perímetro del triángulo que forman los centros de los tres círculos en función de r.

9.249. En un billete de 7 cm de ancho por 15 cm de largo, ¿cuántas monedas redondas de 1 cm de radio pueden caber sobre el billete como máximo?

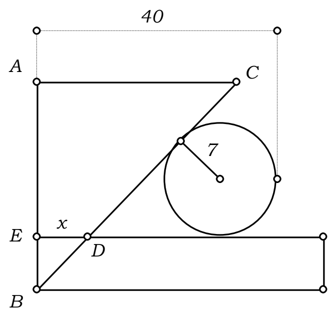
9.250. En la figura:



si r es el radio de los tres círculos y ΔABC es un triángulo equilátero cuyos lados tienen longitud a, probar que

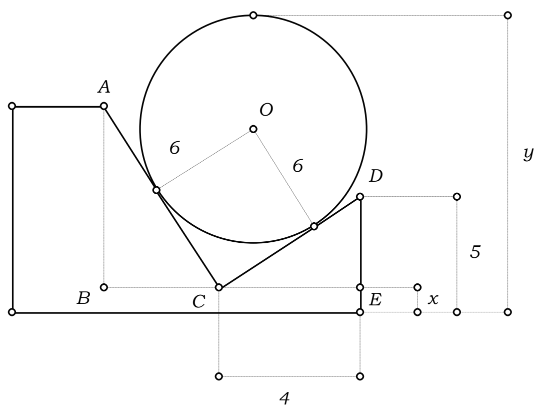
$$a = 2r(1 + \sqrt{3}).$$

9.251. En la figura:



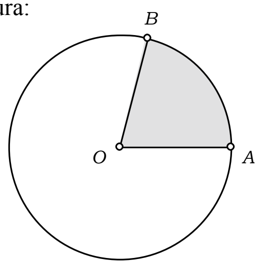
el círculo tiene radio igual a 7, $\angle BAC$ es un ángulo recto y $m(\angle EDB) = 60$. Con los datos adicionales en la figura: calcular la longitud x del segmento ED.

9.252. En la figura:



el radio del círculo de centro O es igual a 6, los segmentos AC y CD son tangentes al círculo $\mathcal{C}(O,6)$, $m(\angle BAC) = 30$ y $m(\angle CDE) = 60$. Con la información adicional que se da en la figura: calcular la medida del ángulo $\angle DCA$ y encontrar los valores numéricos de x y y.

9.253. En la figura:



tenemos una rueda con un ángulo central de 75 grados. Cada minuto dicha rueda da un giro de 15 grados. ¿En cuántos minutos el ángulo central regresa a su posición inicial?

9.254. Encontrar los ángulos del triángulo que se forma al unir los puntos que representan la 1 en punto, las 4 en punto y las 9 en punto de un reloj.

9.255. Sean $\angle APB$ un ángulo inscrito en un círculo $\mathrm{C}(O,r)$ y $Q \notin \mathrm{C}(O,r)$ tal que $P \notin int(\angle AQB)$. Probar las siguientes equivalencias:

a. $Q \in ext(\mathrm{C}(O,r))$ si y solo si $\angle AQB < \angle APB$.

b. $Q \in int(\mathrm{C}(O,r))$ si y solo si $\angle AQB > \angle APB$.

9.256. Sean $\mathrm{C}(O,r)$ un círculo y $P \in int(\mathrm{C}(O,r))$. Si $A, B \in \mathrm{C}(O,r)$ y $\angle POA > \angle POB$, probar que $PA > PB$.

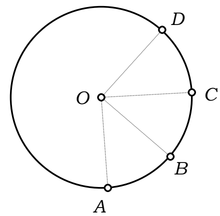
9.257. Sean AB una cuerda de un círculo $\mathrm{C}(O,r)$, y $P \in \mathrm{C}(O,r) - \{A, B\}$ un punto variable. Probar que la bisectriz del ángulo $\angle APB$ corta al círculo en un mismo punto cuando P se mueve alrededor del mismo círculo.

9.258. Sean $\mathrm{C}(O,r)$ un círculo y AB y BC dos de sus cuerdas tales que $\overleftrightarrow{AO} \perp \overleftrightarrow{BC}$ y el ángulo $\angle AOB$ es obtuso. Sean D es el punto de intersección de BC y $\overleftrightarrow{AO}$, y $d = d(O,AB)$.

a. Probar que $|OD| = \dfrac{r^2 - 2d^2}{r}$.

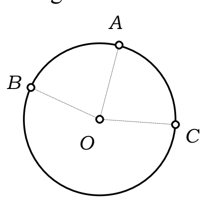
b. Si $AB \cong BC$, probar que $r = 2d$.

9.259. En la figura:



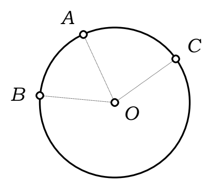
probar que $\angle AOB \cong \angle COD$ si y solo si $AC \cong BD$.

9.260. En la figura:



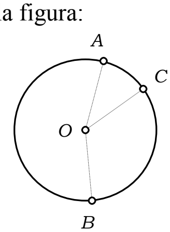
si $AB \cong AC$ y $m(\angle BAC) = 100$, calcular las medidas de los ángulos del triángulo ΔOCB.

9.261. En la figura:



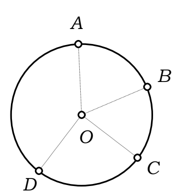
si $m(\angle COA) = 80$ y $m(\angle AOB) = 60$, calcular las medidas de los ángulos del triángulo ΔABC.

9.262. En la figura:



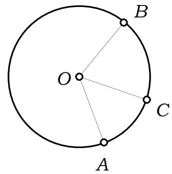
si$m(\angle COA) = 40$ y $m(\angle OCB) = 30$, calcular las medidas de los ángulos del triángulo ΔABC.

9.263. En la figura:



si $m(\angle DOC) = 90$, $m(\angle COB) = 60$ y $m(\angle BOA) = 70$, calcular las medidas de los ángulos del cuadrilátero $\square ABCD$.

9.264. En la figura:



si $m(\angle AOB) = 120$ y $m(\angle AOC) = 50$, calcular las medidas de los ángulos del cuadrilátero $\square OACB$.

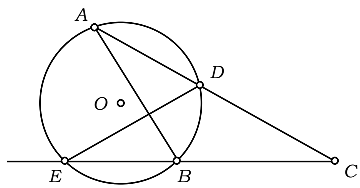
9.265. Si AB y AC son dos cuerdas congruentes de círculo $\mathrm{C}(O,r)$, probar que $P \in int(\angle BOC)$.

9.266. Por un punto P en el exterior de un círculo $\mathrm{C}(O,r)$ trazamos una recta secante que corta al círculo en los puntos A y B, y una segunda recta secante que pase por el centro del mismo que lo corta en los puntos C y D.

a. Si $|PA| = r$ y $m(\angle CPA) = 40$, calcular las medidas de los arcos $\overset{\frown}{AC}$ y $\overset{\frown}{BD}$.
b. Si $m(\angle CPA) = 30$ y $m(\angle BCA) = 60$, calcular las medias de los ángulos $\angle CAB$ y $\angle ABC$.
c. Si $m(\angle CPA) = 40$ y $m(\angle CDA) = 50$, calcular las medias de los ángulos $\angle ADC$ y $\angle PAC$.

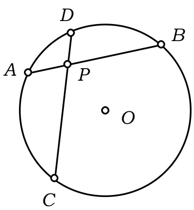
9.267. Sea AB una cuerda de un círculo $\mathrm{C}(O,r)$ que no sea un diámetro. Si $A \in \mathrm{C}(O,r) - \{A, B\}$, probar que $m(\angle APB) + m(\angle BAO) = 90$, o bien, $m(\angle APB) - m(\angle BAO) = 90$.

9.268. En la figura:



$\angle CBA$ es un ángulo obtuso y $AB \cong BC$.
Probar que $DC \cong DE$.

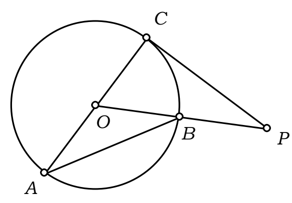
9.269. En la figura:



tenemos dos cuerdas AB y CD que se cortan en el punto P.

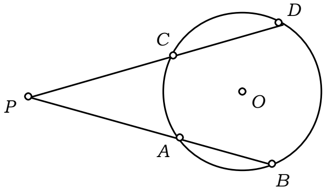
a. Si $m(\angle APC) = 70$ y $m(\angle ADP) = 40$, calcular la medida del ángulo $\angle BCD$.
b. Si $m(\angle APC) = 60$ y $m(\angle CAP) = 40$, calcular las medidas de los ángulos $\angle PDB$ y $\angle DBP$.
c. Si $m(\angle APC) = 80$ y $m(\angle ADP) = 30$, calcular la medida del ángulo $\angle BOD$.

9.270. En la figura:



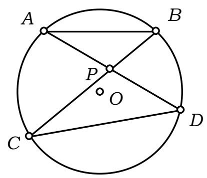
tenemos que PC es tangente al círculo y AC es uno de sus diámetros.
Si $m(\angle COP) = 40$, calcular la medida del ángulo $\angle BAO$.

9.271. En la figura:



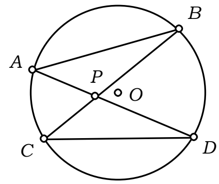
si $m(\angle APC) = 40$ y $m(\angle CBA) = 30$. Calcular las medidas de los ángulos $\angle DAP$ y $\angle PDA$.

9.272. En la figura:



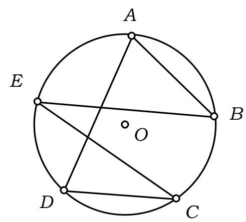
si $m(\angle DCB) = 30$ y $m(\angle ABC) = 40$, encontrar la medida del ángulo $\angle DPB$.

9.273. En la figura:



si $AB \cong CD$, probar que $\Delta PCD \cong \Delta PBA$.

9.274. En la figura:



si $m(\angle CEB) = 30$, $m(\angle CDA) = 70$ y $m(\angle ABE) = 40$, probar que $AB \cong AE$.

9.275. Si AB y CD son dos cuerdas perpendiculares de un círculo $C(O,r)$, probar que los ángulos $\angle AOD$ y $\angle BOC$ son suplementarios. ¿Es cierto el recíproco de este problema?

9.276. Si AB y CD son dos cuerdasperpendiculares de un círculo $C(O,r)$, probar que $\angle BAD \cong \angle OAC$.

9.277. Sea $\overset{\frown}{AB}$ un arco de un círculo. Probar que la suma $m(\angle PAB) + m(\angle PBA)$ es una constante que no depende de la elección del punto $P \in \overset{\frown}{AB}$.

9.278. Por un punto P en el exterior de un círculo $C(O,r)$ trazamos dos rectas secantes que cortan al círculo en los puntos A y B, y C y D.

a. Si $m(\angle CPA) = 30$, $m(\angle BDP) = 90$ y $m(\angle BOA) = 110$, calcular la medida del ángulo $\angle COD$.

b. Si $m(\angle CPA) = 40$, y $m(\angle PAD) = 110$, calcular la medida del ángulo $\angle ADC$.

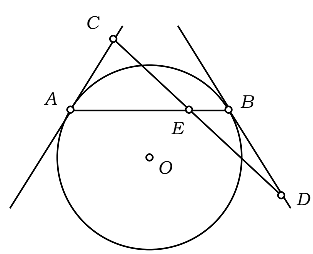
9.279. Sean AB y BC dos cuerdas de un círculo $C(O,r)$ tales que $m(\angle AOB) = 30$ y $AO \parallel BC$. Calcular las medidas de los ángulos que forman BC y la recta tangente al círculo $C(O,r)$ en el punto B.

9.280. Sean A, B y C tres puntos de un círculo $C(O,r)$ tales que $m(\angle ABC) = 110$ y $m(\angle BCA) = 50$. Si M y N son los puntos medios de $\overset{\frown}{AC}$ y $\overset{\frown}{AB}$, respectivamente, encontrar las medidas de los ángulos $\angle BCM$ y $\angle CMN$.

9.281. Sea AB un diámetro de un círculo $C(O,r)$. Probar que $m(\angle BAC) < 90$, para todo punto $C \in C(O,r) - \{A, B\}$.

9.282. Sean AB y CD dos diámetros de un círculo $C(O,r)$ y $P \in C(O,r)$. Si el ángulo $\angle APD$ es agudo, probar que los ángulos $\angle CPA$ y $\angle BPD$ son congruentes o son suplementarios.

9.283. En la figura:



tenemos una cuerda AB de un círculo $C(O,r)$, dos rectas tangentes al mismo en los puntos A y B, y C y D puntos sobre dichas rectas tangentes. Si E es el punto de intersección de AB y CD, $m(\angle ACE) = 40$ y $m(\angle CEA) = 60$, calcular las medidas de los ángulos $\angle EBD$ y $\angle BDE$.

9.284. Sean AB un diámetro de un círculo $C(O,r)$ y $C \in C(O,r) - \{A, B\}$. Trazamos una recta paralela a AC que sea tangente al círculo $C(O,r)$ en el punto D. Si $m(\angle BAC) = 50$, calcular la media del ángulo $\angle BDA$.

9.285. Sea AB un diámetro de un círculo $C(O,r)$ y $\angle BPC$ un ángulo inscrito en él. Si $m(\angle BPC) = 30$, calcular la medida del ángulo $\angle CBA$.

9.286. Sean AB un diámetro del círculo $C(O,r)$ y $P \in AB$. Sea CD la cuerda de $C(O,r)$ perpendicular a AB que pasa por el punto P. Si EF es cualquier otra cuerda de $C(O,r)$ que pasa por P probar que $m(\angle COD) \leq m(\angle EOF)$.

9.287. Sean PA y PB segmentos tangentes a un círculo y $C \in \overset{\frown}{AB}$. Si $m(\angle BPA) = 60$, calcular la media del ángulo $\angle ACB$.

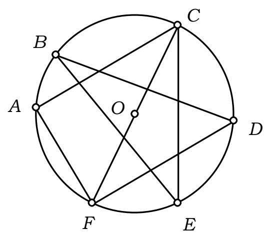
9.288. Sean PA y PC segmentos tangentes a un círculo $C(O,r)$ y $B \in \overset{\frown}{AC}$. Si $m(\angle BAP) = 25$ y $m(\angle PCB) = 40$, calcular las medias de los ángulos$\angle ABC$ y $\angle APC$.

9.289. Sea AB una cuerda de un círculo $C(O,r)$. Probar que $|AB| = r$ si y solo si $m(\angle AOB) = 60$.

9.290[I-238]. Sea PC un segmento tangente a un círculo $C(O,r)$ en el punto C. Supongamos que una recta que pasa por P corta al círculo $C(O,r)$ en los puntos A y B. Si $m(\angle APC) = 50$ y la medida del ángulo obtuso que forman $\overleftrightarrow{PC}$ y la cuerda CB es igual a 100, probar que $AP \cong AC$ y $|AB| = r$.

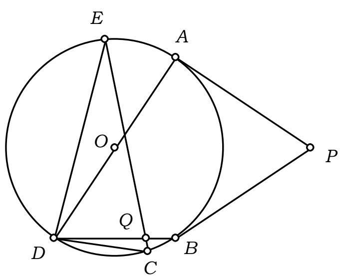
9.291. Sea PC un segmento tangente a un círculo $C(O,r)$ en el punto C. Supongamos que una recta que pasa por P corta al círculo $C(O,r)$ en los puntos A y B, de tal forma que $|AB| = r$. Probar que $AP \cong AC$ si y solo si $m(\angle APC) = 50$.

9.292. En la figura:



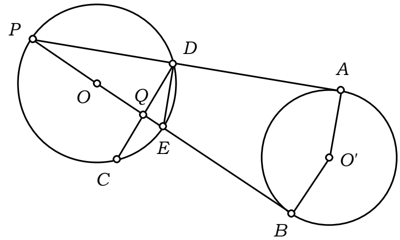
tenemos que $AC \cong FD$, $m(\angle DFA) = 90$, $m(\angle CEB) = 40$, $m(\angle FCE) = 20$ y $m(\angle EBD) = 30$.Calcular las medidas de los ángulos $\angle FAC$ y $\angle BDF$.

9.293. En la figura:



PA y PB son tangentes al círculo yAD es un diámetro del mismo. Si $m(\angle APB) = 80$, $m(\angle ECD) = 70$ y $m(\angle DEC) = 30$, calcular la medida del ángulo $\angle EQD$.

9.294. En la figura:



PA y PB son tangentes al círculo pequeño. Si $m(\angle AO'B) = 120$ y $m(\angle OQC) = 80$, calcular la medida del ángulo $\angle QDE$.

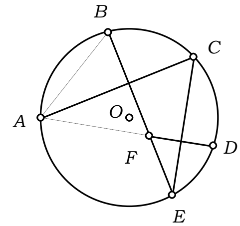
9.295[I-22]. Sean PAy PB segmentos tangentes a un círculo $C(O,r)$ tales que $PA \perp PB$. Una recta que pasa por P corta al círculo $C(O,r)$ en los puntos C y D, de tal forma que $2m(\overset{\frown}{AD}) = m(\overset{\frown}{BD})$. Encontrar la medida del ángulo $\angle AOD$ y la medida de cada uno de los ángulos del cuadrilátero $\square CAOD$.

9.296[I-22]. Sean AB un diámetro y AC una cuerda de un círculo $C(O,r)$. Sea D el punto de intersección de $\overleftrightarrow{AC}$ y la recta tangente al círculo $C(O,r)$ en el punto B. Si $|AD| = 4|AC|$, calcular la medida del ángulo $\angle BAC$.

9.297[I-238]. Sean $C(O,r)$ un círculo, OA uno de sus radios y $P \in OA$. La mediatriz de AB corta al círculo en el punto Q y la recta tangente al círculo en el punto Q corta a $\overleftrightarrow{OA}$ en el punto R. Probar que

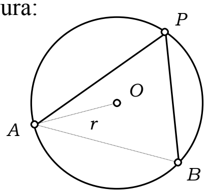
$$m(\angle OQP) + 3m(\angle AQR) = 90.$$

9.298. En la figura:



tenemos que $AC \perp BE$ y $CE \perp AD$.
Probar que $AB \cong AF$.

9.299. En la figura:



$\angle APB$ es un ángulo inscrito del círculo $C(O,r)$ con $m(\angle APB) = 60$. Expresar la longitud de la cuerda AB en función del radio r.

9.300. Sea AB una cuerda del círculo $C(O,5)$ de longitud 3. Si BC es la cuerda del círculo perpendicular a su diámetro que pasa por A, calcular la longitud de BC.

9.301. Sea AB una cuerda del círculo $C(O,2)$ tal que $m(\overset{\frown}{AB}) = 60$.
a. Calcular la distancia de B al diámetro del círculo que pasa por el punto A.
b. Si CD es una cuerda de $C(O,2)$ tal que $m(\overset{\frown}{AB}) = 2m(\overset{\frown}{CD})$, calcular la longitud de la cuerda CD.
c. Si CD es una cuerda de $C(O,2)$ tal que $2m(\overset{\frown}{AB}) = m(\overset{\frown}{CD})$, calcular la longitud de la cuerda CD.

9.302. Sea AB una cuerda de un círculo de longitud 2 tal que forma con la recta tangente al círculo en el punto A un ángulos de medida 60. Calcular el radio del círculo.

9.303. Sean AB un diámetro del círculo $C(O,2)$ y OC el radio de este círculo perpendicular al diámetro dado. Sean M el punto medio de $\overset{\frown}{BC}$ y D el punto de intersección de OC y AM. Calcular las longitudes de los segmentos AM, CD, DO y AD.

9.304. Sean AB un diámetro del círculo $C(O,4)$ y P un punto sobre la recta tangente a $C(O,4)$ en el punto A tal que $AB \cong AP$. Sean C y D los puntos de intersección de $\overleftrightarrow{PO}$ con el círculo. Calcular las longitudes de PC y PD.

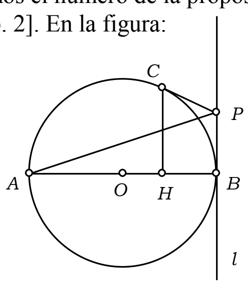
9.305. Sean PA un segmento tangente al círculo $C(O,4)$ en el punto A y por P trazamos una recta que corte al círculo en los puntos B y C. Si AC es un diámetro del círculo y $|BC| = 6$, calcular las longitudes de PA y PB.

9.306. Sean AB un diámetro del círculo $C(O,4)$ y $P \in AB$ tal que $|PO| = 1$. Si CD es una cuerda del círculo $C(O,r)$ que pasa por P tal que $m(\angle CPA) = 60$, calcular las longitudes de los segmentos CP y PD.

9.307. Sean AB un diámetro del círculo $C(O,4)$ y CD una cuerda del mismo tal que corta a OA en su punto medio M y $2|CM| = 3|MD|$. Calcular las longitudes de los segmentos CM y MD.

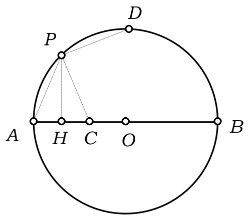
9.308[l-22]. Sea $\angle APB$ un ángulo inscrito en un círculo $C(O,2)$ de medida 45. Sean C la proyección de P sobre AB y D el punto de intersección de AB y el diámetro del círculo que pasa por P. Si $m(\angle CPD) = 15$, calcular las longitudes de los segmentos AC, CD y DB.

9.309. Los resultados que se enlistan a continuación aparecen en el libro de Arquímedes *Liber Assumptorum*. Indicamos el número de la proposición que le corresponde según aparece en el libro de T. L. Heath [l-168]:
a[Prop. 2]. En la figura:



AB es un diámetro del círculo $C(O,r)$ y la recta l es perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ en el punto P. Desde P se traza una recta tangente a $C(O,r)$ en el punto C. Si H es la proyección del punto C sobre el diámetro AB, entonces el segmento AP corta a CH en su punto medio.

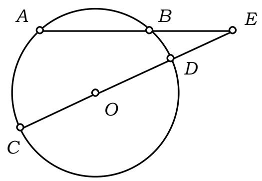
b[Prop. 3]. En la figura:



sean AB un diámetro del círculo $\mathrm{C}(O,r)$; $P, D \in \mathrm{C}(O,r)$ y H la proyección de P sobre AB. Si $AH \cong HC$ y $\overset{\frown}{PA} \cong \overset{\frown}{PD}$, entonces $BC \cong BD$

c[Prop. 7]. El área de un círculo circunscrito sobre un cuadrado es el doble del área del círculo inscrito en el mismo cuadrado.

d[Prop. 8]. En la figura:

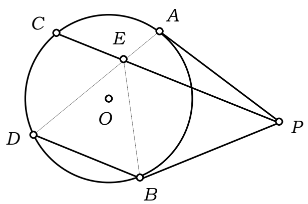


sea AB una cuerda del círculo $\mathrm{C}(O,r)$. Si $|BE| = r$, entonces $m(\overset{\frown}{CA}) = 3m(\overset{\frown}{BD})$.

e[Prop. 9]. Si AB y CD son cuerdas del círculo $\mathrm{C}(O,r)$ que no pasan por el centro del mismo, entonces

$$m(\overset{\frown}{AD}) + m(\overset{\frown}{CB}) = m(\overset{\frown}{AC}) + m(\overset{\frown}{DB}).$$

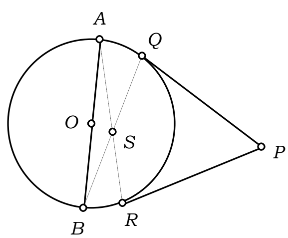
f[Prop. 10]. En la figura:



si PA y PB son tangente al círculo $\mathrm{C}(O,r)$, $PC \parallel BD$ y E es el punto de intersección de AD y PC, entonces

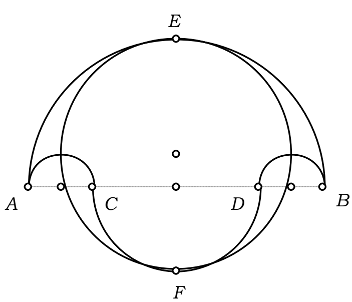
$$ED \cong EB.$$

g[Prop. 12]. En la figura:



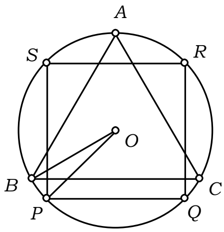
sean AB un diámetro del círculo $\mathrm{C}(O,r)$ y PQ y PR tangentes a $\mathrm{C}(O,r)$. Si S es el punto de intersección de AR y BQ, entonces $\overleftrightarrow{PS} \perp \overleftrightarrow{AB}$.

h[Prop. 14]. En la figura:



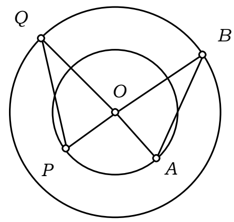
tenemos cuatro semicírculos de diámetro AB, AC, CD y DB tales que $AC \cong DB$. Si E y F son los puntos medios de los semicírculos de diámetro AB y CD, respectivamente, entonces el área de la región curvilínea acotada por los cuatro semicírculos es igual al área del círculo cuyo diámetro es el segmento EF.

9.310. En la figura:



tenemos un triángulo equilátero ΔABC y un cuadrado $\square ABCD$ tales que $BC \parallel PQ$.Determinar la medida del ángulo $\angle BOP$.

9.311. En la figura:



tenemos dos círculos concéntricos de centro O.
Si $\angle A \cong \angle P$, probar que $\Delta OAB \cong \Delta OPQ$.

9.312. Sean M el punto medio de un segmento AB y l una recta que no pasa ni por A y ni por B. Sean A' y B' las proyecciones de A y B sobre l. Si $\angle AA'M$ y $\angle MB'B$ son ángulos rectos, probar que A', M y B' son colineales y $AA' \cong BB'$.

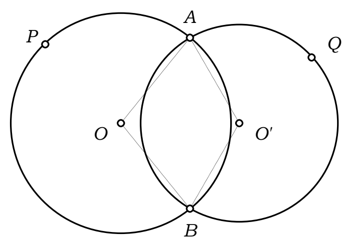
9.313. Sean $\mathrm{C}(O,r)$ y $\mathrm{C}(O',r')$ dos círculos que se cortan en los puntos A y B. Trazamos los diámetros AC y BE de $\mathrm{C}(O,r)$ y los diámetros AD y BF de $\mathrm{C}(O',r')$.

a. Probar que C, B y D, y E, A y F son dos hileras de puntos.

b. Probar que $AB \perp CD$ y $AB \perp EF$.

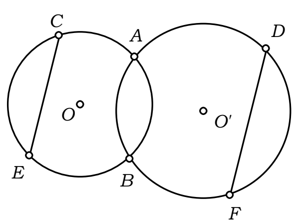
c. Sean P y Q los puntos de intersección de $\overleftrightarrow{OO'}$ con CE y DF, respectivamente. Comparar los segmentos OO', CD y PQ.

9.314. En la figura:



supongamos que $m(\angle BOA) = 100$ y $m(\angle AO'B) = 120$.
¿Cuáles son los posibles valores de la suma
$m(\angle BPA) + m(\angle AQB)$?

9.315. En la figura:



tenemos dos círculos $\mathrm{C}(O,r)$ y $\mathrm{C}(O',r')$ que se cortan en los puntos A y B. Si $CE \parallel DF$, probar que $CD \cong EF$.

9.316. Sean C(O,r) y C(O',r') dos círculos que se cortan en los puntos A y B. Una recta que pasa por A corta a C(O,r) y C(O',r') en los puntos C y D, respectivamente, y la recta $\overleftrightarrow{BD}$ corta a C(O,r) en el punto E. Probar que la recta $\overleftrightarrow{CE}$ es paralela a la recta tangente a C(O',r') en el punto D.

9.317. Sean C(O,r) y C(O',r') dos círculos que se cortan en los puntos A y B. Si por el punto A trazamos una recta l que corte a C(O,r) y a C(O',r') en los puntos C y D, respectivamente.

a. Probar que $|CD| \leq 2|OO'|$.

b. Si $l \parallel \overleftrightarrow{OO'}$, probar que $|CD| = 2|OO'|$.

9.318. Sean C(O,r) y C(O',r') dos círculos que se cortan en los puntos A y B. Una recta que pasa por el punto A corta a los círculos C(O,r) y C(O',r') en los puntos C y D, respectivamente. Si M yN son los puntos medios de AC y AD, respectivamente, probar que $|MN| = \dfrac{|CD|}{2}$.

9.319. Sean C(O,r) y C(O',r') dos círculos que se cortan en los puntos A y B. Por A trazamos una recta que corte a C(O,r) y C(O',r') en los puntos C y D, respectivamente, y por B trazamos una recta que corte a C(O,r) y C(O',r') en los puntos E y F, respectivamente. Probar las siguientes afirmaciones:

a. $CE \parallel DF$.

b. $\angle CBE \cong \angle DBF$.

9.320. Sean C(O,r) y C(O',r') dos círculos que se cortan en los puntos A y B. Por A y B trazamos rectas paralelas que cortan al círculo C(O,r) en los puntos C y D y al círculo C(O',r') en los puntos E y F. Probar que $CD \cong EF$.

9.321. Sean C(O,r) y C(O',r') dos círculos que se cortan en los puntos A y B. Si una recta paralela a AB corta a C(O,r) en los puntos C y D y a C(O',r') en los puntos E y F, probar que $CF \cong DE$.

9.322. Sean C(O,r) y C(O',r') dos círculos que se cortan en los puntos A y B. Probar que $\overleftrightarrow{AB}$ biseca a cualquier segmento tangente a ambos círculos.

9.323. Sean C(O,r) y C(O',r') dos círculos que se cortan en los puntos A y B y M el punto medio de OO'. Una recta perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ en el punto A corta a C(O,r) y C(O',r') en los puntos C y D, respectivamente. Probar que $AC \cong AD$.

9.324. Sean C(O,r) y C(O',r') dos círculos que se cortan en los puntos A y B. Si l es una recta que pasa por el punto B y corta a los círculos C(O,r) y C(O',r') en los puntos C yD, respectivamente, probar que la medida del ángulo $\angle CAD$ permanece constante cuando l gira alrededor de B.

9.325. Sean C(O,r) y C(O',r') dos círculos que se cortan en los puntos A y B. Dos rectas que pasan por el punto A cortan al círculo C(O,r) en los puntos C y D y al círculo C(O',r') en los puntos E y F. Sea P el punto de intersección de $\overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{EF}$.

a. Comparar el ángulo $\angle CPE$ con el ángulo formado por los círculos.

b. Probar que la medida del ángulo $\angle CPE$ permanece constante cuando las rectas giran alrededor de A.

9.326. Sean C(O,r) y C(O',r) dos círculos congruentes que se cortan en los puntos A y B. Una recta que pasa por el punto A corta a C(O,r) y C(O',r) en los puntos C y D, respectivamente.

a. Probar que el cociente $\dfrac{|BC|}{|BD|}$ es constante y no depende de la recta.

b. Probar que el triángulo ΔACD permanece semejante cuando la recta $\overleftrightarrow{CD}$ se mueve alrededor de A.

9.327. Sean C(O,r) y C(O',r) dos círculos congruentes que se cortan el los puntos A y B. Una recta que pasa por el punto B corta a C(O,r) y a C(O',r) en los puntos C y D, respectivamente. Probar que el triángulo ΔACD es isósceles.

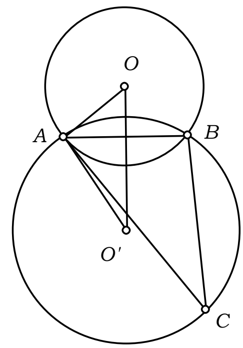
9.328. Sean C(O,r) y C(O',r) dos círculos congruentes tales que el centro de cualquiera de ellos yace en el otro círculo. Si C y D son los puntos de intersección de estos dos círculos, probar que $|CD| = \sqrt{3}\, r$.

9.329. Sean C(O,r) y C(O',r) dos círculos con el mismo radio que se cortan en los puntos A y B. Si C(O,r) corta a $\overleftrightarrow{OO'}$ en el punto C y C(O',r) corta a $\overleftrightarrow{OO'}$ en el punto D, probar que los triángulos ΔADC y ΔBDC son isósceles.

9.330. Sean C(O,r) y C(O',r') dos círculos que se cortan en los puntos A y B. Fijamos un punto $P \in \overleftrightarrow{AB} - AB$. Una recta que pasa por P corta a C(O,r) en los puntos C, D y $E \in$ C(O',r') tal que PE es tangente a C(O',r'). Probar que PE es también tangente al círculo que pasa por los puntos C, D y E.

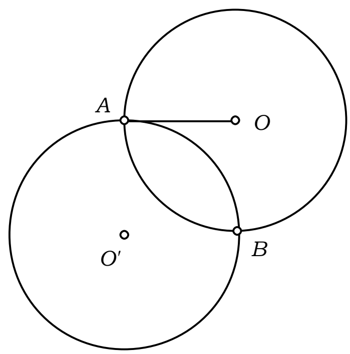
9.331. Sean AB y AC dos cuerdas congruentes de un círculo C(O,r). Trazamos los círculos C(A,$|AC|$) y C(B,$|BC|$), los cuales se cortan en los puntos C y D. Probar que el segmento DB es tangente al círculo que pasa por los puntos A, B y C.

9.332. En la figura:



si AC es tangente al círculo C(O,r) en el punto A, probar que $\Delta AOO' \sim \Delta BAC$.

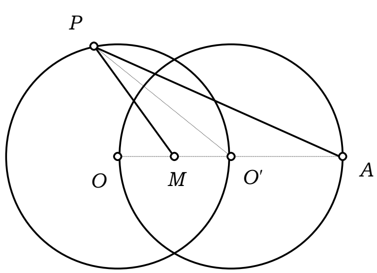
9.333[I-240]. En la figura:



tenemos dos círculos C(O,r) y C(O',r') que se cortan en los puntos A y B, de tal forma que OA es tangente al círculo C(O',r'). Probar que

$$|AB| = \frac{2rr'}{\sqrt{r^2 + r'^2}}$$

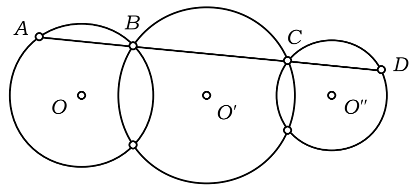
9.334. En la figura:



sean C(O,r) y C(O',r) dos círculos con el mismo radio, M el punto medio de OO', OA el diámetro de C(O',r) que pasa por el punto O, y $P \in$ C(O,r). Probar que $\overrightarrow{PO'}$ es la bisectriz del ángulo $\angle MPA$.

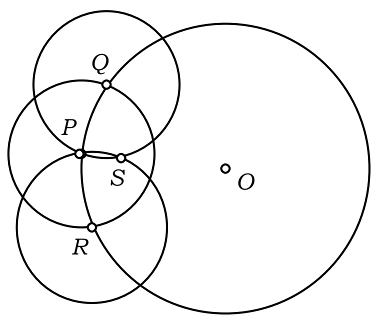
9.335. Sea AB un segmento. Trazamos los círculos C(A,|AB|) y C(B,|AB|). Sean E el punto de intersección de C(A,|AB|) y la recta $\overleftrightarrow{AB}$ distinto de B, y F el punto de intersección de C(B,|AB|) y la recta $\overleftrightarrow{AB}$ distinto de A, y C y D los puntos de intersección de los círculos C(A,|AB|) y C(B,|AB|). Finalmente, trazamos los círculos C(A,|AF|) y C(B,|BE|). Sean G y H los puntos de intersección de estos dos últimos círculos. Probar que los puntos G, D, C y H son colineales.

9.336. En la figura:



si $OO' \cong O'O''$, probar que $AB \cong CD$.

9.337. En la figura:



tenemos que $P \in$ C(O,r), Q, $R \in$ C(O,r) $\cap$ C(P,t) y $S \in$ C(Q,t) $\cap$ C(R,t).
Probar que P, S y O son colineales.

9.338[I-238]. Sean A, C y B tres puntos consecutivos tales que $AC > CB$. Trazamos el círculo de diámetro AB y el círculo C(C,|AC|). Completamos el triángulo equilátero ΔABD, el cual corta al primer círculo en el punto P y al segundo en el punto Q. Probar que

$$|PQ| = \frac{|AC|-|CB|}{2}.$$

9.339. Sean C(O,4) un círculo y P un punto tal que $|PO| = 2$. Trazamos una recta perpendicular a $\overleftrightarrow{PO}$ en P y sobre ella tomamos dos puntos A y B tales que $|AP| = 6 = |BP|$. Calcular la distancia de los puntos A y B al círculo.

9.340. Sean A, B, C y D cuatro puntos consecutivos y P un punto tales que $\angle APB \cong \angle CPD$. Probar que los circuncírculos de los triángulos ΔPBC y ΔPAD tienen una recta tangente en común en el punto P.

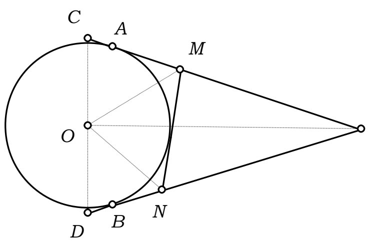
9341. Sean $\mathrm{C}(O,r)$ un círculo, l una recta tangente al círculo en el punto P, $A \in \mathrm{C}(O,r)$ un punto fijo y m la recta perpendicular a l que pasa por A. Si C es el punto simétrico de A con respecto a la recta $\overleftrightarrow{OP}$ y B es el punto de intersección de m y $\overleftrightarrow{PC}$, probar que el triángulo ΔABC es isósceles.

9.342. Sea $\angle\alpha$ un ángulo con vértice O. Trazamos un círculo con centro en O que corte a los lados del ángulo en los puntos A y B, y a la semirrecta $\overleftarrow{OB}$ en el punto C. Si trazamos la recta paralela a CB que pasa por O, probar que dicha recta es la bisectriz del ángulo $\angle\alpha$.

9.343. Sean $\angle BAC$ y $\angle BA'C$ dos ángulos no degenerados congruentes, de tal forma que A y A' están en un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{BC}$. Probar que para todo punto $P \in AA' - \{A, A'\}$ se cumple la congruencia $\angle BAC \cong \angle BPC$.

9.344. Sea $\angle APC$ un ángulo recto tal que $|PA| = 1$ y $|PC| = \dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{7}}{2}$. Si $B \in \overrightarrow{OA}$ y $D \in \overrightarrow{OC}$ satisfacen que $|PB| = 2$ y $|PD| = \dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{7}}{2}$, probar que los puntos A, B, C y D son concíclicos y dar el radio del círculo que los contiene.

9.345. En la figura:



PA y PB son tangentes al círculo $\mathrm{C}(O,r)$, $CO \perp OP$ y $DO \perp OP$. Una tangente móvil corta a PA y PB en los puntos M y N, respectivamente.

a. Probar que la medida del ángulo $\angle MON$ permanece constante cuando la tangente al círculo se mueve.

b. Comparar los triángulos ΔOMN, ΔCMO y ΔDNO.

c. Probar que $|CM||DN| = |CP||DB| = |CA||DP|$.

d. Probar que el producto $|CM||DN|$ es constante.

e. Probar que $\dfrac{|CM|}{|MP|} = \dfrac{|DB|}{|BN|}$ y $\dfrac{|DN|}{|NP|} = \dfrac{|CB|}{|BM|}$.

f. Probar que $\dfrac{|PM|}{|AM|}\dfrac{|PN|}{|BN|}$ es constante.

9.346. Sean $\mathrm{C}(O,r)$ un círculo, $A \in \mathrm{C}(O,r)$ y P un punto en su exterior. Si la potencia de P con respecto a $\mathrm{C}(O,r)$ es igual a $|PA|^2$, probar que PA es tangente al círculo $\mathrm{C}(O,r)$ en el punto A.

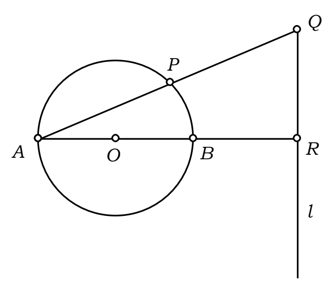
9.347[I-238]. Sean AB un segmento y M su punto medio. Por A trazamos una recta que corte al círculo de diámetro AM en el punto P y al círculo de diámetro AB en el punto Q. Probar que $|AP||AQ| = 2|AM|^2$.

9.348. En la figura:

tenemos AB un diámetro del círculo $\mathrm{C}(O,r)$, l es perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ en el punto R, $Q \in l$ es arbitrario y P es el punto de intersección de AQ y el círculo.

a. Probar que los puntos B, R, Q y P son concíclicos.

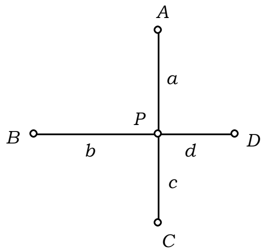
b. Probar que $|AP||AQ| = |AB||AR|$.



9.349. Sea $\mathrm{C}(O,r)$ un círculo. Si el valor absoluto de la potencia de un punto P con respecto a $\mathrm{C}(O,r)$ es mayor o igual que r, probar que P tiene que estar en el exterior del círculo $\mathrm{C}(O,r)$.

9.350. Tenemos dos círculos concéntricos. Si un tercer círculo corta a cada uno de los dos círculos dados en dos puntos, probar que las cuerdas que se forman son paralelas.

9.351. En la figura:



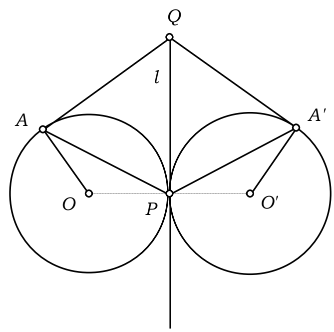
tenemos que $AC \perp BD$, $a = |AP|$, $b = |BP|$, $c = |CP|$ y $d = |DP|$.

Probar que $\frac{a}{b} = \frac{d}{c}$ si y solo si A, B, C y D son concíclicos.

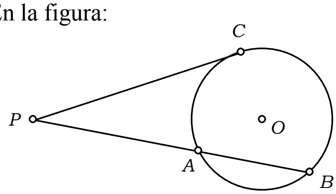
9.352. En la figura:

tenemos dos círculos tangentes exteriormente en el punto P. Si OA y OA' son tangentes a los círculos y Q es un punto en el eje radical de ambos círculos probar que

$$m(\angle A'PA) = \frac{m(\angle A'O'O) + m(\angle O'OA)}{2}.$$

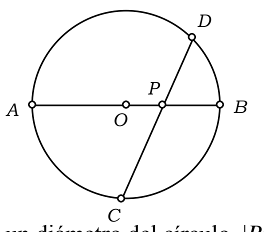


9.353. En la figura:



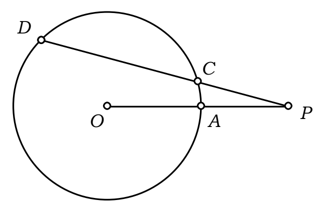
si $|PA| = 3$, $|PB| = 5$ y PC es tangente al círculo, calcular la longitud del segmento PC.

9.354. En la figura:



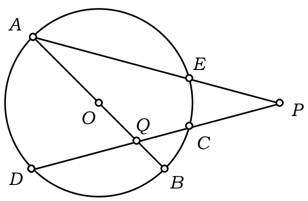
si AB es un diámetro del círculo, $|PC| = 8$, $|PD| = 3$ y $|PO| = 1$, encontrar el radio del círculo.

9.355. En la figura:



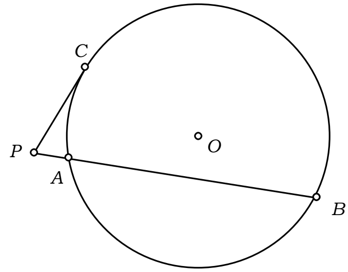
si $|PA| = 3$, $|PC| = 5$ y $|CD| = 8$, encontrar el radio del círculo.

9.356. En la figura:



si AB es un diámetro del círculo, $|PC| = 5$, $|PE| = 8$, $|AE| = 10$, $|BQ| = 3$ y $|DQ| = 7$, encontrar el radio del círculo.

9.357. En la figura:



tenemos un círculo $\mathcal{C}(O,r)$ y puntos A, B, $C \in \mathcal{C}(O,r)$ tales que PC es tangente a $\mathcal{C}(O,r)$, $|PC| = 5$ y $|AB| = 20$. Encontrar la longitud del segmento $|PA|$.

9.358. Sean $\mathcal{C}(O,2)$ un círculo, P un punto en su exterior, PA un segmento tangente al círculo y FG uno de sus diámetros. Una recta que pasa por P corta al círculo en los puntos B y C, y una segunda recta que pasa por P corta al círculo en los puntos C y D. Supongamos que $|PB| = 5$, $|PC| = 8$ y $|PD| = 4$. Encontrar las longitudes de los segmentos PE, PA, PO, PF y PG y las distancias $d(O, \overleftrightarrow{BC})$ y $d(O, \overleftrightarrow{DE})$.

9.359. Sean $\mathcal{C}(O,r)$ un círculo y $P \in int(\mathcal{C}(O,r))$. Sean AB y CD dos cuerdas del círculo que se cortan en P, EF el diámetro del círculo que pasa por P y GH la cuerda del círculo perpendicular a EF en P. Supongamos que $|PA| = 1$, $|PB| = 2$, $|PC| = \frac{1}{2}$ y $|PO| = 3$. Sea Q el punto de intersección de las rectas tangentes a $\mathcal{C}(O,r)$ en los puntos G y H. Encontrar r, $|PD|$, $|PG|$, $|PE|$, $|PF|$, $|PQ|$, $|OQ|$, $d(O, \overleftrightarrow{AB})$ y $d(O, \overleftrightarrow{CD})$.

9.360. Sean $\mathcal{C}(O,r)$ y $\mathcal{C}(O',r')$ dos círculos exteriormente tangentes en el punto A y BB' un segmento tangente a ambos círculos. Sean P el punto de intersección de $\overleftrightarrow{OO'}$ y $\overleftrightarrow{BB'}$, y Q el punto de intersección del eje radical de los círculos y BB'.

a. Expresar las longitudes de los segmentos PO, PO', BB', PB y PB' en función de r y r'.

b. Probar que el círculo de diámetro BB' es tangente a $\overleftrightarrow{OO'}$ en el punto A.

c. Probar la identidad $|PA|^2 = |PB||PB'|$.

d. Probar que el círculo de diámetro OO' es tangente a $\overleftrightarrow{BB'}$ en el punto Q.

e. Probar la identidad $|PQ|^2 = |PO||PO'|$.

9.361. Sean $\mathcal{C}(O,r)$ y $\mathcal{C}(O',r')$ dos círculos, R el punto de intersección de su eje radical y OO', P un punto en el plano y S la proyección de P sobre la recta $\overleftrightarrow{OO'}$. Si p y p' son las potencias de P con respecto a los círculos $\mathcal{C}(O,r)$ y $\mathcal{C}(O',r')$, respectivamente, probar que $|p - p'| = 2|OO'||RS|$.

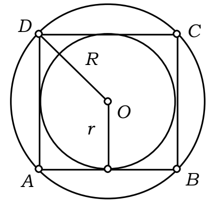
9.362[I-22]. Sea AB una cuerda de un círculo $\mathcal{C}(O,r)$. Sobre la recta tangente a $\mathcal{C}(O,r)$ en el punto A ubicamos un punto C tal que $AB \cong AC$. Si D es el punto de intersección de $\overleftrightarrow{BC}$ y $\mathcal{C}(O,r)$, probar que $CD \cong AD$.

9.363. Tenemos dos círculos $\mathcal{C}(O,r)$ y $\mathcal{C}(O',r')$ que se cortan ortogonalmente y una recta tangente a ambos en los puntos A y B, respectivamente. Expresar el radio del círculo que es tangente a dichos círculos y a la recta $\overleftrightarrow{AB}$ en función de r y r'.

9.364. Encontrar la distancia entre los centros de dos círculos ortogonales $\mathcal{C}(O,2)$ y $\mathcal{C}(O',6)$.

9.365. Probar que el círculo que pasa por los tres puntos de tangencia de tres círculos exteriormente tangentes entre sí es ortogonal a cada uno de los tres círculos.

9.366. En la figura:



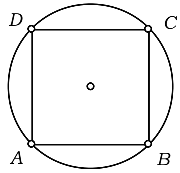
tenemos un cuadrado $\square ABCD$ cuyos lados tienen longitud 4. Determinar los radios r y R de los dos círculos.

9.367. Probar que la longitud de los lados del cuadrado inscrito en un círculo $\mathcal{C}(O,r)$ es igual a $r\sqrt{2}$.

9.368. Probar que la longitud de los lados del cuadrado circunscrito en un círculo $\mathcal{C}(O,r)$ es igual a $2r$.

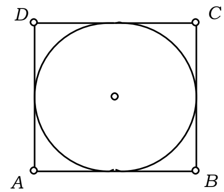
9.369. ¿Cuál es el radio de un círculo si la diferencia entre las longitudes de los lados de sus cuadrados circunscrito e inscrito es igual a 4?

9.370. En la figura:



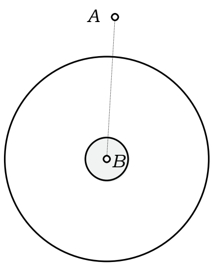
tenemos un cuadrado □*ABCD*. Si el área del círculo es igual a 50π, hallar el área del cuadrado.

9.371. En la figura:



□*ABCD* es un cuadrado cuyos lados tienen longitud 5 y dentro tiene un círculo inscrito. Calcular el área del círculo.

9.372. En la figura:



el círculo grande representa un lago en cuyo centro se encuentra una isla con un árbol *B*. A las orillas del lago se encuentra otro árbol *A*. ¿Es posible que una persona que no sepa nadar pueda alcanzar la isla usando simplemente una cuerda?

9.373[l-279] ¿Qué resulta ser más barato, comprar tres pizzas de 30 cm de diámetro a $ 40 pesos cada una, o una pizza de 60 cm de diámetro que cuesta $100 pesos?

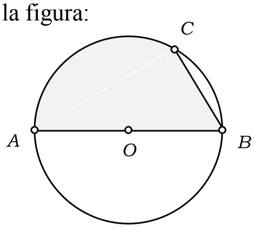
9.374. Si *AB* es una cuerda de un círculo $\mathcal{C}(O,r)$, probar que $2are(\Delta AOB) \leq r$.

9.375. ¿Cuál es el radio de un círculo cuya área es igual a 2?

9.376 (ASHME, # 8, 1950). ¿Si el radio de un círculo aumenta el 100%, cuánto aumenta su área?

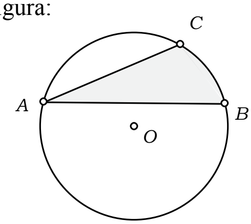
9.377. Encontrar el perímetro de un círculo que tiene una cuerda de longitud 4 y que está a una distancia de 2 del centro del círculo.

9.378. En la figura:



tenemos un ángulo $\angle CBA$ inscrito en un círculo de radio 4. Si *AB* es un diámetro y $m(\angle CBA) = 60$, calcular el área de la región sombreada.

9.379. En la figura:



tenemos un ángulo $\angle BAC$ inscrito en un círculo de radio 4. Si $|AB| = 3$ y $|AC| = 2$, encontrar el área de la región sombreada.

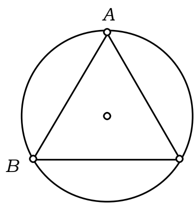
9.380. En un terreno cuadrado hay en su centro un aspersor que lo riega de manera circular. Si el agua alcanza a regar cada lado del terreno, decir qué tanto porcentaje del terreno queda sin regar.

9.381. Si un cuadrado y un círculo tienen el mismo perímetro, ¿cuál de los dos tiene mayor área?

9.382. Probar que la longitud de los lados del triángulo equilátero inscrito en un círculo $\mathcal{C}(O,r)$ es igual a $r\sqrt{3}$.

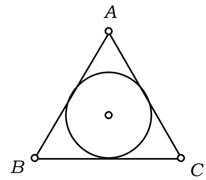
9.383. Si ΔABC es un triángulo equilátero, probar que $h_a = 3r$, $a = 2\sqrt{3}\,r$ y $are(\Delta ABC) = 3\sqrt{3}\,r^2$.

9.384. En la figura:



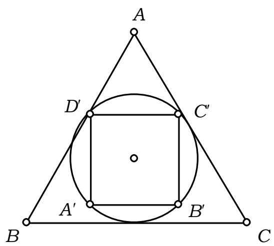
tenemos un triángulo equilátero ΔABC inscrito en un círculo. Si el área del círculo es igual a 50π, hallar el área del triángulo.

9.385. En la figura:



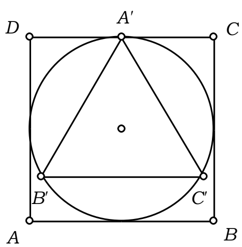
ΔABC es un triángulo equilátero cuyos lados tienen longitud 3 y dentro de él hay un círculo inscrito. Hallar el área del círculo.

9.386. En la figura:



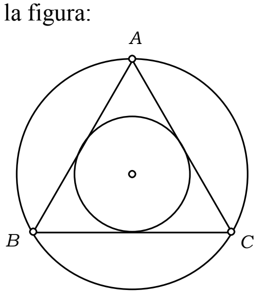
se tiene que ΔABC es un triángulo equilátero cuya área es igual a $32\sqrt{6}$. Calcular el área del cuadrado $\square A'B'C'D'$.

9.387. En la figura:



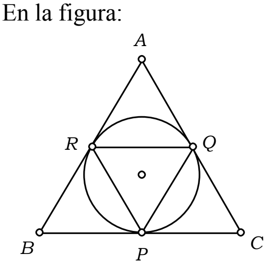
si cada lado del cuadrado $\square ABCD$ tiene longitud 4, calcular el área del triángulo equilátero $\Delta A'B'C'$.

9.388. En la figura:



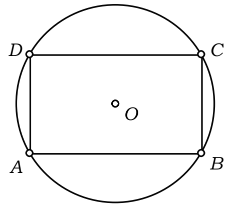
tenemos un triángulo equilátero cuyos lados tienen longitud 6. Calcular el área del aro determinado por el incírculo y el circuncírculo del triángulo.

9.389. En la figura:



tenemos un triángulo equilátero ΔABC, ¿qué relación hay entre las áreas de los triángulos ΔABC y ΔPQR?

9.390. En la figura:



tenemos un círculo de radio 4 y un rectángulo inscrito $\square ABCD$ en él. Si $m(\overset{\frown}{AB}) = 60$, calcular el área del rectángulo.

9.391. Se tiene un círculo en el cual el área de un triángulo equilátero circunscrito a él supera en 16 al área de un triángulo equilátero inscrito en el mismo círculo. Calcular el radio del círculo.

9.392(ASHME, # 9, 1950). Probar que el área del mayor triángulo que se puede inscribir en un semicírculo de radio r es $2r^2$.

9.393. Dado un círculo, probar que el triángulo de mayor perímetro que se puede inscribir en el círculo es el triángulo equilátero inscrito en el círculo.

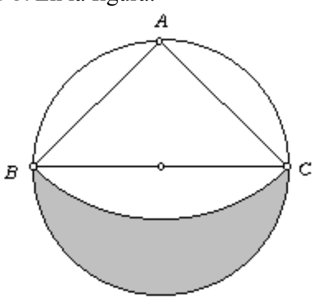
9.394. Un cierto triángulo rectángulo está inscrito en un círculo de diámetro 20 y circunscrito en un círculo de diámetro 10. Calcular el área del triángulo.

9.395. Sean AB un diámetro de un círculo $\mathcal{C}(O,6)$ y OC el radio del círculo perpendicular a AB. Trazamos el círculo $\mathcal{C}(C,|CA|)$ y sea D el punto donde este círculo corta a $\overleftrightarrow{OC}$. Calcular el área del triángulo ΔADB.

9.396. Sean $\mathcal{C}(O,r)$ un círculo de radio 4 y AB uno de sus diámetros. Prolongamos AB hasta un punto C, de tal forma que $|AC| = 2$. Sean P y Q los puntos donde la recta tangente al círculo que pasa por C corta a la recta tangente al círculo en el punto A y a la recta tangente al círculo en el punto B, respectivamente. Calcular el área del triángulo ΔOPQ.

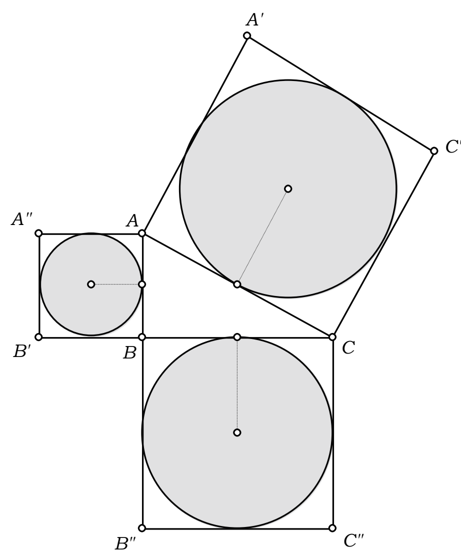
9.397. Sean $\mathcal{C}(O,r)$ un círculo, AB una de sus cuerdas y P el punto de intersección de las rectas tangentes al círculo en los puntos A y B. Si $d(O, \overleftrightarrow{AB}) = 1$ y $|AB| = 4$, calcular el área del triángulo ΔPAB.

9.398. En la figura:



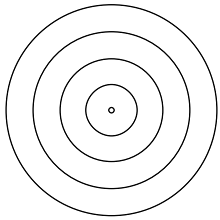
sea ΔABC un triángulo rectángulo isósceles con ángulo recto $\angle A$. Si trazamos el circuncírculo del triángulo ΔABC y el círculo con centro A y radio $|AB|$, probar que la luna que se forma, como lo muestra la figura: tiene la misma área que el triángulo dado.

9.399. En la figura:



sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$. Sobre los lados del triángulo construimos cuadrados hacia el exterior del mismo. Trazamos el círculo inscrito en cada uno de estos tres cuadrados. Probar que el área (en blanco) comprendida entre el interior del cuadrado construido sobre la hipotenusa y el exterior de su incírculo es igual a la suma de las dos áreas análogas (en blanco) formadas en los cuadrados construidos sobre los catetos.

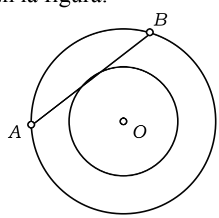
9.400. En la figura:



tenemos círculos concéntricos cuyos radios se van incrementando en una unidad, empezando con el más pequeño cuyo radio es una unidad. ¿En qué tanto por ciento se van incrementando las áreas y los perímetros de los círculos?

9.401. Dados dos círculos concéntricos, probar que el área del aro que dichos círculos determinar es igual a $\frac{a}{2}\pi$, en donde a es la longitud de una cuerda del círculo mayor que es tangente al círculo menor.

9.402. En la figura:



tenemos dos círculos concéntricos y AB es una cuerda del círculo mayor tangente al círculo pequeño.

a. Si $|AB| = 10$, calcular el área del aro que determinan ambos círculos.

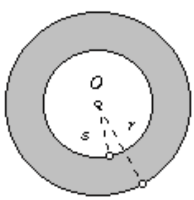
b. Si el radio del círculo menor es 9 y el radio del círculo mayor es 16, calcular la longitud de la cuerda AB.

9.403. Dividir un círculo dado $\mathrm{C}(O,r)$ en k regiones equivalentes mediante círculos concéntricos con él, en donde $k > 1$ es un número natural.

9.404. Sean A, B y C tres puntos consecutivos. Trazamos un primer círculo que pase por los puntos A y B, y posteriormente trazamos un segundo círculo concéntrico con el primero que pase por el punto C. Expresar el área del aro que determinan ambos círculos en función de $|AC|$ y $|BC|$.

9.405. Dados dos círculos concéntricos $\mathrm{C}(O,r_1)$ y $\mathrm{C}(O,r_2)$ con $r_2 > r_1$, sean A el área del aro que forman, a el ancho de dicho aro y b la media aritmética de r_1 y r_2. Probar que $\frac{are(\mathrm{C}(O,r_1))}{\mathrm{A}} = \frac{(2b-a)^2}{8ab}$.

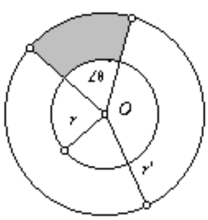
9.406. En la figura:



sean $\mathrm{C}(O,r)$ y $\mathrm{C}(O,s)$ dos círculos concéntricos con $s < r$, ¿qué relación debe existir entre los radios de estos círculos, para que el círculo pequeño tenga la misma área que el aro que forman los dos círculos?

9.407. ¿Qué relación hay entre el área de un círculo $\mathrm{C}(O,r)$ y el área del aro $\mathrm{C}(O,r) - \mathrm{C}(O,\frac{r}{2})$?

9.408. En la figura:

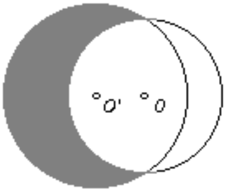


tenemos dos círculos concéntricos $\mathrm{C}(O,r)$ y $\mathrm{C}(O,r')$. Encontrar el área de la región indicada en función de los radios de los círculos y el ángulo $\angle\theta$.

9.409. Tenemos dos círculos concéntricos. El círculo menor tiene radio igual a 7 y el área del aro que determinan es igual a 30π. Encontrar el radio del círculo mayor.

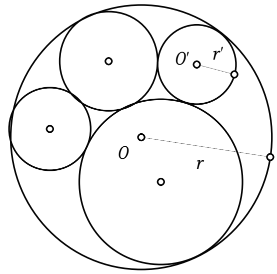
9.410[I-288]. Si el área del aro C(O,R) – C(O,r) es igual a 10π y R es igual al diámetro de C(O,r), calcular el radio del círculo pequeño.

9.411. En la figura:



tenemos dos círculos C(O,r) y C(O',s). Si el área de la región sombreada es igual 20π y $s - r = 2$, encontrar los radios de los dos círculos.

9.412. En la figura:



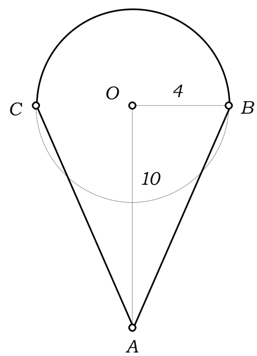
dentro del círculo grande C(O,r) hay cuatro círculos tangentes entre sí y tangentes al círculo grande por su interior.

a. Si r' es el radio del círculo más pequeño, expresar r' en función de r.

b. ¿Qué porción del círculo C(O,r) no ha quedado cubierta por los cuatro círculos menores?

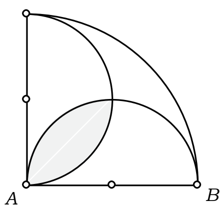
9.413. Sea C(O,r) un círculo. Si AB es un diámetro del círculo, CD es una cuerda del mismo perpendicular a AB y P es el punto de intersección de ambos segmentos, probar que el área de C(O,r) es igual a la suma de las áreas de los círculos cuyos diámetros son AP, BP, CP y DP.

9.414. En la figura:



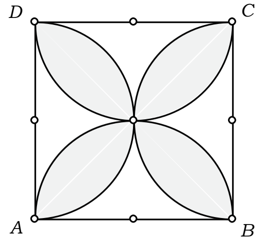
el radio del círculo es igual a 4 y el triángulo ΔABC es isósceles. Si la altura correspondiente a la base del triángulo ΔABC tiene longitud 10, encontrar el área de la región formada por el semicírculo y el triángulo.

9.415. En la figura:



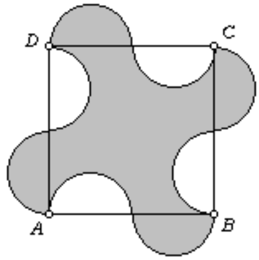
si $|AB| = 4$, calcular el área de la región sombreada.

9.416. En la figura:



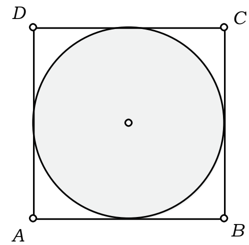
tenemos un cuadrado □$ABCD$ cuyos lados tienen longitud 1. Calcular el área de la región sombreada.

9.417. En la figura:



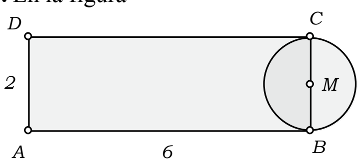
tenemos un cuadrado cuyos lados tienen longitud a. Expresar el área de la región sombreada en función de a.

9.418. En la figura:



tenemos un cuadrado □$ABCD$ de lado a y un círculo inscrito en él. Calcular el área de la región comprendida entre el interior del cuadrado y el exterior del círculo en función de a.

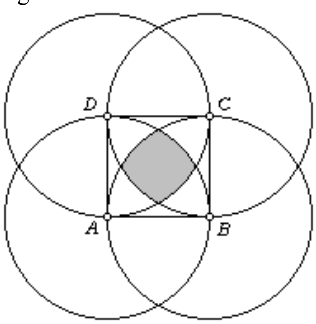
9.419. En la figura



□$ABCD$ es un rectángulo cuyos lados tienen longitudes 2 y 6. Si BC es un diámetro del círculo, calcular el área de la región sombreada.

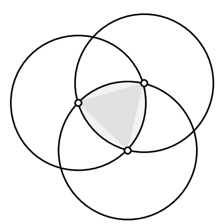
9.420. Sea □$ABCD$ un trapecio tal que $AB \parallel CD$, $a = 5$, $c = 3$ y la altura correspondiente a los lados paralelos tiene longitud 4. Si $C(O,r)$ es un círculo con la misma área que □$ABCD$, encontrar el radio del círculo.

9.421. En la figura:



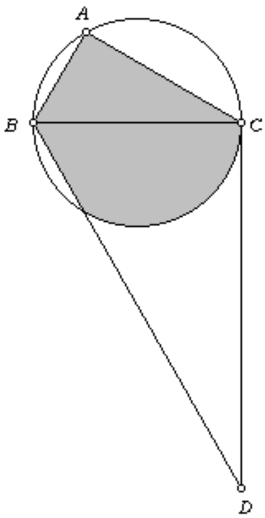
tenemos un cuadrado □$ABCD$ cuyos lados tienen longitud 2. Calcular el área de la región indicada.

9.422. En la figura:



tenemos tres círculos congruentes entre sí tales que cada uno de ellos pasa por los centros de los otros dos. ¿Qué porción de cada uno de los círculos representa la región comprendida por la intersección de los tres círculos?

9.423. En la figura:



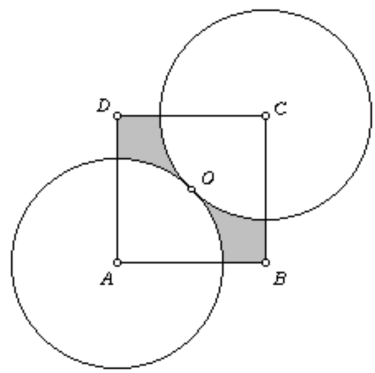
ΔABC es un triángulo rectángulo en $\angle A$ tal que $m(\angle B) = 60$. Supongamos que

$$m(\angle DBA) = m(\angle ACD) = 120.$$

a. Encontrar la razón entre las áreas del triángulo ΔABC y del cuadrilátero $\square ABCD$.

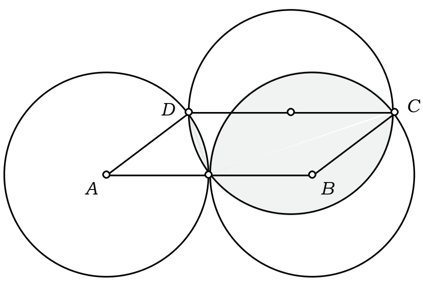
b. Expresar el área de la región sombreada en función de $|AB| = c$.

9.424. En la figura:



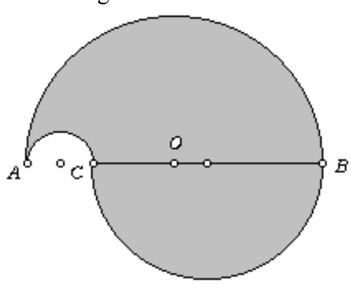
tenemos un cuadrado $\square ABCD$ y O es el punto de intersección de sus diagonales. Expresar el área de la región sombreada en función de la longitud a de los lados del cuadrado.

9.425. En la figura:



tenemos un paralelogramo $\square ABCD$ tal que $|AB| = 2|BC|$ y tres círculos con el mismo radio. Si $|BC| = 1$, calcular el área de la región sombreada.

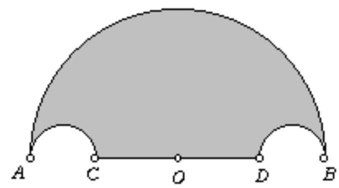
9.426. En la figura:



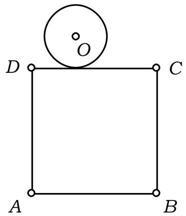
calcular el área de la región curvilínea sabiendo que $|BC| = 3|AC|$ y $|AB| = 9$.

9.427. En la figura:

calcular el área de la región curvilínea sabiendo que $AC \cong DB$, $|CD| = 2|AC|$ y $|AB| = 8$.

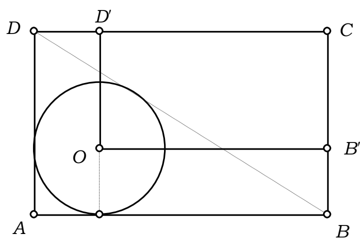


9.428. En la figura:



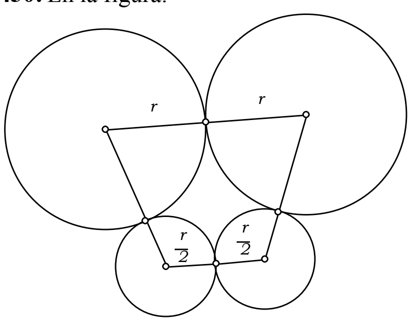
$\square ABCD$ es un cuadrado cuyos lados tienen longitud 4 y el círculo tiene radio igual a 1. Si hacemos rotar el círculo sobre el cuadrado, ¿cuántas vueltas dará el círculo en sí mismo hasta alcanzar su posición inicial?

9.429. En la figura:



$\square ABCD$ y $\square OB'CD'$ son dos rectángulos, BD es una diagonal del rectángulo mayor y $\mathcal{C}(O,r)$ es el incírculo del triángulo ΔDAB. Hallar el cociente $\dfrac{are(OB'CD')}{are(ABCD)}$.

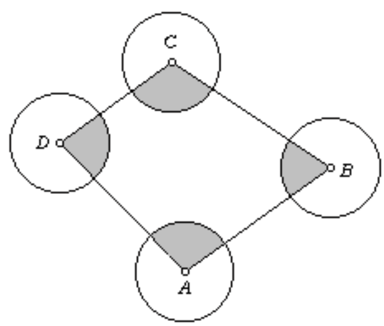
9.430. En la figura:



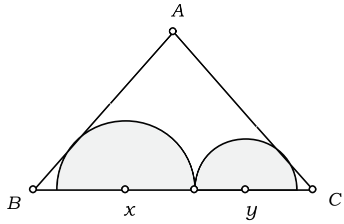
se tienen cuatro círculos tangentes como muestra la figura. Si los dos círculos grandes tienen radio r y el radio de los dos círculos pequeños es igual a $\dfrac{r}{2}$, calcular el área del trapecio formado por sus centros en función de r.

9.431. En la figura:

tenemos un cuadrilátero $\square ABCD$ y en cada uno de sus vértices un círculo de radio r. Calcular el área de la región formada por las intersecciones del interior del cuadrilátero y los interiores de los cuatro círculos si $r = 1$.

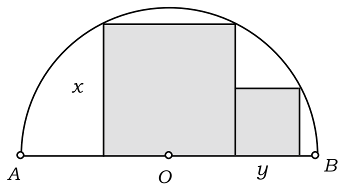


9.432[a-167]. En la figura:



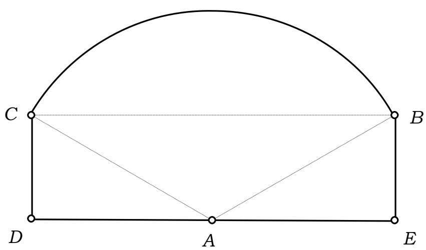
tenemos un triángulo isósceles ΔABC con $AB \cong AC$ y dos semicírculo inscritos en él cuyos diámetros tienen longitudes x y y. Si uno de los semicírculos se agranda, entonces el otro se achica. Probar que la suma $x + y$ permanece constante al agrandar cualquiera de los dos semicírculos.

9.433[a-167]. En la figura:



tenemos un semicírculo y dos cuadrados inscritos en él cuyos lados tienen longitudes x y y. Si uno de los cuadrados se agranda, entonces el otro se achica. Probar que la suma $x^2 + y^2$ permanece constante al agrandar cualquiera de los dos cuadrados.

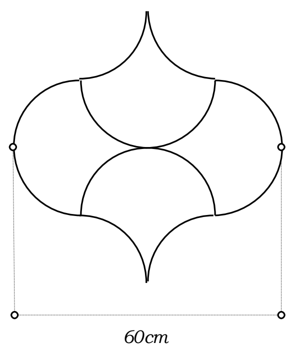
9.434. En la figura:



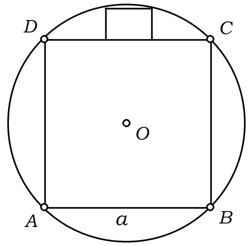
si $|DC| = 5$ y $m(\angle BAC) = 120$, calcular el área de la figura.

9.435. En la figura:

tenemos cuatro losetas de un piso. Calcular el área de cada loseta con la información que se da en la figura.



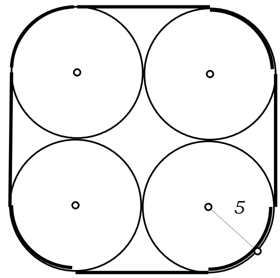
9.436. En la figura:



tenemos un círculo y dos cuadrados. Encontrar la longitud de los lados del cuadrado menor en función de la longitud a del cuadrado mayor.

9.437. Una banda gira alrededor de dos poleas de diámetros 10 cm y 20 cm. Si los centros de las poleas están a 30 cm de distancia, encontrar la longitud de la polea.

9.438. En la figura:



tenemos una banda movida por cuatro poleas del mismo tamaño, de radio igual a 5 cm. Calcular la longitud de la banda.

9.439. Sean $\mathcal{C}(O,r)$ y $\mathcal{C}(O',r)$ dos círculos congruentes que se cortan en los puntos A y B. Si $O' \in \mathcal{C}(O,r)$ y $O \in \mathcal{C}(O',r')$, calcular el perímetro del cuadrilátero $\square AOBO'$ en función de r.

9.440. Si $\overset{\frown}{ABC}$ es un arco de un círculo, probar que $AB < AC$.

9.441. Sea $\overset{\frown}{AB}$ un arco de un círculo $\mathcal{C}(O,r)$. Probar que $\overset{\frown}{AB}$ es el arco menor si y solo si el arco $\overset{\frown}{AB}$ no contiene dos puntos que sean puntos extremos de un diámetro del círculo.

9.442. Sea $\angle APB$ un ángulo inscrito en un círculo $\mathcal{C}(O,r)$.

a. Probar que $\angle APB$ es agudo si y solo si $\overset{\frown}{APB}$ es el arco mayor.

b. Probar que $\angle APB$ es obtuso si y solo si $\overset{\frown}{APB}$ es el arco menor.

9.443. Sea $\overset{\frown}{PQ}$ un arco de un círculo $\mathcal{C}(O,r)$. Probar las siguientes afirmaciones:

a. El punto simétrico del punto medio del arco $\overset{\frown}{PQ}$ con respecto a P, sobre el círculo $\mathcal{C}(O,r)$, coincide con el punto medio del arco opuesto a $\overset{\frown}{PQ}$ si y solo si la cuerda PQ es un diámetro del círculo.

b. Sean M el punto medio del arco $\overset{\frown}{PQ}$, y A y B los puntos simétricos de M con respecto a P y Q, sobre el círculo $\mathcal{C}(O,r)$, respectivamente. Entonces, tenemos que

i. $\overset{\frown}{AP} \cong \overset{\frown}{BQ}$;

ii. el punto medio del arco determinado por la cuerda AB que no contiene al punto P, junto con el punto medio del arco determinado por la cuerda PQ que no contiene al punto A, forman un diámetro del círculo; y

iii. M es el punto medio del arco determinado por la cuerda AB que lo contiene.

9.444. Dos cuerdas AB y CD de un círculo se cortan en el punto P.

a. Probar que $\Delta CBP \sim \Delta APD$.

b. Si $\overset{\frown}{AC} \cong \overset{\frown}{BC}$, probar que $\dfrac{|CP|}{|AC|} = \dfrac{|AC|}{|CD|}$.

9.445. Sean $\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{BC}$ dos arcos de un círculo $\mathcal{C}(O,r)$. Probar que AC es un diámetro del círculo si y solo si $\angle AOB$ y $\angle BOC$ son suplementarios.

9.446. Sean M el punto medio del arco $\overset{\frown}{AB}$ y $C \in \overset{\frown}{AB}$. Probar que $m(\overset{\frown}{CM}) = \dfrac{|m(\overset{\frown}{AC}) - m(\overset{\frown}{CB})|}{2}$.

9.447. Sean A, B y C tres puntos de un círculo tales que $B \in \overset{\frown}{AC}$. Si M es el punto medio de $\overset{\frown}{BC}$, probar que

$$m(\overset{\frown}{AM}) = \frac{m(\overset{\frown}{AB}) + m(\overset{\frown}{AC})}{2}.$$

9.448. Sea $\mathcal{C}(O,r)$ un círculo, AB una de sus cuerdas y M el punto medio de AB. Sean $P \in \overset{\frown}{AB}$ y N el punto de intersección de AB y OP, y Q el punto de intersección de la semirrecta $\overrightarrow{OM}$ y el círculo. Probar que $PN \leq QM$.

9.449. Sean $\overset{\frown}{AB}$ una cuerda de un círculo y C su punto medio. Si $|AB| = 9$ y $|AC| = 5$, encontrar el radio del círculo.

9.450. Sean $\overset{\frown}{AB}$ un arco de un círculo $C(O,r)$ y C su punto medio. Si CD es una cuerda de $C(O,r)$ y P es el punto de intersección de AB y CD, probar que $|CP||CD| = |CA|^2$.

9.451. Sean $C(O,r)$ un círculo y A, C, B y $D \in C(O,r)$ colocados en el orden que se mencionan, en sentido contrario a las manecillas del reloj. Si L, M, N y P son los puntos medios de los arcos $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$ y $\overset{\frown}{DA}$, probar que $LN \perp MP$.

9.452. En un círculo $C(O,r)$, sean BC uno de sus diámetros, A el punto medio del arco $\overset{\frown}{BC}$, y $E \in \overset{\frown}{BA}$ y $D \in \overset{\frown}{AC}$ tales que $EA \cong AD$. Si M es el punto medio de ED, probar que $\overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{ED}$.

9.453. Sean AB un diámetro de un círculo $C(O,r)$ y CD una de sus cuerdas. Si $AB \parallel CD$, probar que $\overset{\frown}{AC} \cong \overset{\frown}{DB}$.

9.454. Si $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ y $\overset{\frown}{CD}$ son tres arcos congruentes de un mismo círculo, probar que $AC \cong BD$.

9.455. Sean AB un diámetro de un círculo $C(O,r)$, OC uno de sus radios y AD una de sus cuerdas. Si $AD \parallel OC$, probar que $\overset{\frown}{DC} \cong \overset{\frown}{CB}$.

9.456. Sean AB y CD dos cuerdas de un círculo $C(O,r)$. Si $AB \parallel CD$, probar que $\overset{\frown}{AC} \cong \overset{\frown}{DB}$.

9.457. Sean $\overset{\frown}{AB}$ un arco del círculo $C(O,r)$ y M su punto medio. Una recta secante a $C(O,r)$ que pasa por A corta a $\overset{\frown}{AB}$ en el punto P y al círculo $C(M,|MA|)$ en el punto Q. Probar que $PB \cong PQ$.

9.458[I-22]. Sean A, B y C tres puntos de un círculo tales que $B \in \overset{\frown}{AC}$. La recta que une los puntos medios de los arcos $\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{BC}$ interseca a las cuerdas AB y BC en los puntos D y E, respectivamente. Probar que $BD \cong BE$.

9.459. Probar que dos círculos secantes congruentes determinan arcos congruentes.

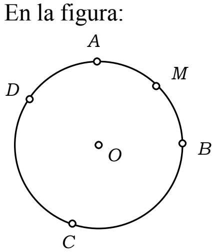
9.460. Sean $C(O,r)$ un círculo y AB una de sus cuerdas. Sea $\overset{\frown}{AB}$ el arco mayor determinado por los puntos A y B. Dado un punto $P \in \overset{\frown}{AB}$, extendemos el segmento AP hasta un punto Q tal que $PB \cong PQ$. Probar que la medida del ángulo $\angle AQB$ permanece constante cuando P varía sobre el arco mayor.

9.461[I-22]. Sean $\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{AC}$ dos arcos distintos de medida 120 de un círculo y DE la cuerda del mismo que une los puntos medios de dichos arcos. Probar que AB y AC dividen a DE en tres partes congruentes.

9.462. Sean AB y CD dos cuerdas perpendiculares de un círculo $C(O,r)$. Si $m(\overset{\frown}{AD}) = 80$, calcular la medida del arco $\overset{\frown}{BC}$.

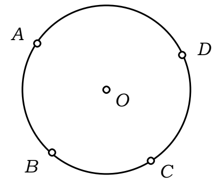
9.463. Sean $C(O,r)$ un círculo y OA uno de sus diámetros. Sean $B \in C(O,r)$ y C el punto de intersección de OB y el círculo de diámetro OA. Comparar las medidas de los arcos $\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{AC}$.

9.464. En la figura:



$\angle AOB$ es un ángulo recto, M es el punto medio del arco $\overset{\frown}{AB}$ y $m(\overset{\frown}{BC}) = 2m(\overset{\frown}{AD})$. Si $m(\overset{\frown}{DM}) = 60$, calcular $m(\overset{\frown}{BC})$.

9.465. En la figura:



probar que $\overset{\frown}{AC} \cong \overset{\frown}{DB}$ si y solo si $\overset{\frown}{DA} \cong \overset{\frown}{BC}$.

9.466. Sean AB y CD dos cuerdas que se cortan de un círculo. Probar que $AB \perp CD$ si y solo si

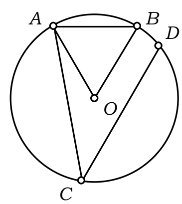
$$m(\overset{\frown}{AD}) + m(\overset{\frown}{BC}) = 180.$$

9.467. Sean AB y CD dos cuerdas de un círculo. Sean P el punto de intersección de $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{BC}$. Supongamos que $2m(\overset{\frown}{AB}) = m(\overset{\frown}{CD})$. Si $m(\angle APB) = 40$, encontrar las medidas de los arcos $\overset{\frown}{AD}$ y $\overset{\frown}{BC}$.

9.468. Sean AB y CD dos cuerdas de un círculo. Sean P el punto de intersección de $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$, y Q el punto de intersección de AD y BC. Si $m(\angle APC) = 50$ y $m(\angle CQA) = 30$, calcular las medidas de los arcos $\overset{\frown}{AC}$ y $\overset{\frown}{BD}$.

9.469. Sean $\mathrm{C}(O,r)$ un círculo y $A, C, B, D, E \in \mathrm{C}(O,r)$ colocados en el orden que se mencionan en sentido contrario a las manecillas del reloj. Si $m(\overset{\frown}{AC}):m(\overset{\frown}{CB}):m(\overset{\frown}{BD}):m(\overset{\frown}{AD}) = 2 : 3 : 4 : 5$ y $AB \perp CE$, calcular las medidas del ángulo $\angle DBC$ y del arco $\overset{\frown}{BE}$.

9.470. En la figura:



tenemos que $CD \parallel OB$, $m(\overset{\frown}{AB}) = 60$ y $m(\angle CAO) = 20$.

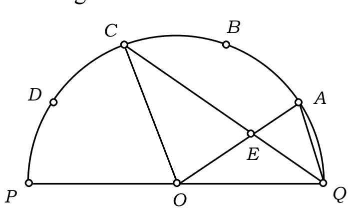
Calcular la medida del arco $\overset{\frown}{BD}$.

9.471. Sean $\overset{\frown}{A_0B_0}$ un arco de un círculo $\mathrm{C}(O,r)$ y M su punto medio. Sean A_1 y B_1 los puntos simétricos de M con respecto a los puntos A_0 y B_0 sobre el círculo $\mathrm{C}(O,r)$, respectivamente. Inductivamente, sean A_k y B_k los puntos simétricos de los puntos A_{k-2} y B_{k-2} con respecto a los puntos A_{k-1} y B_{k-1} sobre el círculo $\mathrm{C}(O,r)$, respectivamente, en donde k es un número entero positivo. Probar que $A_k = B_k$, para algún número entero k si y solo si $\dfrac{k+1}{2} l(\overset{\frown}{A_0B_0}) = \pi r$.

9.472. Sean $\mathrm{C}(O,r)$ y $\mathrm{C}(O,r')$ dos círculos concéntricos con $r < r'$. Si los círculos $\mathrm{C}(P,s)$ y $\mathrm{C}(Q,s)$ cortan a $\mathrm{C}(O,r)$ en los puntos A y B, y C y D, respectivamente, y si P y Q yacen sobre el círculo $\mathrm{C}(O,r')$, probar que $l(\overset{\frown}{AB}) = l(\overset{\frown}{CD})$ y $|AB| = |CD|$.

9.473. Sean AB un diámetro de un círculo $\mathrm{C}(O,r)$ y $P \in \mathrm{C}(O,r) - \{A, B\}$. Si M es el punto medio del semicírculo determinado por AB que no contiene al punto P, probar que $d(M, \overleftrightarrow{AP}) = d(M, \overleftrightarrow{BP})$.

9.474. En la figura:



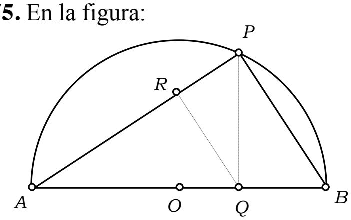
tenemos un semicírculo de centro O, diámetro PQ y radio r. Los puntos A, B, C y D dividen al semicírculo en 5 arcos congruentes entre sí y E es el punto de intersección de OA y QC.

a. Probar que $QA \parallel OC$.

b. Calcular las medidas de los ángulos de los triángulos ΔECO y ΔEQA.

c. Probar que $|QC| - |QA| = r$.

9.475. En la figura:

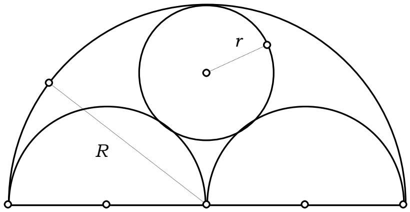


tenemos un semicírculo de diámetro AB y radio r. Fijemos un punto cualquiera P en el semicírculo. Sean Q la proyección de P sobre AB y R la proyección de Q sobre AP.

a. Probar que $\Delta PQR \sim \Delta PAB$.

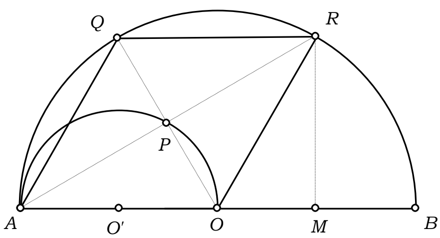
b. Expresar el área del triángulo ΔPQR en función de $|PQ|$ y r.

9.476. En la figura:



los dos semicírculos internos tienen el mismo radio y el círculo es tangente a ellos y al semicírculo mayor. Expresar el radio del semicírculo menor en función del radio del semicírculo mayor.

9.477. En la figura:



tenemos dos semicírculos de centros O y O', AB es el diámetro del semicírculo mayor, AO es un diámetro del semicírculo menor, M es el punto medio de OB, $AB \perp MR$, P es el punto de intersección de AR y el semicírculo menor y Q es el punto de intersección de $\overrightarrow{OP}$ y el semicírculo mayor.

a. Expresar las longitudes de los segmentos MR, AR, OP y AP en función del radio r del semicírculo mayor.

b. Probar que $\square AORQ$ es un rombo.

9.478. Si un cuadrado de lado a está inscrito en un semicírculo de radio r, expresar a en función de r.

9.479. Tenemos un semicírculo de diámetro AB y centro O. Fijemos un punto C sobre el semicírculo y por O trazamos una recta paralela a AC que corte al semicírculo en el punto M. Probar que M es el punto medio del arco $\overset{\frown}{BC}$.

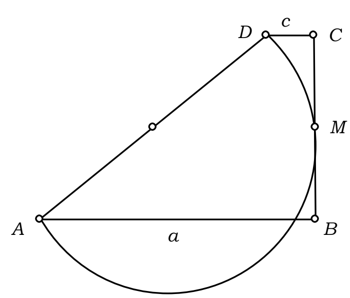
9.480. Sean AB el diámetro de un semicírculo de centro O y P, $Q \in AB$ tales que O es el punto medio de PQ. Por P y Q trazamos rectas paralelas que corten al semicírculo en los puntos A y B, respectivamente. Probar que los ángulos $\angle PAB$ y $\angle ABQ$ son rectos.

9.481(Razvan-97). Sean B y C los puntos extremos de un semicírculo, A el punto medio del semicírculo, $M \in AC$ y P, $Q \in BM$ tales que $AP \perp BM$ y $CQ \perp BM$. Probar que $|BP| = |PQ| + |QC|$.

9.482. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$. En un mismo semiplano, determinado por la recta $\overleftrightarrow{BC}$, trazamos los semicírculos de diámetros BH_a, H_aC y BC formando el arbelo BCH_a. Comparar el área de este arbelo y la del círculo de diámetro AH_a.

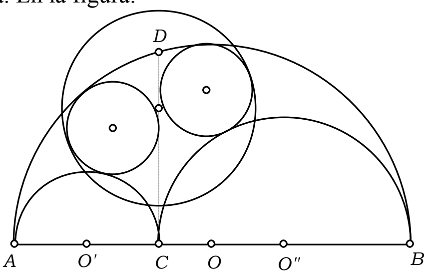
9.483[I-240]. En la figura:

$\square ABCD$ es un trapecio rectangular en $\angle B$ con $AB \parallel CD$. El semicírculo de diámetro AD es tangente a BC en su punto medio M. Expresar la longitud de BC en función de a y c.



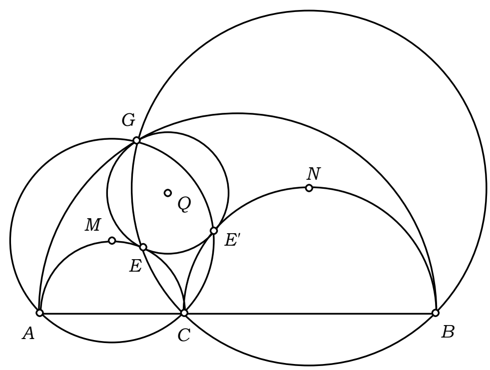
9.484[a-9]. Sea A un arbelo determinado por semicírculos de los círculos C(O,r), C(O’,r’) y C(O’’,r’’), en donde C(O,r) es el círculo mayor junto con los diámetros colineales AC y CB de los círculos C(O’,r’) y C(O’’,r’’), respectivamente. Probar las siguientes afirmaciones:

a. En la figura:



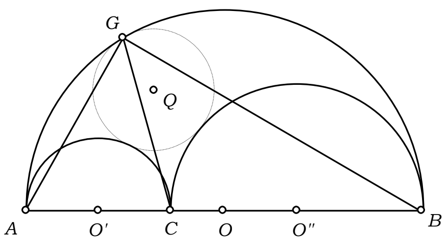
el círculo más pequeño que contiene en su interior a los dos círculos que son tangentes a los círculos C(O’,r’) y C(O’’,r’’) y al segmento CD tiene diámetro igual a $|CD|$.

b. En la figura:



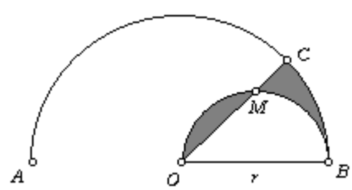
sean M y N los puntos medios de los semicírculos de diámetro AC y CB, respectivamente. Con la notación del Teorema 9.13.7, el círculo C(M,$|MA|$) pasa por los puntos C, E’ y G, y el círculo C(N,$|NB|$) pasa por los puntos C, E y G.

c. En la figura



$\overrightarrow{GC}$ es la bisectriz del ángulo $\angle AGB$.

9.485[I-240]. En la figura:



tenemos dos semicírculos, siendo r el radio del semicírculo mayor y M el punto medio del semicírculo menor. Expresar el área de la región sombreada en función de r.

9.486. Sean C(O,r) un círculo y AB y CD dos de sus diámetros perpendiculares. Trazamos el círculo C(A,$|AB|$). Probar que el área de la lúnula CBD que se forma es igual al área del triángulo ΔACD.

9.487. Sean AB y CD dos cuerdas perpendiculares de un círculo. Si $m(\overset{\frown}{AD}) = 120$ y $m(\overset{\frown}{BD}) = 70$, calcular las medidas de los ángulos del triángulo ΔABC.

9.488. Sean PA y PB segmentos tangentes a un círculo y AC una cuerda del mismo círculo paralela a PB. Si $m(\angle BPA) = 60$, calcular las medias de los ángulos del triángulo ΔABC.

9.489. Sean AB un segmento, l una recta perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ en el punto P, $C \in l - \{P\}$ y D el punto de intersección de la recta perpendicular a $\overleftrightarrow{AC}$ en el punto A y la recta perpendicular a $\overleftrightarrow{BC}$ en el punto B.

a. Probar que el punto medio M de CD es equidistante de A y B.

b. Sea Q la proyección de D sobre $\overleftrightarrow{AB}$. Probar que M es equidistante de P y Q.

c. Probar que Q permanece fijo cuando C se mueve sobre l.

d. Probar que el punto simétrico F de O, con respecto al punto medio de AB, yace sobre l.

e. ¿Qué representa F para el triángulo ΔABC?

9.490[I-22]. Sean AB un diámetro de un círculo y CD una cuerda del mismo. Si $AB \parallel CD$, probar que las medidas de los ángulos $\angle C$ y $\angle D$ del triángulo ΔACD difieren por 90.

9.491. Sean $\angle AOB$ un ángulo no degenerado y P un punto sobre su bisectriz. Si $PO \cong PA$, probar que el circuncírculo del triángulo ΔPOA es tangente a $\overleftrightarrow{OB}$ en el punto O.

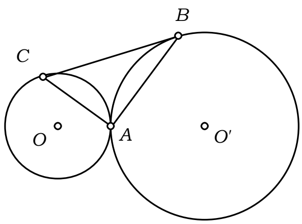
9.492[I-238]. Sean A, B, C, D, E y F seis puntos de un círculo $\mathrm{C}(O,r)$ tales que $AB \parallel DE$. Si G es el punto de intersección de $\overleftrightarrow{DE}$ y $\overleftrightarrow{AF}$, probar que BD es tangente al circuncírculo de triángulo ΔDGF.

9.493[I-238]. Sean AB y AC dos cuerdas del círculo $\mathrm{C}(O,r)$. La recta que pasa por B y es paralela a la recta tangente a $\mathrm{C}(O,r)$ en el punto A corta a $\overleftrightarrow{AC}$ en el punto D.

a. Probar que AB es tangente al circuncírculo del triángulo ΔBCD.

b. Si $CA \cong CB$, probar que los circunradios de los triángulos ΔABC y ΔBCD son iguales.

9.494. En la figura:

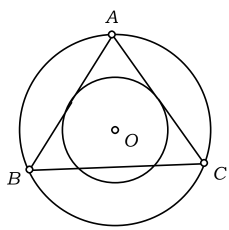


tenemos dos círculos $\mathrm{C}(O,r)$ y $\mathrm{C}(O',r')$ tangentes en el punto A y un segmento CB tangente a ambos círculos. Expresar el radio del círculo inscrito en el triángulo ΔABC en función de r y r'.

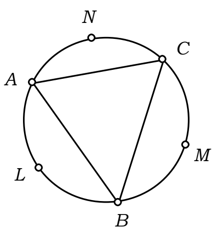
9.495. En la figura:

tenemos dos círculos concéntricos $\mathrm{C}(O,r)$ y $\mathrm{C}(O,\frac{r}{2})$.

Si las cuerdas AB y AC son tangentes al círculo de menor tamaño, probar que ΔABC es un triángulo equilátero.



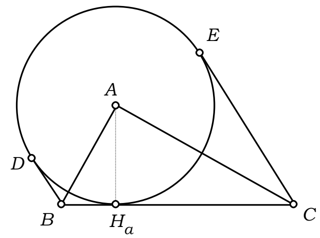
9.496. En la figura:



tenemos un triángulo ΔABC inscrito en un círculo $\mathrm{C}(O,r)$. Sean L, M y N los puntos medios de los arcos $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ y $\overset{\frown}{CA}$, respectivamente. Tomemos un punto $P \in \mathrm{C}(O,r) - \{A, B, C, L, M, N\}$. Sobre el círculo $\mathrm{C}(O,r)$, sean Q el punto simétrico de P con respecto a L, R el punto simétrico de Q con respecto a M, y S el punto simétrico de R con respecto a N. Probar que A es el punto medio del arco $\overset{\frown}{PS}$.

9.497. Sean AB un diámetro del círculo $\mathrm{C}(O,8)$ y OC uno de los radios de dicho círculo perpendicular a AB. Si M es el punto medio de OC y D es el punto donde la semirrecta $\overrightarrow{AM}$ corta al círculo, calcular el perímetro del triángulo ΔABD.

9.498. Dos círculos de radios 6 y 8 se cortan en una cuerda de longitud 2. Encontrar la distancia entre los centros de los círculos.
9.499. Si los vértices de un triángulo yacen en el interior de un círculo, probar que el interior del triángulo está contenido en el interior del círculo.
9.500. Probar que dos triángulos equiláteros que estén inscritos en círculos congruentes deben ser congruentes.
9.501. En la figura:



ΔABC es un triángulo rectángulo en $\angle A$ y el círculo está centrado en A y su radio es igual a h_a. Tenemos además que BD y CE son tangentes al círculo. Probar las siguientes afirmaciones:

a. Los puntos D, A y E son colineales.
b. $BD \parallel CE$.
c. El círculo de diámetro BC es tangente a DE en el punto A.

9.502[Math. Spectrum 20 (1987-88), Problem 19.4, p. 27]. Sobre un círculo se tienen $2k + 1$ puntos que dividen al círculo en arcos congruentes, ¿cuántos triángulos hay cuyos vértices sean de los puntos dados y el centro del círculo esté en el interior del triángulo?
9.503[Math. Spectrum 20 (1987-88), Problem 19.7, p. 29]. En el interior de un triángulo rectángulo cuyo ángulo agudo menor mide 30 y cuya hipotenusa tiene 1 de longitud, se toman 25 puntos. Probar que hay tres puntos de los dados que yacen sobre un círculo cuyo diámetro es menor que 0.29. Sugerencia: dividir el triángulo en 12 triángulos congruentes entre sí y que sean semejantes al original.
9.504. ¿Se pueden inscribir y circunscribir triángulos en un círculo dado, de tal forma que sus lados correspondientes sean paralelos?
9.505. Dado un triángulo ΔABC, encontrar la razón entre los lados del triángulo ΔOBC, en donde O es el circuncentro del triángulo dado.
9.506. Si $\Delta A'B'C' \subseteq int(\Delta ABC)$, ¿es cierto que el circuncírculo del triángulo $\Delta A'B'C'$ está contenido en el interior del circuncírculo del triángulo $int(\Delta ABC)$?
9.507. Si el circuncentro de un triángulo yace sobre una de sus bisectrices, probar que el triángulo debe ser isósceles.
9.508. Probar que si en un triángulo su circunradio es el doble de su inradio, probar que el triángulo es equilátero.
9.509. Probar que el perímetro de un triángulo equilátero circunscrito en un círculo es el doble del perímetro del triángulo equilátero inscrito en el mismo círculo.
9.510. Dado un triángulo ΔABC y sus puntos I, O, G y H, ¿cuáles de las igualdades entre, dos de dichos puntos, garantizan que el triángulo sea equilátero?
9.511. Hallar el inradio y el circunradio de un triángulo equilátero cuyos lados tienen longitud 1.
9.512. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumplen las identidades:

$$m(\angle CBO) = 90 - m(\angle A),\ m(\angle ACO) = 90 - m(\angle B) \text{ y } m(\angle BAO) = 90 - m(\angle C).$$

9.513. Sea ΔABC un triángulo cuyos ángulos son agudos. Probar que $m(\angle OCB) + m(\angle BAC) = 90$.
9.514. Sea ΔABC un triángulo. Si $\square AOCB$ es un paralelogramo, probar que $m(\angle AOC) = 120$.
9.515. Sean ΔABC un triángulo y $\mathcal{C}(O,R)$ su circuncírculo. Sean M y N los puntos medios de los arcos $\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{AC}$, respectivamente, y sean P y Q los puntos de intersección de MN con AB y AC, respectivamente. Probar las siguientes afirmaciones.

a. $m(\angle QPA) = \dfrac{1}{2}(m(\angle B) + m(\angle C))$.

b. $AP \cong AQ$.

9.516. Sean ΔABC un triángulo y $\mathcal{C}(O,R)$ su circuncírculo. Sean L, M y N son los puntos medios de los arcos $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{AC}$ y $\overset{\frown}{AB}$, respectivamente.

a. Probar que $|LC| = |LB| = |LI|$, $|MC| = |MA| = |MI|$ y $|NA| = |NB| = |NI|$.

b. Consideremos el diámetro LD del circuncírculo C(O,R).

i. Expresar las medidas de los ángulos de los triángulos ΔOMN y ΔBOD en función de las medidas de los ángulos del triángulo original ΔABC.

ii. Probar que $MN \cong BD$.

9.517. Sean ΔABC un triángulo equilátero y C(O,R) su circuncírculo. Si $P \in$ C(O,R) $- \{A, B, C\}$, ¿cuáles son las posibles medidas del ángulo $\angle APB$?

9.518. Sea ΔABC un triángulo y consideremos su circuncírculo C(O,R).

a. Sean M y N los puntos medios de los arcos $\overset{\frown}{AC}$ y $\overset{\frown}{AB}$, respectivamente. Si $m(\angle A) = 60$ y $m(\angle B) = 40$, calcular las medidas de los ángulos $\angle MCB$, $\angle NMC$ y $\angle MBN$.

b. Sea M el punto medio del arco $\overset{\frown}{BC}$ de C(O,R) que contiene al punto A. Si $m(\angle B) = 50$ y $m(\angle C) = 70$, calcular la medida del ángulo $\angle MCA$.

9.519[l-32, Problem 321]. Sean ΔABC un triángulo y C(O,R) su circuncírculo. Sean $P \in$ C(O,r) y L, M y N las proyecciones de P sobre $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{AB}$, respectivamente. Probar que los puntos L, M y N son colineales.

9.520. Dado un triángulo ΔABC, encontrar la razón entre el circunradio R del triángulo original y el circunradio del triángulo $\Delta M_a M_b M_c$.

9.521. Sea ΔABC un triángulo cualquiera.

a. Probar que A es el punto de intersección de los ejes radicales de los círculos de diámetros BC, HB y HC.

b. Expresar los productos $|AH||AH_a|$, $c|AH_c|$ y $b|AH_b|$ en función de a y m_a.

c. Probar que H es el punto de intersección de los ejes radicales de los círculos de diámetros AB, BC y CA.

9.522[l-32, Problem 321]. Sea ΔABC un triángulo tal que $\angle A \geq \angle B \geq \angle C$. Trazamos círculos que corten a cada uno de los lados del triángulo en dos puntos distintos. Probar que r es el límite inferior de los radios de tales círculos.

9.523[l-25]. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$.

a. Probar que el círculo que pasa por A, M_c y H_a también pasa por M_a y M_b.

b. Probar que $|AH_a||AM_a| = 2|AM_c||AM_b|$.

c. Si $|AB|$=3 y $|AC|$=4, calcular $\dfrac{are(\Delta ABM_a)}{are(\Delta M_c M_b P)}$, en donde P es el punto de intersección de $\overleftrightarrow{M_a M_b}$ y $\overleftrightarrow{M_c H_a}$.

9.524. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$. Expresar en función de a y r el perímetro del triángulo.

9.525. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$. Probar que el círculo de diámetro AM_a pasa por los puntos H_a, M_b y M_c.

9.526. Sea ΔABC un triángulo tal que $H_a \in BC$. Si $|BH_a||H_aC| = |AH_a|^2$, probar que $\angle A$ es un ángulo recto.

9.527. Sean ΔABC un triángulo y B' el punto simétrico de B con respecto a H_c. Considerando el círculo con centro en C y que pasa por el vértice B, probar las siguientes identidades:

a. $|AC|^2 - |BC|^2 = |AB||AB'| = 2|AB||M_c H_c|$.

b. $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AB||AH_c|$.

9.528. Sean ΔABC un triángulo y M el punto simétrico de M_a con respecto a H_a. Considerando el círculo con centro en A y que pasa por el punto M_a, probar las siguientes identidades:

a. $|AB|^2 + |AC|^2 = 2|AM_a|^2 + |BM||BM_a| + |CM||CM_a|$.

b. $|AB|^2 - |AC|^2 = |BM||BM_a| - |CM||CM_a|$.

9.529. Sean ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$ y C(O,R) su circuncírculo. Si una recta secante a C(O,R) que pasa por A corta a BC y a C(O,R) en los puntos D y E, respectivamente, probar las siguientes afirmaciones:

a. $\Delta ABD \sim \Delta AEB$.

b. $|AB|^2 = |AD||AE|$.

9.530. Sean ΔABC un triángulo y D el punto de intersección de h_a y el circuncírculo del triángulo. Probar que $DH_a \cong H_aH$ y $\angle DBH_a \cong \angle H_aBH$.

9.531. Probar que los circuncírculos de los triángulos ΔABC, ΔHBC, ΔHCA y ΔABH son congruentes.

9.532. Sea ΔABC un triángulo cualquiera. Sean P y Q las proyecciones de H_a sobre AB y AC, respectivamente. Probar que los puntos A, P, H_a y Q son concíclicos y que $PQ \parallel H_bH_c$.

9.533. Sea ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$. Trazamos el círculo con centro en M_a que sea tangente a las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{AC}$. Una recta tangente a dicho círculo corta a $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{AC}$ en los puntos D y E, respectivamente. Probar los siguientes enunciados:

a. $m(\angle DM_aE) = m(\angle DBC) = 90 + \dfrac{m(\angle A)}{2}$.

b. $\Delta M_aDE \sim \Delta BM_aD \sim \Delta CM_aE$.

9.534[I-238]. Sean ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$ y $P \in BC$. Prolongamos AP hasta un punto D tal que $M_aA \cong M_aD$. Probar que $\angle CDA \cong \angle B$ y $\angle ADB \cong \angle C$.

9.535. Sea ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$.

a. Probar que los círculos de diámetros AB y AC pasan por los puntos H_b y H_c, respectivamente.

Supongamos una recta que pasa por A corta a los círculos de diámetros AB y AC en los puntos D y E, respectivamente.

b. Compara los ángulos $\angle BAD$ y $\angle H_cAE$.

c. Compara los segmentos BD y H_cE.

d. Compara los segmentos CE y H_bD.

e. Probar que el triángulo ΔM_aDE es isósceles.

f. Comparar los ángulos de los triángulos ΔM_aDE y ΔABC.

9.536. Dado un triángulo isósceles $\Delta(a,b,c)$ con $b = c$, expresar b y h_a en función de a y R.

9.537. Sea ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$ tal que $h_a = a$.

a. Expresar r en función de a.

b. Probar que $8R = 5a$.

9.538. Dado un triángulo ΔABC, sean D y E los puntos de intersección de $\overleftrightarrow{M_bM_c}$ y el círculo de diámetro AB, y F y G los puntos de intersección de $\overleftrightarrow{M_bM_c}$ y el círculo de diámetro AC.

a. Probar que $\overrightarrow{BD}$ y $\overrightarrow{BE}$ son las bisectrices exterior e interior del ángulo $\angle B$.

b. Probar que $\overrightarrow{CF}$ y $\overrightarrow{CG}$ son las bisectrices exterior e interior del ángulo $\angle C$.

c. Probar que D, E, F y G son las proyecciones del vértice A sobre dichas bisectrices.

9.539[I-39]. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$. Probar que la distancia entre los ortocentros de los triángulos ΔABB_a y ΔAB_aC es igual a $\dfrac{|b-c|}{b+c}\sqrt{b^2+c^2}$.

9.540. Sea ΔABC un triángulo. En su exterior fijamos puntos $A' \in t_a$, $B' \in t_b$ y $C' \in t_c$ tales que $|A'M_a| = \dfrac{a}{2}$, $|A'M_a| = \dfrac{a}{2}$ y $|A'M_a| = \dfrac{a}{2}$.

a. Comparar los triángulos $\Delta M_aM_bB'$ y $\Delta M_aM_cC'$.

b. Probar que el triángulo $\Delta B'M_aC'$ es rectángulo e isósceles.

c. Probar que $A'B' \perp CC'$ y $A'B' \cong CC'$.

d. Probar que los segmentos AA', BB' y CC' son concurrentes.

9.541[l-54]. Si $\Delta(a,b,c)$ es un triángulo rectángulo con hipotenusa c, probar que $\sqrt{2}-1 \leq \dfrac{r}{h_c} < \dfrac{1}{2}$.

9.542. Si ΔABC es un triángulo isósceles con $AB \cong AC$, probar que $\dfrac{r}{h_a} = \dfrac{a}{are(\angle ABC)}$.

9.543. Sean ΔABC un triángulo cuyos ángulos son agudos y $P \in int(\Delta ABC)$. Si P yace en la mediatriz del lado BC y $\angle A \cong \angle BPM_a$, probar que P es el circuncentro del triángulo ΔABC.

9.544. Sean ΔABC un triángulo y $\mathrm{C}(O,R)$ su circuncírculo. Sean P y Q los puntos de intersección de h_a y h_b con $\mathrm{C}(O,R)$, respectivamente. Probar que C es el punto medio del arco $\overset{\frown}{PQ}$.

9.545. Sean ΔABC un triángulo, $D \in \overleftarrow{AB}$ y $E \in \overleftarrow{AC}$. Probar que las bisectrices de los ángulos $\angle DBC$ y $\angle BCE$ se cortan en un punto del interior del ángulo $\angle A$.

9.546. Sean ΔABC un triángulo y D un punto. Sean P, Q y R los puntos simétricos de D, con respecto a las rectas $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{AB}$, respectivamente.

a. Probar que la mediatriz de QR pasa por A y es la recta simétrica de $\overleftrightarrow{AD}$ con respecto a la bisectriz del ángulo $\angle A$.

b. Probar que las rectas simétricas de $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BD}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ con respecto a las bisectrices de los ángulos $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$ concurren en un punto E que es equidistante de los puntos P, Q y R.

c. Estudiar los casos cuando se den las igualdades $E = H$ y $E = O$.

9.547. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$. Trazamos el círculo $\mathrm{C}(A, h_a)$ y las rectas tangentes a este desde los vértices B y C. Probar que dichas rectas tangentes son paralelas.

9.548. Sean ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$ y l una recta que pasa por A. Si los círculos de diámetros AB y AC cortan a l en los puntos P y Q, respectivamente, probar que P y Q son las proyecciones de B y C sobre la recta l.

9.549. Dado un triángulo ΔABC, probar que los círculos de diámetros AB y AC tienen su segundo punto en común sobre el lado $\overleftrightarrow{BC}$.

9.550. Sea ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$. Probar que los círculos cuyos diámetros son AB y AC se encuentran en el punto medio de BC. ¿Es el recíproco de este resultado cierto?

9.551. Sean ΔABC un triángulo, $D \in BC$, $E \in AC$ y $F \in AB$. Probar que los circuncírculos de los triángulos ΔAEF, ΔBFD y ΔCDE tienen un punto en común.

9.552. Sea ΔABC un triángulo.

a. Si $R = 4$ y $b = c = 3$, calcular a.

b. Si $R = 3$, $a = 2$ y $b = c$, calcular b.

c. Si $m(\angle A) = 120$, $a = 4$ y $b = c$, calcular R y r.

9.553. Sea ΔABC un triángulo tal que $b = 7$ y $c = 4$.

a. Si $R = 5$, encontrar el valor numérico de a.

b. Sea D el punto de intersección de AC y el círculo que pasa por los puntos M_c, B y C. Calcular las longitudes de los segmentos AD y DC.

9.554. Calcular el circunradio y el inradio del triángulo $\Delta(6,4,5)$.

9.555. Sea ΔABC un triángulo tal que $c = 1$ y $m(\angle C) = 60$. Calcular el circunradio del triángulo.

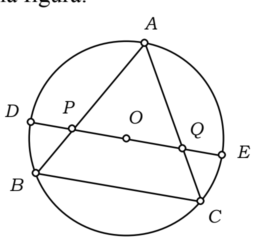
9.556. Determinar las longitudes de los lados de un triángulo sabiendo que sus exradios son 9, 5 y 12.

9.557[l-209]. Probar que en el triángulo $\Delta(18,24,30)$ se cumple que $R = 15$, $r = 6$, $r_a = 12$, $r_b = 18$ y $r_c = 36$.

9.558. Determinar si el circuncentro del triángulo $\Delta(10,9,2)$ yace en el interior o en el exterior del mismo triángulo.

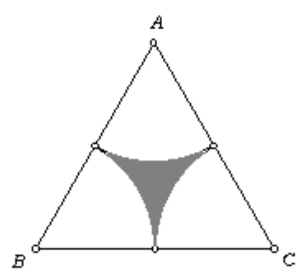
9.559. Las longitudes de los lados de un triángulo de perímetro 40 están en progresión aritmética. Si uno de los ángulos del triángulo mide 60, encontrar el circunradio del triángulo.

9.560. Si dos triángulos tienen un lado congruente y los ángulos opuestos a estos lados son congruentes o suplementarios, probar que los triángulos tienen el mismo circunradio.
9.561. Sea ΔABC un triángulo con $m(\angle A) = 30$. Si $r = 3$, encontrar la distancia entre BC y el circuncentro O del triángulo.
9.562. Consideremos el triángulo $\Delta(3,4,5)$.
 a. Calcular el radio del círculo que pasa por B y es tangente a AC en el punto C.
 b. Calcular el radio de los tres círculos cuyos centros son los vértices del triángulo y son exteriormente tangentes entre sí.
9.563[I-39]. Consideremos el triángulo rectángulo $\Delta(\angle 90,\angle 30,\angle 60)$. Encontrar el radio del círculo centrado en B que parte al triángulo en dos regiones equivalentes.
9.564. Sea ΔABC un triángulo equilátero cuyos lados tienen longitud 6. Calcular el radio del círculo de centro A que es tangente a los círculos de diámetros BM_a y M_aC.
9.565. Consideremos el triángulo rectángulo $\Delta(5,4,3)$.
 a. Encontrar el radio del círculo tangente a $\mathcal{C}(A,4)$ en el punto C y tangente al círculo $\mathcal{C}(B,1)$.
 b. Calcular el radio del círculo tangente al círculo $\mathcal{C}(B,2)$ y a AC en el punto C.
9.566. En el triángulo $\Delta(6,8,8)$, sea D el punto de intersección de h_a y el circuncírculo del triángulo. Calcular la longitud del segmento AD.
9.567. En el triángulo ΔABC, tenemos que $b = 6$ y $c = 9$. Un círculo que pasa por los puntos B y C corta a AB y AC en los puntos D y E, respectivamente. Si $|BD| = 1$, calcular la longitud del segmento CE.
9.568. Sea $\mathcal{C}(O,R)$ el circuncírculo del triángulo $\Delta(10,8,6)$. Encontrar la longitud de la cuerda de dicho círculo que determina la mediatriz de AH_a.
9.569. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle C$ cuya área y perímetro son iguales. Expresar R en función de a y b.
9.570. Sea ΔABC un triángulo con $m(\angle C) = 60$. El círculo que pasa por los puntos O, A y B corta a la recta $\overleftrightarrow{AC}$ en el punto P. Probar que el triángulo ΔPBC es equilátero.
9.571(Razvan-97). Sea ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$. Un círculo es tangente al circuncírculo del triángulo y a los lados AB y AC en los puntos P y Q, respectivamente. Probar que el incentro I del triángulo ΔABC es el punto medio de PQ.
9.572. Sea ΔABC un triángulo cuyos ángulos son agudos. El círculo cuyo diámetro es BC corta a AB y AC en los puntos D y E, respectivamente, y sea P el punto de intersección de BE y CD. Probar que $m(\angle BPC) = m(\angle B) + m(\angle C)$. ¿Qué pasa si uno de los ángulos del triángulo no es agudo?
9.573. En la figura:



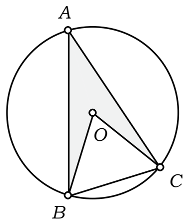
tenemos un triángulo equilátero ΔABC cuyos lados tienen 10 de longitud y un diámetro DE del círculo paralelo a BC. Calcular las longitudes de DP, PQ, y QE.

9.574. En la figura:



tenemos un triángulo equilátero ΔABC cuyos lados tienen longitud 3. Calcular el área de la región sombreada.

9.575. En la figura:



ΔABC es un triángulo isósceles con $AB \cong AC$ y $m(\angle A) = 30$. Si el radio del círculo es igual a 1, calcular el área de la región sombreada.

9.576. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$. Si $|BI| = 2\sqrt{5}$ y $|CI| = 2\sqrt{10}$, calcular las longitudes de los lados del triángulo y su inradio r.

9.577. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$. Si $|AC| = 12$ y $r = 3$, calcular la longitud de los lados restantes del triángulo.

9.578. Sean ΔABC un triángulo y $\mathrm{C}(O,R)$ su circuncírculo. Sean DD' una cuerda de $\mathrm{C}(O,R)$ paralela a BC y E el punto de intersección de $\overleftrightarrow{AD'}$ y $\overleftrightarrow{BC}$.

a. Mostrar que los ángulos $\angle BAC$ y $\angle DAE$ tienen las mismas bisectrices.

b. Comparar los triángulos ΔABD y ΔAEC.

c. Comparar los triángulos ΔABE y ΔADC.

d. Expresar el producto $|AD||AE|$ en función de $|AB|$ y $|AC|$.

9.579. Sean ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$ y $D \in BC$. Por D trazamos una recta perpendicular a BC que corte a $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{AC}$ en los puntos E y F, respectivamente. Probar las siguientes identidades:

a. $|DE||DF| = |BD||DC|$.

b. $|AF||CF| = |EF||DF|$.

c. $|AE||EB| = |ED||EF|$.

9.580. Sean ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$ y $\mathrm{C}(O,R)$ su circuncírculo. Por A trazamos una recta que corte a BC en el punto D y a $\mathrm{C}(O,R)$ en el punto E. Probar que $|AB|^2 = |AD||AE|$.

9.581. Sea ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$. Supongamos que la bisectriz b_b corta a la recta tangente al circuncírculo del triángulo ΔABC en el punto D. Probar que $AB \cong AD$.

9.582[I-238]. Sean ΔABC un triángulo y $D \in BC$. Consideremos los circuncírculos de los triángulos ΔABD y ΔADC. Probar que uno de los ángulos formados por las rectas tangentes a dichos círculos en el punto A es congruente con el ángulo $\angle A$.

9.583. Sea ΔABC un triángulo. Supongamos que una recta paralela a BC corta a AB y AC en los puntos D y E, respectivamente. Probar que los circuncírculos de los triángulos ΔABC y ΔADE tienen una recta tangente en común en el punto A.

9.584. Sean ΔABC un triángulo y $D \in BC$. Sea E el punto de intersección de la recta tangente al circuncírculo del triángulo ΔABD y de la recta tangente al circuncírculo del triángulo ΔADC.

a. Probar que $\Delta ABD \sim \Delta AEC$.

b. Probar que los puntos A, B, E y C son concíclicos.

9.585. Sean ΔABC un triángulo y $\mathrm{C}(O,R)$ su circuncírculo. Sea D el punto de intersección de las rectas tangentes a $\mathrm{C}(O,r)$ en los puntos B y C.

a. Si $\angle A \cong \angle CDB$, probar que $m(\angle A) = 60$.

b. Si $\angle B \cong \angle CDB$, probar que ΔABC es un triángulo isósceles.

9.586[I-25]. Sea ΔABC un triángulo en el cual $m(\angle A) = 45$ y los otros dos ángulos son agudos. Trazamos el círculo $\mathrm{C}(M, \frac{|BC|}{2})$ de diámetro BC, el cual corta a AC en D y a AB en E. Sea F el punto de intersección de BD y CE. Probar las siguientes afirmaciones:

a. $\overleftrightarrow{AH} \perp \overleftrightarrow{BC}$.

Sea P el punto de intersección de $\overleftrightarrow{AH}$ y $\overleftrightarrow{BC}$.

b. El cuadrilátero $\square ADFE$ se puede inscribir en el círculo $C(N, \frac{|AF|}{2})$ de diámetro AF.

c. El triángulo ΔADB es isósceles.

d. $\Delta DNA \cong \Delta DMB$.

e. El segmento ND es tangente a $C(M, \frac{|BC|}{2})$ y el segmento MD es tangente a $C(N, \frac{|AF|}{2})$.

f. El triángulo ΔDPE es rectángulo.

9.587. Sean ΔABC un triángulo y $C(O,R)$ su circuncírculo. Un círculo variable que pasa por los vértices B y C corta a AB y AC en los puntos D y E, respectivamente.

a. Probar que $\overleftrightarrow{DE}$ es paralela a la recta tangente $C(O,R)$ en el punto A.

b. Por B trazamos una recta paralela a $\overleftrightarrow{DE}$ que corte a $\overleftrightarrow{AC}$ en el punto F. Probar que el circuncírculo del triángulo ΔBCF es tangente a AB.

9.588[I-238]. Sean ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$ y D un punto en el circuncírculo del triángulo. Si E es el punto de intersección de $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{AD}$, probar que AC es tangente al circuncírculo del triángulo ΔCDE.

9.589[I-238]. Sean ΔABC un triángulo y $C(O,R)$ su circuncírculo. Sea P el punto de intersección de las rectas tangentes a $C(O,R)$ en los vértices B y C. Por P trazamos un recta paralela a la recta tangente a $C(O,R)$ en el vértice A, la cual corta a $\overleftrightarrow{AB}$ y a $\overleftrightarrow{AC}$ en los puntos D y E, respectivamente. Probar que P es el punto medio de DE.

9.590. Sea ΔABC un triángulo. El círculo que pasa por los puntos A, B_a y M_a corta a AB y AC en los puntos D y E, respectivamente. Probar que $BD \cong CE$.

9.591. Sean ΔABC un triángulo y $P \in int(\Delta ABC)$. Si se cumple que $\angle PDA \cong \angle PBA$, para cada punto $D \in \overleftrightarrow{BC} - \{B\}$, probar que el círculo que pasa por los puntos A, B y P es tangente a BC.

9.592. Sean ΔABC un triángulo equilátero y $C(O,R)$ su circuncírculo. Fijamos un punto $P \in \overset{\frown}{BC}$ y sea $D \in AP$ tal que $PD \cong PB$.

a. Comparar los triángulos ΔDAB y ΔBPC.

b. Probar $|AP| = |PB| + |PC|$.

9.593. Sea ΔABC un triángulo equilátero. Trazamos un círculo que pase por B y C y corta a AB y AC en los puntos E y F, respectivamente. Si P es un punto de dicho círculo tal que $EP \cong ED$, probar que $BP \cong BC$.

9.594(MOP-98) Sean ΔABC un triángulo y $D \in BC$. Sean E el punto de intersección de $\overleftrightarrow{AD}$ y el circuncírculo del triángulo ΔABC y P y Q las proyecciones de E sobre los lados AB y AC, respectivamente. Probar que PQ es tangente al círculo de diámetro DE si y solo si $AB \cong AC$.

9.595 [I-25]. Sea ΔABC un triángulo isósceles tal que y $m(\angle B) = m(\angle C) = 68$. Trazamos un círculo con centro en B y radio a que corte a AC y AB en los puntos P y Q respectivamente. Probar que PQ es paralelo a la bisectriz del ángulo $\angle C$ del triángulo dado.

9.596[I-238]. Sea ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$. Ubicamos puntos $D \in AB$ y $E \in AC$ tales que $|DE| = |BD| + |EC|$. Probar que DE es tangente al círculo que es tangente a AB y AC en los puntos B y C.

9.597. Sean ΔABC un triángulo equilátero y $C(O,R)$ su circuncírculo. Fijamos un punto $P \in \overset{\frown}{AB}$. Sean Q el punto de intersección de AB y PC y S el punto de intersección de $\overleftrightarrow{AP}$ y $\overleftrightarrow{BC}$. Probar que $\Delta AQC \sim \Delta ASC$.

9.598. Sean ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$ y $P \in int(\Delta ABC)$. Sean R, S y T las proyecciones de P sobre BC, AC y AB, respectivamente. Si $|PR|^2 = |PS||PT|$, probar las siguientes afirmaciones:

a. $\Delta TPR \sim \Delta PRS$.

b. Probar que $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{AC}$ son tangentes al círculo que pasa por los puntos B, P y C.

9.599. Sean ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$ y $C(O,R)$ su circuncírculo. Uno traza la recta paralela a la recta tangente a $C(O,R)$ en el punto A. Dicha recta corta a AB en P y a AC en Q.
a. Probar que $\square BCPQ$ es cíclico.
b. Comparar los triángulos ΔABC y ΔAPQ.
c. Probar que $|AB||AP| = |AC||AQ|$.

9.600. Sea ΔABC un triángulo. Trazamos el círculo $C(A,|AC|)$, el cual corta a $\overleftrightarrow{AB}$ en los puntos D y E, ¿qué representan para el ángulo $\angle A$ las rectas que pasan por el punto A y son paralelas a $\overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{CE}$?

9.601. Sea ΔABC un triángulo cuyos ángulos son agudos y $AB > AC$. Fijamos un punto $D \in BC$ tal que $AD \cong AC$.
a. Si E es el punto de intersección de $\overrightarrow{AD}$ y el circuncírculo $C(O,R)$ del triángulo original, probar que $BD \cong BE$.
b. Sea F el punto de intersección de la recta paralela a $\overleftrightarrow{BC}$ que pasa por A y la recta paralela a $\overleftrightarrow{AD}$ que pasa por B. Probar que $F \in C(O,R)$.

9.602. Sea P un punto cualquiera en el circuncírculo del triángulo ΔABC. Si S y T son las proyecciones del punto P sobre las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{BC}$, respectivamente, probar que $\angle PTS \cong \angle PCA$.

9.603. Sean ΔABC un triángulo equilátero y D el punto de intersección de $\overrightarrow{AO}$ y el circuncírculo del triángulo. Probar que ΔOBD y ΔOCD son también triángulos equiláteros.

9.604[l-238]. Sean ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$. El círculo que pasa por A y es tangente a BC en C corta a $\overleftrightarrow{AB}$ en un punto $D \in AB$, de tal modo que $AD \cong BC$. Probar que $m(\angle B) = m(\angle C) = 2m(\angle A)$.

9.605[l-238]. Sea ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$. Sea D el punto de intersección de $\overleftrightarrow{AC}$ y el círculo que pasa por A y es tangente a BC en el punto B. Probar que $BD \cong BC$.

9.606[l-238]. Sean ΔABC un triángulo y $C(O',r')$ el círculo tangente a AB en A y que pasa por C. Sea AD la cuerda de $C(O',r')$ paralela a BC. Si BD corta a $C(O',r')$ en el punto E, probar que $\angle BAE \cong \angle CBE \cong \angle ACE$.

9.607[l-238]. Sean ΔABC un triángulo y $C(O',r')$ el círculo tangente a BC en C y que pasa por A. Sea AD la cuerda de $C(O',r')$ paralela a BC. Probar que ΔACD es un triángulo isósceles.

9.608. Sean ΔABC triángulo isósceles con $AB \cong AC$ y $P \in BC$ con $|BP| < |PC|$. Sean Q y R los puntos donde los incírculos de los triángulos ΔABP y ΔAPC son tangentes a AP. Probar que

$$|QR| = \frac{|PC| - |BP|}{2}.$$

9.609[Problem 813, π, μ, ε Journal 10 (1994), 66 - 67]. Sea $\Delta(a,b,c)$ un triángulo.
a. Probar que $\frac{b+c}{2}$, $\frac{a+c}{2}$ y $\frac{a+b}{2}$ son los lados de un triángulo.
b. Si r y r' son los inradios de los triángulos $\Delta(a,b,c)$ y $\Delta(\frac{b+c}{2}, \frac{a+c}{2}, \frac{a+b}{2})$, respectivamente, probar la desigualdad $r' \geq r$.

9.610. Probar que si ΔABC es un triángulo, entonces sen$\angle A$, sen$\angle B$ y sen$\angle C$ forman los lados de un triángulo.

9.611[a-152]. Probar que si ΔABC es un triángulo, entonces $\cos\frac{\angle A}{2}$, $\cos\frac{\angle B}{2}$ y $\cos\frac{\angle C}{2}$ forman los lados de un triángulo (ver Problema 4.34).

9.612[l-244]. Probar que si ΔABC es un triángulo cuyos ángulos son agudos, entonces sen$2\angle A$, sen$2\angle B$ y sen$2\angle C$ forman los lados de un triángulo (ver Problema 4.33).

9.613[l-244]. Probar que si ΔABC es un triángulo cuyos ángulos $\angle A$ y $\angle B$ son agudos, entonces cos$\angle A$, cos$\angle B$ y sen$\angle C$ forman los lados de un triángulo (ver Problema 4.35).

9.614[a-155]. Probar que si ΔABC es un triángulo, entonces sen $\frac{\angle A}{2}$, sen $\frac{\angle B}{2}$ y cos $\frac{\angle C}{2}$ forman los lados de un triángulo (ver Problema 4.36).

9.615. Dado un triángulo, decir qué tipo de triángulo es en cada uno de los siguientes casos:
a. El ortocentro y el circuncentro del triángulo coinciden.
b. El ortocentro y el incentro del triángulo coinciden.
c. El ortocentro y el centro de gravedad del triángulo coinciden.
d. El centro de gravedad y el circuncentro del triángulo coinciden.
e. El centro de gravedad y el incentro del triángulo coinciden.
f. El incentro y el circuncentro del triángulo coinciden.

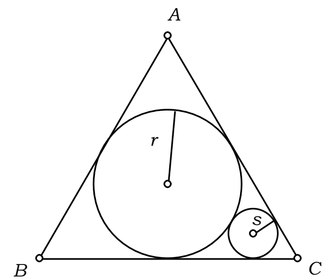
9.616. ¿Puede el inradio de un triángulo ser igual a uno de sus exradios?

9.617. Sea ΔABC un triángulo, probar que los circunradios de los triángulos ΔABC, ΔBHC, ΔAHC y ΔAHB son iguales.

9.618. Sean ΔABC un triángulo, $L \in BC$, $M \in AC$ y $N \in AB$. Si $|BL||LC| = |CM||MA| = |AN||NB|$ y O es el circuncentro de ΔABC, probar que O es también el circuncentro de ΔLMN.

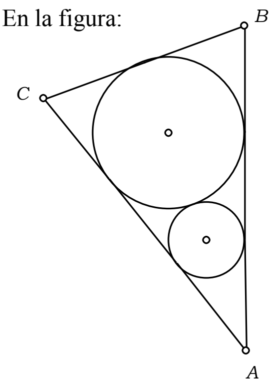
9.619. Sea ΔABC un triángulo. Si O' es el punto simétrico de su circuncentro O con respecto a $\overleftrightarrow{BC}$. Probar que $\square OO'HA$ es un paralelogramo.

9.620. En la figura:



tenemos un triángulo equilátero ΔABC del cual solo conocemos su inradio r y un círculo pequeño que es tangente a los lados BC y AC del triángulo y al incírculo del mismo.
a. Expresar el radio s del círculo menor en función de r.
b. Encontrar una relación entre el área del incírculo y el círculo pequeño.

9.621. En la figura:



tenemos dos círculos tangentes que también son tangentes a los lados del triángulo isósceles ΔABC, en el cual $AB \cong AC$. Si el radio del círculo grande es igual a 4 y el radio del círculo pequeño es igual a 2, calcular el perímetro del triángulo ΔABC.

9.622. Sean ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$ y $\mathrm{C}(O,R)$ su circuncírculo. Sea D el punto de intersección de la mediatriz de BC y del arco $\overset{\frown}{BC}$ que no contiene a A. Si E y F son las proyecciones de D sobre $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{AC}$, respectivamente, probar que $\square EDFA$ es un cuadrado.

9.623. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$ circunscrito en un círculo $\mathrm{C}(O,r)$. Sean D el punto de intersección de la mediatriz de BC y $\mathrm{C}(O,r)$, y E y F las proyecciones del punto D sobre $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{AC}$, respectivamente.
a. Probar que $\Delta DEB \cong \Delta DCF$.
b. ¿Cuál es la naturaleza del cuadrilátero $\square AEDF$?

9.624. Sobre los lados de un triángulo ΔABC cualquiera trazamos exteriormente los triángulos equiláteros ΔDAB, ΔEBC y ΔFAC.

a. Probar que los circuncírculos de los triángulos ΔDAB, ΔEBC y ΔFAC pasan por un mismo punto P del interior del triángulo original.
b. Comparar los ángulos $\angle APB$, $\angle BPC$ y $\angle CPA$.

9.625. Sobre los lados AB y AC de un triángulo ΔABC trazamos exteriormente los triángulos equiláteros ΔDAB y ΔEAC. Sea F el punto de intersección de los circuncírculos de estos dos triángulos diferente de A. Probar que los puntos B, F y E son colineales.

9.626. Trazamos exteriormente triángulos equiláteros sobre cada uno de los lados de un triángulo cuyos ángulos son agudos. Probar que los circuncírculos de estos tres triángulos equiláteros tienen un punto en común.

9.627. Sean $\square ABCD$ un paralelogramo. Exteriormente construimos los cuadrados $\square ADEF$ y $\square ABGH$, y completamos el paralelogramo $\square FAHI$.
a. Probar que $\square ABCD \cong \square FAHI$.
b. Probar que $IA \perp BD$, $AC \perp FH$, $ID \perp BE$ y $IB \perp DG$.
c. Probar que $IA \cong BD$, $AC \cong FH$, $ID \cong BE$ y $IB \cong DG$.
d. Probar que IA, BE y DG son concurrentes.
e. Probar que $BF \cong DH$.
f. Si BF y DH se cortan en el punto P, probar que $P \in EG$ y $AP \perp EG$.

9.628. En un triángulo ΔABC, probar que si $IO \perp BC$, entonces ΔABC es isósceles.

9.629. Sea ΔABC un triángulo. Sean U, V y W los puntos de intersección de las semirrectas $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{BI}$ y $\overrightarrow{CI}$ con el circuncírculo del triángulo ΔABC. Probar que I es el ortocentro del triángulo ΔUVW.

9.630. Dado un triángulo ΔABC, probar que A, B y C son los pies de las alturas del triángulo $\Delta I_a\ I_b\ I_c$.

9.631. Sea I el incentro de un triángulo ΔABC. Probar que el punto medio de IA es el circuncentro del triángulo $\Delta A\,P_b\ P_c$.

9.632. Probar que en todo triángulo I es el circuncentro del triángulo $\Delta P_a\ P_b\ P_c$.

9.633. Sea ΔABC un triángulo. Probar las siguientes afirmaciones:
a. Los puntos M_a, M_b y M_c son los puntos medios de $P_a\ P_a^a$, $P_b\ P_b^b$ y $P_c\ P_c^c$, respectivamente.
b. $|P_b\ P_b^a| = |P_b^b\ P_b^c| = |P_c^c\ P_c^b| = |P_c\ P_c^a| = a$, $\quad |P_a\ P_a^b| = |P_a^a\ P_a^c| = |P_c^c\ P_c^a| = |P_c\ P_c^b| = b$ y

$$|P_a\ P_a^c| = |P_a^a\ P_a^b| = |P_b^b\ P_b^a| = |P_b\ P_b^c| = c.$$

c. $|P_c^a\ P_c^b| = a + b$, $|P_b^a\ P_b^c| = a + c$ y $|P_a^b\ P_a^c| = b + c$.
d. $|P_c\ P_c^c| = |a - b|$, $|P_b\ P_b^b| = |a - c|$ y $|P_a\ P_a^a| = |b - c|$.
e. $2|P_a\ M_a| = |c - b|$, $2|P_b\ M_b| = |a - c|$ y $2|P_c\ M_c| = |a - b|$.
f. $s = |A\,P_b^a| = |A\,P_c^a| = |B\,P_a^b| = |B\,P_c^b| = |C\,P_a^c| = |C\,P_b^c|$, $s_a = |B\,P_c^c| = |B\,P_a^c| = |C\,P_b^b| = |C\,P_a^b|$,

$$s_b = |A\,P_c^c| = |A\,P_b^c| = |C\,P_a^a| = |C\,P_b^a| \text{ y } s_c = |A\,P_b^b| = |A\,P_c^b| = |B\,P_a^a| = |B\,P_c^a|.$$

g. $|IA|^2 - |IB|^2 = c(|A\,P_c| - |B\,P_c|) = c(b - a)$, $\quad |IB|^2 - |IC|^2 = a(|B\,P_a| - |C\,P_a|) = a(c - b)$ y

$$|IC|^2 - |IA|^2 = b(|C\,P_b| - |A\,P_b|) = b(a - c).$$

h. Las medidas de los ángulos del triángulo $\Delta P_a\ P_b\ P_c$ son $\dfrac{m(\angle B + \angle C)}{2}$, $\dfrac{m(\angle A + \angle C)}{2}$ y $\dfrac{m(\angle C + \angle B)}{2}$.

i. Las medidas de los ángulos del triángulo $\Delta P_a^a\ P_b^a\ P_c^a$ son iguales a $90 + m(\dfrac{\angle A}{2})$, $m(\dfrac{\angle B}{2})$ y $m(\dfrac{\angle C}{2})$.

j. Las medidas de los ángulos del triángulo $\Delta P_a^b\ P_b^b\ P_c^b$ son iguales a $m(\dfrac{\angle A}{2})$, $90 + m(\dfrac{\angle B}{2})$ y $m(\dfrac{\angle C}{2})$.

k. Las medidas de los ángulos del triángulo $\Delta P_a^c\ P_b^c\ P_c^c$ son iguales a $m(\dfrac{\angle A}{2})$, $m(\dfrac{\angle B}{2})$ y $90 + m(\dfrac{\angle C}{2})$.

l. Las parejas de ángulos $\angle P_b\ P_a\ P_c$ y $\angle P_b^a\ P_a^a\ P_c^a$, $\angle P_a\ P_b\ P_c$ y $\angle P_a^b\ P_b^b\ P_c^b$ $\angle P_a\ P_c\ P_b$ y $\angle P_a^c\ P_c^c\ P_b^c$ son suplementarios.

9.634. En el triángulo $\Delta(3,4,6)$, calcular $|AP_a|$, $|BP_b|$ y $|CP_c|$.

9.635. En el triángulo ΔABC se cumple que $|AP_c| = 3$, $|AP_b| = 2$ y $|BP_a| = 4$. Si $a = 15$, calcular b y c.

9.636[I-39]. Sea ΔABC un triángulo tal que $|P_a P_b|:|P_b P_c|:|P_c P_a| = 3{:}4{:}5$. Probar que

$$are(\Delta ABC) = r^2(2\sqrt{3} + 3).$$

9.637. Sea ΔABC un triángulo rectángulo isósceles. Si $|AB| = |AC| = 5$, calcular la longitud del segmento $P_b P_c$.

9.638. Dado el triángulo $\Delta(\angle 60, \angle 80, \angle 40)$ y su circuncírculo $\mathrm{C}(O,R)$, calcular

a. las medidas de los ángulos del triángulo $\Delta P_a P_b P_c$, y

b. las medidas de los ángulos del triángulo formado por las rectas tangentes a $\mathrm{C}(O,R)$ en los puntos A, B y C.

9.639[I-238]. Sea ΔABC un triángulo tal que $m(\angle B) = m(\angle C) = 2m(\angle A)$. Probar que $l(\overset{\frown}{P_aP_b}):l(\overset{\frown}{P_bP_c}) = 3{:}\,4$.

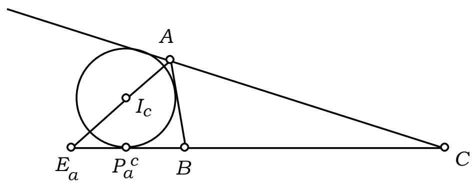
9.640. Sea ΔABC un triángulo. Sea D el punto de tangencia del incírculo del triángulo ΔABP_a y AP_a.

a. Probar que $|AB| - |BP_a| = |AC| - |CP_a| = |AD| - |DP_a|$.

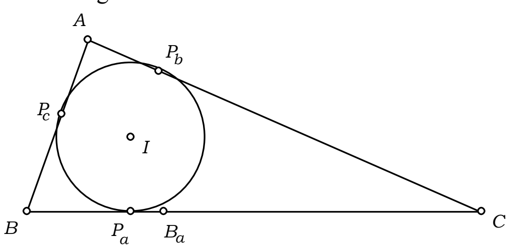
b. Probar que los incírculos de los triángulos ΔABP_a y ΔAP_aC son tangentes.

9.641. Sea ΔABC un triángulo. Si D es el punto de intersección de b_a y BI_b, probar que los puntos A, D, C y I_b son concíclicos.

9.642. En la figura:
si $r_c = 2$ y $|AC| = 8$, calcular la longitud del segmento $E_a P_a^c$.



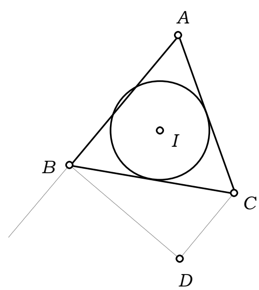
9.643. En la figura:



si $|AP_b| = 3$, $|BP_c| = 5$ y $|BB_a| = 6$, calcular las longitudes de los lados del triángulo ΔABC.

9.644. En la figura:

ΔABC un triángulo equilátero y $\mathrm{C}(I,r)$ su incírculo. Sea D el punto de intersección de la recta perpendicular a AB en el punto B y e_c. En función de r, calcular las longitudes de los lados y las diagonales del cuadrilátero $\square BDCA$ y su área.



9.645[C. Ciamberlini, Boll. Un. Mat. Ital. (2) 5 (1943), 37-41]. Probar que un triángulo tiene un ángulo agudo, recto u obtuso, dependiendo, si una de las siguientes condiciones se cumple:

a. $s > 2R + r$, $s = 2R + r$ o $s < 2R + r$.

b. $(\mathrm{sen}\angle A)^2 + (\mathrm{sen}\angle B)^2 + (\mathrm{sen}\,\angle C)^2 > 2$, $(\mathrm{sen}\angle A)^2 + (\mathrm{sen}\angle B)^2 + (\mathrm{sen}\,\angle C)^2 = 2$ o $(\mathrm{sen}\angle A)^2 + (\mathrm{sen}\angle B)^2 + (\mathrm{sen}\,\angle C)^2 < 2$.

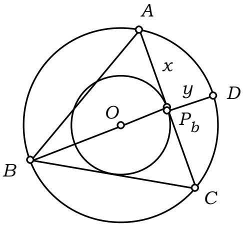
c. $a^2 + b^2 + c^2 > 8R^2$, $a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2$ o $a^2 + b^2 + c^2 < 8R^2$.

d. $R > 3|OG|$, $R = 3|OG|$ o $R < 3|OG|$.

e. $(s - r_a)(s - r_b)(s - r_c) > 0$, $(s - r_a)(s - r_b)(s - r_c) = 0$ o $(s - r_a)(s - r_b)(s - r_c) < 0$.

9.646. Si la diferencia entre las áreas de dos triángulos equiláteros, uno inscrito y otro circunscrito a un mismo círculo, es igual a 8, calcular la longitud de los lados del triángulo inscrito.

9.647. En la figura:



tenemos un triángulo equilátero ΔABC junto con su incírculo y su circuncírculo. Si BD es uno de sus diámetros, encontrar la relación que guardan $x = |A P_b|$ y $y = |P_b D|$.

9.648. Consideremos el triángulo $\Delta(8,9,10)$ y su incírculo $C(I,r)$. Trazamos la recta paralela a BC que sea tangente a $C(I,r)$ en el punto P, y sean D y E los puntos en donde dicha recta corta a AB y AC, respectivamente. Encontrar las longitudes de los segmentos DP y PE.

9.649[I-188]. En todo triángulo ΔABC, probar que la potencia de I al circuncírculo del triángulo es igual a

$$\frac{abc}{a+b+c}.$$

9.650. Probar que las rectas tangentes al incírculo de un triángulo y paralelas a los lados del mismo, determinan tres triángulos tales que las suma de sus perímetros es igual al perímetro del triángulo original.

9.651[I-238]. Sean PA y PB dos segmentos tangentes a un círculo $C(O,r)$ y Q el punto de intersección del círculo y la semirrecta $\overleftarrow{OP}$. Probar que Q es un excentro del triángulo ΔPAB.

9.652. Sean ΔABC un triángulo equilátero y $D \in \overleftrightarrow{BC} - BC$. Trazamos un triángulo equilátero ΔADE, de tal forma que E y C estén en diferentes semiplanos determinados por la recta $\overleftrightarrow{AD}$. Probar que las mediatrices de los segmentos AC, AD y AE son concurrentes.

9.653. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$. Sean V_a y V_a' los puntos extremos del diámetro del circuncírculo del triángulo ΔABC que pasa por el punto M_a, tales que A y V_a están en diferentes semiplanos determinados por la recta $\overleftrightarrow{BC}$. Probar que $\overrightarrow{AV_a}$ y $\overrightarrow{AV_a'}$ son las bisectrices del ángulo interior y del ángulo exterior del triángulo original cuyo vértice es el punto A, respectivamente.

9.654. Sean ΔABC y $\Delta A'BC$ dos triángulos tales que $\angle A \cong \angle A'$ y A y A' están en un mismo semiplano determinado por $\overleftrightarrow{BC}$. Si D es el punto de intersección de las bisectrices de $\angle A$ y $\angle A'$, probar que los puntos A, A', B, C y D son concíclicos.

9.655. Sea ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$ y $C(O,r)$ su circuncírculo. Probar que la recta tangente a $C(O,r)$ en el punto A es paralela a BC. ¿Es cierto el recíproco de este problema?

9.656. Sean ΔABC un triángulo equilátero con altura h y $\Delta A'B'C'$ un triángulo equilátero inscrito en un círculo de radio h. Encontrar la razón $\dfrac{per(\Delta ABC)}{are(\Delta A'B'C')}$.

9.657. Demostrar que cada punto de un triángulo es el vértice de un triángulo isósceles inscrito en el triángulo dado.

9.658. En cada lado de un triángulo dado, encontrar un punto, de tal forma que estén a la misma distancia el uno del otro.

9.659. En todo triángulo, probar que el círculo que pasa por los puntos medios de los lados de un triángulo pasa también por los pies de las alturas del mismo triángulo.

9.660. Tenemos tres círculos $C(O,r)$, $C(O',r')$ y $C(O',r')$ de distintos radios que tienen un punto en común P. Trazamos los diámetros PA, PB y PC de $C(O,r)$, $C(O',r')$ y $C(O',r')$, respectivamente. Probar que los lados del triángulo $\Delta OO'O''$ son respectivamente paralelos a los lados del triángulo ΔABC.

9.661. Sea ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$. Si el círculo que pasa por los puntos M_b, A y M_c es tangente a BC, probar que $\angle A$ tiene que ser un ángulo recto.

9.662. Sean ΔABC un triángulo isósceles rectángulo en $\angle A$ y $C(O,R)$ su circuncírculo. Probar que el radio del círculo tangente a $C(O,R)$ y a los catetos del triángulo es igual a $2R(\sqrt{2} - 1)$.

9.663[l-181]. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumplen las siguientes identidades:

a. $\tan\frac{\angle A}{2} = \frac{r}{s_a} = \frac{r_a}{s}$, $\tan\frac{\angle B}{2} = \frac{r}{s_b} = \frac{r_b}{s}$ y $\tan\frac{\angle C}{2} = \frac{r}{s_c} = \frac{r_c}{s}$,

b. $\cot\frac{\angle A}{2} = \frac{r_c}{s_b}$, $\cot\frac{\angle B}{2} = \frac{r_a}{s_c}$ y $\cot\frac{\angle C}{2} = \frac{r_b}{s_a}$,

c. $\operatorname{sen}\angle A = 2r_a\frac{\sqrt{r_ar_b+r_ar_c+r_br_c}}{(r_a+r_b)(r_a+r_c)}$, $\operatorname{sen}\angle B = 2r_b\frac{\sqrt{r_ar_b+r_ar_c+r_br_c}}{(r_b+r_a)(r_b+r_c)}$ y $\operatorname{sen}\angle C = 2r_c\frac{\sqrt{r_ar_b+r_ar_c+r_br_c}}{(r_c+r_b)(r_c+r_a)}$,

d. $\cos\angle A = \frac{2R+r-r_a}{2R}$, $\cos\angle B = \frac{2R+r-r_b}{2R}$ y $\cos\angle C = \frac{2R+r-r_c}{2R}$.

e. $r_a(r_b + r_c)\csc\angle A = r_b(r_a + r_c)\csc\angle B = r_c(r_a + r_b)\csc\angle C$.

9.664[l-181]. Si en un triángulo ΔABC se tiene que $R = r_a$, probar que $\cos\angle A = \cos\angle B + \cos\angle C$.

9.665[a-36]. Si d, d_a, d_b y d_c son los diámetros del incírculo y de los tres excírculos de un triángulo ΔABC cualquiera, probar las siguientes relaciones:

$$d = (-a+b+c)\tan\frac{\angle A}{2} = (a-b+c)\tan\frac{\angle B}{2} = (a+b-c)\tan\frac{\angle C}{2} = \frac{2\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}{s},$$

$$d_a = (a+b+c)\tan\frac{\angle A}{2} = 2\sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}},$$

$$d_b = (a+b+c)\tan\frac{\angle B}{2} = 2\sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-b}} \text{ y}$$

$$d_c = (a+b+c)\tan\frac{\angle C}{2} = 2\sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-c}}.$$

9.666. La siguiente lista de identidades entre ciertas partes de un triángulo ΔABC es una recopilación realizada por J. S. Mackay en sus artículos [a-105] y [a-107].

Las siguientes fórmulas son tomadas del artículo [a-105]:

1. $r r_a r_b r_c = are(\Delta ABC)^2$.

2. $r_a = \frac{are(\Delta ABC)}{s_a}$, $r_b = \frac{are(\Delta ABC)}{s_b}$ y $r_c = \frac{are(\Delta ABC)}{s_c}$.

3. $sr = s_a r_a = s_b r_b = s_c r_c$.

4. $\frac{r}{r_a} = \frac{s_a}{s}$, $\frac{r}{r_b} = \frac{s_b}{s}$ y $\frac{r}{r_c} = \frac{s_c}{s}$.

5. $\frac{r_b}{r_c} = \frac{s_c}{s_b}$, $\frac{r_c}{r_a} = \frac{s_a}{s_c}$ y $\frac{r_a}{r_b} = \frac{s_b}{s_a}$.

6. $are(\Delta ABC)^2 = s s_a s_b s_c$.

7. $\frac{r_ar_br_c}{s} = are(\Delta ABC) = \frac{s_as_bs_c}{r}$, $\frac{rr_br_c}{s_a} = are(\Delta ABC) = \frac{ss_bs_c}{r_a}$, $\frac{rr_ar_c}{s_b} = are(\Delta ABC) = \frac{ss_as_c}{r_b}$, $\frac{rr_ar_b}{s_c} = are(\Delta ABC) = \frac{ss_as_b}{r_c}$.

8. $\frac{r_br_c}{s^2} = \frac{r^2}{s_bs_c}$, $\frac{r_ar_b}{s^2} = \frac{r^2}{s_as_b}$ y $\frac{r_ar_c}{s^2} = \frac{r^2}{s_as_c}$.

9. $\frac{r_ar_br_c}{s^3} = \frac{r^3}{s_as_bs_c}$, $\frac{rr_br_c}{s^3} = \frac{r^3}{ss_bs_c}$, $\frac{rr_ar_c}{s^3} = \frac{r^3}{ss_as_c}$ y $\frac{rr_ar_b}{s^3} = \frac{r^3}{ss_as_b}$.

10. $r^2 = \dfrac{s_a s_b s_c}{s}$, $r_a^2 = \dfrac{s s_b s_c}{s_a}$, $r_b^2 = \dfrac{s s_a s_c}{s_b}$ y $r_3^2 = \dfrac{s s_a s_b}{s_c}$.

11. $s^2 = \dfrac{r_a r_b r_c}{r}$, $s_a^2 = \dfrac{r r_b r_c}{r_a}$, $s_b^2 = \dfrac{r r_a r_c}{r_b}$ y $s_c^2 = \dfrac{r r_a r_b}{r_c}$.

12. $\sqrt{\dfrac{r_a r_b r_c}{r}} = \sqrt{\dfrac{r r_b r_c}{r_a}} + \sqrt{\dfrac{r r_a r_c}{r_b}} + \sqrt{\dfrac{r r_a r_b}{r_c}}$.

13. $r r_a = s_b s_c$
$r r_b = s_a s_c$ y
$r r_c = s_a s_b$

14. $s s_a = r_b r_c$
$s s_b = r_a r_c$ y
$s s_c = r_a r_b$.

15. $r_a r_c + r r_b = ac$
$r_b r_c + r r_a = bc$ y
$r_a r_b + r r_c = ab$.

16. $r r_a + r r_b + r r_c + r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c = ab + ac + bc$.

17. $2(r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c - r r_a - r r_b - r r_c) = a^2 + b^2 + c^2$.

18. $a^2 + 4 r_b r_c = (b + c)^2$,
$b^2 + 4 r_a r_c = (a + c)^2$ y
$c^2 + 4 r_a r_b = (a + b)^2$.

19. $a^2 - 4r r_a = (b - c)^2$,
$b^2 - 4r r_b = (a - c)^2$ y
$c^2 - 4r r_c = (a - b)^2$.

20. $r = \dfrac{bc - r_b r_c}{r_a} = \dfrac{ac - r_a r_c}{r_b} = \dfrac{ab - r_a r_b}{r_c}$.
$s = \dfrac{bc - s_b s_c}{s_a} = \dfrac{ac - s_a s_c}{s_b} = \dfrac{ab - s_a s_b}{s_c}$.

21. $r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c = s^2$,
$r_b r_c - r r_b - r r_c = s_a^2$,
$r_a r_c - r r_a - r r_c = s_b^2$ y
$r_a r_b - r r_a - r r_b = s_c^2$.

22. $r_a r_b + r_a r_c - r_b r_c = s(2a - s)$,
$r_b r_c + r_a r_b - r_a r_c = s(2b - s)$ y
$r_b r_c + r_a r_c - r_a r_b = s(2c - s)$.

23. $r_b r_c + r r_b + r r_c = s_a(2a + s_a)$,
$r_a r_c + r r_a + r r_c = s_b(2b + s_b)$ y
$r_a r_b + r r_a + r r_b = s_c(2c + s_c)$.

24. $4(r_a + r_b + r_c) = 2(ab + ac + bc) - (a^2 + b^2 + c^2)$,
$4 r_a(r - r_b - r_c) = 2(bc - ab - ac) - (a^2 + b^2 + c^2)$,
$4 r_b(r - r_a - r_c) = 2(ac - ab - bc) - (a^2 + b^2 + c^2)$ y
$4 r_c(r - r_a - r_b) = 2(ab - ac - bc) - (a^2 + b^2 + c^2)$.

25. $r(r_a + r_b + r_c) = bc - s_a^2 = ac - s_b^2 = ab - s_c^2$, $r_a(r - r_b - r_c) = bc - s^2 = -ac - s_c^2 = -ab - s_b^2$,
$r_b(r - r_a - r_c) = ac - s^2 = -ab - s_a^2 = -bc - s_c^2$ y
$r_c(r - r_a - r_b) = ab - s^2 = -bc - s_b^2 = -ac - s_a^2$.

26. $4 r_b r_c + r_a r_b + r_a r_c - 4r r_a - r r_b - r r_c = 4 m_a^2$,
$4 r_a r_c + r_a r_b + r_b r_c - 4r r_b - r r_a - r r_c = 4 m_b^2$ y
$4 r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c - 4r r_c - r r_a - r r_b = 4 m_c^2$.

27. $\dfrac{h_a}{2r} = \dfrac{s}{a}$, $\dfrac{h_a}{2r_a} = \dfrac{s_a}{a}$, $\dfrac{h_a}{2r_b} = \dfrac{s_b}{a}$ y $\dfrac{h_a}{2r_c} = \dfrac{s_c}{a}$.
$\dfrac{h_b}{2r} = \dfrac{s}{b}$, $\dfrac{h_b}{2r_a} = \dfrac{s_a}{b}$, $\dfrac{h_b}{2r_b} = \dfrac{s_b}{b}$ y $\dfrac{h_b}{2r_c} = \dfrac{s_c}{b}$.
$\dfrac{h_c}{2r} = \dfrac{s}{c}$, $\dfrac{h_c}{2r_a} = \dfrac{s_a}{c}$, $\dfrac{h_c}{2r_b} = \dfrac{s_b}{c}$ y $\dfrac{h_c}{2r_c} = \dfrac{s_c}{c}$.

28. $\dfrac{h_b h_c}{4 r_b r_c} = \dfrac{r r_a}{bc}$,
$\dfrac{h_a h_c}{4 r_a r_c} = \dfrac{r r_b}{ac}$ y
$\dfrac{h_a h_b}{4 r_a r_b} = \dfrac{r r_c}{ab}$.

29. $h_a\, h_b\, h_c = \dfrac{8s^3r^3}{abc} = \dfrac{8s_a^3r_a^3}{abc} = \dfrac{8s_b^3r_b^3}{abc} = \dfrac{8s_c^3r_c^3}{abc}$.

30. $are(\Delta ABC) = s\,r_a\,(1-\dfrac{2r}{h_a}) = r\,s_a\,(1-\dfrac{2r_a}{h_a}) = s\,r_b\,(1-\dfrac{2r}{h_b}) = r\,s_b\,(1-\dfrac{2r_b}{h_b}) = s\,r_c\,(1-\dfrac{2r}{h_c}) = r\,s_c\,(1-\dfrac{2r_c}{h_c})$.

31. $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}$.

32. $\dfrac{1}{r_a} = \dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r_b} - \dfrac{1}{r_c} = \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} - \dfrac{1}{h_a}$,

$\dfrac{1}{r_b} = \dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r_a} - \dfrac{1}{r_c} = \dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_c} - \dfrac{1}{h_b}$ y

$\dfrac{1}{r_c} = \dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r_a} - \dfrac{1}{r_b} = \dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} - \dfrac{1}{h_c}$.

33. $(\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c})^2 = \dfrac{4}{r}(\dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c})$.

34. $\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r_a} = \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c} = \dfrac{2}{h_a}$,

$\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r_b} = \dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_c} = \dfrac{2}{h_b}$ y

$\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r_c} = \dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} = \dfrac{2}{h_c}$.

35. $h_a = \dfrac{2rr_a}{r_a - r} = \dfrac{2r_br_c}{r_b + r_c}$,

$h_b = \dfrac{2rr_b}{r_b - r} = \dfrac{2r_ar_c}{r_a + r_c}$ y

$h_c = \dfrac{2rr_c}{r_c - r} = \dfrac{2r_ar_b}{r_a + r_b}$.

36. $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{r_a} = \dfrac{2}{h_b} + \dfrac{2}{h_c}$,

$\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{r_b} = \dfrac{2}{h_a} + \dfrac{2}{h_c}$ y

$\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{r_c} = \dfrac{2}{h_a} + \dfrac{2}{h_b}$.

37. $\dfrac{1}{r_c} - \dfrac{1}{r_b} = \dfrac{2}{h_b} - \dfrac{2}{h_c}$,

$\dfrac{1}{r_a} - \dfrac{1}{r_c} = \dfrac{2}{h_c} - \dfrac{2}{h_a}$ y

$\dfrac{1}{r_b} - \dfrac{1}{r_a} = \dfrac{2}{h_a} - \dfrac{2}{h_b}$.

38. $\dfrac{2rr_a}{r + r_a} = \dfrac{h_bh_c}{h_b + h_c}$,

$\dfrac{2rr_b}{r + r_b} = \dfrac{h_ah_c}{h_a + h_c}$ y

$\dfrac{2rr_c}{r + r_c} = \dfrac{h_ah_b}{h_a + h_b}$.

39. $\dfrac{2r_br_c}{r_c - r_b} = \dfrac{h_bh_c}{h_b - h_c}$,

$\dfrac{2r_ar_c}{r_a - r_c} = \dfrac{h_ah_c}{h_c - h_a}$ y

$\dfrac{2r_ar_b}{r_b - r_a} = \dfrac{h_ah_b}{h_a - h_b}$.

40. $r = \dfrac{r_ar_br_c}{r_ar_b + r_ar_c + r_br_c} = \dfrac{h_ah_bh_c}{h_ah_b + h_ah_c + h_bh_c}$, $\quad r_a = \dfrac{rr_br_c}{r_br_c - rr_b - rr_c} = \dfrac{h_ah_bh_c}{h_ah_b + h_ah_c - h_bh_c}$,

$r_b = \dfrac{rr_ar_c}{r_ar_c - rr_a - rr_c} = \dfrac{h_ah_bh_c}{h_ah_b + h_bh_c - h_ah_c}$ y $\quad r_c = \dfrac{rr_ar_b}{r_ar_b - rr_a - rr_b} = \dfrac{h_ah_bh_c}{h_ah_c + h_bh_c - h_ah_b}$.

41. $\dfrac{r_a^2r_b^2r_c^2}{r_ar_b + r_ar_c + r_br_c} = \dfrac{r^2r_b^2r_c^2}{r_br_c - rr_b - rr_c} = \dfrac{r^2r_a^2r_c^2}{r_ar_c - rr_a - rr_c} = \dfrac{r^2r_a^2r_b^2}{r_ar_b - rr_a - rr_b} = are(\Delta ABC)^2$.

42. $are(\Delta ABC)^2 = [(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c})(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a})(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_b})(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c})]^{-1}$.

43. $\frac{1}{rr_a}+\frac{1}{r_br_c}=\frac{1}{s_bs_c}+\frac{1}{ss_a}=\frac{4}{h_bh_c}=\frac{bc}{are(\Delta ABC)^2}$,

$\frac{1}{rr_b}+\frac{1}{r_ar_c}=\frac{1}{s_as_c}+\frac{1}{ss_b}=\frac{4}{h_ah_c}=\frac{ac}{are(\Delta ABC)^2}$ y

$\frac{1}{rr_c}+\frac{1}{r_ar_b}=\frac{1}{s_as_b}+\frac{1}{ss_c}=\frac{4}{h_ah_b}=\frac{ab}{are(\Delta ABC)^2}$.

44. $(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_a})(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c})=(\frac{1}{s_a}-\frac{1}{s})(\frac{1}{s_b}+\frac{1}{s_c})=\frac{4}{h_a^2}=\frac{a^2}{are(\Delta ABC)^2}$,

$(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_b})(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_c})=(\frac{1}{s_b}-\frac{1}{s})(\frac{1}{s_a}+\frac{1}{s_c})=\frac{4}{h_b^2}=\frac{b^2}{are(\Delta ABC)^2}$ y

$(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_c})(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b})=(\frac{1}{s_c}-\frac{1}{s})(\frac{1}{s_a}+\frac{1}{s_b})=\frac{4}{h_c^2}=\frac{c^2}{are(\Delta ABC)^2}$.

45. $\frac{1}{rr_a}+\frac{1}{rr_b}+\frac{1}{rr_c}+\frac{1}{r_ar_b}+\frac{1}{r_ar_c}+\frac{1}{r_br_c}=\frac{4}{h_ah_b}+\frac{4}{h_ah_c}+\frac{4}{h_bh_c}=\frac{ab+ac+bc}{are(\Delta ABC)^2}$.

46. $\frac{1}{rr_a}+\frac{1}{rr_b}+\frac{1}{rr_c}-\frac{1}{r_ar_b}-\frac{1}{r_ar_c}-\frac{1}{r_br_c}=\frac{2}{h_a^2}+\frac{2}{h_b^2}+\frac{2}{h_c^2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2are(\Delta ABC)^2}$.

47. $\frac{1}{r^2}=\frac{1}{s_as_b}+\frac{1}{s_as_c}+\frac{1}{s_bs_c}$,

$\frac{1}{r_a^2}=\frac{1}{s_bs_c}-\frac{1}{ss_b}-\frac{1}{ss_c}$,

$\frac{1}{s_b^2}=\frac{1}{s_as_c}-\frac{1}{ss_a}-\frac{1}{ss_c}$ y

$\frac{1}{r_c^2}=\frac{1}{s_as_b}-\frac{1}{ss_a}-\frac{1}{ss_b}$.

48. $\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r_a^2}+\frac{1}{r_b^2}+\frac{1}{r_c^2}=\frac{4}{h_a^2}+\frac{4}{h_b^2}+\frac{4}{h_c^2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{are(\Delta ABC)^2}$.

49. $\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r_a^2}-\frac{1}{r_b^2}-\frac{1}{r_c^2}=\frac{8}{h_bh_c}$,

$\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r_b^2}-\frac{1}{r_a^2}-\frac{1}{r_c^2}=\frac{8}{h_ah_c}$ y

$\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r_c^2}-\frac{1}{r_a^2}-\frac{1}{r_b^2}=\frac{8}{h_ah_b}$.

50. $\frac{a}{h_a}+\frac{b}{h_b}+\frac{c}{h_c}+\frac{1}{2}(\frac{a}{r_a}+\frac{b}{r_b}+\frac{c}{r_c})=\frac{s}{r}$,

$\frac{a}{h_a}+\frac{b}{h_b}+\frac{c}{h_c}-\frac{1}{2}(\frac{a}{r}+\frac{b}{r_b}+\frac{c}{r_c})=\frac{s_a}{r_a}$,

$\frac{a}{h_a}+\frac{b}{h_b}+\frac{c}{h_c}-\frac{1}{2}(\frac{b}{r}+\frac{a}{r_a}+\frac{c}{r_c})=\frac{s_b}{r_b}$ y

$\frac{a}{h_a}+\frac{b}{h_b}+\frac{c}{h_c}-\frac{1}{2}(\frac{c}{r}+\frac{a}{r_a}+\frac{b}{r_b})=\frac{s_c}{r_c}$.

51. $\dfrac{h_a+h_b+h_c-(r_a+r_b+r_c)}{s}-3(\dfrac{r}{a}+\dfrac{r}{b}+\dfrac{r}{c})+(\dfrac{r_a}{a}+\dfrac{r_b}{b}+\dfrac{r_c}{c})=0,$

$\dfrac{h_a-h_b-h_c+(r-r_b-r_c)}{s_a}-3(\dfrac{r_a}{a}-\dfrac{r_a}{b}-\dfrac{r_a}{c})+(\dfrac{r}{a}+\dfrac{r_b}{c}+\dfrac{r_c}{b})=0,$

$\dfrac{h_b-h_a-h_c+(r-r_a-r_c)}{s_b}-3(\dfrac{r_b}{b}-\dfrac{r_b}{a}-\dfrac{r_b}{c})+(\dfrac{r}{b}+\dfrac{r_a}{c}+\dfrac{r_c}{a})=0$ y

$\dfrac{h_c-h_a-h_b+(r-r_a-r_b)}{s_c}-3(\dfrac{r_c}{c}-\dfrac{r_c}{a}-\dfrac{r_c}{b})+(\dfrac{r}{c}+\dfrac{r_a}{b}+\dfrac{r_b}{a})=0.$

52. $\dfrac{h_b+h_c}{r_a}+\dfrac{h_a+h_c}{r_b}+\dfrac{h_a+h_b}{r_c}=6,$

$\dfrac{h_b+h_c}{r}-\dfrac{h_c-h_a}{r_c}-\dfrac{h_a-h_b}{r_b}=6,$

$\dfrac{h_a+h_c}{r}-\dfrac{h_c-h_b}{r_c}-\dfrac{h_b-h_a}{r_a}=6$ y

$\dfrac{h_a+h_b}{r}-\dfrac{h_b-h_c}{r_b}-\dfrac{h_c-h_a}{r_a}=6.$

53. $\dfrac{h_a+h_b+h_c}{r}-(\dfrac{h_a}{r_a}+\dfrac{h_b}{r_b}+\dfrac{h_c}{r_c})=6,$

$\dfrac{h_b+h_c-h_a}{r_a}+(\dfrac{h_a}{r}+\dfrac{h_b}{r_c}+\dfrac{h_c}{r_b})=6,$

$\dfrac{h_a+h_c-h_b}{r_b}+(\dfrac{h_b}{r}+\dfrac{h_a}{r_c}+\dfrac{h_c}{r_a})=6$ y

$\dfrac{h_a+h_b-h_c}{r_c}+(\dfrac{h_c}{r}+\dfrac{h_a}{r_b}+\dfrac{h_b}{r_a})=6,$

54. $ra=s_a(r_a-r),$
$rb=s_b(r_b-r)$ y
$rc=s_c(r_c-r).$

55. $r_a a=s(r_a-r),$
$r_a b=s_c(r_a+r_c)$ y
$r_a c=s_b(r_a+r_b).$

56. $r_b b=s(r_b-r),$
$r_b a=s_c(r_b+r_c)$ y
$r_b c=s_a(r_b+r_a).$

57. $r_c c=s(r_c-r),$
$r_c a=s_c(r_c+r_b)$ y
$r_c b=s_a(r_c+r_a).$

58. $sa=r_a(r_b+r_c),$
$sb=r_b(r_a+r_c)$ y
$sc=r_c(r_a+r_b),$

59. $s_a a=r(r_b+r_c),$
$s_a b=r_c(r_b-r)$ y
$s_a c=r_b(r_c-r).$

60. $s_b b=r(r_a+r_c),$
$s_b a=r_c(r_a-r)$ y
$s_b c=r_a(r_c-r).$

61. $s_c c=r(r_a+r_b),$
$s_c a=r_b(r_a-r)$ y
$s_c b=r_a(r_b-r).$

62. $a(br_c-cr_b)=r(r_c^2-r_b^2),$
$b(cr_a-ar_c)=r(r_a^2-r_c^2)$ y
$c(ar_b-br_a)=r(r_b^2-r_a^2).$

63. $a(br_b-cr_c)=r_a(r_b^2-r_c^2)$
$b(ar_b-cr)=r_a(r_b^2-r^2)$ y
$c(ar_c-br)=r_a(r_c^2-r^2).$

64. $a(br_a-cr)=r_b(r_a^2-r^2),$
$b(cr_c-ar_a)=r_b(r_c^2-r_b^2)$ y
$c(br_c-ar)=r_b(r_c^2-r^2).$

65. $a(cr_a-br)=r_c(r_a^2-r^2),$
$b(cr_b-ar)=r_c(r_b^2-r^2)$ y
$c(ar_a-br_b)=r_c(r_a^2-r_b^2).$

66. $\dfrac{a}{r_a}+\dfrac{b}{r_b}+\dfrac{c}{r_c}=\dfrac{2(r_a+r_b+r_c)}{s},$

$\dfrac{a}{r}+\dfrac{b}{r_c}+\dfrac{c}{r_b}=\dfrac{2(r_b+r_c-r)}{s_a},$

$\dfrac{b}{r}+\dfrac{a}{r_c}+\dfrac{c}{r_a}=\dfrac{2(r_a+r_c-r)}{s_b}$ y

$\dfrac{c}{r}+\dfrac{a}{r_b}+\dfrac{b}{r_a}=\dfrac{2(r_a+r_b-r)}{s_c}.$

67. $(\dfrac{a}{r_a}+\dfrac{b}{r_b}+\dfrac{c}{r_c})\dfrac{a+b+c}{r_a+r_b+r_c}=4,$

$(\dfrac{a}{r}+\dfrac{b}{r_c}+\dfrac{c}{r_b})\dfrac{b+c-a}{r_b+r_c-r}=4,$

$(\dfrac{b}{r}+\dfrac{a}{r_c}+\dfrac{c}{r_a})\dfrac{a+c-b}{r_a+r_c-r}=4$ y

$(\dfrac{c}{r}+\dfrac{a}{r_b}+\dfrac{b}{r_a})\dfrac{a+b-c}{r_a+r_b-r}=4.$

68. $r_a - r = \dfrac{arr_a}{are(\Delta ABC)} = \dfrac{are(\Delta ABC)a}{r_b r_c}$,

$r_b - r = \dfrac{brr_b}{are(\Delta ABC)} = \dfrac{are(\Delta ABC)b}{r_a r_c}$ y

$r_c - r = \dfrac{crr_c}{are(\Delta ABC)} = \dfrac{are(\Delta ABC)c}{r_a r_b}$.

69. $r_b + r_c = \dfrac{ar_b r_c}{are(\Delta ABC)} = \dfrac{are(\Delta ABC)a}{rr_a}$,

$r_a + r_c = \dfrac{br_a r_c}{are(\Delta ABC)} = \dfrac{are(\Delta ABC)b}{rr_b}$ y

$r_a + r_b = \dfrac{cr_a r_b}{are(\Delta ABC)} = \dfrac{are(\Delta ABC)c}{rr_c}$.

70. $\dfrac{s^2 - r_b r_c}{s} = a$, $\dfrac{s^2 - r_a r_c}{s} = b$ y $\dfrac{s^2 - r_a r_b}{s} = c$.

71. $r_a(r_b + r) = s_c(c+a)$, $r_a(r_c + r) = s_b(a+b)$,

$r_b(r_c + r) = s_a(a+b)$, $r_b(r_a + r) = s_c(b+c)$ y

$r_c(r_a + r) = s_b(b+c)$, $r_c(r_b + r) = s_a(a+c)$.

72. $r(r_b - r_c) = s_a(b-c)$, $r_a(r_b - r_c) = s(b-c)$,

$r(r_c - r_a) = s_b(c-a)$, $r_b(r_c - r_a) = s(c-a)$ y

$r(r_a - r_b) = s_c(a-b)$, $r_c(r_a - r_b) = s(a-b)$.

73. $ar_c - br = \dfrac{rr_c}{r_b}(a+b)$, $br_a - cr = \dfrac{rr_a}{r_c}(b+c)$, $ar_b - cr = \dfrac{rr_b}{r_c}(a+c)$ y

$br_c - ar = \dfrac{rr_c}{r_a}(a+b)$, $cr_a - br = \dfrac{rr_a}{r_b}(b+c)$, $cr_b - ar = \dfrac{rr_b}{r_a}(a+c)$.

74. $ar_b - br_a = \dfrac{r_a r_b}{r_c}(b-a)$, $br_c - cr_b = \dfrac{r_b r_c}{r_a}(c-b)$, $cr_b - br_c = \dfrac{r_b r_c}{r_a}(b-c)$ y

$ar_c - cr_a = \dfrac{r_a r_c}{r_b}(c-a)$, $br_a - ar_b = \dfrac{r_a r_b}{r_c}(a-b)$, $cr_a - ar_c = \dfrac{r_a r_c}{r_b}(a-c)$.

75. $\dfrac{r + r_a}{r_a - r} = \dfrac{b+c}{a}$,

$\dfrac{r + r_b}{r_b - r} = \dfrac{a+c}{b}$ y

$\dfrac{r + r_c}{r_c - r} = \dfrac{a+b}{c}$.

76. $\dfrac{r_b - r_c}{r_b + r_c} = \dfrac{b-c}{a}$,

$\dfrac{r_c - r_a}{r_a + r_c} = \dfrac{c-a}{b}$ y

$\dfrac{r_a - r_b}{r_a + r_b} = \dfrac{a-b}{c}$.

77. $(r + r_a)(r_b - r_c) = b^2 - a^2$, $(r + r_b)(r_c - r_a) = c^2 - a^2$ y $(r + r_c)(r_a - r_b) = a^2 - b^2$.

78. $\dfrac{s^2}{r_a^2} = \dfrac{r_b + r_c}{r_a - r} = \dfrac{s_a^2}{r^2}$,

$\dfrac{s^2}{r_b^2} = \dfrac{r_a + r_c}{r_b - r} = \dfrac{s_b^2}{r^2}$ y

$\dfrac{s^2}{r_a^2} = \dfrac{r_b + r_c}{r_a - r} = \dfrac{s_a^2}{r^2}$.

79. $\dfrac{s_a^2}{r_b^2} = \dfrac{r_c - r}{r_a + r_b}$, $\dfrac{s_a^2}{r_c^2} = \dfrac{r_b - r}{r_a + r_c}$,

$\dfrac{s_b^2}{r_c^2} = \dfrac{r_a - r}{r_b + r_c}$, $\dfrac{s_b^2}{r_a^2} = \dfrac{r_c - r}{r_a + r_b}$ y

$\dfrac{s_c^2}{r_a^2} = \dfrac{r_b - r}{r_a + r_c}$, $\dfrac{s_c^2}{r_b^2} = \dfrac{r_a - r}{r_b + r_c}$.

80. $a^2 = (r_a - r)(r_b + r_c)$,

$b^2 = (r_b - r)(r_a + r_c)$ y

$c^2 = (r_c - r)(r_a + r_b)$.

81. $a = \dfrac{r_a(r_b + r_c)}{\sqrt{r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c}}$,

$b = \dfrac{r_b(r_a + r_c)}{\sqrt{r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c}}$ y

$c = \dfrac{r_c(r_b + r_a)}{\sqrt{r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c}}$.

82. $\dfrac{r_a(r_b + r_c)}{a} = \dfrac{r_b(r_a + r_c)}{b} = \dfrac{r_c(r_a + r_c)}{c}$,

$\dfrac{r(r_b + r_c)}{a} = \dfrac{r_c(r_b - r)}{b} = \dfrac{r_b(r_c - r)}{c}$,

$\dfrac{r_c(r_a - r)}{a} = \dfrac{r(r_a + r_b)}{b} = \dfrac{r_a(r_c - r)}{c}$ y

$\dfrac{r_b(r_a - r)}{a} = \dfrac{r_a(r_b - r)}{b} = \dfrac{r(r_a + r_b)}{c}$.

83. $\dfrac{r_b r_c(r_a + r_c)(r_a + r_b)}{r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c} = bc$,

$\dfrac{r_a r_c(r_a + r_b)(r_b + r_c)}{r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c} = ac$ y

$\dfrac{r_a r_b(r_b + r_c)(r_a + r_c)}{r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c} = ab$.

84. $\dfrac{(r_a + r_b)(r_a + r_c)(r_b + r_c)}{abc} = \dfrac{s}{r}$ y $\dfrac{(r_a - r)(r_b - r)(r_c - r)}{abc} = \dfrac{r}{s}$.

85. $\dfrac{ss_a}{s_b s_c} = \dfrac{a^2}{(r_a - r)^2} = \dfrac{(r_b + r_c)^2}{a^2}$

$\dfrac{ss_b}{s_a s_c} = \dfrac{b^2}{(r_b - r)^2} = \dfrac{(r_a + r_c)^2}{b^2}$ y

$\dfrac{ss_c}{s_a s_b} = \dfrac{c^2}{(r_c - r)^2} = \dfrac{(r_a + r_b)^2}{c^2}$.

86. $r_b r_c - r r_a = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$,

$r_a r_c - r r_b = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2}$ y

$r_a r_b - r r_c = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$.

87. $\dfrac{r_b r_c - r r_a}{r_b r_c + r r_a} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$,

$\dfrac{r_a r_c - r r_b}{r_a r_c + r r_b} = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ y

$\dfrac{r_a r_b - r r_c}{r_a r_b + r r_c} = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

88. $\dfrac{r_a - r}{r r_a} are(\Delta ABC) = (r_a - r)\sqrt{\dfrac{r_b r_c}{r r_a}} = \dfrac{r_b + r_c}{r_b r_c} are(\Delta ABC) = (r_b + r_c)\sqrt{\dfrac{r r_a}{r_b r_c}} = a$,

$\dfrac{r_b - r}{r r_b} are(\Delta ABC) = (r_b - r)\sqrt{\dfrac{r_a r_c}{r r_b}} = \dfrac{r_a + r_c}{r_a r_c} are(\Delta ABC) = (r_a + r_c)\sqrt{\dfrac{r r_b}{r_a r_c}} = b$ y

$\dfrac{r_c - r}{r r_c} are(\Delta ABC) = (r_c - r)\sqrt{\dfrac{r_a r_b}{r r_c}} = \dfrac{r_a + r_b}{r_a r_b} are(\Delta ABC) = (r_a + r_b)\sqrt{\dfrac{r r_c}{r_a r_b}} = c$.

89. $2r\,r_a = b\,s_b + c\,s_c - a\,s_a$,
$2r\,r_b = a\,s_a + c\,s_c - b\,s_b$ y
$2r\,r_c = a\,s_a + b\,s_b - c\,s_c$.

90. $2\,r_b\,r_c = c\,s_a + bs - a\,s_c$,
$2\,r_c\,r_a = a\,s_b + cs - b\,s_a$ y
$2\,r_a\,r_b = b\,s_c + as - c\,s_b$.

91. $\dfrac{r_a + r}{rr_a} are(\Delta ABC) = (r_a + r)\sqrt{\dfrac{r_b r_c}{rr_a}} = b + c$,
$\dfrac{r_b + r}{rr_b} are(\Delta ABC) = (r_b + r)\sqrt{\dfrac{r_a r_c}{rr_b}} = a + c$ y
$\dfrac{r_c + r}{rr_c} are(\Delta ABC) = (r_c + r)\sqrt{\dfrac{r_a r_b}{rr_c}} = a + b$.

92. $\dfrac{r_b - r_c}{r_b r_c} are(\Delta ABC) = (r_b - r_c)\sqrt{\dfrac{rr_a}{r_b r_c}} = b - c$,
$\dfrac{r_c - r_a}{r_a r_c} are(\Delta ABC) = (r_c - r_a)\sqrt{\dfrac{rr_b}{r_a r_c}} = c - a$ y
$\dfrac{r_a - r_b}{r_a r_b} are(\Delta ABC) = (r_a - r_b)\sqrt{\dfrac{rr_c}{r_a r_b}} = a - b$.

93. $\dfrac{s}{r}(r_a + r)(r_b + r)(r_c + r) = (a + b)(a + c)(b + c)$,
$\dfrac{s_a}{r_a}(r_a + r)(r_b - r_a)(r_c - r_a) = (b + c)(a - b)(a - c)$,
$\dfrac{s_b}{r_b}(r_b + r)(r_a - r_b)(r_c - r_b) = (a + c)(b - a)(b - c)$ y
$\dfrac{s_c}{r_c}(r_c + r)(r_a - r_c)(r_b - r_c) = (a + b)(c - a)(c - b)$.

94. $\dfrac{r}{s}(r_b - r_c)(r_c - r_a)(r_a - r_b) = (a - b)(c - a)(b - c)$,
$\dfrac{r_a}{s_a}(r_b - r_c)(r_b + r)(r_c + r) = (b - c)(a + c)(a + b)$,
$\dfrac{r_b}{s_b}(r_a - r_c)(r_a + r)(r_c + r) = (a - c)(b + c)(a + b)$ y
$\dfrac{r_c}{s_c}(r_b - r_a)(r_a + r)(r_b + r) = (b - a)(a + c)(b + c)$.

95. $are(\Delta ABC)^2\left(\dfrac{1}{r^2} + \dfrac{1}{r_a^2}\right) = (r_b + r_c)(r + r_a) = a(b + c)$,
$are(\Delta ABC)^2\left(\dfrac{1}{r^2} + \dfrac{1}{r_b^2}\right) = (r_a + r_c)(r + r_b) = b(a + c)$ y
$are(\Delta ABC)^2\left(\dfrac{1}{r^2} + \dfrac{1}{r_c^2}\right) = (r_a + r_b)(r + r_c) = c(a + b)$.

96. $are(\Delta ABC)^2\left(\dfrac{1}{r_c^2} - \dfrac{1}{r_b^2}\right) = (r_b - r_c)(r_a - r) = a(b - c)$,
$are(\Delta ABC)^2\left(\dfrac{1}{r_a^2} - \dfrac{1}{r_c^2}\right) = (r_c - r_a)(r_b - r) = b(c - a)$ y
$are(\Delta ABC)^2\left(\dfrac{1}{r_b^2} - \dfrac{1}{r_a^2}\right) = (r_a - r_b)(r_c - r) = c(a - b)$.

97. $\dfrac{r}{s} = \dfrac{(r_a + r)(r_b + r)(r_c + r)}{(a+b)(a+c)(a+b)}$ y
$\dfrac{s}{r} = \dfrac{(r_b - r_c)(r_c - r_a)(r_a - r_b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$.

98. $are(\Delta ABC) = \dfrac{r_b r_c (r_a + r)}{b+a} = \dfrac{r r_a (b+c)}{r_a + r} = \dfrac{r r_a (r_b - r_c)}{b-a} = \dfrac{r_b r_c (b-c)}{r_b - r_c}$,

$are(\Delta ABC) = \dfrac{r_a r_c (r_b + r)}{a+c} = \dfrac{r r_b (a+c)}{r_b + r} = \dfrac{r r_b (r_c - r_a)}{c-a} = \dfrac{r_a r_c (c-a)}{r_c - r_a}$ y

$are(\Delta ABC) = \dfrac{r_a r_b (r_c + r)}{a+b} = \dfrac{r r_c (a+b)}{r_c + r} = \dfrac{r r_c (r_a - r_b)}{a-b} = \dfrac{r_a r_b (a-b)}{r_a - r_b}$.

99. $abc = \dfrac{(r_a - r)(r_b - r)(r_c - r) are(\Delta ABC)}{r^2}$ y $abc = \dfrac{(r_b + r_c)(r_a + r_c)(r_a + r_b) r^2}{are(\Delta ABC)}$.

100. $(r_a + r)(r_b + r)(r_c + r)(r_b - r_c)(r_c - r_a)(r_a - r_b) = (b^2 - c^2)(c^2 - a^2)(a^2 - b^2)$.

101. $(r_a - r)(r_b - r)(r_c - r)(r_b + r_c)(r_c + r_a)(r_a + r_b) = a^2 b^2 c^2$.

102. $abc = (r_a + r_b + r_c - r) are(\Delta ABC)$.

103. $abc = are(\Delta ABC)^3 (\frac{1}{r} - \frac{1}{r_a})(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_b})(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_c})$.

104. $abc = are(\Delta ABC)^3 (\dfrac{1}{r r_b r_c} + \dfrac{1}{r r_a r_c} + \dfrac{1}{r r_a r_b} - \dfrac{1}{r_a r_b r_c})$.

105. $\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r_a^3} - \dfrac{1}{r_b^3} - \dfrac{1}{r_c^3} = \dfrac{24}{h_a h_b h_c}$.

106. $\dfrac{r_b r_c}{r_a^3} + \dfrac{r_a r_c}{r_b^3} + \dfrac{r_a r_b}{r_c^3} = s^2 r (\dfrac{1}{r_a^4} + \dfrac{1}{r_b^4} + \dfrac{1}{r_c^4})$,

$\dfrac{r_b r_c}{r^3} + \dfrac{r r_b}{r_c^3} + \dfrac{r r_c}{r_b^3} = s_a^2 r_a (\dfrac{1}{r^4} + \dfrac{1}{r_b^4} + \dfrac{1}{r_c^4})$,

$\dfrac{r_a r_c}{r^3} + \dfrac{r r_a}{r_c^3} + \dfrac{r r_c}{r_a^3} = s_b^2 r_b (\dfrac{1}{r^4} + \dfrac{1}{r_a^4} + \dfrac{1}{r_c^4})$ y

$\dfrac{r_a r_b}{r^3} + \dfrac{r r_a}{r_b^3} + \dfrac{r r_b}{r_a^3} = s_c^2 r_c (\dfrac{1}{r^4} + \dfrac{1}{r_a^4} + \dfrac{1}{r_b^4})$.

Las siguientes fórmulas que a continuación enunciamos fueron tomadas del artículo [a-106]:

107. $a = \dfrac{r_a (r_b + r_c)}{s} = \dfrac{r(r_b + r_c)}{s_a} = \dfrac{s^2 (r + r_c) + r_c^2 (r_a - r_b)}{2 s r_c} = \dfrac{s_a^2 (r_a - r_b) + r_b^2 (r + r_c)}{2 s_a r_b}$,

$b = \dfrac{r_b (r_a + r_c)}{s} = \dfrac{r(r_a + r_c)}{s_b} = \dfrac{s^2 (r + r_c) + r_c^2 (r_b - r_a)}{2 s r_c} = \dfrac{s_b^2 (r_b - r_a) + r_a^2 (r + r_c)}{2 s_b r_a}$ y

$c = \dfrac{r_c (r_a + r_b)}{s} = \dfrac{r(r_a + r_b)}{s_c} = \dfrac{s^2 (r + r_b) + r_b^2 (r_c - r_a)}{2 s r_b} = \dfrac{s_c^2 (r_c - r_a) + r_a^2 (r + r_b)}{2 s_c r_a}$.

108. $b + c = \dfrac{s(r_a + r)}{r_a} = \dfrac{s_a (r_a + r)}{r}$,

$a + c = \dfrac{s(r_b + r)}{r_b} = \dfrac{s_b (r_b + r)}{r}$ y

$a + b = \dfrac{s(r_c + r)}{r_c} = \dfrac{s_c (r_c + r)}{r}$.

109. $b - c = \dfrac{r_a (r_b - r_c)}{s} = \dfrac{r(r_b - r_c)}{s_a}$,

$c - a = \dfrac{r_b (r_c - r_a)}{s} = \dfrac{r(r_c - r_a)}{s_b}$ y

$a - b = \dfrac{r_c (r_a - r_b)}{s} = \dfrac{r(r_a - r_b)}{s_c}$.

110. $\dfrac{(a+b)(a+c)(b+c)}{abc} = \dfrac{h_a + h_b + h_c - r}{r}$.

111. $\dfrac{(a+b)(c-b)(c-a)}{abc} = \dfrac{h_c - h_a - h_b + r_c}{r_c}$,

$\dfrac{(a+c)(b-c)(b-a)}{abc} = \dfrac{h_b - h_a - h_c + r_b}{r_b}$ y

$\dfrac{(b+c)(a-c)(a-b)}{abc} = \dfrac{h_a - h_b - h_c + r_a}{r_a}$.

112. $4r^2(r_a^2 + r_b^2 + r_c^2) + 4(r_a^2 r_b^2 + r_a^2 r_c^2 + r_b^2 r_c^2) =$

$4are(\Delta ABC)^4 \left(\dfrac{1}{r_a^2 r_b^2} + \dfrac{1}{r_a^2 r_c^2} + \dfrac{1}{r_b^2 r_c^2} + \dfrac{1}{r^2 r_a^2} + \dfrac{1}{r^2 r_b^2} + \dfrac{1}{r^2 r_c^2}\right) = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 8are(\Delta ABC)^2$.

113. $(a^2 + b^2 + c^2)^2 = are(\Delta ABC)^4 \left(\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{r_a^2} + \dfrac{1}{r_b^2} + \dfrac{1}{r_c^2}\right)^2$.

114. $2are(\Delta ABC)^4 \left(\dfrac{1}{r^4} + \dfrac{1}{r_a^4} + \dfrac{1}{r_b^4} + \dfrac{1}{r_c^4}\right) = (a^2 + b^2 + c^2)^2 + 8are(\Delta ABC)^2$.

115. $\dfrac{r}{r_a} = \dfrac{h_a - 2r}{h_a} = \dfrac{h_a}{h_a + 2r_a}$,

$\dfrac{r}{r_b} = \dfrac{h_b - 2r}{h_b} = \dfrac{h_b}{h_b + 2r_b}$ y

$\dfrac{r}{r_c} = \dfrac{h_c - 2r}{h_c} = \dfrac{h_c}{h_c + 2r_c}$.

116. $\dfrac{r^2}{r_a^2} = \dfrac{h_a - 2r}{h_a + 2r_a}$,

$\dfrac{r^2}{r_b^2} = \dfrac{h_b - 2r}{h_b + 2r_b}$ y

$\dfrac{r^2}{r_c^2} = \dfrac{h_c - 2r}{h_c + 2r_c}$.

117. $\dfrac{(h_a - 2r)(h_b - 2r)(h_c - 2r)}{(h_a + 2r_a)(h_b + 2r_b)(h_c + 2r_c)}. = \dfrac{r^4}{s^4}$.

9.667[l-181]. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumplen las siguientes identidades:

a. $r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c = \dfrac{are(\Delta ABC)^2}{r^2}$.

b. $R = \dfrac{1}{4} \dfrac{(r_a + r_b)(r_a + r_c)(r_b + r_c)}{r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c}$.

c. $16R^2 r r_a r_b r_c = a^2 b^2 c^2$.

9.668. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumple la igualdad $R = \dfrac{ab + ac + bc}{2(h_a + h_b + h_c)}$.

9.669[a-119]. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumplen las siguientes identidades:

a. $\dfrac{r_b - r}{b} + \dfrac{r_c - r}{c} = \dfrac{a}{r_a}$,

$\dfrac{r_a - r}{a} + \dfrac{r_c - r}{c} = \dfrac{b}{r_b}$ y

$\dfrac{r_a - r}{a} + \dfrac{r_b - r}{b} = \dfrac{c}{r_c}$.

b. $\dfrac{b-c}{r_a} + \dfrac{c-a}{r_b} + \dfrac{a-b}{r_c} = 0$.

c. $r_b + r_c = a\cot\dfrac{\angle A}{2}$,

$r_a + r_c = b\cot\dfrac{\angle B}{2}$ y

$r_a + r_b = c\cot\dfrac{\angle C}{2}$.

d. $r_a r_b r_c = rs^2$.

e. $(r_a - r)(r_b - r)(r_c - r) = 4Rr^2$.

f. $r\,r_a \cot\frac{\angle A}{2} = are(\Delta ABC)$,
$r\,r_b \cot\frac{\angle B}{2} = are(\Delta ABC)$ y
$r\,r_c \cot\frac{\angle C}{2} = are(\Delta ABC)$.

g. $r_a = r\cot\frac{\angle B}{2}\cot\frac{\angle C}{2}$,
$r_b = r\cot\frac{\angle A}{2}\cot\frac{\angle C}{2}$ y
$r_c = r\cot\frac{\angle A}{2}\cot\frac{\angle B}{2}$.

9.670[a-99]. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumplen las siguientes identidades:

a. $\frac{1}{rr_a} - \frac{1}{r_br_c} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2are(\Delta ABC)^2}$,
$\frac{1}{rr_b} - \frac{1}{r_ar_c} = \frac{a^2+c^2-b^2}{2are(\Delta ABC)^2}$ y
$\frac{1}{rr_c} - \frac{1}{r_ar_b} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2are(\Delta ABC)^2}$.

b. $(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_c})(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_b}) = \frac{c^2-a^2}{are(\Delta ABC)^2}$ y
$(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_c})(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_a}) = \frac{c^2-b^2}{are(\Delta ABC)^2}$.

9.671. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumplen las siguientes identidades:

$$a^2+b^2+c^2 = 8R^2(1+\cos\angle A\cos\angle B\cos\angle C),\quad \operatorname{sen}\angle A+\operatorname{sen}\angle B+\operatorname{sen}\angle C = \frac{a+b+c}{2R} = \frac{are(\Delta ABC)}{rR},$$

$$\operatorname{sen}2\angle A+\operatorname{sen}2\angle B+\operatorname{sen}2\angle C = \frac{1}{R}(a\cos\angle A+b\cos\angle B+c\cos\angle C),$$

$$a\cos\angle A+b\cos\angle B+c\cos\angle C = \frac{2are(\Delta ABC)}{R},\quad \operatorname{sen}2\angle A+\operatorname{sen}2\angle B+\operatorname{sen}2\angle C = \frac{2are(\Delta ABC)}{R^2},$$

$$\frac{\operatorname{sen}\angle A+\operatorname{sen}\angle B+\operatorname{sen}\angle C}{\operatorname{sen}2\angle A+\operatorname{sen}2\angle B+\operatorname{sen}2\angle C} = \frac{R}{2r},\quad \operatorname{sen}\frac{\angle A}{2}\operatorname{sen}\frac{\angle B}{2}\operatorname{sen}\frac{\angle C}{2} = \frac{s_as_bs_c}{abc} = \frac{r}{4R},$$

$$1+4\operatorname{sen}\frac{\angle A}{2}\operatorname{sen}\frac{\angle B}{2}\operatorname{sen}\frac{\angle C}{2} = \cos\angle A+\cos\angle B+\cos\angle C = 1+\frac{r}{R},$$

$$R+r = \frac{1}{2}(a\cot\angle A+b\cot\angle B+c\cot\angle C),$$

$$(\operatorname{sen}\frac{\angle A}{2})^2+(\operatorname{sen}\frac{\angle B}{2})^2+(\operatorname{sen}\frac{\angle C}{2})^2 = \frac{3}{2}-\frac{1}{2}(\cos\angle A+\cos\angle B+\cos\angle C),$$

$$\operatorname{sen}\angle A+\operatorname{sen}\angle B+\operatorname{sen}\angle C = 4\cos\frac{\angle A}{2}\cos\frac{\angle B}{2}\cos\frac{\angle C}{2},$$

$$bc+ac+ab = 2are(\Delta ABC)(\frac{1}{\operatorname{sen}\angle A}+\frac{1}{\operatorname{sen}\angle B}+\frac{1}{\operatorname{sen}\angle C}) \text{ y } s = r(\cot\frac{\angle A}{2}+\cot\frac{\angle B}{2}+\cot\frac{\angle C}{2}).$$

9.672. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumplen las siguientes identidades:

a. $h_b\,h_c + h_a\,h_c + h_a\,h_b = \frac{2are(\Delta ABC)^2}{rR}$.

b. $\frac{h_a-2r}{h_a} + \frac{h_b-2r}{h_b} + \frac{h_c-2r}{h_c} = 1$.

c. $a\operatorname{sen}\angle A + b\operatorname{sen}\angle B + c\operatorname{sen}\angle C = \frac{h_bh_c}{h_a} + \frac{h_ah_c}{h_b} + \frac{h_ah_b}{h_c} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2R}$.

d. $\frac{r_a}{h_a} + \frac{r_b}{h_b} + \frac{r_c}{h_c} = \frac{1}{2}(\frac{r_a}{r_b} + \frac{r_b}{r_a} + \frac{r_b}{r_c} + \frac{r_c}{r_b} + \frac{r_c}{r_a} + \frac{r_a}{r_c})$.

e **[H. Demir, Problem E. 1778, Amer. Math. Monthly 73 (1966), 667].** $\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_a^3} - \frac{1}{r_b^3} - \frac{1}{r_b^3} = \frac{12R}{rr_ar_br_c}$.

9.673[l-209]. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumplen las siguientes identidades:

a. $\dfrac{rr_a}{r_b r_c} = (\tan\dfrac{\angle A}{2})^2$, $\dfrac{rr_b}{r_a r_c} = (\tan\dfrac{\angle B}{2})^2$ y $\dfrac{rr_c}{r_a r_b} = (\tan\dfrac{\angle C}{2})^2$.

b. $r_a\ r_b\ r_c = r^3(\cot\dfrac{\angle A}{2})^2(\cot\dfrac{\angle B}{2})^2(\cot\dfrac{\angle C}{2})^2 = abc\cos\dfrac{\angle A}{2}\cos\dfrac{\angle B}{2}\cos\dfrac{\angle C}{2}$.

c. $a(r\,r_a + r_b\,r_c) = b(r\,r_b + r_a\,r_c) = c(r\,r_c + r_a\,r_b)$. d. $(r_b + r_c)\tan\dfrac{\angle A}{2} = (r_a - r)\cot\dfrac{\angle A}{2} = a$,

$(r_a + r_c)\tan\dfrac{\angle B}{2} = (r_b - r)\cot\dfrac{\angle B}{2} = b$ y

$(r_a + r_b)\tan\dfrac{\angle C}{2} = (r_c - r)\cot\dfrac{\angle C}{2} = c$.

e. $4R\mathrm{sen}\angle A\mathrm{sen}\angle B\mathrm{sen}\angle C = a\cos\angle A + b\cos\angle B + c\cos\angle C$. f. $r^2 + r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 = 16R^2 - a^2 - b^2 - c^2$.

g. $\dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{ac} + \dfrac{1}{bc} = \dfrac{1}{2Rr}$. h. $\dfrac{r_a}{bc} + \dfrac{r_b}{ac} + \dfrac{r_c}{ab} = \dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{2R}$.

i. $are(\Delta ABC) = 4Rr\cos\dfrac{\angle A}{2}\cos\dfrac{\angle B}{2}\cos\dfrac{\angle C}{2}$. j[a-Will-1]. $are(\Delta ABC) = 4sR\mathrm{sen}\dfrac{\angle A}{2}\mathrm{sen}\dfrac{\angle B}{2}\mathrm{sen}\dfrac{\angle C}{2}$.

9.674. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumple la identidad $r = \sqrt{r_a r_b} + \sqrt{r_b r_c} + \sqrt{r_c r_a}$.

9.675[a-63]. Sea ΔABC un triángulo rectángulo con hipotenusa c. Probar las siguientes identidades:

a. $r_c = r_a + r_b + r$. b. $are(\Delta ABC) = r\,r_c = r_a\,r_b$.

9.676[a-119]. Probar que un triángulo ΔABC es rectángulo en $\angle C$ si y solo si $r_c = r_a + r_b + r$.

9.677[l-22]. Si ΔABC es un triángulo rectángulo en $\angle C$, probar que $2r_a\,r_b = ab$, ¿es cierto el recíproco de este enunciado?

9.678[a-64]. Sea ΔABC un triángulo rectángulo con hipotenusa c. Probar las siguientes identidades:

a. $r + r_a + r_b + r_c = a + b + c$. b. $r^2 + r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

c. $r + r_a = a$. d. $r_a + r_b = c$. e. $r_a + b = r_c$.

$r + r_b = b$. $r_a + r_c = a + c$. $a + r_b = r_c$.

$r + r_c = a + b$. $r_b + r_c = b + c$. $r + c = r_c$.

9.679[a-99]. Probar que en todo triángulo rectángulo ΔABC con hipotenusa c se cumplen las siguientes identidades:

a. $r + r_a - r_b + r_c = 2a$,

$r - r_a + r_b + r_c = 2b$ y

$-r + r_a + r_b + r_c = 2c$,

b. $\dfrac{1}{rr_c} + \dfrac{1}{r_a r_b} = \dfrac{ab}{are(\Delta ABC)^2}$,

$\dfrac{1}{rr_a} + \dfrac{1}{r_b r_c} = \dfrac{bc}{are(\Delta ABC)^2}$ y

$\dfrac{1}{rr_b} + \dfrac{1}{r_a r_c} = \dfrac{ac}{are(\Delta ABC)^2}$

c. $\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c} = \dfrac{2a}{are(\Delta ABC)}$

$\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{r_a} - \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c} = \dfrac{2b}{are(\Delta ABC)}$ y

$\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} - \dfrac{1}{r_c} = \dfrac{2c}{are(\Delta ABC)}$.

d. $\dfrac{1}{rr_b} - \dfrac{1}{r_a r_c} = \dfrac{a^2}{are(\Delta ABC)^2}$ y

$\dfrac{1}{rr_a} - \dfrac{1}{r_b r_c} = \dfrac{b^2}{are(\Delta ABC)^2}$.

e. $r_a\,r_c - r\,r_b = a^2$ y $r_b\,r_c - r\,r_a = b^2$.

f. $(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_c})(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_b})=\frac{b^2}{are(\Delta ABC)^2}$ y $(\frac{1}{r_b}-\frac{1}{r_c})(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_a})=\frac{a^2}{are(\Delta ABC)^2}$.

g. $(r_c-r_b)(r+r_a)=a^2$,

$(r_c-r_a)(r+r_b)=b^2$ y

$(r_a-r_b)(r+r_c)=b^2-a^2$.

h. $(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b})(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_c})=\frac{b^2-a^2}{are(\Delta ABC)^2}$,

$(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_c})(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_b})=\frac{b(a+c)}{are(\Delta ABC)^2}$ y

$(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_c})(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b})=\frac{c(a+b)}{are(\Delta ABC)^2}$.

i. $\frac{1}{rr_c}-\frac{1}{r_ar_b}=0$.

9.680. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumple la relación

$$2(b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2)=16are(\Delta ABC)^2+a^4+b^4+c^4.$$

9.681. Sea $\Delta(a,b,c)$ un triángulo isósceles tal que $b=c$. Probar las siguientes identidades:

a. $R=\frac{b^2}{\sqrt{4b^2-a^2}}$. b. $r=\sqrt{\frac{2b-a}{2b+a}}$. c. $r_a=\sqrt{\frac{2b+a}{2b-a}}$. d. $r_b=r_c=\frac{2\sqrt{4b^2-a^2}}{a}$.

e. $are(\Delta ABC)=\frac{ab^2}{4R}=r_b\sqrt{rr_a}$.

9.682. Probar que en todo triángulo ΔABC, sus lados a, b y c son proporcionales a $r_a(r_b+r_c)$, $r_b(r_a+r_c)$ y $r_c(r_a+r_b)$.

9.683. Sea ΔABC un triángulo. Calcular $are(\Delta ABC)$, a, b, c, r, r_a, r_b, r_c, h_a, h_b y h_c, conociendo:

a. r_a, r_b y r_c. b. r, r_b y r_c. c. h_a, h_b y h_c. d. r, h_b y h_c. e. r_a, h_b y h_c. f. r, r_a y h_b.

9.684. En todo triángulo ΔABC, probar que se cumplen las siguientes identidades:

$$d(I_a,\overleftrightarrow{BC})=|4R\operatorname{sen}\frac{\angle A}{2}\cos\frac{\angle B}{2}\cos\frac{\angle C}{2}|,$$

$$d(I_b,\overleftrightarrow{AC})=|4R\cos\frac{\angle A}{2}\operatorname{sen}\frac{\angle B}{2}\cos\frac{\angle C}{2}| \text{ y}$$

$$d(I_c,\overleftrightarrow{AB})=|4R\cos\frac{\angle A}{2}\cos\frac{\angle B}{2}\operatorname{sen}\frac{\angle C}{2}|.$$

9.685[a-29]. En todo triángulo ΔABC, probar que se cumplen las siguientes identidades:

$$4\cos\frac{\angle A}{2}\operatorname{sen}\frac{\angle B}{2}\operatorname{sen}\frac{\angle C}{2}=\operatorname{sen}\angle C-\operatorname{sen}\angle A+\operatorname{sen}\angle B,$$

$$4\operatorname{sen}\frac{\angle A}{2}\cos\frac{\angle B}{2}\operatorname{sen}\frac{\angle C}{2}=\operatorname{sen}\angle A-\operatorname{sen}\angle B+\operatorname{sen}\angle C \text{ y}$$

$$4\operatorname{sen}\frac{\angle A}{2}\operatorname{sen}\frac{\angle B}{2}\cos\frac{\angle C}{2}=\operatorname{sen}\angle A+\operatorname{sen}\angle B-\operatorname{sen}\angle C.$$

9.686. En todo triángulo ΔABC, probar que se cumplen las siguientes identidades:

$$\frac{bb_a}{2}\operatorname{sen}\frac{\angle A}{2}+\frac{cb_a}{2}\operatorname{sen}\frac{\angle A}{2}=\frac{bc}{2}\operatorname{sen}\angle A,$$

$$\frac{ab_b}{2}\operatorname{sen}\frac{\angle B}{2}+\frac{cb_b}{2}\operatorname{sen}\frac{\angle B}{2}=\frac{ac}{2}\operatorname{sen}\angle B \text{ y}$$

$$\frac{ab_c}{2}\operatorname{sen}\frac{\angle C}{2}+\frac{bb_c}{2}\operatorname{sen}\frac{\angle C}{2}=\frac{ab}{2}\operatorname{sen}\angle C.$$

9.687. Determinar las longitudes de los lados de un triángulo ΔABC, sabiendo que $r=3$, $r_b=8$ y $r_c=14$.

9.688. Si en un triángulo ΔABC se cumple la identidad $r_b = r_c$, probar que el triángulo tiene que ser isósceles.

9.689. Sea ΔABC un triángulo cualquiera.

a. Probar que las siguientes ternas de círculos son tangentes entre sí:

i. $C(A,|AP_c|)$, $C(B,|BP_a|)$ y $C(C,|CP_b|)$. ii. $C(A,|AP_c^a|)$, $C(B,|BP_a^a|)$ y $C(C,|CP_b^a|)$.

iii. $C(A,|AP_c^b|)$, $C(B,|BP_a^b|)$ y $C(C,|CP_a^b|)$. iv. $C(A,|AP_c^c|)$, $C(B,|BP_a^c|)$ y $C(C,|CP_b^c|)$.

b. Probar las siguientes afirmaciones:

i. $C(I,r)$ es ortogonal a cada uno de los círculos $C(A,|AP_c|)$, $C(B,|BP_a|)$ y $C(C,|CP_b|)$.

ii. $C(I_a, r_a)$ es ortogonal a cada uno de los círculos $C(A,|AP_c^a|)$, $C(B,|BP_a^a|)$ y $C(C,|CP_b^a|)$.

iii. $C(I_b, r_b)$ es ortogonal a cada uno de los círculos $C(A,|AP_c^b|)$, $C(B,|BP_a^b|)$ y $C(C,|CP_a^b|)$.

iv. $C(I_c, r_c)$ es ortogonal a cada uno de los círculos $C(A,|AP_c^c|)$, $C(B,|BP_a^c|)$ y $C(C,|CP_b^c|)$.

9.690. Sean ΔABC un triángulo. Si $BP_c \cong CP_b$, probar que el triángulo es isósceles.

9.691. Si dos triángulos tienen el mismo circunradio, el mismo inradio y los mismos exradios correspondientes, ¿son los triángulos congruentes?

9.692[l-320]. Sean ΔABC un triángulo y $D \in BC$. Si $E \in AB$ satisface que $BD \cong BE$, probar que $ID \cong IE$.

9.693[l-320]. Sean ΔABC un triángulo. El círculo que pasa por los puntos B, I y C corta a AC y AB en los puntos D y E, respectivamente. Probar que DE es tangente al incírculo del triángulo original.

9.694[a-50]. Sea ΔABC un triángulo. Probar que si R_1 y R_2 son los circunradios de los triángulos ΔABH_a y ΔAH_aC, respectivamente, entonces $s = R\text{sen}\angle A + R_1 + R_2$.

9.695[a-50]. Sea $\Delta(a,b,c)$ un triángulo rectángulo con hipotenusa c.

a. Si r_1 y r_2 son los inradios de los triángulos ΔBCH_c y ΔCAH_c, respectivamente, probar que

$$h_c = r + r_1 + r_2 .$$

b. Si R_1 y R_2 son los circunradios de los triángulos ΔBCH_c y ΔCAH_c, respectivamente, probar que

$$s = R + R_1 + R_2 .$$

c. Probar que el área del incírculo de $\Delta(a,b,c)$ es igual a la suma de las áreas de los incírculos de los triángulos ΔBCH_c y ΔCAH_c.

d. Probar que el área del circuncírculo de $\Delta(a,b,c)$ es igual a la suma de las áreas de los circuncírculos de los triángulos ΔBCH_c y ΔCAH_c.

9.696[l-22]. Sea $\Delta(a,b,c)$ un triángulo rectángulo en $\angle C$. Si r_1 y r_2 son los inradios de los triángulos ΔBCH_c y ΔCAH_c, respectivamente, probar que $r^2 = r_1^2 + r_2^2$

9.697[a-69]. Sea ΔABC un triángulo. Supongamos que en el exterior de ΔABC hay dos círculos congruentes y tangentes entre ellos de tal forma que son tangentes a un mismo lado del triángulo y cada uno es tangente a la recta que contiene a otro lado del triángulo. Probar las siguientes afirmaciones:

a. Si ambos círculos son tangentes al lado a del triángulo, entonces sus radios son iguales a $\frac{2}{a} + \frac{1}{r_a}$.

b. Si ambos círculos son tangentes al lado b del triángulo, entonces sus radios son iguales a $\frac{2}{b} + \frac{1}{r_b}$.

c. Si ambos círculos son tangentes al lado c del triángulo, entonces sus radios son iguales a $\frac{2}{c} + \frac{1}{r_c}$.

9.698[l-22]. Las medianas de un triángulo cualquiera ΔABC lo dividen en seis triángulos cuyos circunradios son R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 y R_6 y cuyos inradios son r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 y r_6. Probar las siguientes identidades:

a. $R_1 R_3 R_5 = R_2 R_4 R_6$. b. $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_5} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_6}$.

9.699. Sean ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$ tal que $AB \cong AC$ y $C(O,R)$ su circuncírculo. Si $C(O',p)$ es un círculo tangente a AB, AC y $C(O,R)$, probar que $p^2 + 4pR = 4R^2$.

9.700. Sea ΔABC un triángulo. Tracemos una recta paralela a BC que pase por I y que corte a AB en el punto D y a AC en el punto E. Probar que los triángulos ΔDBI y ΔICE son isósceles.

9.701(KöMal, Problem Gy. 3155, October 1997). Probar que una recta que pasa por el incentro de un triángulo corta al perímetro del triángulo en dos si y solo si divide al triángulo en dos regiones equivalentes.

9.702(Desigualdad de Euler). Probar que en todo triángulo ΔABC se cumple que $2r \leq R$.

9.703(Desigualdad de Emmerich). Probar que en todo triángulo rectángulo ΔABC se cumple que

$$\frac{R}{r} \geq \sqrt{2} + 1.$$

9.704[S. Nakajima, Tohôku Math. J. 25 (1925), 115-121] [A. Padoa, Period. Mat. (4) 5 (1925), 80-85]. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumple la desigualdad

$$a + b + c \leq 3R\sqrt{3},$$

la igualdad se da si y solo si el triángulo es equilátero.

9.705[I-54]. Probar que en todo triángulo ΔABC rectángulo en $\angle A$ se cumple la desigualdad

$$\sqrt{2} - 1 \leq \frac{r}{h_a} < \frac{1}{2}.$$

9.706[I-22]. Probar que en todo triángulo ΔABC rectángulo en $\angle A$ se cumple la desigualdad $\frac{2}{5} < \frac{R}{h_a} < \frac{1}{2}$.

9.707(KöMal, Problem Gy. 3146, September 1997). Si ΔABC es un triángulo rectángulo en $\angle A$, probar la desigualdad $2 + \sqrt{2} \leq \frac{2bc}{r(b+c)} < 4$.

9.708[L. Bankoff, Problem Q. 417, Math. Mag. 40 (1967), 289]. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumple la desigualdad $\frac{5}{2} \leq \frac{R}{r} + \frac{r}{R}$.

9.709[V. Băndilă, Problem C:474, Gaz. Mat. 90 (1985), 65]. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumple la desigualdad $\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \leq \frac{R}{r}$.

9.710[F. Leuenberger, Elem. Math. 15 (1960), 77 -79]. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumple la desigualdad $\frac{\sqrt{3}}{R} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{\sqrt{3}}{2r}$.

9.711[F. Leuenberger, Elem. Math. 13 (1958), 121 -126]. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumple la desigualdad $\frac{1}{R^2} \leq \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \leq \frac{1}{4r^2}$.

9.712[M. S. Klamkim, Math. Teacher 60 (1967), 323-328]. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumple la desigualdad

$$4r^2 \leq \frac{abc}{a+b+c},$$

la igualdad se da si y solo si el triángulo es equilátero.

9.713 [J. C. H. Gerretsen, Nieuw Tijdschr. Wisk. 41 (1953), 1-7] [F. Leuenberger, Elem. Math. 15 (1960), 77 -79]. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumple la desigualdad

$$\sqrt{3}\,(a + b + c) \leq 2(r_a + r_b + r_c),$$

y probar que la igualdad se da si y solo si el triángulo es equilátero.

9.714[I-54]. Probar que en todo triángulo ΔABC rectángulo en $\angle A$ se cumple la desigualdad

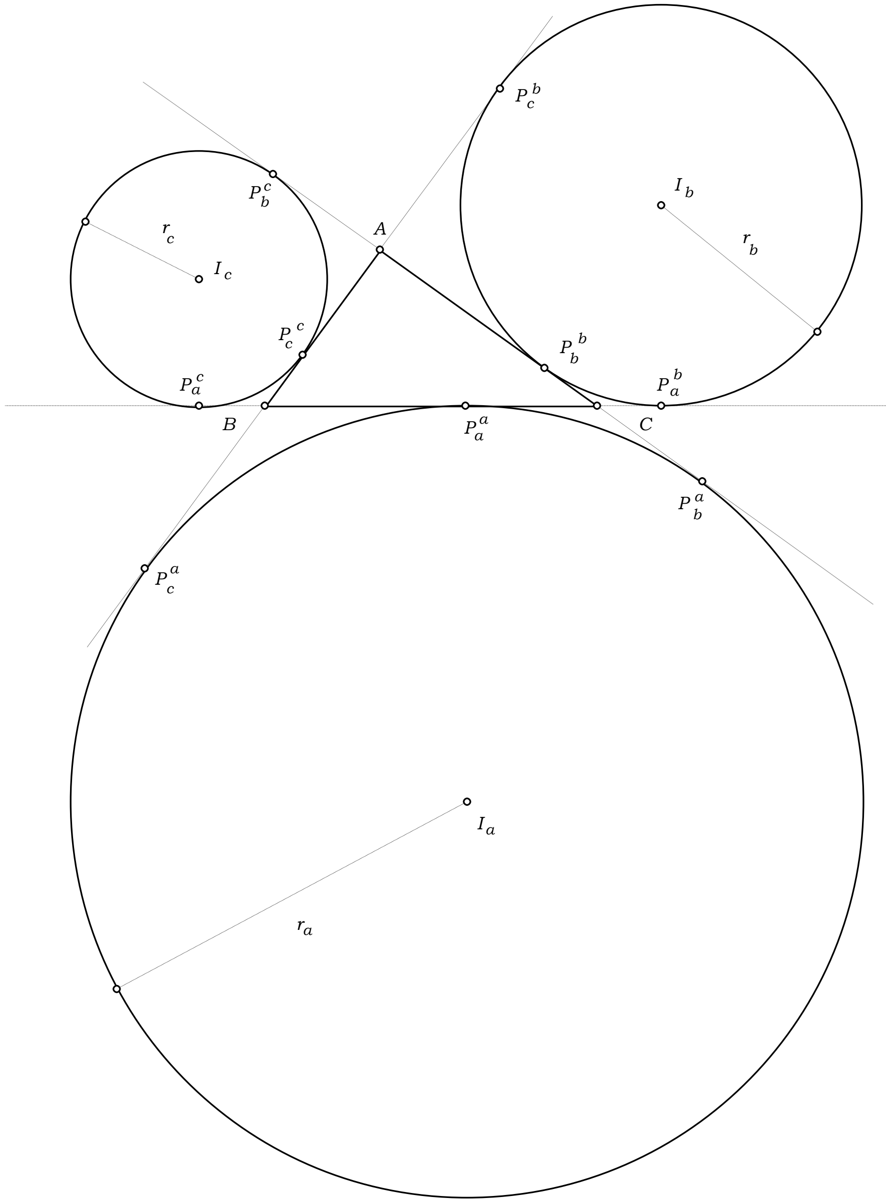
$$a^k > b^k + c^k,$$

para todo número natural $k > 2$. Sugerencia: $a^k = a^{k-2}a^2 = a^{k-2}(b^2 + c^2)$.

9.715[a-106]. Continuamos con el formulario del Problema 8.708. Este formulario también es una recopilación de J. S. Mackay y las identidades presentadas aquí están relacionadas con círculos.

Para un triángulo ΔABC se cumple lo siguiente:

Notación:



P_a^a es el punto de tangencia del excírculo C(I_a, r_a) con la recta $\overleftrightarrow{BC}$,

P_b^a es el punto de tangencia del excírculo C(I_a, r_a) con la recta $\overleftrightarrow{AC}$,

P_c^a es el punto de tangencia del excírculo C(I_a, r_a) con la recta $\overleftrightarrow{AB}$,

P_a^b es el punto de tangencia del excírculo C(I_b, r_b) con la recta $\overleftrightarrow{BC}$,

P_b^b es el punto de tangencia del excírculo C(I_b, r_b) con la recta $\overleftrightarrow{AC}$,

P_c^b es el punto de tangencia del excírculo C(I_b, r_b) con la recta $\overleftrightarrow{AB}$,

P_a^c es el punto de tangencia del excírculo C(I_c, r_c) con la recta $\overleftrightarrow{BC}$,

P_b^c es el punto de tangencia del excírculo C(I_c, r_c) con la recta $\overleftrightarrow{AC}$ y

P_c^c es el de tangencia punto del excírculo C(I_c, r_c) con la recta $\overleftrightarrow{AB}$.

1. $|B_a P_a| = \dfrac{s_a|b-c|}{b+c}$, $|B_b P_b| = \dfrac{s_b|a-c|}{a+c}$, $|B_c P_c| = \dfrac{s_c|a-b|}{a+b}$, $|E_a P_a^b| = \dfrac{s_c(b+c)}{|b-c|}$,

$|B_a P_a^a| = \dfrac{s|b-c|}{b+c}$, $|E_a P_a^c| = \dfrac{s_b(b+c)}{|b-c|}$, $|B_b P_b^b| = \dfrac{s|a-c|}{a+c}$ y $|B_c P_c^c| = \dfrac{s|a-b|}{a+b}$.

2. $|P_a H_a| = \dfrac{s_a|b-c|}{a}$, $|P_b H_b| = \dfrac{s_b|a-c|}{b}$, $|P_c H_c| = \dfrac{s_c|a-b|}{c}$, $|P_a^a H_a| = \dfrac{s|b-c|}{a}$,

$|P_b^b H_b| = \dfrac{s|a-c|}{b}$, $|P_c^c H_c| = \dfrac{s|a-b|}{c}$, $|P_a^b H_a| = \dfrac{s_c(b+c)}{a}$, $|P_a^c H_a| = \dfrac{s_b(b+c)}{a}$,

$$m(\angle B P_a P_c) = m(\angle B P_c P_a) = m(\angle B P_a^b P_c^b) = m(\angle B P_c^b P_a^b) = 90 - \frac{m(\angle B)}{2},$$

$$m(\angle C P_a P_b) = m(\angle B P_b P_a) = m(\angle B P_a^c P_b^c) = m(\angle B P_b^c P_a^c) = 90 - \frac{m(\angle C)}{2},$$

$$m(\angle B P_a^a P_c^a) = m(\angle B P_c^a P_a^a) = m(\angle B P_a^c P_c^c) = m(\angle B P_c^c P_a^c) = \frac{m(\angle B)}{2} \text{ y}$$

$$m(\angle C P_a^a P_b^a) = m(\angle B P_b^a P_a^a) = m(\angle B P_a^b P_b^b) = m(\angle B P_b^b P_a^b) = \frac{m(\angle C)}{2}.$$

3. $|M_a H_a||M_a B_a| = |M_a P_a|^2 = |M_a P_a^a|^2 = \dfrac{(b-c)^2}{4}$,

$|M_a H_a||M_a E_a| = |M_a P_a^b|^2 = |M_a P_a^c|^2 = \dfrac{(b+c)^2}{4}$,

$|M_a H_a||B_a H_a| = |P_a H_a||P_a^a H_a| = \dfrac{ss_a(b-c)^2}{a^2}$,

$|M_a H_a||E_a H_a| = |P_a^b H_a||P_a^c H_a| = \dfrac{s_b s_c(b+c)^2}{a^2}$,

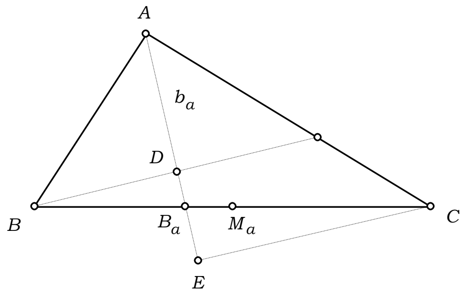
$|M_a H_a||B_a P_a| = |M_a P_a||P_a H_a| = \dfrac{s_a(b-c)^2}{2a}$, $|M_a H_a||B_a P_a^a| = |M_a P_a^a||P_a^a H_a| = \dfrac{s(b-c)^2}{2a}$,

$$|M_a H_a||E_a P_a^c| = |M_a P_a^b||P_a^b H_a| = \frac{s_c(b+c)^2}{2a},\ |M_a B_a||B_a H_a| = |P_a B_a||B_a P_a^a| = \frac{ss_a(b-c)^2}{(b+c)^2},$$

$$|M_a E_a||E_a H_a| = |P_a^b E_a||E_a P_a^c| = \frac{s_b s_c(b+c)^2}{(b-c)^2},$$

$$|P_a H_a||P_a^a H_a| = |BP_a||P_a C| - |BH_a||H_a C| \ \text{ y } \ |P_a^b H_a||P_a^c H_a| = |BP_a^b||P_a^b C| + |BH_a||H_a C|.$$

Notación: sean D y E las proyecciones de B y C sobre la recta $\overleftrightarrow{AB_a}$, respectivamente.



4. Probar las siguientes afirmaciones:

a. $m(\angle DBP_a) = m(\angle P_a CE) = \dfrac{|m(\angle B) - m(\angle C)|}{2}$, $m(\angle BP_a D) = m(\angle CEP_a) = 90 + \dfrac{m(\angle C)}{2}$,

$$m(\angle P_a DB) = 90 - \frac{m(\angle B)}{2} = m(\angle EP_a C),\ m(\angle DBP_a^a) = m(\angle P_a^a CE) = \frac{|m(\angle B) - m(\angle C)|}{2},$$

$$m(\angle BP_a^a D) = m(\angle CEP_a^a) = \frac{m(\angle C)}{2},\ m(\angle P_a^a DB) = m(\angle EP_a^a C) = 180 - \frac{m(\angle B)}{2},$$

$$m(\angle AP_b D) = m(\angle AP_c D) = m(\angle AEP_b^a) = m(\angle AEP_c^a) = 90 - \frac{m(\angle C)}{2} \ \text{ y}$$

$$m(\angle ADP_b) = m(\angle ADP_c) = m(\angle AP_b^a E) = m(\angle AP_c^a C) = \frac{m(\angle B)}{2}.$$

b. Los puntos A, C, E y H_a son concíclicos.

c. El punto M_a es el punto medio del segmento $P_a P_a^a$.

d. Los puntos P_a, P_a^a, D y E están en un círculo con centro en M_a.

e. El incírculo y el excírculo de centro I_a son ortogonales al círculo $\mathrm{C}(M_a, |M_a P_a|)$.

f. $|ID||IE| = r^2$ y $|I_a D||I_a E| = r_a^2$.

g. Los puntos A, H_a, E y C están en el círculo de diámetro AC.

h. Los puntos A, B, H_a y D están en el círculo de diámetro AB.

i. $\Delta ABC \sim \Delta H_a DE$.

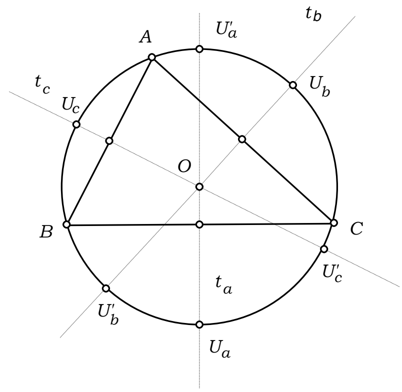
j. La semirrecta $\overrightarrow{BH_a}$ es la bisectriz del ángulo $\angle DH_a E$.

k. El punto P_a es el incentro del triángulo $\Delta H_a DE$.

l. Los puntos H_a, D, M_a y E son concíclicos.

m. El circuncírculo del triángulo $\Delta H_a DE$ es ortogonal al incírculo de ΔABC, y al excírculo de ΔABC con centro en el punto I_a.

Notación: denotemos por U_a y $U_a^{'}$ a los puntos de intersección de la mediatríz t_a de BC con el circuncírculo del triángulo ΔABC, teniendo en cuenta que U_a y A están en diferentes semiplanos determinados por la recta $\overleftrightarrow{BC}$, y A y $U_a^{'}$ están en un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{BC}$. Similarmente, definimos los dos pares de puntos U_b y $U_b^{'}$, y U_c y $U_c^{'}$.



5. Probar los siguientes enunciados.

a. $\dfrac{are(\Delta ABC)}{are(\Delta H_a DE)} = \dfrac{|U_a U_a^{'}|^2}{|AU_a^{'}|}$.

b. El diámetro del circuncírculo del triángulo $\Delta H_a DE$ es igual a $|AU_a^{'}|$.

c. $H_a D \parallel CU_a$ y $H_a E \parallel BU_a$

d. $\Delta M_a BD \sim \Delta EAH_a$, $\Delta M_a CE \sim \Delta DAH_a$, $\Delta M_a U_a D \sim \Delta ECH_a$ y $\Delta M_a U_a E \sim \Delta DBH_a$.

e. Las siguientes triadas de puntos son colineales: D, P_a y P_b; D, P_a^a y P_b^a; E, P_a y P_c; y E, P_a^a y P_c^a.

f. Las siguientes quintetas de puntos son concíclicos:

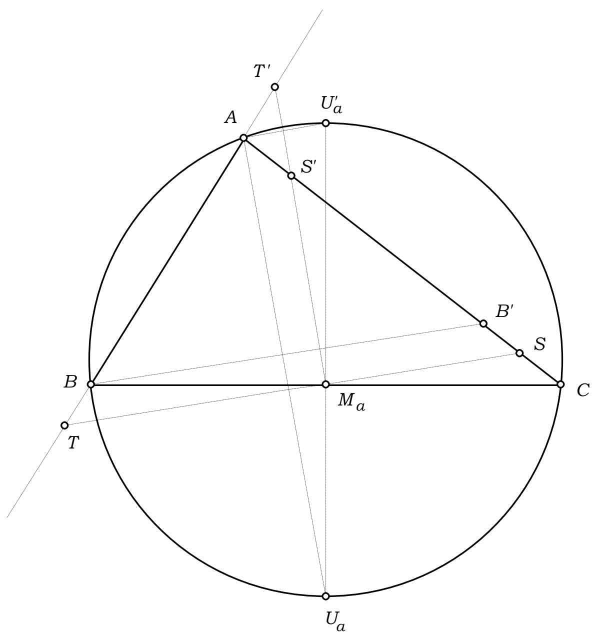
$$B, P_a, I, P_c \text{ y } D;\ C, P_a, I, P_b \text{ y } E;\ B, P_a^a, I_a, P_c^a \text{ y } D; \text{ y } B, P_a^a, I_a, P_b^a \text{ y } D.$$

g. $\overrightarrow{AU_a}$ es la bisectriz de $\angle A$, $\overrightarrow{BU_b}$ es la bisectriz de $\angle B$ y $\overrightarrow{CU_c}$ es la bisectriz de $\angle C$.

h. $|BU_a|^2 = |AU_a||B_a U_a|$, $|CU_b|^2 = |BU_b||B_b U_b|$ y $|AU_c|^2 = |CU_a||B_c U_a|$.

i. $\dfrac{|AU_a|}{|IU_a|} = \dfrac{b+c}{a}$.

Notación para la lista 6: trazamos rectas perpendiculares a las rectas $\overleftrightarrow{AU_a}$ y $\overleftrightarrow{AU_a^{'}}$ que pasen por el punto M_a y corten a la recta $\overleftrightarrow{AB}$ en los puntos T y T', respectivamente, y $\overleftrightarrow{AC}$ en los puntos S y S', respectivamente, tal y como se indica en la figura de la derecha. Además, fijamos un punto $B' \in AC$ tal que $BB' \parallel TS$.



6. Probar las siguientes identidades:

$$|CS| = \frac{||AC|-|AB||}{2},\ |AS| = \frac{|AB|+|AC|}{2},\ |BT| = |AT'| = |AS'| = \frac{||AC|-|AB||}{2},$$

$$|AT| = |BT'| = |CS'| = \frac{|AB|+|AC|}{2},$$

$$m(\angle ATS) = m(\angle AST) = m(\angle ABB') = \frac{m(\angle A)+m(\angle C)}{2},$$

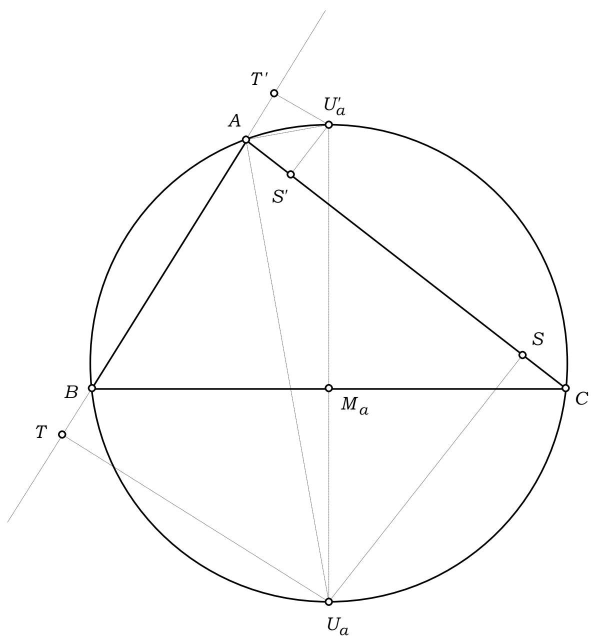
$$m(\angle BM_aT) = m(\angle CM_aS) = m(\angle CBB') = \frac{|m(\angle A)-m(\angle C)|}{2},$$

$$|AS|^2+|CS|^2 = |AT|^2+|BT|^2 = \frac{b^2+c^2}{2},\ ||AS|^2-|CS|^2| = ||AT|^2-|BT|^2| = bc,$$

$$|AS||CS| = |AT||BT| = \frac{||AC|^2-|AB|^2|}{4} = \frac{||CH_a|^2-|BH_a|^2|}{4} = |M_aB||M_aH_a|,$$

$$\frac{|AS|}{|CS|} = \frac{|AT|}{|BT|} = \frac{b+c}{|b-c|},\ |SS'| = |AB| = c \text{ y } |TT'| = |AC| = b.$$

Notación para la lista 7: sean S y T las proyecciones de U_a sobre los lados AC y AB, respectivamente, y S' y T' las proyecciones de U_a' sobre los lados AC y AB, respectivamente.



7. Probar las siguientes identidades:

a. $|AS| = |AT| = |CS'| = |BT'| = \dfrac{|AB|+|AC|}{2},\ |CS| = |BT| = |AS'| = |AT'| = \dfrac{||AC|-|AB||}{2},$

$$m(\angle U_a'BC) = m(\angle U_a'CB) = m(\angle U_a'U_aB) = m(\angle U_a'U_aC) = m(\angle U_a'AS') =$$

$$m(\angle U_a'AT') = m(\angle AU_aS) = m(\angle AU_aT) = \frac{m(\angle B)+m(\angle C)}{2} \text{ y}$$

$$m(\angle U_a'BA) = m(\angle U_a'CA) = m(\angle U_a'U_aA) = m(\angle BU_aT) = m(\angle CU_aS') = \frac{|m(\angle B)-m(\angle C)|}{2}.$$

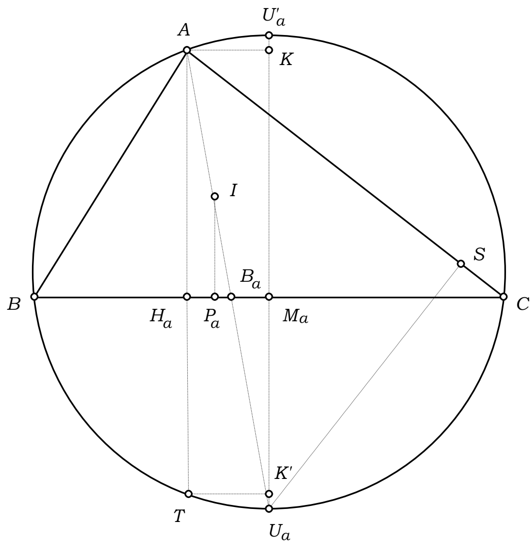
En los siguientes problemas, los puntos D y E son aquellos que se definieron en la notación anterior a la lista de problemas, marcada con el número 4.

b. Probar que $\overleftrightarrow{BD}$ y $\overleftrightarrow{U_aS}$ se intersecan en el circuncírculo del triángulo ΔABC.

c. Probar que $\overleftrightarrow{BE}$ y $\overleftrightarrow{U_aT}$ se intersecan en el circuncírculo del triángulo ΔABC.

d. Probar que cada uno de los siguientes cuartetos son concíclicos: P_a, P_b^a, D y E; y P_c, P_c^a, D y E.

Notación para la lista 8: sea T el punto de intersección de $\overleftrightarrow{AH_a}$ y el circuncírculo del triángulo ΔABC, K y K' las proyecciones de los puntos A y T sobre la recta $\overleftrightarrow{U_aU_a'}$ y S la proyección del punto U_a sobre el segmento AC.



8. Probar las siguientes igualdades:

$$|M_a U_a||U_a K'| = |M_a H_a||M_a B_a| = \frac{(b-c)^2}{4},$$

$$|M_a U_a'||U_a' K'| = |M_a H_a||M_a E_a| = \frac{(b+c)^2}{4},$$

$$|M_a K||KU_a'| = |M_a H_a||B_a H_a|,\quad |M_a K||KU_a| = |M_a H_a||E_a H_a|,\quad |M_a K||M_a U_a| = |BP_a||P_a C|,$$

$$|M_a K||M_a U_a'| = |BP_a^b||P_a^b C|,\quad |M_a K||M_a K'| = |BH_a||H_a C|,\quad |M_a U_a||U_a K| = |U_a S|^2,$$

$$|U_a' K||IP_a| = |M_a P_a||P_a H_a|,\quad |U_a' K||I_a P_a^a| = |M_a P_a^a||P_a^a H_a|,$$

$$\frac{are(\Delta ABC)}{are(\Delta H_a DE)} = \frac{|U_a U_a'|}{|KU_a'|},\quad |U_a U_a'| = |U_a K| + |U_a' K|,$$

$$|HI|^2 = 4(R^2 - 2Rr) + bc + ca + ab - (a^2 + b^2 + c^2),$$
$$|HI_a|^2 = 4(R^2 + 2Rr_a) + bc - ca - ab - (a^2 + b^2 + c^2),$$
$$|HI_b|^2 = 4(R^2 + 2Rr_b) - bc + ca - ab - (a^2 + b^2 + c^2),$$
$$|HI_c|^2 = 4(R^2 + 2Rr_c) - bc - ca + ab - (a^2 + b^2 + c^2),$$
$$|HI|^2 + |HI_a|^2 + |HI_b|^2 + |HI_c|^2 = 4(12R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)) = 4(|HA|^2 + |HB|^2 + |HB|^2),$$
$$|HA|^2 + |HB|^2 + |HB|^2 = 12R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \text{ y } |CA|^2 + |HB|^2 = |AB|^2 + |HC|^2 = 4R^2.$$

Notación para el problema 9: sean L_0, L_1, L_2 y L_3 los puntos de intersección de las rectas $\overleftrightarrow{P_aI}$, $\overleftrightarrow{P_a^aI_a}$ $\overleftrightarrow{P_a^bI_b}$ y $\overleftrightarrow{P_a^cI_c}$ con la recta $\overleftrightarrow{AM_a}$, respectivamente, M_0, M_1, M_2 y M_3 los puntos de intersección de las rectas $\overleftrightarrow{P_bI}$, $\overleftrightarrow{P_b^aI_a}$ $\overleftrightarrow{P_b^bI_b}$ y $\overleftrightarrow{P_b^cI_c}$ con la recta $\overleftrightarrow{BM_b}$, respectivamente, y N_0, N_1, N_2 y N_3 los puntos de intersección de las rectas $\overleftrightarrow{P_cI}$, $\overleftrightarrow{P_c^aI_a}$ $\overleftrightarrow{P_c^bI_b}$ y $\overleftrightarrow{P_c^cI_c}$ con la recta $\overleftrightarrow{CM_c}$, respectivamente.

9. Probar las siguientes identidades:

$$|P_a\,L_0| = \frac{2are(\Delta ABC)}{b+c},\ |P_b\,M_0| = \frac{2are(\Delta ABC)}{a+c},\ |P_c\,N_0| = \frac{2are(\Delta ABC)}{a+b},$$

$$|P_a^a\,L_1| = \frac{2are(\Delta ABC)}{b+c},\ |P_b^a\,M_1| = \frac{2are(\Delta ABC)}{|a-c|},\ |P_c^a\,N_1| = \frac{2are(\Delta ABC)}{|a-b|},$$

$$|P_a^b\,L_2| = \frac{2are(\Delta ABC)}{|b-c|},\ |P_b^b\,M_2| = \frac{2are(\Delta ABC)}{a+c},\ |P_c^b\,N_2| = \frac{2are(\Delta ABC)}{|a-b|},$$

$$|P_a^c\,L_3| = \frac{2are(\Delta ABC)}{|b-c|},\ |P_b^c\,M_3| = \frac{2are(\Delta ABC)}{|a-c|},\ |P_c^c\,N_3| = \frac{2are(\Delta ABC)}{a+b},$$

$$\frac{1}{|P_aL_0|}+\frac{1}{|P_bM_0|}+\frac{1}{|P_cN_0|}=\frac{2}{r},\quad \frac{1}{|P_a^aL_1|}+\frac{1}{|P_b^aM_1|}+\frac{1}{|P_c^aN_1|}=\frac{2}{h_a},$$

$$\frac{1}{|P_a^bL_2|}+\frac{1}{|P_b^bM_2|}+\frac{1}{|P_c^bN_2|}=\frac{2}{h_b}\ \text{ y }\ \frac{1}{|P_a^cL_3|}+\frac{1}{|P_b^cM_3|}+\frac{1}{|P_c^cN_3|}=\frac{2}{h_c}.$$

Notación para el problema 10:

$$\alpha = |AI|,\ \alpha_a = |AI_a|,\ \alpha_b = |AI_b|, \alpha_c = |AI_c|,$$
$$\beta = |BI|, \beta_a = |BI_a|,\ \beta_b = |BI_b|, \beta_c = |BI_c|,$$
$$\gamma = |CI|,\ \gamma_a = |CI_a|,\ \gamma_b = |CI_b|\ \text{y}\ \gamma_c = |CI_c|,$$

10. Probar las siguientes identidades:

$$\alpha^2 = (r_b - r)(r_c - r),\ \alpha_a^2 = (r_a + r_c)(r_a + r_b),\ \alpha_b^2 = (r_b - r)(r_a + r_b),\ \alpha_c^2 = (r_a + r_c)(r_c - r),$$
$$\beta^2 = (r_a - r)(r_c - r),\ \beta_a^2 = (r_a + r_b)(r_a - r),\ \beta_b^2 = (r_a + r_b)(r_b + r_c),\ \beta_c^2 = (r_c - r)(r_b + r_c),$$
$$\gamma^2 = (r_a - r)(r_b - r),\ \gamma_a^2 = (r_a - r)(r_a + r_c),\ \gamma_b^2 = (r_b + r_c)(r_b - r),\ \gamma_c^2 = (r_b + r_c)(r_a + r_c),$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{bcrr_a}}{r_a},\ \beta = \frac{\sqrt{acrr_c}}{r_b},\ \gamma = \frac{\sqrt{abrr_c}}{r_c},\ \alpha_a = \frac{\sqrt{bcrr_a}}{r},\ \beta_b = \frac{\sqrt{acrr_b}}{r},\ \gamma_c = \frac{\sqrt{abrr_c}}{r},$$

$$\alpha_b = \frac{\sqrt{bcr_br_c}}{r_c},\ \beta_c = \frac{\sqrt{acr_ar_c}}{r_a},\ \gamma_a = \frac{\sqrt{abr_ar_b}}{r_b},\ \alpha_c = \frac{\sqrt{bcr_br_c}}{r_b},\ \beta_a = \frac{\sqrt{acr_ar_c}}{r_c},\ \gamma_b = \frac{\sqrt{abr_ar_b}}{r_a},$$

$$\frac{\alpha}{r}=\frac{\alpha_a}{r_a}=\frac{\alpha_b}{s_c}=\frac{\alpha_c}{s_b},\ \frac{\beta}{r}=\frac{\beta_a}{s_c}=\frac{\beta_b}{\gamma_b}=\frac{\beta_c}{s_a},\ \frac{\gamma}{r}=\frac{\gamma_a}{s_b}=\frac{\gamma_b}{s_a}=\frac{\gamma_c}{r_c},$$

$$\frac{\alpha}{s_a}=\frac{\alpha_a}{s}=\frac{\alpha_b}{r_b}=\frac{\alpha_c}{r_c},\ \frac{\beta}{s_b}=\frac{\beta_a}{r_a}=\frac{\beta_b}{s}=\frac{\beta_c}{r_c},\ \frac{\gamma}{s_c}=\frac{\gamma_a}{r_a}=\frac{\gamma_b}{r_b}=\frac{\gamma_c}{s},$$

$$\alpha\alpha_a = \alpha_b\,\alpha_c = bc,\ \beta\beta_b = \beta_a\,\beta_c = ac,\ \gamma\gamma_c = \gamma_a\,\gamma_b = ab,$$
$$\alpha\alpha_a\,\alpha_b\,\alpha_c = (bc)^2,\ \beta\beta_b\,\beta_a\,\beta_c = (ac)^2,\ \gamma\gamma_c\,\gamma_a\,\gamma_b = (ab)^2,$$
$$\alpha\beta\gamma\alpha_a\,\beta_a\,\gamma_a\,\alpha_b\,\beta_b\,\gamma_b\,\alpha_c\,\beta_c\,\gamma_c = (abc)^4,$$
$$\alpha\beta_a\,\gamma_c = \alpha\beta_b\,\gamma_a = \alpha_a\beta\gamma_b = \alpha_a\,\beta_c\,\gamma = \alpha_b\beta\gamma_c = \alpha_b\,\beta_c\,\gamma_a = \alpha_c\,\beta_a\,\gamma_b = \alpha_c\,\beta_b\,\gamma = abc,$$
$$\frac{\alpha\beta\gamma}{abc} = \frac{abc}{\alpha_a\beta_b\gamma_c},\ \frac{\alpha_a\beta_a\gamma_a}{abc} = \frac{abc}{\alpha\beta_c\gamma_b},\ \frac{\alpha_b\beta_b\gamma_b}{abc} = \frac{abc}{\alpha_c\beta\gamma_a},\ \frac{\alpha_c\beta_c\gamma_c}{abc} = \frac{abc}{\alpha_b\beta_a\gamma},$$

$$\frac{\beta\gamma_b}{\alpha} = \frac{\beta_c\gamma}{\alpha} = \frac{\beta_a\gamma_c}{\alpha_a} = \frac{\beta_b\gamma_a}{\alpha_a} = \frac{\beta_a\gamma_b}{\alpha_b} = \frac{\beta_b\gamma}{\alpha_b} = \frac{\beta\gamma_c}{\alpha_c} = \frac{\beta_c\gamma_a}{\alpha_c} = a,$$
$$\frac{\alpha\gamma_a}{\beta} = \frac{\alpha_c\gamma}{\beta} = \frac{\alpha_a\gamma}{\beta_a} = \frac{\alpha_b\gamma_a}{\beta_a} = \frac{\alpha_a\gamma_b}{\beta_b} = \frac{\alpha_b\gamma_c}{\beta_b} = \frac{\alpha\gamma_c}{\beta_c} = \frac{\alpha_c\gamma_b}{\beta_c} = b,$$
$$\frac{\alpha\beta_a}{\gamma} = \frac{\alpha_b\beta}{\gamma} = \frac{\alpha_a\beta}{\gamma_a} = \frac{\alpha_c\beta_a}{\gamma_a} = \frac{\alpha\beta_b}{\gamma_b} = \frac{\alpha_b\beta_c}{\gamma_b} = \frac{\alpha_a\beta_c}{\gamma_c} = \frac{\alpha_c\beta_b}{\gamma_c} = c,$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{r_a - r},\ \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{r_b - r},\ \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\beta}{r_c - r},\ \frac{\alpha_a}{\beta_a} = \frac{\gamma_a}{r_a - r},\ \frac{\beta_a}{\alpha_a} = \frac{\gamma_a}{r_a + r_c},\ \frac{\gamma_a}{\alpha_a} = \frac{\beta_a}{r_a + r_b},$$
$$\frac{\alpha_b}{\beta_b} = \frac{\gamma_b}{r_b + r_c},\ \frac{\beta_b}{\alpha_b} = \frac{\gamma_b}{r_b - r},\ \frac{\gamma_b}{\alpha_b} = \frac{\beta_b}{r_a + r_b},\ \frac{\alpha_c}{\beta_c} = \frac{\gamma_c}{r_b + r_c},\ \frac{\beta_c}{\alpha_c} = \frac{\gamma_c}{r_a + r_c},\ \frac{\gamma_c}{\alpha_c} = \frac{\beta_c}{r_c - r},$$
$$\frac{\alpha_a}{\beta_b} = \frac{\gamma_c}{r_b + r_c},\ \frac{\alpha}{\beta_c} = \frac{\gamma_b}{r_b + r_c},\ \frac{\beta_b}{\alpha_a} = \frac{\gamma_c}{r_a + r_c},\ \frac{\beta_c}{\alpha} = \frac{\gamma_b}{r_b - r},\ \frac{\gamma_c}{\alpha_a} = \frac{\beta_b}{r_a + r_b},\ \frac{\gamma_b}{\alpha} = \frac{\beta_c}{r_c - r},$$
$$\frac{\alpha_c}{\beta} = \frac{\gamma_a}{r_a - r},\ \frac{\alpha_b}{\beta_a} = \frac{\gamma}{r_a - r},\ \frac{\beta}{\alpha_c} = \frac{\gamma_a}{r_a + r_c},\ \frac{\beta_a}{\alpha_b} = \frac{\gamma}{r_b - r},\ \frac{\gamma_a}{\alpha_c} = \frac{\beta}{r_c - r},\ \frac{\gamma}{\alpha_b} = \frac{\beta_a}{r_a + r_b},$$

$$\frac{\alpha^2}{bc} = \frac{s_a}{s},\ \frac{\beta^2}{ac} = \frac{s_b}{s},\ \frac{\gamma^2}{ab} = \frac{s_c}{s},\ \frac{\alpha_a^2}{bc} = \frac{s}{s_a},\ \frac{\beta_a^2}{ac} = \frac{s_c}{s_a},\ \frac{\gamma_a^2}{ab} = \frac{s_b}{s_c},$$
$$\frac{\alpha_b^2}{bc} = \frac{s_c}{s_b},\ \frac{\beta_b^2}{ac} = \frac{s}{s_b},\ \frac{\gamma_b^2}{ab} = \frac{s_a}{s_b},\ \frac{\alpha_c^2}{bc} = \frac{s_b}{s_c},\ \frac{\beta_c^2}{ac} = \frac{s_a}{s_c},\ \frac{\gamma_c^2}{ab} = \frac{s}{s_c},$$

$$\frac{\alpha^2}{bc} + \frac{\beta^2}{ac} + \frac{\gamma^2}{ab} = 1,\ \frac{\alpha_a^2}{bc} - \frac{\beta_a^2}{ac} - \frac{\gamma_a^2}{ab} = 1,\ -\frac{\alpha_b^2}{bc} + \frac{\beta_b^2}{ac} - \frac{\gamma_b^2}{ab} = 1,\ -\frac{\alpha_c^2}{bc} - \frac{\beta_c^2}{ac} + \frac{\gamma_c^2}{ab} = 1,$$
$$\frac{bc}{\alpha_a^2} + \frac{ac}{\beta_b^2} + \frac{ab}{\gamma_c^2} = 1,\ \frac{bc}{\alpha^2} - \frac{ac}{\beta_c^2} - \frac{ab}{\gamma_b^2} = 1,\ -\frac{bc}{\alpha_c^2} + \frac{ac}{\beta^2} - \frac{ab}{\gamma_a^2} = 1,\ -\frac{bc}{\alpha_b^2} - \frac{ac}{\beta_a^2} + \frac{ab}{\gamma^2} = 1,$$

$$\alpha^2\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right) + \beta^2\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right) + \gamma^2\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) = 0,\quad \alpha_a^2\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) + \beta_a^2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right) - \gamma_a^2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 0,$$

$$a\alpha^2(b-c) + b\beta^2(c-a) + c\gamma^2(a-b) = 0,\quad a\,\alpha_a^2\,(c-b) + b\,\beta_a^2(a+c) + c\,\gamma_a^2\,(a+b) = 0,$$

$$\frac{b-c}{a\alpha_a^2}+\frac{c-a}{b\beta_b^2}+\frac{a-b}{c\gamma_c^2}=0, \qquad \frac{c-b}{a\alpha^2}+\frac{a+c}{b\beta_c^2}-\frac{a+b}{c\gamma_b^2}=0,$$

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\frac{bcs_a+acs_b+abs_c}{s}=bc+ac+ab-\frac{3abc}{s},$$
$$\alpha_a^2+\beta_a^2+\gamma_a^2=\frac{bcs+acs_c+abs_b}{s_a}=bc-ac-ab+\frac{3abc}{s_a},$$
$$\alpha_b^2+\beta_b^2+\gamma_b^2=\frac{bcs_c+acs+abs_a}{s_b}=-bc+ac-ab+\frac{3abc}{s_b},$$
$$\alpha_c^2+\beta_c^2+\gamma_c^2=\frac{bcs_b+acs_a+abs}{s_c}=-bc-ac+ab+\frac{3abc}{s_c},$$

$$\alpha_a^2+\beta_b^2+\gamma_c^2=(r_a+r_b+r_c)^2+s^2, \qquad \alpha^2+\beta_c^2+\gamma_b^2=(r-r_b-r_c)^2+s_a^2,$$
$$\alpha_c^2+\beta^2+\gamma_a^2=(r-r_a-r_c)^2+s_b^2, \qquad \alpha_b^2+\beta_a^2+\gamma^2=(r-r_a-r_b)^2+s_c^2,$$

$$\frac{\alpha\beta\gamma}{abc}=\frac{r}{s}, \quad \frac{\alpha_a\beta_a\gamma_a}{abc}=\frac{r_a}{s_a}, \quad \frac{\alpha_b\beta_b\gamma_b}{abc}=\frac{r_b}{s_b}, \quad \frac{\alpha_c\beta_c\gamma_c}{abc}=\frac{r_c}{s_c}, \quad \frac{\alpha_c\beta_a\gamma_b}{\alpha\beta\gamma}=\frac{are(\Delta ABC)}{r^2}$$
$$\frac{abc}{\alpha\beta\gamma}=\frac{s}{r}, \quad \frac{\alpha_a\beta_b\gamma_c}{abc}=\frac{s}{r}, \quad \frac{\alpha\beta_c\gamma_b}{abc}=\frac{s_a}{r_a}, \quad \frac{\alpha_c\beta\gamma_a}{abc}=\frac{s_b}{r_b}, \quad \frac{\alpha_b\beta_a\gamma}{abc}=\frac{s_c}{r_c}$$

$$h_a\,h_b\,h_c\,\alpha\beta\,\gamma=8are(\Delta ABC)^2\,r^2, \qquad h_a\,h_b\,h_c\,\alpha_a\,\beta_b\,\gamma_c=8are(\Delta ABC)^2\,s^2,$$
$$h_a\,h_b\,h_c\,\alpha_a\,\beta_a\,\gamma_a=8are(\Delta ABC)^2\,r_a^2, \qquad h_a\,h_b\,h_c\,\alpha\beta_c\,\gamma_b=8are(\Delta ABC)^2\,s_a^2,$$
$$h_a\,h_b\,h_c\,\alpha_b\,\beta_b\,\gamma_b=8are(\Delta ABC)^2\,r_b^2, \qquad h_a\,h_b\,h_c\,\alpha_b\beta\gamma_a=8are(\Delta ABC)^2\,s_b^2,$$
$$h_a\,h_b\,h_c\,\alpha_c\,\beta_c\,\gamma_c=8are(\Delta ABC)^2\,r_c^2, \qquad h_a\,h_b\,h_c\,\alpha_c\,\beta_b\,\gamma=8are(\Delta ABC)^2\,s_c^2,$$

$$a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2=a\alpha_a^2-b\beta_a^2-c\gamma_a^2=-a\alpha_b^2+b\beta_a^2-c\gamma_b^2=-a\alpha_c^2-b\beta_c^2+c\gamma_c^2=abc,$$

$$\alpha\beta\,\gamma=(r_a-r)(r_b-r)(r_c-r), \qquad \alpha_a\,\beta_a\,\gamma_a=(r_a-r)(r_a+r_c)(r_a+r_b),$$
$$\alpha_b\,\beta_b\,\gamma_b=(r_b+r_c)(r_b-r)(r_a+r_b), \qquad \alpha_c\,\beta_c\,\gamma_c=(r_b+r_c)(r_a+r_c)(r_c-r),$$
$$\alpha_a\,\beta_b\,\gamma_c=(r_b+r_c)(r_a+r_c)(r_a+r_b), \qquad \alpha\beta_c\,\gamma_b=(r_b+r_c)(r_b-r)(r_c-r),$$
$$\alpha_c\beta\gamma_a=(r_a-r)(r_a+r_c)(r_c-r), \qquad \alpha_b\,\beta_a\,\gamma=(r_a-r)(r_b-r)(r_a+r_b)$$

$$a\beta\beta_c=(r_b+r_c)(r_c-r)(r_a-r), \qquad b\gamma\,\gamma_a=(r_a+r_c)(r_a-r)(r_b-r),$$
$$a\gamma\gamma_b=(r_b+r_c)(r_a-r)(r_b-r), \qquad b\alpha\alpha_c=(r_a+r_c)(r_b-r)(r_c-r),$$
$$c\alpha\alpha_b=(r_a+r_b)(r_b-r)\,(r_c-r),$$
$$c\beta\beta_a=(r_a+r_b)(r_c-r)(r_a-r),$$
$$a\,\beta_a\,\beta_b=(r_a-r)(r_a+r_b)(r_b+r_c), \qquad b\gamma_b\,\gamma_c=(r_b-r)(r_b+r_c)(r_a+r_c),$$
$$a\gamma_c\,\gamma_a=(r_a-r)(r_b+r_c)(r_a+r_c), \qquad b\alpha_a\,\alpha_b=(r_b-r)(r_a+r_c)(r_a+r_b),$$

$$c\alpha_c\,\alpha_a = (r_c - r)(r_a + r_c)(r_a + r_b),$$
$$c\beta_b\,\beta_c = (r_c - r)(r_a + r_b)(r_b + r_c),$$
$$\alpha\alpha_b = (r_b - r)c, \quad \alpha_c\,\alpha_a = (r_a + r_c)c, \quad \alpha\alpha_c = (r_c - r)b, \quad \alpha_a\,\alpha_b = (r_a + r_b)b,$$
$$\beta\beta_c = (r_c - r)a, \quad \beta_a\,\beta_b = (r_a + r_b)a, \quad \beta\beta_a = (r_a - r)c, \quad \beta_b\,\beta_c = (r_b + r_c)c,$$
$$\gamma\gamma_a = (r_a - r)b, \quad \gamma_b\,\gamma_c = (r_b + r_c)b, \quad \gamma\gamma_b = (r_b - r)a, \quad \gamma_c\,\gamma_a = (r_a + r_c)a,$$

$$\alpha b = \alpha_c(r_b - r), \qquad \alpha_b b = \alpha_a(r_b - r),$$
$$\alpha c = \alpha_b(r_c - r), \qquad \alpha_b c = \alpha(r_a + r_b),$$
$$\beta c = \beta_a(r_c - r), \qquad \beta_b c = \beta_c(r_a + r_b),$$
$$\beta a = \beta_c(r_a - r), \qquad \beta_b a = \beta_a(r_b + r_c),$$
$$\gamma a = \gamma_b(r_a - r) \qquad \gamma_b a = \gamma(r_b + r_c),$$
$$\gamma b = \gamma_a(r_b - r), \qquad \gamma_b b = \gamma_c(r_b - r),$$
$$\alpha_a b = \alpha_b(r_a + r_c), \qquad \alpha_c b = \alpha(r_a + r_c),$$
$$\alpha_a c = \alpha_c(r_a + r_b), \qquad \alpha_c c = \alpha_a(r_c - r),$$
$$\beta_a c = \beta(r_a + r_b), \qquad \beta_c c = \beta_b(r_c - r),$$
$$\beta_a a = \beta_b(r_a - r), \qquad \beta_c a = \beta(r_b + r_c),$$
$$\gamma_a a = \gamma_c(r_a - r), \qquad \gamma_c a = \gamma_a(r_b + r_c),$$
$$\gamma_a b = \gamma(r_a + r_c) \text{ y} \qquad \gamma_c b = \gamma_b(r_a + r_c).$$

Observemos que

$$\alpha_a - \alpha = |I_a I|,\ \beta_b - \beta = |I_b I|,\ \gamma_c - \gamma = |I_c I|,$$
$$\alpha_b + \alpha_c = |I_b\, I_c|,\ \beta_a + \beta_c = |I_a\, I_c| \text{ y } \gamma_a + \gamma_b = |I_a\, I_b|.$$

$$(\alpha_a - \alpha)r = \alpha(r_a - r) = \beta\gamma, \qquad (\alpha_a - \alpha)s_b = \alpha_c(r_a - r) = \beta\gamma_a,$$
$$(\alpha_a - \alpha)r_a = \alpha_a(r_a - r) = \beta_a\gamma_a, \qquad (\alpha_a - \alpha)s_c = \alpha_b(r_a - r) = \beta_a\gamma,$$
$$(\beta_b - \beta)r = \beta(r_b - r) = \gamma\alpha, \qquad (\beta_b - \beta)s_c = \beta_a(r_b - r) = \gamma\alpha_b,$$
$$(\beta_b - \beta)r_b = \beta_b(r_b - r) = \gamma_b\,\alpha_b, \qquad (\beta_b - \beta)s_a = \beta_c(r_b - r) = \gamma_b\,\alpha,$$
$$(\gamma_c - \gamma)r = \gamma(r_c - r) = \alpha\beta, \qquad (\gamma_c - \gamma)s_a = \gamma_b(r_c - r) = \alpha\beta_c,$$
$$(\gamma_c - \gamma)r_c = \gamma_c(r_c - r) = \alpha_c\,\beta_c, \qquad (\gamma_c - \gamma)s_b = \gamma_a(r_c - r) = \alpha_c\beta,$$
$$(\alpha_b + \alpha_c)r_b = \alpha_b(r_b + r_c) = \beta_b\,\gamma_b, \qquad (\alpha_b + \alpha_c)s = \alpha_a(r_b + r_c) = \beta_b\,\gamma_c,$$
$$(\alpha_b + \alpha_c)r_c = \alpha_c(r_b + r_c) = \beta_c\,\gamma_c, \qquad (\alpha_b + \alpha_c)s_a = \alpha(r_b + r_c) = \beta_c,$$
$$(\beta_a + \beta_c)r_c = \beta_c(r_a + r_c) = \gamma_c\,\alpha_c, \qquad (\beta_a + \beta_c)s = \beta_b(r_a + r_c) = \gamma_c\,\alpha_a,$$
$$(\beta_a + \beta_c)r_a = \beta_a(r_a + r_c) = \gamma_a\,\alpha_a, \qquad (\beta_a + \beta_c)s_b = \beta(r_a + r_c) = \gamma_a\,\alpha_c,$$
$$(\gamma_a + \gamma_b)r_a = \gamma_a(r_a + r_b) = \alpha_a\,\beta_a, \qquad (\gamma_a + \gamma_b)s = \gamma_c(r_a + r_b) = \alpha_a\,\beta_b,$$
$$(\gamma_a + \gamma_b)r_b = \gamma_b(r_a + r_b) = \alpha_b\,\beta_b, \qquad (\gamma_a + \gamma_b)s_c = \gamma(r_a + r_b) = \alpha_b\,\beta_a,$$

$$(\alpha_a-\alpha)h_a=2\alpha r_a=2\alpha_a r=2\alpha_b s_b=2\alpha_c s_c, \quad (\alpha_b+\alpha_c)h_a=2\alpha s=2\alpha_a s_a=2\alpha_b r_c=2\alpha_c r_b,$$
$$(\beta_b-\beta)h_b=2\beta r_b=2\beta_b r=2\beta_a s_a=2\beta_c s_c, \quad (\beta_a+\beta_c)h_b=2\beta s=2\beta_b s_b=2\beta_a r_c=2\beta_c r_a,$$
$$(\gamma_c-\gamma)h_c=2\gamma r_c=2\gamma_c r=2\gamma_a s_a=2\gamma_b s_b, \quad (\gamma_a+\gamma_b)h_c=2\gamma s=2\gamma_c s_c=2\gamma_a r_b=2\gamma_b r_a,$$

$$(\alpha_a-\alpha)a=(\alpha_b+\alpha_c)(r_a-r), \quad (\alpha_b+\alpha_c)a=(\alpha_a-\alpha)(r_b+r_c),$$
$$(\beta_b-\beta)b=(\beta_a+\beta_c)(r_b-r), \quad (\beta_a+\beta_c)b=(\beta_b-\beta)(r_a+r_c),$$
$$(\gamma_c-\gamma)c=(\gamma_a+\gamma_b)(r_c-r), \quad (\gamma_a+\gamma_b)c=(\gamma_c-\gamma)(r_a+r_b),$$

$$(\alpha_a-\alpha)b=(\beta_b-\beta)\gamma_a=(\beta_a+\beta_c)\gamma, \quad (\alpha_b+\alpha_c)b=(\beta_a+\beta_c)\gamma_b=(\beta_b-\beta)\gamma_c,$$
$$(\alpha_a-\alpha)c=(\gamma_c-\gamma)\beta_a=(\gamma_a+\gamma_b)\beta, \quad (\alpha_b+\alpha_c)c=(\gamma_a+\gamma_b)\beta_c=(\gamma_c-\gamma)\beta_b,$$
$$(\beta_b-\beta)c=(\gamma_c-\gamma)\alpha_b=(\gamma_a+\gamma_b)\alpha, \quad (\beta_a+\beta_c)c=(\gamma_a+\gamma_b)\alpha_c=(\gamma_c-\gamma)\alpha_b,$$
$$(\beta_b-\beta)a=(\alpha_a-\alpha)\gamma_b=(\alpha_b+\alpha_c)\gamma, \quad (\beta_a+\beta_c)a=(\alpha_b+\alpha_c)\gamma_a=(\alpha_a-\alpha)\gamma_c,$$
$$(\gamma_c-\gamma)a=(\alpha_a-\alpha)\beta_c=(\alpha_b+\alpha_c)\beta, \quad (\gamma_a+\gamma_b)a=(\alpha_b+\alpha_c)\beta_a=(\alpha_a-\alpha)\beta_b,$$
$$(\gamma_c-\gamma)b=(\beta_b-\beta)\alpha_c=(\beta_a+\beta_c)\alpha, \quad (\gamma_a+\gamma_b)b=(\beta_a+\beta_c)\alpha_b=(\beta_b-\beta)\alpha_a,$$

$$(\alpha_a-\alpha)\beta=(\gamma_c-\gamma)(r_a-r), \quad (\alpha_b+\alpha_c)\beta_b=(\gamma_a+\gamma_b)(r_b+r_c),$$
$$(\alpha_a-\alpha)\gamma=(\beta_b-\beta)(r_a-r), \quad (\alpha_b+\alpha_c)\gamma_b=(\beta_b-\beta)(r_b+r_c),$$
$$(\alpha_a-\alpha)\beta_a=(\gamma_a+\gamma_b)(r_a-r), \quad (\alpha_b+\alpha_c)\beta_c=(\gamma_c-\gamma)(r_b+r_c),$$
$$(\alpha_a-\alpha)\gamma_a=(\beta_a+\beta_c)(r_a-r), \quad (\alpha_b+\alpha_c)\gamma_c=(\beta_a+\beta_c)(r_b+r_c),$$
$$(\beta_b-\beta)\gamma=(\alpha_a-\alpha)(r_b-r), \quad (\beta_a+\beta_c)\gamma_a=(\alpha_a-\alpha)(r_a+r_c),$$
$$(\beta_b-\beta)\alpha=(\gamma_c-\gamma)(r_b-r), \quad (\beta_a+\beta_c)\alpha_a=(\gamma_a+\gamma_b)(r_a+r_c),$$
$$(\beta_b-\beta)\gamma_b=(\alpha_b+\alpha_c)(r_b-r), \quad (\beta_a+\beta_c)\gamma_c=(\alpha_b+\alpha_c)(r_a+r_c),$$
$$(\beta_b-\beta)\alpha_b=(\gamma_a+\gamma_b)(r_b-r), \quad (\beta_a+\beta_c)\alpha_c=(\gamma_c-\gamma)(r_a+r_c),$$
$$(\gamma_c-\gamma)\alpha=(\beta_b-\beta)(r_c-r), \quad (\gamma_a+\gamma_b)\alpha_a=(\beta_a+\beta_c)(r_a+r_b),$$
$$(\gamma_c-\gamma)\beta=(\alpha_a-\alpha)(r_c-r), \quad (\gamma_a+\gamma_b)\beta_a=(\alpha_a-\alpha)(r_a+r_b),$$
$$(\gamma_c-\gamma)\alpha_c=(\beta_a+\beta_c)(r_c-r), \quad (\gamma_a+\gamma_b)\alpha_b=(\beta_b-\beta)(r_a+r_b),$$
$$(\gamma_c-\gamma)\beta_c=(\alpha_b+\alpha_c)(r_c-r), \quad (\gamma_a+\gamma_b)\beta_b=(\alpha_b+\alpha_c)(r_a+r_b),$$

$$(\alpha_a-\alpha)r_b=(\alpha_b+\alpha_c)s_c=a\alpha_b=\beta_a\gamma_b=\beta_b\gamma, \quad (\alpha_b+\alpha_c)r=(\alpha_a-\alpha)s_a=a\alpha=\beta\gamma_b=\beta_c\gamma,$$
$$(\alpha_a-\alpha)r_c=(\alpha_b+\alpha_c)s_b=a\alpha_c=\beta\gamma_c=\beta_c\gamma_a, \quad (\alpha_b+\alpha_c)r_a=(\alpha_a-\alpha)s=a\alpha_a=\beta_a\gamma_c=\beta_b\gamma_a,$$
$$(\beta_b-\beta)r_c=(\beta_a+\beta_c)s_a=b\beta_c=\gamma_c\alpha=\gamma_b\alpha_c, \quad (\beta_a+\beta_c)r=(\beta_b-\beta)s_b=b\beta=\gamma_a\alpha=\gamma\alpha_c,$$
$$(\beta_b-\beta)r_a=(\beta_a+\beta_c)s_c=b\beta_a=\gamma\alpha_a=\gamma_a\alpha_b, \quad (\beta_a+\beta_c)r_b=(\beta_b-\beta)s=b\beta_b=\gamma_b\alpha_a=\gamma_c\alpha_b,$$
$$(\gamma_c-\gamma)r_a=(\gamma_a+\gamma_b)s_b=c\gamma_a=\alpha_a\beta=\alpha_c\beta_a, \quad (\gamma_a+\gamma_b)r=(\gamma_c-\gamma)s_c=c\gamma=\alpha\beta_a=\alpha_b\beta,$$
$$(\gamma_c-\gamma)r_b=(\gamma_a+\gamma_b)s_a=c\gamma_b=\alpha\beta_b=\alpha_b\beta_c, \quad (\gamma_a+\gamma_b)r_c=(\gamma_c-\gamma)s=c\gamma_c=\alpha_b\beta_c=\alpha_c\beta_b,$$

$$(\alpha_a-\alpha)^2=a^2+(r_a-r)^2=\frac{a^2bcrr_a}{are(\Delta ABC)^2}=\frac{a^2bc}{ss_a}=(r_a-r)\frac{(r_b+r_c)(r_c+r_a)(r_a+r_b)}{r_br_c+r_cr_a+r_ar_b},$$
$$(\beta_b-\beta)^2=b^2+(r_b-r)^2=\frac{ab^2crr_b}{are(\Delta ABC)^2}=\frac{ab^2c}{ss_b}=(r_b-r)\frac{(r_b+r_c)(r_c+r_a)(r_a+r_b)}{r_br_c+r_cr_a+r_ar_b},$$
$$(\gamma_c-\gamma)^2=c^2+(r_c-r)^2=\frac{abc^2rr_c}{are(\Delta ABC)^2}=\frac{abc^2}{ss_c}=(r_c-r)\frac{(r_b+r_c)(r_c+r_a)(r_a+r_b)}{r_br_c+r_cr_a+r_ar_b},$$
$$(\alpha_b+\alpha_c)^2=a^2+(r_b+r_c)^2=\frac{a^2bcr_br_c}{are(\Delta ABC)^2}=\frac{a^2bc}{s_bs_c}=(r_b+r_c)\frac{(r_b+r_c)(r_c+r_a)(r_a+r_b)}{r_br_c+r_cr_a+r_ar_b},$$
$$(\beta_a+\beta_c)^2=b^2+(r_a+r_c)^2=\frac{ab^2cr_ar_c}{are(\Delta ABC)^2}=\frac{ab^2c}{s_as_c}=(r_a+r_c)\frac{(r_b+r_c)(r_c+r_a)(r_a+r_b)}{r_br_c+r_cr_a+r_ar_b},$$
$$(\gamma_a+\gamma_b)^2=c^2+(r_a+r_b)^2=\frac{abc^2r_ar_b}{are(\Delta ABC)^2}=\frac{abc^2}{s_as_b}=(r_a+r_b)\frac{(r_b+r_c)(r_c+r_a)(r_a+r_b)}{r_br_c+r_cr_a+r_ar_b},$$

$$(\alpha_a-\alpha)^2=r_a^2(r_b+r_c)\frac{(r_b+r_c)(r_c+r_a)(r_a+r_b)}{(r_br_c+r_cr_a+r_ar_b)^2},$$
$$(\beta_b-\beta)^2=r_b^2(r_a+r_c)\frac{(r_b+r_c)(r_c+r_a)(r_a+r_b)}{(r_br_c+r_cr_a+r_ar_b)^2},$$
$$(\gamma_c-\gamma)^2=r_c^2(r_a+r_b)\frac{(r_b+r_c)(r_c+r_a)(r_a+r_b)}{(r_br_c+r_cr_a+r_ar_b)^2},$$

$$(\alpha_a-\alpha)^2+(\beta_b-\beta)^2+(\gamma_c-\gamma)^2+(\alpha_b+\alpha_c)^2+(\beta_a+\beta_c)^2+(\gamma_a+\gamma_b)^2=3(r_a+r_b+r_c-r)^2,$$

$$(\alpha_a-\alpha)^2=(\beta_a+\beta_c)\beta_a-(\beta_b-\beta)\beta=(\gamma_a+\gamma_b)\gamma_b-(\gamma_c-\gamma)\gamma,$$
$$(\beta_b-\beta)^2=(\gamma_a+\gamma_b)\gamma_b-(\gamma_c-\gamma)\gamma=(\alpha_b+\alpha_c)\alpha_b-(\alpha_a-\alpha)\alpha,$$
$$(\gamma_c-\gamma)^2=(\alpha_b+\alpha_c)\alpha_c-(\alpha_a-\alpha)\alpha=(\beta_a+\beta_c)\beta_c-(\beta_b-\beta)\beta_a,$$
$$(\alpha_b+\alpha_c)^2=(\beta_a+\beta_c)\beta_c+(\beta_b-\beta)\beta_b=(\gamma_a+\gamma_b)\gamma_b+(\gamma_c-\gamma)\gamma_c,$$
$$(\beta_a+\beta_c)^2=(\gamma_a+\gamma_b)\gamma_a+(\gamma_c-\gamma)\gamma_c=(\alpha_b+\alpha_c)\alpha_c+(\alpha_a-\alpha)\alpha_a,$$
$$(\gamma_a+\gamma_b)^2=(\alpha_b+\alpha_c)\alpha_b+(\alpha_a-\alpha)\alpha_a=(\beta_a+\beta_c)\beta_a+(\beta_b-\beta)\beta_b,$$

$$\begin{aligned}(\alpha_a-\alpha)(\alpha_b+\alpha_c)&=(\beta_a+\beta_c)\beta_b-(\beta_b-\beta)\beta_c=(\gamma_a+\gamma_b)\gamma_c-(\gamma_c-\gamma)\gamma_b\\&=(\beta_a+\beta_c)\beta+(\beta_b-\beta)\beta_a=(\gamma_a+\gamma_b)\gamma_b+(\gamma_c-\gamma)\gamma_a,\\(\beta_b-\beta)(\beta_a+\beta_c)&=(\gamma_a+\gamma_b)\gamma_b-(\gamma_c-\gamma)\gamma_a=(\alpha_b+\alpha_c)\alpha_a-(\alpha_a-\alpha)\alpha_c\\&=(\gamma_a+\gamma_b)\gamma+(\gamma_c-\gamma)\gamma_b=(\alpha_b+\alpha_c)\alpha+(\alpha_a-\alpha)\alpha_b,\\(\gamma_c-\gamma)(\gamma_a+\gamma_b)&=(\alpha_b+\alpha_c)\alpha_a-(\alpha_a-\alpha)\alpha_b=(\beta_a+\beta_c)\beta_b-(\beta_b-\beta)\beta_a\\&=(\alpha_b+\alpha_c)\alpha+(\alpha_a-\alpha)\alpha_c=(\beta_a+\beta_c)\beta_a+(\beta_b-\beta)\beta_c,\end{aligned}$$

$$\frac{(\alpha_a-\alpha)(\beta_b-\beta)(\gamma_c-\gamma)}{(\alpha_b+\alpha_c)(\beta_a+\beta_c)(\gamma_a+\gamma_b)}=\frac{r}{s},\qquad \frac{(\alpha_a-\alpha)(\beta_a+\beta_c)(\gamma_a+\gamma_b)}{(\alpha_b+\alpha_c)(\beta_b-\beta)(\gamma_c-\gamma)}=\frac{r_a}{s_a},$$

$$\frac{(\alpha_b+\alpha_c)(\beta_b-\beta)(\gamma_a+\gamma_b)(\gamma_c-\gamma)}{(\alpha_a-\alpha)(\beta_a+\beta_c)(\gamma_c-\gamma)}=\frac{r_b}{s_b},\qquad \frac{(\alpha_b+\alpha_c)(\beta_a+\beta_c)(\gamma_c-\gamma)}{(\alpha_a-\alpha)(\beta_b-\beta)(\gamma_a+\gamma_b)}=\frac{r_c}{s_c},$$

$$\frac{(\alpha_a-\alpha)(\beta_b-\beta)(\gamma_c-\gamma)}{(\alpha_b+\alpha_c)(\beta_a+\beta_c)(\gamma_a+\gamma_b)}=\frac{\alpha\beta\gamma}{abc},$$

$$\begin{aligned}(\alpha_b+\alpha_c)(\beta_a+\beta_c)(\gamma_a+\gamma_b)&=(\alpha_b+\alpha_c)(\beta_b-\beta)(\gamma_c-\gamma)+(\alpha_a-\alpha)(\beta_a+\beta_c)(\gamma_c-\gamma)\\&\quad+(\alpha_a-\alpha)(\beta_b-\beta)(\gamma_a+\gamma_b),\end{aligned}$$

$$(\alpha_a-\alpha)\alpha s=(\beta_b-\beta)\beta s=(\gamma_c-\gamma)\gamma s=(\alpha_b+\alpha_c)\alpha r_a=(\beta_a+\beta_c)\beta r_b=(\gamma_a+\gamma_b)\gamma r_c=$$
$$(\alpha_a-\alpha)\alpha_a s_a=(\beta_b-\beta)\beta_a r_b=(\gamma_c-\gamma)\gamma_a r_c=(\alpha_b+\alpha_c)\alpha_a r=(\beta_a+\beta_c)\beta_a s_a=(\gamma_a+\gamma_b)\gamma_a s_a=$$
$$(\alpha_a-\alpha)\alpha_b r_c=(\beta_b-\beta)\beta_b s_b=(\gamma_c-\gamma)\gamma_b r_a=(\alpha_b+\alpha_c)\alpha_b s_b=(\beta_a+\beta_c)\beta_b r=(\gamma_a+\gamma_b)\gamma_b s_b=$$
$$(\alpha_a-\alpha)\alpha_c r_b=(\beta_b-\beta)\beta_c r_a=(\gamma_c-\gamma)\gamma_c s_c=(\alpha_b+\alpha_c)\alpha_c s_c=(\beta_a+\beta_c)\beta_c s_c=(\gamma_a+\gamma_b)\gamma_c r_c$$
$$=bac,$$

$$\frac{1}{(\alpha_a-\alpha)^2}+\frac{1}{(\alpha_b+\alpha_c)^2}=\frac{1}{a^2},\quad \frac{1}{(\beta_b-\beta)^2}+\frac{1}{(\beta_a+\beta_c)^2}=\frac{1}{b^2},\quad \frac{1}{(\gamma_c-\gamma)^2}+\frac{1}{(\gamma_a+\gamma_b)^2}=\frac{1}{c^2},$$

$$\frac{\alpha}{\alpha_a}+\frac{\beta}{\beta_b}+\frac{\gamma}{\gamma_c}=1,\quad \frac{\alpha_a}{\alpha}-\frac{\beta_a}{\beta_c}-\frac{\gamma_c}{\gamma_b}=1,-\frac{\alpha_b}{\alpha_c}+\frac{\beta_b}{\beta}-\frac{\gamma_b}{\gamma_a}=1,-\frac{\alpha_c}{\alpha_b}-\frac{\beta_c}{\beta_a}+\frac{\gamma_c}{\gamma}=1,$$

$$\frac{\alpha_a-\alpha}{\alpha_a}+\frac{\beta_b-\beta}{\beta_b}+\frac{\gamma_c-\gamma}{\gamma_c}=2,\ -\frac{\alpha_a-\alpha}{\alpha}+\frac{\beta_a+\beta_c}{\beta_c}+\frac{\gamma_a+\gamma_b}{\gamma_b}=2,$$
$$\frac{\alpha_b+\alpha_c}{\alpha_c}-\frac{\beta_b-\beta}{\beta}+\frac{\gamma_a+\gamma_b}{\gamma_a}=2,\ \frac{\alpha_b+\alpha_c}{\alpha_b}+\frac{\beta_a+\beta_c}{\beta_a}-\frac{\gamma_c-\gamma}{\gamma}=2,$$

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha_a^2}+\frac{1}{\alpha_b^2}+\frac{1}{\alpha_c^2}=\frac{4}{h_a^2},\quad \frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\beta_a^2}+\frac{1}{\beta_b^2}+\frac{1}{\beta_c^2}=\frac{4}{h_b^2},\quad \frac{1}{\gamma^2}+\frac{1}{\gamma_a^2}+\frac{1}{\gamma_b^2}+\frac{1}{\gamma_c^2}=\frac{4}{h_c^2},$$
$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha_a^2}+\frac{1}{\alpha_b^2}+\frac{1}{\alpha_c^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\beta_a^2}+\frac{1}{\beta_b^2}+\frac{1}{\beta_c^2}+\frac{1}{\gamma^2}+\frac{1}{\gamma_a^2}+\frac{1}{\gamma_b^2}+\frac{1}{\gamma_c^2}=\frac{1}{r}+\frac{1}{r_a^2}+\frac{1}{r_b^2}+\frac{1}{r_c^2},$$

$$\begin{aligned}4are(\Delta I_a I_b I_c)&=2(\alpha_b+\alpha_c)\alpha_a=2(\beta_a+\beta_c)\beta_b=2(\gamma_a+\gamma_b)\gamma_c\\&=(\alpha_a-\alpha)(\alpha_b+\alpha_c)+(\beta_b-\beta)(\beta_a+\beta_c)+(\gamma_c-\gamma)(\gamma_a+\gamma_b),\\4are(\Delta I I_c I_b)&=2(\alpha_b+\alpha_c)\alpha=2(\beta_b-\beta)\beta_c=2(\gamma_c-\gamma)\gamma_b\\&=-(\alpha_a-\alpha)(\alpha_b+\alpha_c)+(\beta_b-\beta)(\beta_a+\beta_c)+(\gamma_c-\gamma)(\gamma_a+\gamma_b),\\4are(\Delta I_c I I_a)&=2(\alpha_a-\alpha)\alpha_c=2(\beta_a+\beta_c)\beta=2(\gamma_c-\gamma)\gamma_a\\&=(\alpha_a-\alpha)(\alpha_b+\alpha_c)-(\beta_b-\beta)(\beta_a+\beta_c)+(\gamma_c-\gamma)(\gamma_a+\gamma_b),\\4are(\Delta I_b I_a I)&=2(\alpha_a-\alpha)\alpha_b=2(\beta_b-\beta)\beta_a=2(\gamma_a+\gamma_b)\gamma\\&=(\alpha_a-\alpha)(\alpha_b+\alpha_c)+(\beta_b-\beta)(\beta_a+\beta_c)-(\gamma_c-\gamma)(\gamma_a+\gamma_b),\end{aligned}$$

Notación para el problema 11:

$$u_1 = |B B_a|,\ u_2 = |C B_a|, \quad u_1' = |B E_a|,\ u_2' = |C E_a|,$$
$$v_1 = |C B_b|,\ v_2 = |A B_b|, \quad v_1' = |C E_b|,\ v_2' = |A E_b|,$$
$$w_1 = |A B_c|\ w_2 = |B B_c|, \text{ y } \ w_1' = |A E_c|, w_2' = |B E_c|,$$

11. Probar las siguientes identidades:

$$\frac{b}{c} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_2'}{u_1'}, \quad \frac{c}{a} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{v_2'}{v_1'}, \quad \frac{a}{b} = \frac{w_2}{w_1} = \frac{w_2'}{w_1'},$$

$$bc = u_1 u_2 + b_a^2 = u_1' u_2' - e_a^2,\ ca = v_1 v_2 + b_b^2 = v_1' v_2' - e_b^2,\ ab = w_1 w_2 + b_c^2 = w_1' w_2' - e_c^2,$$

$$b^2 = u_2^2 + b_a^2 \frac{u_2}{u_1} = u_2'^{\,2} - e_a^2 \frac{u_2'}{u_1'}, \quad c^2 = u_1^2 + b_a^2 \frac{u_2}{u_1} = u_1'^{\,2} - e_a^2 \frac{u_2'}{u_1'},$$

$$u_1 = \frac{ca}{b+c},\ v_1 = \frac{ab}{a+c},\ w_1 = \frac{bc}{a+b}, \quad u_1' = \frac{ca}{|b-c|},\ v_1' = \frac{ab}{|a-c|}, w_1' = \frac{bc}{|a-b|},$$
$$u_2 = \frac{ab}{b+c},\ v_2 = \frac{bc}{c+a},\ w_2 = \frac{ca}{a+b}, \quad u_2' = \frac{ab}{|b-c|},\ v_2' = \frac{bc}{|a-c|},\ w_2' = \frac{ca}{|a-b|},$$

$$u_1' + u_1 = u_2' - u_2 = |B_a\ E_a| = \frac{2abc}{|b^2-c^2|} = \frac{2u_1u_2}{|u_2-u_1|},\ v_1' + v_1 = v_2' - v_2 = |B_b\ E_b| = \frac{2abc}{|a^2-c^2|} = \frac{2v_1v_2}{|v_2-v_1|},$$
$$w_1' + w_1 = w_2' - w_2 = |B_c\ E_c| = \frac{2abc}{|a^2-b^2|} = \frac{2w_1w_2}{|w_2-w_1|},$$

$$\frac{1}{|B_aE_a|} - \frac{1}{|B_bE_b|} + \frac{1}{|B_cE_c|} = 0, \quad \frac{a^2}{|B_aE_a|} - \frac{b^2}{|B_bE_b|} + \frac{c^2}{|B_cE_c|} = 0,$$
$$\frac{a}{|B_aE_a|} - \frac{b}{|B_bE_b|} + \frac{c}{|B_cE_c|} = \frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{2abc},$$

$$u_1 = u_1' \frac{u_2'-u_1'}{u_2'+u_1'},\ u_2 = u_2' \frac{u_2'-u_1'}{u_2'+u_1'},\ v_1 = v_1' \frac{v_2'-v_1'}{v_2'+v_1'},\ v_2 = v_2' \frac{v_2'-v_1'}{v_2'+v_1'}, w_1 = w_1' \frac{w_2'-w_1'}{w_2'+w_1'},\ w_2 = w_2' \frac{w_2'-w_1'}{w_2'+w_1'},$$
$$u_1' = u_1 \frac{u_2+u_1}{u_2-u_1},\ u_2' = u_2 \frac{u_2+u_1}{u_2-u_1}, v_1' = v_1 \frac{v_2+v_1}{v_2-v_1},\ v_2' = v_2 \frac{v_2+v_1}{v_2-v_1}, w_1' = w_1 \frac{w_2+w_1}{w_2-w_1},\ w_2' = w_2 \frac{w_2+w_1}{w_2-w_1},$$

$$|B_a\ E_a|^2 = b_a^2 + e_a^2, |B_c\ E_c|^2 = b_b^2 + e_b^2, |B_b\ E_b|^2 = b_c^2 + e_c^2,$$

$$b_a = \frac{2\sqrt{bcss_a}}{b+c} = \frac{2are(\Delta ABC)\sqrt{bcrr_a}}{(b+c)rr_a}, \quad b_b = \frac{2\sqrt{acss_b}}{a+c} = \frac{2are(\Delta ABC)\sqrt{acrr_b}}{(a+c)rr_a},$$
$$b_c = \frac{2\sqrt{abss_c}}{a+b} = \frac{2are(\Delta ABC)\sqrt{abrr_c}}{(a+b)rr_c},$$

$$e_a = \frac{2\sqrt{bcs_b s_c}}{|b-c|} = \frac{2are(\Delta ABC)\sqrt{bcr_b r_c}}{|b-c|\, r_b r_c}, \qquad e_b = \frac{2\sqrt{acs_a s_c}}{|a-c|} = \frac{2are(\Delta ABC)\sqrt{acr_a r_c}}{|a-c|\, r_a r_c},$$

$$e_c = \frac{2\sqrt{abs_a s_b}}{|a-b|} = \frac{2are(\Delta ABC)\sqrt{abr_a r_b}}{|a-b|\, r_a r_b},$$

$$\frac{b_a^2}{bc} + \frac{a^2}{(b+c)^2} = 1, \qquad \frac{a^2}{(b-c)^2} - \frac{e_a^2}{bc} = 1,$$

$$\frac{b_b^2}{ac} + \frac{b^2}{(a+c)^2} = 1, \qquad \frac{b^2}{(a-c)^2} - \frac{e_b^2}{ac} = 1,$$

$$\frac{b_c^2}{ab} + \frac{c^2}{(a+b)^2} = 1, \qquad \frac{c^2}{(a-b)^2} - \frac{e_c^2}{ab} = 1,$$

$$b_a^2(b+c)^2 + e_a^2(b-c)^2 = 4b^2c^2, \quad b_b^2(a+c)^2 + e_b^2(a-c)^2 = 4a^2c^2, \quad b_c^2(a+b)^2 + e_c^2(a-b)^2 = 4a^2b^2,$$

$$\frac{b_a^2}{bc}(b+c)^2 + \frac{b_b^2}{ac}(a+c)^2 + \frac{b_c^2}{ab}(a+b)^2 = 4s^2, \qquad \frac{b_a^2}{bc}(b+c)^2 - \frac{e_b^2}{ac}(a-c)^2 - \frac{e_c^2}{ab}(a-b)^2 = 4s_a^2,$$

$$-\frac{e_a^2}{bc}(b-c)^2 + \frac{b_b^2}{ac}(a+c)^2 - \frac{e_c^2}{ab}(a-b)^2 = 4s_b^2, \quad -\frac{e_a^2}{bc}(b-c)^2 - \frac{e_b^2}{ac}(a-c)^2 + \frac{b_c^2}{ab}(a+b)^2 = 4s_c^2,$$

$$b_a^2\, bc\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 + b_b^2\, ca\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right)^2 + b_c^2\, ab\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 = 4s^2,$$

$$\frac{b_a^2}{a^2}\frac{1}{bc}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 + \frac{b_b^2}{b^2}\frac{1}{ca}\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right)^2 + \frac{b_c^2}{c^2}\frac{1}{ab}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 = \left(\frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab}\right)^2,$$

$$\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\frac{b^2-c^2}{b_b^2 b_c^2} + \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right)\frac{c^2-a^2}{b_c^2 b_a^2} + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\frac{a^2-b^2}{b_a^2 b_b^2} = 0,$$

$$\frac{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}}{s_b s_c}\frac{b^2+c^2}{b_b^2 b_c^2} + \frac{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}}{s_c s_a}\frac{c^2+a^2}{b_c^2 b_a^2} + \frac{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}{s_a s_b}\frac{a^2+b^2}{b_a^2 b_b^2} = 0,$$

$$u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2 = abc\left(\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(a+c)^2} + \frac{c}{(a+b)^2}\right),$$

$$u_1' u_2' + v_1' v_2' + w_1' w_2' = abc\left(\frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(a-c)^2} + \frac{a^2}{(a-b)^2}\right),$$

$$u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2 + b_a^2 + b_b^2 + b_c^2 = bc + ca + ab,$$

$$u_1' u_2' + v_1' v_2' + w_1' w_2' \;'\; e_a^2 + e_b^2 + e_c^2 = bc + ca + ab,$$

$$\alpha b_a + \beta b_b + \gamma b_c = a v_1 + b w_1 + c u_1,$$

$$b_a (b_a - \alpha) + b_b (b_b - \beta) + b_c (b_c - \gamma) = (a - v_1) v_2 + (b - w_1) w_2 + (c - u_1) u_2,$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - ((b_a - \alpha)^2 + (b_b - \beta)^2 + (b_c - \gamma)^2) = (u_1 + v_1 + w_1)(u_2 + v_2 + w_2) - 2(u_1 v_2 + v_1 w_2 + w_1 u_2),$$

$$\frac{1}{u_1 v_1 w_1} = (\frac{1}{b} + \frac{1}{c})(\frac{1}{c} + \frac{1}{a})(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}), \qquad \frac{1}{u_1 v_1' w_1'} = (\frac{1}{b} + \frac{1}{c})(\frac{1}{c} - \frac{1}{a})(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}),$$

$$\frac{1}{u_1' v_1 w_1'} = (\frac{1}{c} - \frac{1}{b})(\frac{1}{c} + \frac{1}{a})(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}), \qquad \frac{1}{u_1' v_1' w_1} = (\frac{1}{c} - \frac{1}{b})(\frac{1}{c} - \frac{1}{a})(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}),$$

$$\frac{u_1 v_1 w_1}{abc} = \frac{abc}{(b+c)(c+a)(a+b)}, \qquad \frac{u_1 v_1' w_1'}{abc} = \frac{abc}{(b+c)(c-a)(b-a)},$$

$$\frac{u_1' v_1 w_1'}{abc} = \frac{abc}{(c-b)(c+a)(b-a)}, \qquad \frac{u_1' v_1' w_1}{abc} = \frac{abc}{(c-b)(c-a)(a+b)},$$

$$\frac{|BB_a||CB_b||AB_c|}{abc} = \frac{abc}{|P_a^b P_a^c||P_b^c P_b^a||P_c^a P_c^b|},$$

$$u_1 v_1 w_1 = u_2 v_2 w_2 = \frac{4are(\Delta ABC)Rr}{h_a + h_b + h_c - r}, \qquad u_1 v_1' w_1' = u_2 v_2' w_2' = \frac{4are(\Delta ABC)Rr_a}{h_a - h_b - h_c + r_a},$$

$$u_1' v_1 w_1' = u_2' v_2 w_2' = \frac{4are(\Delta ABC)Rr_b}{h_a - h_b + h_c - r_b}, \qquad u_1' v_1' w_1 = u_2' v_2' w_2 = \frac{4are(\Delta ABC)Rr_c}{-h_a - h_b + h_c + r_c},$$

$$u_1' v_1' w_1' = u_2' v_2' w_2' = \frac{a^2 b^2 c^2}{(b-c)(a-c)(a-b)}, \qquad u_1' v_1 w_1 = u_2' v_2 w_2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{(b-c)(c+a)(a+b)},$$

$$u_1 v_1' w_1 = u_2 v_2' w_2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{(b+c)(a-c)(a+b)}, \qquad u_1 v_1 w_1' = u_2 v_2 w_2' = \frac{a^2 b^2 c^2}{(b+c)(c+a)(a-b)},$$

$$\frac{|BE_a||CE_b||AE_c|}{abc} = \frac{abc}{|P_a P_a^a||P_a P_b^b||P_c P_c^c|},$$

$$b_a b_b b_c = \frac{8are(\Delta ABC)abcs}{(b+c)(c+a)(a+b)}, \qquad e_a e_b e_c = \frac{8are(\Delta ABC)abcr}{(b-c)(c-a)(a-b)},$$

$$b_a e_b e_c = \frac{8are(\Delta ABC)abcs_a}{(b+c)(a-c)(a-b)}, \qquad e_a b_b b_c = \frac{8are(\Delta ABC)abcr_a}{(b-c)(c+a)(a+b)},$$

$$e_a b_b e_c = \frac{8are(\Delta ABC)abcs_b}{(b-c)(c+a)(a-b)}, \qquad b_a e_b b_c = \frac{8are(\Delta ABC)abcr_b}{(b+c)(a-c)(a+b)},$$

$$e_a e_b b_c = \frac{8are(\Delta ABC)abcs_c}{(b-c)(a-c)(a+b)}, \qquad b_a b_b e_c = \frac{8are(\Delta ABC)abcr_c}{(b+c)(c+a)(a-b)},$$

$$b_a\,b_b\,b_c = \frac{32Rare(\Delta ABC)^3}{r(b+c)(c+a)(a+b)} = \frac{8are(\Delta ABC)^2}{h_a+h_b+h_c-r}, \qquad e_a\,e_b\,e_c = \frac{32Rare(\Delta ABC)}{s(b-c)(a-c)(a-b)},$$

$$\frac{|BB_a|CB_b||AB_c|}{b_ab_bb_c} = \frac{R}{2s}, \qquad \frac{|BE_a|CE_b||AE_c|}{e_ae_be_c} = \frac{R}{2r},$$

$$b_a\,b_b\,b_c\,(b+c)(c+a)(a+b) = 8\alpha\beta\gamma s^3 = 8\alpha_a\,\beta_a\,\gamma_a s s_a^2 = 8\alpha_b\,\beta_b\,\gamma_b s s_b^2 = 8\alpha_c\,\beta_c\,\gamma_c s s_c^2$$
$$= 8\alpha_a\,\beta_b\,\gamma_c sr^2 = 8\alpha\beta_c\,\gamma_b s r_a^2 = 8\alpha_c\beta\gamma_a s r_b^2 = 8\alpha_b\,\beta_a\gamma s r_c^2,$$

$$e_a\,e_b\,e_c\,(b-c)(a-c)(a-b) = 8\alpha_a\,\beta_b\,\gamma_c r^3 = 8\alpha\beta_c\,\gamma_b r r_a^2 = 8\alpha_c\beta\gamma_a r r_b^2 = 8\alpha_b\,\beta_a\gamma r r_c^2$$
$$= 8\alpha\beta\gamma rs^2 = 8\alpha_a\,\beta_a\,\gamma_a r s_a^2 = 8\alpha_b\,\beta_b\,\gamma_b r s_b^2 = 8\alpha_c\,\beta_c\,\gamma_c r s_c^2,$$

$$b_a\,b_b\,b_c\,e_a\,e_b\,e_c = \frac{64are(\Delta ABC)^3a^2b^2c^2}{(b^2-c^2)(a^2-c^2)(a^2-b^2)} = \frac{1024\,are(\Delta ABC)^5R^2}{(b^2-c^2)(a^2-c^2)(a^2-b^2)},$$

$$\frac{2a}{b_ae_a} = \frac{h_c^2-h_b^2}{h_ah_bh}, \quad \frac{2b}{b_be_b} = \frac{h_c^2-h_a^2}{h_ah_bh_c}, \quad \frac{2c}{b_ce_c} = \frac{h_b^2-h_a^2}{h_ah_bh_c},$$
$$\frac{2h_a}{b_ae_a} = \frac{b^2-c^2}{abc}, \quad \frac{2h_b}{b_be_b} = \frac{a^2-c^2}{abc}, \quad \frac{2h_c}{b_ce_c} = \frac{a^2-b^2}{abc},$$

$$b_a\,e_a = \frac{4are(\Delta ABC)bc}{b^2-c^2}, \quad b_b\,e_b = \frac{4are(\Delta ABC)ca}{a^2-c^2}, \quad b_c\,e_c = \frac{4are(\Delta ABC)ab}{a^2-b^2},$$

$$\frac{a}{b_ae_a} - \frac{b}{b_be_b} + \frac{c}{b_ce_c} = 0, \qquad \frac{h_a}{b_ae_a} - \frac{h_b}{b_be_b} + \frac{h_c}{b_ce_c} = 0,$$
$$\frac{1}{ab_ae_a} - \frac{1}{bb_be_b} + \frac{1}{cb_ce_c} = 0, \qquad \frac{1}{h_ab_ae_a} - \frac{|}{h_bb_be_b} + \frac{1}{h_cb_ce_c} = 0,$$

$$\frac{\alpha}{b_a} = \frac{r(b+c)}{2are(\Delta ABC)} = \frac{b+c}{2s}, \quad \frac{\beta}{b_b} = \frac{r(c+a)}{2are(\Delta ABC)} = \frac{c+a}{2s}, \quad \frac{\gamma}{b_c} = \frac{r(a+b)}{2are(\Delta ABC)} = \frac{a+b}{2s},$$
$$\frac{\alpha_a}{b_a} = \frac{r_a(b+c)}{2are(\Delta ABC)} = \frac{b+c}{2s_a}, \quad \frac{\beta_b}{b_b} = \frac{r_b(c+a)}{2are(\Delta ABC)} = \frac{c+a}{2s_b}, \quad \frac{\gamma_c}{b_c} = \frac{r_a(a+b)}{2are(\Delta ABC)} = \frac{a+b}{2s_c},$$
$$\frac{\alpha_b}{e_a} = \frac{r_b(b-c)}{2are(\Delta ABC)} = \frac{b-c}{2s_b}, \quad \frac{\alpha_b}{e_a} = \frac{r_c(b-c)}{2are(\Delta ABC)} = \frac{b-c}{2s_c}, \quad \frac{\beta_c}{e_b} = \frac{r_c(a-c)}{2are(\Delta ABC)} = \frac{a-c}{2s_c},$$
$$\frac{\beta_a}{e_b} = \frac{r_a(a-c)}{2are(\Delta ABC)} = \frac{a-c}{2s_a}, \quad \frac{\gamma_a}{e_c} = \frac{r_a(a-b)}{2are(\Delta ABC)} = \frac{a-b}{2s_a}, \quad \frac{\gamma_b}{e_c} = \frac{r_c(a-b)}{2are(\Delta ABC)} = \frac{a-b}{2s_b},$$

$$\frac{\alpha}{|IB_a|}=\frac{b+c}{a},\quad \frac{\beta}{|IB_b|}=\frac{a+c}{b},\quad \frac{\gamma}{|IB_c|}=\frac{a+b}{c},\quad \frac{\alpha_a}{|I_aB_a|}=\frac{b+c}{a},\quad \frac{\beta_b}{|I_bB_b|}=\frac{a+c}{b},\quad \frac{\gamma_c}{|I_cB_c|}=\frac{a+b}{c},$$

$$\frac{\alpha_b}{|I_bE_a|}=\frac{\alpha_c}{|I_cE_a|}=\frac{b-c}{a},\quad \frac{\beta_c}{|I_cE_b|}=\frac{\beta_a}{|I_aE_b|}=\frac{a-c}{b},\quad \frac{\gamma_a}{|I_aE_c|}=\frac{\gamma_b}{|I_bE_c|}=\frac{a-b}{c},$$

$$\frac{b_a}{|IB_a|}=\frac{2s}{a},\ \frac{b_b}{|IB_b|}=\frac{2s}{b},\ \frac{b_c}{|IB_c|}=\frac{2s}{c},\ \frac{b_a}{|I_aB_a|}=\frac{2s_a}{a},\ \frac{b_b}{|I_bB_b|}=\frac{2s_b}{b},\ \frac{b_c}{|I_cB_c|}=\frac{2s_c}{c},$$

$$\frac{e_a}{|I_bE_a|}=\frac{2s_b}{a},\ \frac{e_a}{|I_cE_a|}=\frac{2s_c}{a},\ \frac{e_b}{|I_cE_b|}=\frac{2s_c}{b},\ \frac{e_b}{|I_aE_b|}=\frac{2s_a}{b},\ \frac{e_c}{|I_aE_c|}=\frac{2s_a}{c},\ \frac{e_c}{|I_bE_c|}=\frac{2s_b}{c},$$

$$b_a=\frac{2are(\Delta ABC)}{r}\frac{\alpha}{P_a^bP_a^c}=\frac{2are(\Delta ABC)}{r_a}\frac{\alpha_a}{P_a^bP_a^c},\quad b_b=\frac{2are(\Delta ABC)}{r}\frac{\beta}{P_b^aP_b^c}=\frac{2are(\Delta ABC)}{r_b}\frac{\beta_b}{P_b^aP_b^c},$$

$$b_c=\frac{2are(\Delta ABC)}{r}\frac{\gamma}{P_c^aP_c^b}=\frac{2are(\Delta ABC)}{r_c}\frac{\gamma_c}{P_c^aP_c^b},$$

$$e_a=\frac{2are(\Delta ABC)}{r_b}\frac{\alpha_b}{P_aP_a^a}=\frac{2are(\Delta ABC)}{r_c}\frac{\alpha_c}{P_aP_a^a},\quad e_b=\frac{2are(\Delta ABC)}{r_a}\frac{\beta_a}{P_bP_b^b}=\frac{2are(\Delta ABC)}{r_c}\frac{\beta_c}{P_bP_b^b},$$

$$e_c=\frac{2are(\Delta ABC)}{r_a}\frac{\gamma_a}{P_cP_c^c}=\frac{2are(\Delta ABC)}{r_b}\frac{\gamma_b}{P_cP_c^c},$$

$$|IB_a||IB_b||IB_c|=\frac{16are(\Delta ABC)R^2r^2}{(b+c)(a+c)(a+b)},\qquad |I_aB_a||I_bB_b||I_cB_c|=\frac{16are(\Delta ABC)R^2s^2}{(b+c)(a+c)(a+b)},$$

$$|I_aB_a||I_aE_b||I_aE_c|=\frac{16are(\Delta ABC)R^2r_a^2}{(b+c)(a-c)(a-b)},\qquad |IB_a||I_cE_b||I_bE_c|=\frac{16are(\Delta ABC)R^2s_a^2}{(b+c)(a-c)(a-b)},$$

$$|I_bE_a||I_bB_b||I_bE_c|=\frac{16are(\Delta ABC)R^2r_b^2}{(b-c)(a+c)(a-b)},\qquad |I_cE_a||IB_b||I_aE_c|=\frac{16are(\Delta ABC)R^2s_b^2}{(b-c)(a+c)(a-b)},$$

$$|I_cE_a||I_cE_b||I_cB_c|=\frac{16are(\Delta ABC)R^2r_c^2}{(b-c)(a-c)(a+b)},\qquad |I_bE_a||I_aE_b||IB_c|=\frac{16are(\Delta ABC)R^2s_c^2}{(b-c)(a-c)(a+b)},$$

$$|IB_a|=\frac{a\sqrt{bcrr_a}}{(b+c)r_a},\ |IB_b|=\frac{b\sqrt{acrr_b}}{(a+c)r_b},\ |IB_c|=\frac{c\sqrt{abrr_c}}{(a+b)r_c},$$

$$|I_aB_a|=\frac{a\sqrt{bcrr_a}}{(b+c)r},\ |I_bB_b|=\frac{b\sqrt{acrr_b}}{(a+c)r},\ |I_cB_c|=\frac{c\sqrt{abrr_c}}{(a+b)r},$$

$$|I_bE_a|=\frac{a\sqrt{bcr_br_c}}{(b-c)r_c},\ |I_bE_b|=\frac{b\sqrt{acr_ar_c}}{(a-c)r_c},\ |I_bE_c|=\frac{c\sqrt{abr_ar_b}}{(a-b)r_b},$$

$$|I_cE_a|=\frac{a\sqrt{bcr_br_c}}{(b-c)r_b},\ |I_cE_b|=\frac{b\sqrt{acr_ar_c}}{(a-c)r_a},\ |I_cE_c|=\frac{c\sqrt{abr_ar_b}}{(a-b)r_b},$$

$$|IB_a||IB_b||IB_c|=\frac{4Rr^3}{h_a+h_b+h_c-r},\qquad |I_aB_a||I_bB_b||I_cB_c|=\frac{4Rrs^2}{h_a+h_b+h_c-r},$$

$$\frac{|IB_a||IB_b||IB_c|}{b_ab_bb_c}=\frac{Rr}{2s^2},\qquad \frac{b_a}{|B_aE_a|}\frac{b_b}{|B_bE_b|}\frac{b_c}{|B_cE_c|}=\frac{(b-c)(a-c)(a-b)}{16R^2r}=\frac{h_ah_bh_c}{e_ae_be_c},$$

$$\frac{|I_aB_a||I_bB_b||I_cB_c|}{b_ab_bb_c} = \frac{R}{2r}, \qquad \frac{e_a}{|B_aE_a|}\frac{e_b}{|B_bE_b|}\frac{e_c}{|B_cE_c|} = \frac{(b+c)(a+c)(a+b)}{16R^2r} = \frac{h_ah_bh_c}{b_ab_bb_c},$$

$$b_a^2 = \frac{4rr_a(rr_a+r_br_c)}{(r+r_a)^2},\ b_b^2 = \frac{4rr_b(rr_b+r_ar_c)}{(r+r_b)^2},\ b_c^2 = \frac{4rr_c(rr_c+r_ar_b)}{(r+r_c)^2},$$
$$e_a^2 = \frac{4r_br_c(rr_a+r_br_c)}{(r_b-r_c)^2},\ e_b^2 = \frac{4r_ar_c(rr_b+r_ar_c)}{(r_a-r_c)^2},\ e_c^2 = \frac{4r_ar_b(rr_c+r_ar_b)}{(r_a-r_b)^2},$$

$$\frac{1}{b_a^2}+\frac{1}{e_a^2}=\frac{1}{h_a^2}, \qquad \frac{1}{b_b^2}+\frac{1}{e_b^2}=\frac{1}{h_b^2}, \qquad \frac{1}{b_c^2}+\frac{1}{e_c^2}=\frac{1}{h_c^2},$$

$$\frac{b_a}{b_bb_c}+\frac{b_a}{e_be_c}=\frac{e_a}{e_bb_c}-\frac{e_a}{b_be_c}=\frac{h_a}{h_bh_c}=\frac{2R}{a^2},\quad \frac{b_b}{b_ab_c}+\frac{b_b}{e_ae_c}=\frac{e_b}{e_ab_c}-\frac{e_b}{b_ae_c}=\frac{h_b}{h_ah_c}=\frac{2R}{b^2},$$
$$\frac{b_c}{b_ab_c}+\frac{b_c}{e_ae_c}=\frac{e_c}{e_bb_a}-\frac{e_c}{b_be_a}=\frac{h_c}{h_ah_b}=\frac{2R}{c^2},$$

$$\frac{b_a}{e_a}=\frac{b_be_c-e_bb_c}{b_bb_c+e_be_c}, \qquad \frac{b_b}{e_b}=\frac{b_ce_a-e_cb_a}{b_cb_a+e_ce_a}, \qquad \frac{b_c}{e_c}=\frac{b_ae_b-e_ab_b}{b_ab_b+e_ae_b},$$

$$b_a\,b_b\,b_c = e_a\,b_b\,e_c - e_a\,e_b\,b_c - b_a\,e_b\,e_c,$$

$$b_a=\frac{2\alpha\alpha_a}{\alpha+\alpha_a},\ b_b=\frac{2\beta\beta_b}{\beta+\beta_b},\ b_c=\frac{2\gamma\gamma_c}{\gamma+\gamma_c}, \quad \frac{2}{b_a}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha_a},\ \frac{2}{b_b}=\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta_b},\ \frac{2}{b_c}=\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma_c},$$
$$e_a=\frac{2\alpha_b\alpha_c}{\alpha_b-\alpha_c},\ e_a=\frac{2\beta_a\beta_c}{\beta_a-\beta_c},\ e_c=\frac{2\gamma_a\gamma_b}{\gamma_a-\gamma_b},\ \frac{2}{e_a}=\frac{1}{\alpha_c}-\frac{1}{\alpha_b},\ \frac{2}{e_b}=\frac{1}{\beta_c}-\frac{1}{\beta_a},\ \frac{2}{e_c}=\frac{1}{\gamma_b}-\frac{1}{\gamma_a},$$

$$2|U_aA|=\alpha+\alpha_a,\quad 2|U_bB|=\beta+\beta_b,\quad 2|U_cC|=\gamma+\gamma_c,$$
$$2|U'_aA|=\alpha_b-\alpha_c,\quad 2|U'_bB|=\beta_a-\beta_c,\quad 2|U'_cC|=\gamma_a-\gamma_b,$$
$$|U_aA|(\alpha_b+\alpha_c)=2R(b+c),\quad |U_bB|(\beta_a+\beta_c)=2R(a+c),\quad |U_cC|(\gamma_a+\gamma_b)=2R(a+b),$$
$$|U'_aA|(\alpha_a-\alpha)=2R(b-c),\quad |U'_bB|(\beta_b-\beta)=2R(a-c),\quad |U'_cC|(\gamma_c-\gamma)=2R(b-c),$$
$$|U_aA|b_a=|U'_aA|e_a=bc,\quad |U_bB|b_b=|U'_bB|e_b=ac,\quad |U_cC|b_c=|U'_cC|e_c=ab,$$

$$|U_aA|^2=\frac{bc(b+c)^2}{4ss_a},\quad |U_bB|^2=\frac{ac(a+c)^2}{4ss_b},\quad |U_cC|^2=\frac{ab(a+b)^2}{4ss_c},$$
$$|U'_aA|^2=\frac{bc(b-c)^2}{4s_bs_c},\quad |U'_bB|^2=\frac{ac(a-c)^2}{4s_as_c},\quad |U_cC|^2=\frac{ab(a-b)^2}{4s_as_b},$$

$$are(\Delta ABC)=\frac{bc(b^2-c^2)}{4|AU_a||AU'_a|}=\frac{ac(a^2-c^2)}{4|BU_b||BU'_b|}=\frac{ab(a^2-b^2)}{4|CU_b||CU'_b|},$$

$$b_a(b+c)=h_a(\alpha_b+\alpha_c),\quad b_b(a+c)=h_b(\beta_a+\beta_c),\quad b_c(a+b)=h_c(\gamma_a+\gamma_b),$$
$$e_a(b-c)=h_a(\alpha_a-\alpha),\quad e_b(a-c)=h_b(\beta_b-\beta),\quad e_c(a-b)=h_c(\gamma_c-\gamma),$$

$$\frac{4}{b_a^2}+\frac{4}{e_a^2}=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha_a^2}+\frac{1}{\alpha_b^2}+\frac{1}{\alpha_c^2}, \qquad \frac{4}{b_b^2}+\frac{4}{e_b^2}=\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\beta_a^2}+\frac{1}{\beta_b^2}+\frac{1}{\beta_c^2},$$

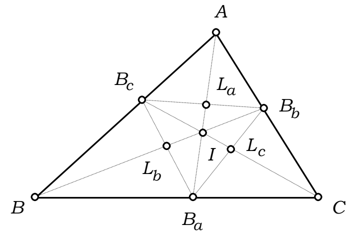
$$\frac{4}{b_c^2}+\frac{4}{e_c^2}=\frac{1}{\gamma^2}+\frac{1}{\gamma_a^2}+\frac{1}{\gamma_b^2}+\frac{1}{\gamma_c^2},$$

$$\frac{\alpha}{b_a}+\frac{\beta}{b_b}+\frac{\gamma}{b_c}=\frac{\alpha_a}{b_a}-\frac{\beta_a}{e_b}+\frac{\gamma_a}{e_c}=\frac{\beta_b}{b_b}+\frac{\gamma_b}{e_c}-\frac{\alpha_b}{e_a}=\frac{\gamma_c}{b_c}+\frac{\alpha_c}{e_a}+\frac{\beta_c}{e_b}=2,$$

$$\frac{\alpha_a}{e_a}-\frac{\beta_b}{e_b}+\frac{\gamma_c}{e_c}=\frac{\alpha}{e_a}+\frac{\beta_c}{b_b}-\frac{\gamma_b}{b_c}=\frac{\alpha_c}{b_a}+\frac{\beta}{e_b}-\frac{\gamma_a}{b_c}=\frac{\alpha_b}{b_a}-\frac{\beta_a}{b_b}+\frac{\gamma}{e_c}=0.$$

Notación para la lista 12:

L_a es el punto de intersección de AI y $B_b\ B_c$,
L_b es el punto de intersección de BI y $B_a\ B_c$ y
L_c es el punto de intersección de CI y $B_a\ B_b$.



12. $$\frac{|AL_a|}{|IL_a|}=\frac{|AB_a|}{|IB_a|}=\frac{h_a}{r},\ \frac{|BL_b|}{|IL_b|}=\frac{|BB_b|}{|IB_b|}=\frac{h_b}{r},\ \frac{|CL_c|}{|IL_c|}=\frac{|CB_c|}{|IB_c|}=\frac{h}{r},$$

$$|A\,L_a|=\frac{h_a\alpha}{h_a+r},\ |B\,L_b|=\frac{h_b\beta}{h_b+r},\ |C\,L_c|=\frac{h_c\gamma}{h_c+r},\ |I\,L_a|=\frac{r\alpha}{h_a+r},\ |I\,L_b|=\frac{r\beta}{h_b+r},\ |I\,L_c|=\frac{r\gamma}{h_c+r},$$

$$|A\,L_a|=\frac{h_a\sqrt{bcrr_a}}{(h_a+r)r_a},\quad |B\,L_b|=\frac{h_b\sqrt{acrr_b}}{(h_b+r)r_b},\quad |C\,L_c|=\frac{h_c\sqrt{abrr_c}}{(h_c+r)r_c},$$

$$|I\,L_a|=\frac{r\sqrt{bcrr_a}}{(h_a+r)r_a},\quad |I\,L_b|=\frac{r\sqrt{acrr_b}}{(h_b+r)r_b},\quad |I\,L_c|=\frac{r\sqrt{abrr_c}}{(h_c+r)r_c},$$

$$4are(\Delta ABC)(R+2r_a)=4R\,are(\Delta ABC)+\frac{16are(\Delta ABC)^2}{2s_a}=$$

$$abc+(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)+b^2c+bc^2-c^2a+ca^2+a^2b-ab^2+a^2-b^2-c^2+3abc,$$

$$4are(\Delta ABC)(R+2r_b)=4R\,are(\Delta ABC)+\frac{16are(\Delta ABC)^2}{2s_b}=$$

$$abc+(a+b+c)(b-a+c)(b+a-c)+b^2c-bc^2+c^2a+ca^2-a^2b+ab^2-a^2+b^2-c^2+3abc,$$

$$4are(\Delta ABC)(R+2r_c)=4R\,are(\Delta ABC)+\frac{16are(\Delta ABC)^2}{2s_c}=$$

$$abc+(a+b+c)(b-a+c)(a-b+c)-b^2c-bc^2+c^2a-ca^2+a^2b+ab^2-a^2-b^2+c^2+3abc,$$

$$|B_b\ B_c|=\frac{4are(\Delta ABC)|OI_a|}{(a+c)(a+b)},\quad |B_a\ B_c|=\frac{4are(\Delta ABC)|OI_b|}{(b+a)(b+c)},\quad |B_a\ B_b|=\frac{4are(\Delta ABC)|OI_c|}{(c+a)(c+b)},$$

$$4are(\Delta ABC)(R-2r)=4R\,are(\Delta ABC)-\frac{16are(\Delta ABC)^2}{2s}=$$

$$abc+(b-a+c)(a-b+c)(a+b-c)-a^2b-ab^2-c^2a-ca^2-b^2c-bc^2+a^2+b^2+c^2+3abc,$$

$$|E_b\ E_c|=\frac{4are(\Delta ABC)|OI|}{(a-c)(a-b)},\quad |E_a\ E_c|=\frac{4are(\Delta ABC)|OI|}{(a-b)(b-c)},\quad |E_a\ E_b|=\frac{4are(\Delta ABC)|OI|}{(b-c)(a-c)},$$

$$|B_b\ B_c| = \frac{4are(\Delta ABC)}{(a+c)(a+b)r_b r_c}\ \sqrt{[(R^2+2Rr)r_b r_c + 2aRare(\Delta ABC)]r_b r_c}\ ,$$

$$|B_a\ B_c| = \frac{4are(\Delta ABC)}{(b+c)(b+a)r_a r_c}\ \sqrt{[(R^2+2Rr)r_a r_c + 2bRare(\Delta ABC)]r_a r_c}\ \text{y}$$

$$|B_a\ B_b| = \frac{4are(\Delta ABC)}{(c+a)(c+b)r_a r_b}\ \sqrt{[(R^2+2Rr)r_a r_b + 2cRare(\Delta ABC)]r_a r_b}\ .$$

9.716. Sea ΔABC un triángulo cualquiera. Probar las siguientes afirmaciones:

a. Los triángulos $\Delta U_a BI$ y $\Delta U_a B I_a$ son isósceles.

b. $|U_a I| = |U_a B| = |U_a\ I_a| = |U_a C|$, $|U_b I| = |U_b A| = |U_b\ I_b| = |U_b C|$ y $|U_c I| = |U_c A| = |U_c\ I_c| = |U_c B|$.

c. Probar que los puntos B, I, C y I_a yacen sobre un círculo de centro U_a y radio $\dfrac{a}{2\cos\frac{\angle A}{2}} = 2R\operatorname{sen}\dfrac{\angle A}{2}$.

d. Probar que los puntos I_b, B, C y I_c yacen sobre un círculo de centro U_a' y radio $\dfrac{a}{\operatorname{sen}\frac{\angle A}{2}} = 2R\cos\dfrac{\angle A}{2}$.

e. Probar que los triángulos $\Delta U_b AI$ y $\Delta U_c AI$ son isósceles.

f. ¿Qué representa la recta $\overleftrightarrow{U_b U_c}$ para el segmento AI?

g. ¿Qué representa el punto I para el triángulo $\Delta U_a\ U_b\ U_c$?

h. Probar que los ángulos $\angle U_b AC$ y $\angle U_c AU_a$ son complementarios.

i. Expresar las medidas de los ángulos del triángulo $\Delta U_a\ U_b\ U_c$ en función de las medidas de los ángulos del triángulo original ΔABC.

9.717. Sean ΔABC un triángulo y C(O,R) su circuncírculo.

a. Si D es la proyección de C sobre la recta tangente a C(O,R) en el punto A, probar que $AB \parallel DH_a$.

b. Probar que $U_a C$ es tangente al circuncírculo del triángulo $\Delta A B_a C$.

9.718. Sean ΔABC un triángulo, y D y E los puntos de intersección de $\overleftrightarrow{U_b U_c}$ con AB y AC, respectivamente. Probar que el triángulo ΔADE es isósceles.

9.719[I-241]. Sean ΔABC un triángulo. Si $\angle CU_a B \cong \angle U_c AU_b$, $\angle U_b CU_a \cong \angle BU_c A$ y $\angle U_a BU_c \cong \angle AU_b C$, probar que el triángulo ΔABC es equilátero.

9.720. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumplen las siguientes identidades:

$|OI|^2 = R(R-2r)$ (*fórmula de Euler*), $|I_a O|^2 = R(R+2r_a)$, $|I_b O|^2 = R(R+2r_b)$, $|I_c O|^2 = R(R+2r_c)$,

$$\frac{1}{R+|OI|} + \frac{1}{R-|OI|} = \frac{1}{r},\quad \frac{1}{R+|OI_a|} + \frac{1}{R-|OI_a|} = \frac{1}{r_a},\quad \frac{1}{R+|OI_b|} + \frac{1}{R-|OI_b|} = \frac{1}{r_b},$$

$$\frac{1}{R+|OI_c|} + \frac{1}{R-|OI_c|} = \frac{1}{r_c},$$

$$|OI|^2 + |I_a O|^2 + |I_b O|^2 + |I_c O|^2 = 12R^2,\qquad |I_a I|^2 + |I_b I|^2 + |I_c I|^2 = 8R(2R-r),$$

$$are(\Delta I_a\ I_b\ I_c) = \frac{abc}{2r} = 2Rs = 8R^2\cos\frac{\angle A}{2}\cos\frac{\angle B}{2}\cos\frac{\angle C}{2},$$

$$are(\Delta I I_b\ I_c) = 2R s_a,\quad are(\Delta I I_a\ I_c) = 2R s_b,\quad are(\Delta I I_a\ I_b) = 2R s_c,$$

$$|AI| = r\csc\frac{\angle A}{2},\ |BI| = r\csc\frac{\angle B}{2},\ |BI| = r\csc\frac{\angle C}{2},\ \ |A I_a| = r_a\csc\frac{\angle A}{2}, |B I_b| = r_b\csc\frac{\angle B}{2}, |C I_c| = r_c\csc\frac{\angle C}{2}$$

$$|A I_a| = a\sec\frac{\angle A}{2},\quad |B I_b| = b\sec\frac{\angle B}{2},\quad |C I_c| = c\sec\frac{\angle C}{2},$$

$$|IA| = \frac{2bc}{a+b+c}\cos\frac{\angle A}{2},\ |IB| = \frac{2ac}{a+b+c}\cos\frac{\angle B}{2},\ |IC| = \frac{2ab}{a+b+c}\cos\frac{\angle C}{2},$$

$$|AI||AI_a||AI_b||AI_c| = 4R^2\ h_a^2,\ |BI||AI_a||AI_b||AI_c| = 4R^2\ h_b^2,\ |BI||AI_a||AI_b||AI_c| = 4R^2\ h_c^2,$$

$$|AI||BI||CI| = abc\tan\frac{\angle A}{2}\tan\frac{\angle B}{2}\tan\frac{\angle C}{2} = 4Rr^2,$$

$$|I_b\ I_c| = a\csc\frac{\angle A}{2} = 4R\cos\frac{\angle A}{2},\ |I_a\ I_c| = b\csc\frac{\angle B}{2} = 4R\cos\frac{\angle B}{2},\ |I_a\ I_b| = c\csc\frac{\angle C}{2} = 4R\cos\frac{\angle C}{2},$$

$$|II_a|^2 = 4R(r_a - r),\quad |I\ I_b|^2 = 4R(r_b - r),\quad |I\ I_c|^2 = 4R(r_c - r),\quad |II_a||I\ I_b||I\ I_c| = 16R^2 r,$$

$$|I_b\ I_c|^2 = 4R(r_b + r_c),\ |I_a\ I_c|^2 = 4R(r_a + r_c),\ |I_a\ I_b|^2 = 4R(r_a + r_b),$$

$$|AI|^2 + |AI_a|^2 + |AI_b|^2 + |AI_c|^2 = 16R^2,$$

$$|I_a\ I_b|^2 + |I_b\ I_c|^2 + |I_c\ I_a|^2 = 8R(4R+r),$$

$$|II_a|^2 + |I_b\ I_c|^2 = |II_b|^2 + |I_a\ I_c|^2 = |II_c|^2 + |I_a\ I_b|^2,$$

$$\frac{|II_a||I_bI_c|}{\text{sen}\angle A} = \frac{|II_b||I_aI_c|}{\text{sen}\angle B} = \frac{|II_c||I_aI_b|}{\text{sen}\angle C},$$

$$\frac{|I_bI_c|^2}{r_br_c} + \frac{|I_aI_c|^2}{r_ar_c} + \frac{|I_aI_b|^2}{r_ar_b} = \frac{8R}{r} \qquad \text{y} \qquad r^3|II_a||II_b||II_c| = |IA|^2|IB|^2|IC|^2.$$

9.721. Dado un triángulo ΔABC cualquiera, probar que el circunradio del triángulo $\Delta I_a\ I_b\ I_c$ es $2R$.

9.722[a-64]. Sea ΔABC un triángulo rectángulo con hipotenusa c. Probar las siguientes afirmaciones:

a. Los vértices del triángulo ΔABC yacen sobre los lados del triángulo $\Delta I_a\ I_b\ I_c$.

b. $|I_a\ I_b| = \sqrt{2}\,c,\ \ |I_a\ I_c| = \sqrt{(a+b)^2 + b^2}$ y $|I_b\ I_c| = \sqrt{(b+c)^2 + a^2}$.

9.723[l-320]. Sean ΔABC un triángulo. Si $|II_a| = |II_b| = |II_c|$, probar que el triángulo es equilátero.

9.724(KöMal, Problem F. 3229, Abril 1998). Sea ΔABC un triángulo tal que r_c es la media geométrica de r_a y r_b. Expresar c en función de a y b.

9.725[l-320]. Sean ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$. Si $AI \cong IM_a$, probar que el triángulo debe tener un ángulo de media 30.

9.726. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumplen las siguientes relaciones:

a. $|H_b\ H_c| = a\cos\angle A,\ |H_a\ H_c| = b\cos\angle B,\ |H_a\ H_b| = c\cos\angle C$.

b. $are(\Delta H_a\ H_b\ H_c) = 2are(\Delta ABC)\cos\angle A\cos\angle B\cos\angle C$.

c. El inradio y el circunradio del triángulo $\Delta H_a\ H_b\ H_c$ son $2R\cos\angle A\cos\angle B\cos\angle C$ y $\frac{R}{2}$, respectivamente.

d. $|OH|^2 = R^2(1 - 8\cos\angle A\cos\angle B\cos\angle C)$.

e. $|OI|^2 = R^2(1 - 8\,\text{sen}\frac{\angle A}{2}\,\text{sen}\frac{\angle B}{2}\,\text{sen}\frac{\angle C}{2}) = R^2(3 - 2\cos\angle A - 2\cos\angle B - 2\cos\angle C)$.

f. $|OI_a|^2 = R^2(1 + 8\,\text{sen}\frac{\angle A}{2}\cos\frac{\angle B}{2}\cos\frac{\angle C}{2}),\ \ |OI_b|^2 = R^2(1 + 8\cos\frac{\angle A}{2}\,\text{sen}\frac{\angle B}{2}\cos\frac{\angle C}{2})$

y $|OI_c|^2 = R^2(1 + 8\cos\frac{\angle A}{2}\cos\frac{\angle B}{2}\,\text{sen}\frac{\angle C}{2})$.

g. $|OH|^2 = 2r^2 - 4R^2\cos\angle A\cos\angle B\cos\angle C$.

h. $|OG|^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$.

i. $are(\Delta IOH) = 2R^2\,\text{sen}\frac{\angle A - \angle B}{2}\,\text{sen}\frac{\angle C - \angle A}{2}\,\text{sen}\frac{\angle B - \angle C}{2}$.

j. $are(\Delta IHG) = \dfrac{4}{3}R^2 \operatorname{sen}\dfrac{\angle A - \angle B}{2}\operatorname{sen}\dfrac{\angle C - \angle A}{2}\operatorname{sen}\dfrac{\angle B - \angle C}{2}$.

9.727[a-7]. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumple la igualdad

$$a m_a^2 + b m_b^2 + c m_c^2 = \frac{s}{2}(s^2 + 2Rr + 5r^2).$$

9.728(K. W. Feuebach). En todo triángulo ΔABC, probar que se cumplen las siguientes identidades:

a. $a^2 + b^2 + c^2 + |AH|^2 + |BH|^2 + |CH|^2 = 12R^2$.

b. $|AH|^2 + |BH|^2 + |CH|^2 = 4R^2 - 4Rr$.

c. $|AH| + |BH| + |CH| = 2R + 2r$.

d. $a^2 + b^2 + c^2 = 4Rr + 8R^2$.

9.729. Sea ΔABC un triángulo. Probar las siguientes identidades:

a. $a|OM_a| + b|BM_b| + c|CM_c| = rs$.

b. $(b + c)|OM_a| + (a + c)|BM_b| + (a + b)|CM_c| = Rs$.

c. $|OM_a| + |BM_b| + |CM_c| = r + R$.

9.730. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumple que

$$\operatorname{sen}\angle BAM_a = \frac{a\operatorname{sen}\angle B}{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}},\ \operatorname{sen}\angle M_aAC = \frac{a\operatorname{sen}\angle C}{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}\ \text{y}$$

$$\operatorname{sen}\angle AM_aB = \operatorname{sen}\angle CM_aA = \frac{2b\operatorname{sen}\angle C}{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}.$$

9.731(Milošević). Probar que en todo triángulo ΔABC se cumplen las identidades:

$$\frac{h_b + h_c}{r_a} + \frac{h_a + h_c}{r_b} + \frac{h_a + h_b}{r_c} = 6,$$

$$h_b - h_c = 8R\operatorname{sen}\frac{\angle A}{2}\left(\cos\frac{\angle A}{2}\right)^2\cos\frac{\angle B - \angle C}{2},\quad h_a - h_c = 8R\operatorname{sen}\frac{\angle B}{2}\left(\cos\frac{\angle B}{2}\right)^2\cos\frac{\angle C - \angle A}{2}\ \text{y}$$

$$h_a - h_b = 8R\operatorname{sen}\frac{\angle C}{2}\left(\cos\frac{\angle C}{2}\right)^2\cos\frac{\angle A - \angle B}{2}.$$

9.732. Dado un triángulo ΔABC y su incírculo $\mathsf{C}(I,r)$, probar las siguientes afirmaciones:

a. El radio del círculo tangente a $\mathsf{C}(I,r)$ y a los lados a y b es igual a $r\left(\tan\dfrac{\angle A + \angle B}{4}\right)^2$.

b. El radio del círculo tangente a $\mathsf{C}(I,r)$ y a los lados b y c es igual a $r\left(\tan\dfrac{\angle B + \angle C}{4}\right)^2$.

c. El radio del círculo tangente a $\mathsf{C}(I,r)$ y a los lados a y c es igual a $r\left(\tan\dfrac{\angle A + \angle C}{4}\right)^2$.

9.733. Sea ΔABC un triángulo.

a. Expresar las áreas de los triángulos ΔABC, ΔABB_a y ΔAB_aC en función de b, c, b_a y $\angle A$.

b. Probar que $(b + c)b_a\operatorname{sen}\dfrac{\angle A}{2} = bc\operatorname{sen}\angle A$.

c. Probar que $are(\Delta OBU_a) = \dfrac{1}{2}R^2\operatorname{sen}\angle A = R^2\operatorname{sen}\dfrac{\angle A}{2}\cos\dfrac{\angle A}{2}$.

9.734[l-238]. Sean ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$, y D y E las proyecciones de H_a sobre los lados AB y AC, respectivamente. Probar que $4|DE|^2 = |BC|^2 - 4|M_aH_a|$.

9.735[a-64]. Dado un triángulo rectángulo, probar que la suma de las áreas de su incírculo y sus tres excírculos es igual a 2π por el cuadrado de la longitud de su hipotenusa.

9.736[l-238]. Sea ΔABC un triángulo tal que $2m(\angle BIC) = 3m(\angle A)$, probar que el ángulo $\angle A$ es recto.

9.737[Problem 2876, Cruz Mathematicorum with Mathematical Mayhem 30 (2004), 439-440]. Si ΔABC es un triángulo tal que $IO \perp AM_a$, probar la identidad $\frac{2}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

9.738. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumplen las identidades

$$m(\angle P_b IA) = \frac{m(\angle CIA) + m(\angle AIB) - m(\angle BIC)}{2}, \quad m(\angle P_c IB) = \frac{m(\angle BIC) + m(\angle AIB) - m(\angle CIA)}{2} \text{ y}$$

$$m(\angle P_a IC) = \frac{m(\angle BIC) + m(\angle CIA) - m(\angle AIB)}{2}.$$

9.739. Probar que en todo triángulo ΔABC se cumple que

$$\frac{|AI|}{|AI_a|} = \frac{s_a}{s}, \quad \frac{|BI|}{|BI_b|} = \frac{s_b}{s} \text{ y } \frac{|CI|}{|CI_c|} = \frac{s_c}{s}.$$

9.740 [a-166]. Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos.

a. Si $m(\angle A) + m(\angle A') = 180$ y $\angle B \cong \angle B'$, probar que $aa' = bb' + cc'$.

b. Si $m(\angle A) + m(\angle A') = 90$, probar que $\left(\frac{s}{bc}\right)^2 + \left(\frac{s'}{b'c'}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

9.741(KöMal, Problem Gy. 3154, October 1997). Si ΔABC es un triángulo tal que $c \le b \le a$, probar la desigualdad

$$a|AP_a| + b|BP_b| + c|CP_c| \le \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \le a|CP_c| + b|BP_b| + c|AP_a|.$$

9.742[a-5] y [a-6]. Continuamos con el formulario de M. Baker iniciado en el Problema 8.839:

$$are(\Delta ABC) = \frac{r}{2}\sqrt{\frac{(r_a + r_b)(r_b + r_c)(r_c + r_a)}{R}} = \sqrt{\frac{Rh_a h_b h_c}{2}} = \frac{2R^2 h_a h_b h_c}{abc}$$

$$= \frac{R}{2s}(h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a) = \frac{h_a h_b h_c}{8abc}(r_a + r_b + r_c - r)^2 = \frac{Rh_b h_c}{a} = \frac{Rh_a h_c}{b} = \frac{Rh_a h_b}{c}$$

$$= R h_a \operatorname{sen}\angle A = R h_b \operatorname{sen}\angle B = R h_c \operatorname{sen}\angle C$$

$$= \frac{1}{3} r\left(\sqrt{2m_a^2 + 2m_b^2 - m_c^2} + \sqrt{2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2} + \sqrt{2m_c^2 + 2m_a^2 - m_b^2}\right)$$

$$= \frac{1}{3} r_a\left(\sqrt{2m_a^2 + 2m_b^2 - m_c^2} - \sqrt{2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2} + \sqrt{2m_c^2 + 2m_a^2 - m_b^2}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{r r_b r_c}{-\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}}} = \sqrt{\frac{r_a r_b r_c}{\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}}}$$

$$= \frac{R}{2s}(h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a) = \frac{R}{2s_a}(h_a h_b - h_b h_c + h_c h_a)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} Rr(h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a)} = \sqrt{\frac{1}{2} Rr_a(h_a h_b - h_b h_c + h_c h_a)}$$

$$= \sqrt{\frac{r}{(-\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c})(\frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c})(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c})}}$$

$$= \sqrt{\frac{r_a}{(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c})(\frac{1}{h_a}-\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c})(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c})}}$$

$$= \sqrt{2rb_ab_bb_c(\frac{\cos(\angle A-\angle B)+\cos(\angle B-\angle C)+\cos(\angle C-\angle A)+1}{\cos\angle A+\cos\angle B+\cos\angle C-1})}$$

$$= \sqrt{2r_ab_ab_bb_c(\frac{\cos(\angle A-\angle B)+\cos(\angle B-\angle C)+\cos(\angle C-\angle A)+1}{-\cos\angle A+\cos\angle B+\cos\angle C+1})}$$

$$= r^2\cot\frac{\angle A}{2}\cot\frac{\angle B}{2}\cot\frac{\angle C}{2} = r_a^2\tan\frac{\angle A}{2}\tan\frac{\angle B}{2}\tan\frac{\angle C}{2}$$

$$= \frac{ab}{8R^2}(a\sqrt{4R^2-b^2}+b\sqrt{4R^2-a^2})$$

$$= r_a\,r_b\tan\frac{\angle A}{2} = r^2\cot\frac{\angle A}{2}+2Rr\text{sen}\angle A = r_a^2\cot\frac{\angle A}{2}-2R\,r_a\text{sen}\angle A$$

$$= r\,r_a\sqrt{\frac{r_b+r_c}{r_a-r}} = r_b\,r_c\sqrt{\frac{r_a-r}{r_b+r_c}} = r\,r_a\sqrt{\frac{4R-(r_a-r)}{r_a-r}} = r_b\,r_c\sqrt{\frac{4R-(r_b+r_c)}{r_b+r_c}}$$

$$= \frac{sh_ar_a}{h_a+2r_a} = \frac{s_ah_ar}{h_a-2r} = r\sqrt{\frac{h_ar_br_c}{h_a-2r}} = r_a\sqrt{\frac{h_ar_br_c}{h_a+2r_a}}$$

$$= \sqrt{\frac{rr_a}{(\frac{1}{h_a}-\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c})(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c})}} = \sqrt{\frac{r_br_c}{(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c})(-\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c})}}$$

$$= \frac{2R}{r}are(\Delta P_a\ P_b\ P_c)$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{2d_ad_bd_cr\text{sen}\angle A\text{sen}\angle B\text{sen}\angle C}$$

$$= \frac{d_ad_bd_cr}{16R^2} = \frac{d_ad_bd_c}{4R}\text{sen}\frac{\angle A}{2}\text{sen}\frac{\angle B}{2}\text{sen}\frac{\angle C}{2}$$

$= r_a\,r_b\sqrt{\frac{d_c^2}{(r_a+r_b)^2}-1}$, en donde $d_a = |I_b\ I_c|$, $d_b = |I_a\ I_c|$ y $d_c = |I_a\ I_b|$.

9.743. Se tiene un cuadrilátero cuyos lados son palos de madera y es movible en sus vértices.
a. ¿Es posible mover los lados del cuadrilátero, de tal manera que se obtenga un cuadrilátero cíclico?
b. Dentro de todos los cuadriláteros que se puedan formar con el cuadrilátero movible, encontrar el de máxima área.

9.744. Sea □*ABCD* un cuadrilátero tal que *C* está en el interior del círculo que pasa por los puntos *A*, *B* y *D*. Probar que *A* está en el interior del círculo que pasa por los puntos *B*, *C* y *D*, y que *D* está en el exterior del círculo que pasa por los puntos *A*, *B* y *C*.

9.745[I-238]. Sea □*ABCD* un cuadrilátero tal que $\overrightarrow{CA}$ es la bisectriz del ángulo ∠*C*. Si *AD* es tangente al circuncírculo del triángulo Δ*ABC*, probar que *AB* es tangente al circuncírculo del triángulo Δ*ACD*.

9.746[I-39]. Dado un cuadrado cuyos lados tienen longitud *a*, calcular el radio del círculo que pasa por el punto medio de *AB*, el centro del cuadrado y el vértice *C* en función de *a*.

9.747. Sea □*ABCD* un paralelogramo cuyos lados tienen longitudes 2 y 4. El círculo que pasa por los puntos *B*, *C* y *D* corta a $\overleftrightarrow{AC}$ en el punto *E*. Encontrar la longitud del segmento *AE*.

9.748. Sean $\square ABCD$ un paralelogramo y O el punto de intersección de sus diagonales. Probar que los circuncírculos de los triángulos ΔABO y ΔCDO son tangentes en el punto O.
9.749[I-238]. Sean $\square ABCD$ un paralelogramo y M y N los puntos medios de AB y CD, respectivamente. Si los círculos $\mathrm{C}(M,|AM|)$ y $\mathrm{C}(N,|NC|)$ son tangentes, probar que $\square ABCD$ es un rombo.
9.750. Probar que las rectas tangentes a un círculo en los puntos extremos de dos de sus diámetros forman un rombo.
9.751[I-39]. Dado un rombo cuyos lados tienen longitud a y con ángulo agudo $\angle\alpha$, probar que el radio del círculo que pasa por dos vértices consecutivos del rombo y es tangente a la recta que contiene al lado opuesto correspondiente es igual a $\dfrac{a((\operatorname{sen}\angle\alpha)^2+1)}{8\operatorname{sen}\angle\alpha}$.
9.752[I-22]. Sea $\square ABCD$ un trapecio tal que $AB \parallel CD$, $m(\angle A) = m(\angle B) = 60$ y $CB \cong CD \cong DA$. Probar que los círculos $\mathrm{C}(A,|AD|)$ y $\mathrm{C}(B,|BC|)$ son tangentes.
9.753. Sea $\square ABCD$ un cuadrado de lado 5. Trazamos un círculo con centro E que sea tangente a $\overleftrightarrow{AB}$ en el punto B y tangente a $\overleftrightarrow{AC}$ en el punto F. Calcular la longitud del segmento AE y el radio del círculo.
9.754. Sea $\square ABCD$ un cuadrado cuyos lados tienen longitud 4. Calcular el radio del círculo tangente a AB en el punto A y tangente al círculo $\mathrm{C}(C,2)$.
9.755. Sea $\square ABCD$ un cuadrado cuyos lados tienen longitud 3. Calcular el radio del círculo que es tangente a AB y a AD, y es externamente tangente a los círculos cuyos diámetros son BC y CD.
9.756. Tenemos un cuadrado $\square ABCD$ y un círculo inscrito en él. Sean E el punto de tangencia de AB y el círculo, y M el punto medio de AE. Por M trazamos una recta tangente al círculo que corte a $\overleftrightarrow{DC}$ en el punto F. Probar que $FD \cong AE$.
9.757. Sean $\square ABCD$ un cuadrado de lado r y O el punto de intersección de sus diagonales. Consideremos el círculo $\mathrm{C}(O,\frac{r}{2})$. Si el círculo $\mathrm{C}(O',s)$ es tangente a $\mathrm{C}(O,\frac{r}{2})$, a AB y a BC expresar s en función de r.
9.758. Sea $\square ABCD$ un trapecio isósceles con $AB \parallel CD$. Si $\square ABCD$ se circunscribe en un círculo $\mathrm{C}(O,r)$, probar que $\angle DOA$ y $\angle BOC$ son ángulos rectos.
9.759. Sean $\square ABCD$ un cuadrado y M el punto medio de AB. Si un círculo con centro en M corta a AD y a BC en los puntos P y Q, respectivamente, probar que $\angle AQM \cong \angle MPB$.
9.760[I-238]. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero cuyas diagonales se cortan en el punto O. Sean P, Q, R y S los circuncentros de los triángulos ΔABO, ΔBCO, ΔCDO y ΔDAO, respectivamente. Probar que $\square PQRS$ es un paralelogramo.
9.761. Sean $\square ABCD$ un cuadrilátero y P el punto de intersección de sus diagonales. Probar que $\square ABCD$ es cíclico si y solo si $|PA||PC| = |PB||PD|$.
9.762. Sean $\square ABCD$ un cuadrilátero y P el punto de intersección de $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$. Probar que $\square ABCD$ es cíclico si y solo si $|PA||PB| = |PC||PD|$.
9.763. Sean $\square ABCD$ un cuadrilátero cíclico tal que $AD \cong DC$ y P el punto de intersección de sus diagonales. Probar las siguientes afirmaciones:
a. $\Delta DAP \sim \Delta ABD$.
b. $|AD|^2 = |BD||DP|$.
9.764. Si $\square ABCD$ es un cuadrilátero cíclico, ¿qué relación deben guardar los ángulos $\angle B$, $\angle ADB$ y $\angle BAC$?
9.765. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero tal que $m(\angle ADB) = 51$, $m(\angle B) = 89$ y $m(\angle BAC) = 40$. Probar que $\square ABCD$ es cíclico.
9.766. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero tal que $m(\angle A) = 70$, $m(\angle C) = 110$ y $m(\angle DBA) = 20$. Encontrar la medida del ángulo $\angle ACB$.
9.767. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero cíclico. Si $m(\angle A) = 80$ y $m(\angle ACB) = 50$, probar que $AD \cong AB$.
9.768. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero cíclico tal que $m(\angle D) = 80$, $m(\angle BAC) = 30$ y $m(\angle DBA) = 60$. Calcular las medidas de los ángulos restantes del cuadrilátero.

9.769. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero cíclico. Si $m(\angle ADB) = 20 = m(\angle CAD)$ y $m(\angle DBA) = 40$. Calcular las medidas de los ángulos del cuadrilátero.

9.770. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero cíclico tal que $m(\angle A) = 70$, $m(\angle D) = 60$ y $m(\angle DBA) = 80$, calcular las medidas de los ángulos $\angle ACD$, $\angle BDA$, $\angle ACB$ y $\angle DBC$.

9.771. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero cíclico tal que $m(\angle A) = 50$ y $CB \cong CD$. Encontrar la medida del ángulo $\angle CBD$.

9.772. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero cíclico y P el punto de intersección de sus diagonales.

a. Si $m(\angle DCA) = 20$, $m(\angle ADB) = 30$ y $m(\angle DPA) = 80$, encontrar la medida de los ángulos $\angle A$ y $\angle B$.

b. Si $m(\angle ADB) = 40$, $m(\angle DPA) = 60$ y $m(\angle DCA) = 35$, encontrar la medida de los ángulos $\angle A$ y $\angle B$.

c. Si $m(\angle CBA) = 70$, $m(\angle BAD) = 95$ y $m(\angle BPC) = 85$, calcular la medida del ángulo $\angle BPC$ y probar que $AB \cong BC$.

9.773. Probar que las bisectrices de los ángulos exteriores de cualquier cuadrilátero forman un cuadrilátero cíclico.

9.774. Probar que las bisectrices de dos ángulos formados por los lados opuestos de un cuadrilátero cíclico son perpendiculares.

9.775. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero cíclico con $AB \cong AD$. Si P es el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero, probar que $\dfrac{|BC|}{|CD|} = \dfrac{|BP|}{|PD|}$.

9.776(USAMOxx). Sean $\square ABCD$ un cuadrilátero cuyas diagonales son perpendiculares. Si P es el punto de intersección de sus diagonales, probar que los cuatro puntos simétricos de P con respecto a cada uno de los lados del cuadrilátero forman un cuadrilátero cíclico.

9.777. Sean $\square ABCD$ un cuadrilátero cíclico, P el punto de intersección de las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{DC}$, y Q el punto de intersección de las rectas $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{BC}$. Si $m(\angle BPC) = 30$ y $m(\angle AQB) = 50$, calcular las medidas de los ángulos del cuadrilátero.

9.778[I-238]. Sean $\square ABCD$ un cuadrilátero, E el punto de intersección de $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$, F el punto de intersección de $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{AD}$, y O el punto de intersección de sus diagonales. Probar que los cuadriláteros $\square OAFB$ y $\square EBOC$ no pueden ser ambos cíclicos. Sugerencia: si $\square OAFB$ y $\square EBOC$ son cíclicos, probar que los ángulos $\angle AFB$ y $\angle BEC$ son suplementarios.

9.779. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero cíclico tal que $m(\angle A) = 120$, $m(\angle B) = 80$ y $\overrightarrow{BD}$ es la bisectriz del ángulo $\angle B$. Si P es el punto de intersección de sus diagonales, encontrar la medida del ángulo $\angle BPC$.

9.780. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero cíclico tal que $m(\angle A) = 70$ y $m(\angle B) = 60$.

a. Probar que las diagonales del cuadrilátero son perpendiculares.

b. Calcular las medidas de los ángulos $\angle DCA$, $\angle BDC$, $\angle CBD$ y $\angle ADB$.

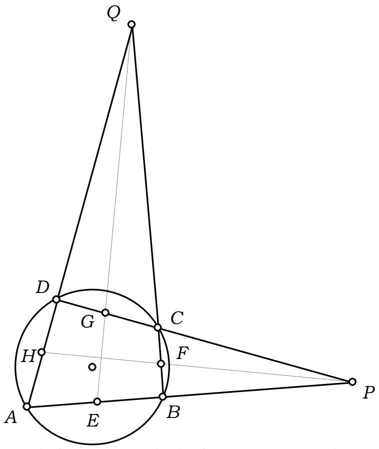
9.781. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero inscrito en un círculo $\mathsf{C}(O,R)$. Por A trazamos una recta paralela a $\overleftrightarrow{BC}$ que corte a BD en el punto E. Probar que $\angle ADE \cong \angle EAC$.

9.782. Sean $\square ABCD$ un cuadrilátero inscrito en un círculo $\mathsf{C}(O,R)$ y P el punto de intersección de sus diagonales. Si $m(\angle A) = 100$, $m(\angle B) = 70$ y $m(\angle APB) = 50$, calcular las medidas de los ángulos $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$ y $\angle DOA$.

9.783. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero. Si $m(\angle A) = 60$, $m(\angle B) = 110$ y $m(\angle C) = 90$, calcular la medida de cada uno de los ángulos del cuadrilátero formado por las bisectrices de los ángulos de $\square ABCD$.

9.784. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero cíclico. Probar que la medida del ángulo formado por las bisectrices de los ángulos $\angle A$ y $\angle B$ es igual a $\dfrac{|m(\angle C) - m(\angle D)|}{2}$.

9.785 [Problem 90, Amer. Math. Monthly 1898, 143]. En la figura:



$\square ABCD$ es un cuadrilátero cíclico, P y Q son los puntos de intersección de sus lados opuestos y $\overrightarrow{PH}$ y $\overrightarrow{QE}$ son las bisectrices de los ángulos $\angle DPA$ y $\angle AQB$, respectivamente. Probar que $\square EFGH$ es un rombo.

Una solución se encuentra en el libro [l-182, Problema 86].

9.786. Si dos pares de lados opuestos de un cuadrilátero cíclico son congruentes, probar que el otro par de lados opuestos son paralelos.
9.787. Dado un cuadrilátero cualquiera $\square$ (a,b,c,d), ¿es posible encontrar un cuadrilátero cíclico cuyos lados tengan longitudes a, b, c y d?
9.788(KöMal, Problem Gy. 3228, October 1998). Si 2, 3, 4 y 6 son las longitudes de los lados de un cuadrilátero cíclico, determinar la razón en que se dividen las diagonales del cuadrilátero.
9.789. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero cíclico. Probar que la bisectriz del ángulo $\angle BAD$ corta a la bisectriz exterior del ángulo $\angle BCD$ en un punto sobre el círculo.
9.790[l-238]. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero inscrito en un círculo $C(O,r)$. Si las bisectrices de los ángulos $\angle BAD$ y $\angle BCD$ cortan a $C(O,r)$ en los puntos E y F, probar que $m(\angle EAF) = 90$.
9.791. Sean $\square ABCD$ un cuadrilátero inscrito en el círculo $C(O,r)$ y P el punto de intersección de $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$. Sean E y F los punto de intersección de la bisectriz de $\angle DPA$ con el círculo $C(O,r)$. Probar que $\angle AFE \cong \angle FEB$.
9.792. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero cíclico con $AB \cong AC$. Si $P \in \overleftarrow{DC}$, probar que $\overrightarrow{DA}$ es la bisectriz del ángulo $\angle PDB$.
9.793. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero inscrito en el círculo $C(O,r)$. Probar que las diagonales de $\square ABCD$ son perpendiculares si y solo si los ángulos $\angle AOB$ y $\angle COD$ son suplementarios.
9.794. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero inscrito en el círculo $C(O,r)$ tal que sus diagonales son perpendiculares. Probar que las rectas tangentes al círculo en los vértices del cuadrilátero forman un cuadrilátero cíclico.
9.795. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero circunscrito. Probar que $\angle AOB$ y $\angle COD$ son suplementarios, lo mismo que los ángulos $\angle BOC$ y $\angle DOA$. ¿Es cierto el recíproco?
9.796. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero circunscrito en el círculo $C(O,1)$. Si las potencias de los vértices A, B y C con respecto al círculo $C(O,r)$ son iguales a 25, 16 y 4, respectivamente, y $|OD| =3$, encontrar las longitudes de los lados del cuadrilátero.
9.797. Tenemos un cuadrilátero que puede ser dividido por una recta en dos cuadriláteros circunscritos. Probar que la longitud del segmento que forma dicha recta con el cuadrilátero es igual a la mitad de la diferencia de las sumas de las longitudes de dos lados opuestos.
9.798(KöMal, Problem Gy. 3219, September 1998). Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero circunscrito en un círculo $C(O,r)$. Probar que uno de los circuncírculos de los triángulos ΔOAB y ΔOCD tiene radio mayor o igual que r.
9.799. Sean $\square ABCD$ un cuadrilátero cíclico, P el punto de intersección de las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{DC}$, y Q el punto de intersección de AC y BD. Probar las siguientes semejanzas:
a. $\Delta ABQ \sim \Delta DCQ$. b. $\Delta AQD \sim \Delta BQC$. c. $\Delta PAC \sim \Delta PDB$.
9.800. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero cíclico. Si una recta paralela a AB corta a AC y BD en los puntos E y F, respectivamente, probar que los puntos F, E, C y D son concíclicos.

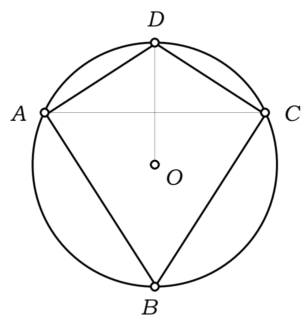
9.801[I-238]. Supongamos que $OA \perp OB$ y $AB \perp \overrightarrow{OP}$. Sean $C \in OA$ y $D \in OB$ tales que $\overrightarrow{OP}$ biseca a CD. Probar que $\square ABCD$ un cuadrilátero cíclico.
9.802(Razvan-98). Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero cíclico tal que $AC \perp BD$. Si los vértices del cuadrilátero yacen sobre el círculo $\mathcal{C}(O,r)$, probar que $are(\square AOCD) = are(\square AOCB)$.
9.803. Si las diagonales de un cuadrilátero cíclico se cortan en el centro del círculo, probar que el cuadrilátero tiene que ser un rectángulo.
9.804[I-238]. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero inscrito en un círculo $\mathcal{C}(O,R)$, de tal forma que $O \in int(\square ABCD)$ y AB y CD no son paralelos. Si M y N son los puntos medios de los arcos $\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{CD}$, probar MN forma con las cuerdas AB y CD ángulos congruentes.

9.805[I-238]. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero cíclico. Sea E el punto de intersección de $\overleftrightarrow{CD}$ y el círculo que pasa por D y es tangente a AB en el punto A. Probar que $AE \parallel BC$.
9.806[I-238]. Sean $\square ABCD$ un cuadrilátero cíclico y $E \in BD$ tales que $AE \parallel BC$. Probar que AC es tangente al circuncírculo del triángulo ΔADE en el punto A.
9.807[I-238]. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero cíclico. Sea E el punto de intersección de la diagonal BD y del círculo que pasa por C y es tangente a AB en el punto B. Probar que los triángulos ΔECD y ΔBCA son semejantes.
9.808. Sean $\square ABCD$ un cuadrilátero inscrito en un círculo $\mathcal{C}(O,r)$ y P el punto de intersección de sus diagonales. Probar que la recta tangente al círculo que pasa por los puntos C, P y D en el punto C pasa por O.
9.809[I-238]. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero tal que $|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$. Tomamos puntos $P \in AB$, $Q \in BC$, $R \in CD$ y $S \in DA$ tales que $AP \cong AS$, $BP \cong BQ$ y $CQ \cong CR$. Probar que los puntos P, Q, R y S son concíclicos.
9.810I-32, Problem 190]. Si $\square ABCD$ es un cuadrilátero cíclico tal que $AB \perp CD$, probar que

$$(ab + cd)^2 + (ad + bc)^2 = (b^2 - d^2).$$

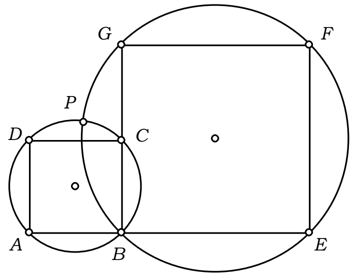
9.811. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero tal que $AB \cong AC \cong AD$. Si $m(\angle A) = 100$, calcular la medida del ángulo $\angle C$.
9.812[I-238]. Sea ΔABC un triángulo. Si $\square A B_b I B_c$ es un cuadrilátero cíclico, probar que $m(\angle A) = 60$ y que $|I B_b| = |I B_c|$ es el radio del círculo que pasa por los vértices de dicho cuadrilátero.
9.813. Probar que las mediatrices de los lados de un cuadrilátero cíclico son concurrentes.
9.814[I-32, Problem 59]. Si un cuadrilátero $\square ABCD$ está inscrito en un círculo de radio 1, probar que la longitud de su lado menor no puede ser mayor que $\sqrt{2}$.
9.815. Dar una condición necesaria y suficiente para que un papalote sea cíclico.
9.816. Probar que todo paralelogramo circunscrito es un rombo.
9.817. Probar que un paralelogramo cíclico debe ser un rectángulo
9.818. Probar que todo rombo es circunscrito.
9.819. Probar que un trapecio es isósceles si y solo si es cíclico.
9.820. Sean $\square ABCD$ un papelote con $AB \cong AD$ y $BC \cong CD$, y P el punto de intersección de sus diagonales.
a. Probar que $\square ABCD$ es cíclico si y solo si $\Delta PAB \sim \Delta PBC$.
b. Probar que $\square ABCD$ es circunscrito si y solo si $\square ABCD$ es un cuadrado.

9.821. En la figura:



tenemos un círculo de radio 8 y un papalote $\square ABCD$ inscrito en él tal que $AB \cong BC$ y $CD \cong DA$. Si $d(\overleftrightarrow{AC}, O) = 2$, calcular las longitudes de los lados del papalote.

9.822[l-32, Problem 367]. En la figura:



tenemos dos cuadrados □$ABCD$ y □$BEFG$ y sus circuncírculos. Probar que las rectas $\overleftrightarrow{ED}$ y $\overleftrightarrow{AG}$ se cortan en el punto P.

9.823. Sea □$ABCD$ un rectángulo inscrito en el círculo C(O,r). Probar que $b = \sqrt{4r^2 - a^2}$ y $a = \sqrt{4r^2 - b^2}$.

9.824. Sea □$ABCD$ un rectángulo inscrito en un círculo cuyos lados tienen longitudes 5 y 10. Encontrar las longitudes de los lados del rombo formado por las rectas tangentes al círculo en los vértices del rectángulo.

9.825 [l-22]. Sean □$ABCD$ un rectángulo y O el punto de intersección de sus diagonales tales que $AO > AB$. El círculo C(A,$|AO|$) interseca a $\overleftrightarrow{AB}$ en el punto E. Si $m(\angle AOB) = 4m(\angle BOE)$, calcular la medida del ángulo $\angle BAC$.

9.826. Sea □$ABCD$ un rectángulo. La recta perpendicular a AC en el punto C corta a $\overleftrightarrow{AB}$ en el punto P y a $\overleftrightarrow{AD}$ en el punto Q. Probar que los puntos B, D, P y Q son concíclicos.

9.827 [l-238]. Sea □$ABCD$ un rectángulo tal que $|BC| > 2|AB|$. Trazamos los círculos congruentes tales que uno de ellos es tangente a AB, BC y DA, y el otro es tangente a CD, BC y DA. Una de las rectas tangentes internamente a estos dos círculos corta a DA en el punto E y BC en el punto F. Probar que $|EF| = |DA| - |AB|$.

9.828. Sea □$ABCD$ un paralelogramo. Si un círculo que pasa por los puntos B y C corta a $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ en los puntos E y F, respectivamente, probar que el cuadrilátero □$AEFD$ es cíclico.

9.829. Tenemos un rombo □$ABCD$ circunscrito en un círculo de radio 4.
a. Si $|AC| + |BD| = 14$, encontrar el perímetro del rombo.
b. Si los lados del rombo tienen longitud 1, calcular las longitudes de sus diagonales.

9.830. Tenemos un trapecio isósceles circunscrito en un círculo de radio 3. Si $|AB| = 10$, calcular las longitudes de los lados del trapecio.

9.831. Sea □$ABCD$ un trapecio inscrito en un círculo C(O,3) tal que $AB \parallel CD$. Si AB es uno de los diámetros del círculo y la longitud de la altura correspondiente a sus lados paralelos es igual a 1, calcular el perímetro del trapecio.

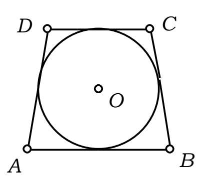
9.832. Probar que la longitud del segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio circunscrito es igual a un cuarto del perímetro del mismo trapecio.

9.833. Sea □$ABCD$ un trapecio isósceles con $AB \parallel CD$ y $a > c$. Pongamos $x = \dfrac{a-c}{2}$. Probar que $AD \perp DB$ si y solo si $b^2 = x(c + x)$.

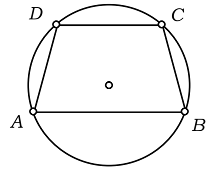
9.834. Sea □$ABCD$ un trapecio inscrito en un círculo C(O,15) tal que $AB \parallel CD$, $|DC| = 9$ y $|AB| = 20$. Si $O \in int$(□$ABCD$), encontrar el perímetro del trapecio.

8.835. En la figura:

tenemos un trapecio isósceles □$ABCD$, en el cual $|AB| = 9$ y $|CD| = 4$. Encontrar el radio del círculo.



8.836. En la figura:



tenemos un trapecio isósceles $\square ABCD$ en el cual $|AB| = 14$ y $|CD| = 8$. Si la altura correspondiente a sus lados paralelos tiene longitud 1, encontrar el radio del círculo.

9.837. Sea $\square ABCD$ un trapecio isósceles tal que $AB \parallel CD$, $|AB| = 10$, $|CD| = 6$ y la longitud de la altura correspondiente a sus lados paralelos es igual a 2. Encontrar el radio de su circuncírculo y las distancias del centro del circuncírculo a sus lados paralelos.

9.838. Sea ΔABC un triángulo cuyos ángulos son agudos. Probar que los siguientes cuadriláteros son cíclicos.

a. $\square BH_aHH_c$. b. $\square H_aCH_bH$. c. $\square HH_bAH_c$.

9.839. Sea ΔABC un triángulo. La bisectriz del ángulo $\angle AOC$ corta a BC en el punto D. Probar que $\square AODB$ es un cuadrilátero cíclico.

9.840. Sea ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$. Si $P \in AB$ y $Q \in AC$ satisfacen que $PQ \parallel BC$, probar que el cuadrilátero $\square PBCQ$ es cíclico.

9.841. Sean ΔABC un triángulo y $D \in AB$ y $E \in AC$ tales que $DE \parallel BC$. Probar que $\square BCED$ es cíclico si y solo si $AB \cong AC$.

9.842. Sean ΔABC un triángulo y $D \in AB$ y $E \in AC$ tales que $\dfrac{|AE|}{|AB|} = \dfrac{1}{3} = \dfrac{|AD|}{|AC|}$. Probar que $\square BCED$ es un cuadrilátero cíclico**.**

9.843 [l-238]. Sea ΔABC un triángulo cuyos ángulos son todos agudos.

a. Probar que $m(\angle H_c H_a H) = 90 - m(\angle A)$.

b. Si T es el circunradio del triángulo $\Delta AH_c H_b$, probar que los puntos H_a, H_c, T y H_b son concíclicos.

9.844. Consideremos el triángulo equilátero $\Delta(6,15,15)$. Tomamos puntos $D \in AB$ y $E \in AC$ tales que $DE \parallel BC$. Si el trapecio $\square BCED$ es circunscrito, calcular las longitudes de cada uno de sus lados.

9.845. Sea ΔABC un triángulo. Si D es el punto de intersección de la bisectriz del ángulo $\angle COA$ y $\overleftrightarrow{BC}$, probar que los puntos A, O, D y B son concíclicos.

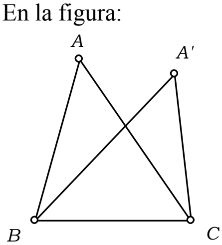
9.845. Sobre los lados AB y AC de un triángulo ΔABC trazamos exteriormente dos triángulos equiláteros ΔABD y ΔACE. Si P es el punto de intersección de BE y CD, probar que los puntos A, E, C y P son concíclicos.

9.847. Sean ΔABC y ΔDBC dos triángulos tales que sus vértices A y D están en diferentes semiplanos determinados por $\overleftrightarrow{BC}$. Probar que los puntos A, B, D y C son concíclicos si y solo si

$$m(\angle CBA) + m(\angle ACB) + m(\angle DBC) + m(\angle BCD) = 180.$$

9.848 (Razvan-97). Sea ΔABC un triángulo. Sean E y F las proyecciones de B y C sobre la recta $\overleftrightarrow{OA}$, respectivamente. Si G es el punto de intersección de DE y AC, y H es el punto de intersección de DF y AB, probar que $\square AH_aGH$ es un cuadrilátero cíclico.

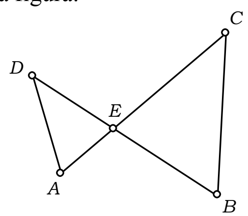
9.849. En la figura:



tenemos que dos triángulos ΔABC y $\Delta A'BC$ tales que $\angle A \cong \angle A'$. Si D es el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos $\angle A$ y $\angle A'$, probar que A, B, C, D y A' son concíclicos.

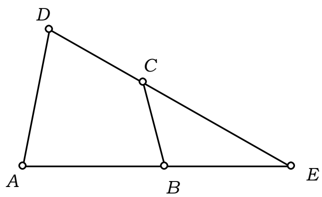
9.850[l-238]. Sea ΔABC un triángulo. Sean D el punto de intersección de $\overleftrightarrow{AB}$ y t_b, y E el punto de intersección de $\overleftrightarrow{AC}$ y t_c. Probar que los puntos B, D, E y C son concíclicos.

9.851. En la figura:



si $|AE| = 3$, $|BE| = 5$, $|CE| = 6$ y $|DE| = 4$, probar que A, B, C y D son concíclicos. Encontrar $\frac{|AD|}{|BC|}$.

9.852. En la figura:



si $|AB| = \frac{71}{12}$, $|BE| = \frac{16}{3}$, $|CE| = 6$ y $|DC| = 4$, encontrar $\frac{|BC|}{|AD|}$ y probar que $\square ABCD$ es un cuadrilátero cíclico.

9.853(USAMO-90). Sea ΔABC un triángulo cuyos ángulos son todos agudos. Supongamos que el círculo de diámetro AB interseca a la recta $\overleftrightarrow{CH_c}$ en los puntos M y N, y círculo de diámetro AC interseca a la recta $\overleftrightarrow{BH_b}$ en los puntos P y Q. Probar que los puntos M, N, P y Q son concíclicos.

9.854. Sean ΔABC un triángulo, $D \in AB$ y $E \in AC$. Si $\angle B \cong \angle AED$ y $\angle C \cong \angle EDA$. Probar que los puntos B, C, E y D son concíclicos.

9.855(Razvan-97). Sean A, B y C tres puntos colineales y $M \notin \overleftrightarrow{AB}$. Probar que M y los circuncentros de los triángulos ΔMAB, ΔMBC y ΔMAC son concíclicos.

9.856. Sean $\mathrm{C}(O,r)$ un círculo y AB una de sus cuerdas. Fijemos un punto C en el arco menor $\overset{\frown}{AB}$ del círculo dado. Si P es el punto de intersección de $\overleftrightarrow{BC}$ y la recta que pasa por O y es perpendicular a AB, probar que $\square APCO$ es un cuadrilátero cíclico.

9.857. Sean $\mathrm{C}(O,r)$ y $\mathrm{C}(O',r')$ dos círculos que se intersecan en los puntos A y B, $P \in \mathrm{C}(O,r) - int(\mathrm{C}(O',r'))$ y $Q \in \mathrm{C}(O',r') - int(\mathrm{C}(O,r))$. Si $m(\angle APB) + m(\angle AQB) = 90$, probar que los puntos A, B, O y O' son concíclicos.

9.858. Sean $\mathrm{C}(O,r)$ un círculo y AB y AC dos de sus cuerdas. Si M y N son los puntos medios de AB y AC, respectivamente, probar que los puntos A, O, M y N son concíclicos.

9.859. Sean $\mathrm{C}(O,r)$ y $\mathrm{C}(O',r')$ dos círculos que se cortan en los puntos A y B. Una recta corta a $\mathrm{C}(O,r)$ en los puntos C y D, y a $\mathrm{C}(O',r')$ en los puntos E y F. La recta paralela a AC que pasa por F corta a AB en el punto P. Probar que los puntos D, P, B y F son concíclicos.

9.860. Sean AB y AC dos cuerdas congruentes de un círculo $\mathrm{C}(O,r)$ y D, $E \in BC$. Si $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{AE}$ intersecan al círculo en los puntos F y G, respectivamente, probar que los puntos D, E, F y G son concíclicos.

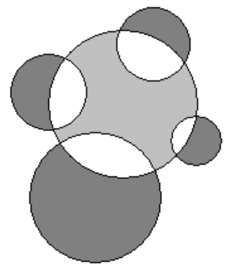
9.861[l-238]. Sean $\mathrm{C}(O,r)$ y $\mathrm{C}(O',r')$ dos círculos que se cortan en los puntos A y B. Fijemos un punto $C \in \mathrm{C}(O,r)$. Sean D el punto de intersección de $\overleftrightarrow{AC}$ y $\mathrm{C}(O',r')$, y E el punto de intersección de $\overleftrightarrow{BC}$ y $\mathrm{C}(O',r')$. Por C trazamos una recta que corte a $\mathrm{C}(O,r)$ en el punto F y a DE en el punto G. Probar que los puntos A, F, G y D son concíclicos.

9.862[l-238]. Sean AB un diámetro de un círculo $\mathrm{C}(O,r)$ y P, $Q \in \mathrm{C}(O,r)$ arbitrarios. Sean R y S los puntos de intersección de $\overleftrightarrow{AP}$ y $\overleftrightarrow{AQ}$ con la recta tangente al círculo en el punto B, respectivamente. Probar que los puntos P, Q, R y S son concíclicos.

9.863. Sean $\mathrm{C}(O,r)$ y $\mathrm{C}(O',r')$ dos círculos internamente tangentes en el punto P y Q un punto sobre la recta tangente a ambos círculos. Una recta que pasa por P corta a los círculos $\mathrm{C}(O,r)$ y $\mathrm{C}(O',r')$ en los puntos A y B, respectivamente. Sean C y D los puntos de intersección de $\mathrm{C}(O,r)$ con $\overleftrightarrow{QA}$ y de $\overleftrightarrow{QB}$ con $\mathrm{C}(O',r')$, respectivamente. Probar que los puntos P, C, D y Q son concíclicos.

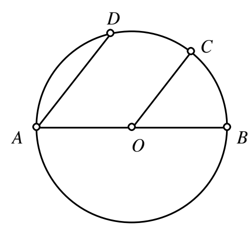
9.864[I-238]. Sean $C(O,r)$ y $C(O',r')$ dos círculos que se cortan en los puntos A y B. Por A trazamos una recta que corte a $C(O,r)$ y a $C(O',r')$ en los puntos C y D, respectivamente. Fijamos un punto P en el plano. Sean E el punto de intersección de $C(O,r)$ y la recta $\overleftrightarrow{PC}$ y F el punto de intersección de $C(O',r')$ y la recta $\overleftrightarrow{PD}$. Probar que los puntos P, B, F y E son concíclicos.
9.865. Sean OA y OB dos radios de un círculo $C(O,r)$ tales que $m(\angle AOB) = 60$ y CD el diámetro del círculo paralelo a $\overleftrightarrow{AB}$. Calcular las medidas de los ángulos que forman las diagonales del cuadrilátero $\square ABCD$.
9.866. Sean $C(O,r)$ un círculo y l y m dos rectas perpendiculares tangentes a $C(O,r)$ en los puntos A y B, respectivamente. Si P es el punto de intersección de l y m, encontrar un punto $M \in C(O,r)$, de tal forma que si Q y R son sus proyecciones sobre las rectas l y m, respectivamente, entonces $per(\square PQMR) = 6r$.
9.867(E. P. U. C., 1957). Sean $C(O,r)$ y $C(O',2r)$ dos círculos tangentes externamente. Calcular el perímetro del cuadrilátero formado por las rectas tangentes a ambos círculos y los radios del círculo mayor.
9.868. Trazamos rectas que unan los puntos que marcan las horas 1 y 5; 2 y 10; 3 y 8; y 7 y 9 de un reloj. Probar que dichas rectas forman un cuadrado.

9.869[I-49]. Dados cinco círculos de radios 5, 4, 2, 2 y 1, mostrar cómo sobreponerlos de tal forma que el área de la región sombreada del círculo mayor sea igual a la suma de las áreas sombreadas de los círculos menores.

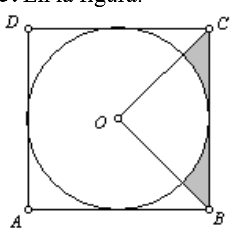


9.870. Dado un punto P y un conjunto finito de puntos en el plano, probar que existe un círculo de centro P que contiene al conjunto finito de puntos en su interior.
9.871. Probar que dos círculos no tienen una recta tangente en común si y solo si uno de ellos está en el interior del otro.
9.872. Sean r el radio de un círculo, c la longitud de una de sus cuerdas y d la distancia del centro del círculo a dicha cuerda. Elaborar la fórmula para encontrar uno de los valores r, c y d en función de los otros dos.
9.873. Si trazamos sucesivamente cuerdas de un círculo cuya longitud sea igual al radio del mismo, probar que uno de los puntos extremos de la sexta cuerda coincide con uno de los puntos extremos de la primera cuerda.
9.874. En la figura:

tenemos un círculo $C(O,r)$ y AB uno de sus diámetros. Probar que $OC \parallel AD$ si y solo si $DC \cong CB$.



9.875. En la figura:



sabemos que los lados del cuadrado tienen longitud 4. Calcular el área de la región sombreada.

9.876. Si el área de un círculo es igual a su perímetro, dar el radio del círculo.

9.877. Sea ΔABC un triángulo. Probar que $b = c$ si y solo si $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{H_bH_c}$.

CAPÍTULO 10

TRIÁNGULOS ESPECIALES

10.1. Triángulos con 5 partes congruentes

Como ya hemos visto, todo triángulo está determinado por 6 partes que son sus tres lados y sus tres ángulos. En dos triángulos congruentes, sus 6 partes correspondientes son congruentes, y en dos triángulos semejantes cada uno de los ángulos de uno de ellos es congruente con un ángulo del otro. ¿Qué hay de aquellos pares de triángulos que tengan 5 partes congruentes y no sean congruentes (denotemos esto por $\cong_5$)? Es obvio que si los triángulos no son congruentes, entonces tienen que ser semejantes con dos pares de lados congruentes, puesto que tendrían por lo menos dos pares de ángulos congruentes (ver Corolario 4.3.6). A continuación, damos una caracterización de los triángulos $\cong_5$ congruentes.

10.1.1. Teorema[a-125]. Sean ΔBDC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos. Entonces, $\Delta BDC \cong_5 \Delta A'B'C'$ con $c > c'$, $a' = b$ y $b' = c$ si y solo si existen dos números reales positivos r y k tales que $a = r$, $b = rk$, $c = rk^2$, $a' = rk$, $b' = rk^2$ y $c' = rk^3$ y $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\phi} < k < 1$.

Prueba: *Necesidad*. Supongamos que $\Delta BDC \sim \Delta A'B'C'$ y que se cumplen las relaciones $c > c'$, $a' = b$, $b' = c$ y $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$. Pongamos $r = a$ y $\frac{1}{k} = \frac{c}{c'}$. Entonces, tenemos que $b' = bk$, $a' = ak$ y $c' = ck$. De donde se obtienen las identidades $a = r$, $a' = rk$, $b' = bk = a'k = rk^2$ y $c' = ck = b'k = rk^3$, $b = a' = rk$ y $c = b' = rk^2$. Esto prueba la primera parte. Es claro que $k < 1$, pues $c > c'$. De la Desigualdad del Triángulo (4.4.9) hallamos que $b + c = rk + rk^2 > a = r$. Por ello, $k^2 + k - 1 > 0$. Como $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ es una raíz del polinomio $k^2 + k - 1$ y $k > 0$, se debe cumplir que $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} < k$.

Suficiencia. Por hipótesis, sabemos que $\frac{a}{a'} = \frac{r}{rk} = \frac{1}{k}$, $\frac{b}{b'} = \frac{rk}{rk^2} = \frac{1}{k}$ y $\frac{c}{c'} = \frac{rk^2}{rk^3} = \frac{1}{k}$. Lo cual implica, por el Tercer Criterio de Semejanza (6.2.12), que $\Delta BDC \sim \Delta A'B'C'$. Por otro lado, es evidente que $a' = rk = b$ y $b' = rk^2 = c$, y como $k < 1$, tenemos entonces que $c > c'$. Así hemos probado que $\Delta BDC \cong_5 \Delta A'B'C'$. ♣

Una discusión similar a la que hicimos en la demostración del Teorema 10.1.1, se encuentra en las páginas 259 y 260 del libro [l-196].

A continuación, daremos ejemplos de parejas de triángulos que sean $\cong_5$–congruentes y que las longitudes de sus lados sean números enteros positivos.

10.1.2. Ejemplo[a-18]. Para cada número entero positivo $k > 1$, definimos los números $a_k = k^3$, $b_k = k^2(k+1)$, $c_k = k(k+1)^2$ y $d_k = (k+1)^3$. Afirmamos que los triángulos $\Delta(a_k, b_k, c_k)$ y $\Delta(b_k, c_k, d_k)$ están bien definidos y son $\cong_5$ –congruentes. Para ver esto, observemos las siguientes desigualdades evidentes:

$$a_k + b_k = k^3 + k^2(k+1) = k(k^2 + k^2 + k) > k(k^2 + 2k + 1) > k(k+1)^2 = c_k,$$

$$a_k + c_k = k^3 + k(k+1)^2 = k^3 + k^2 + 2k + 1 > k^3 + k^2 = k^2(k+1) = b_k,$$

$$b_k + c_k = k^2(k+1) + k(k+1)^2 > k^3 = a_k,$$

$$d_k + c_k = (k+1)^3 + k(k+1)^2 > k^3 + k^2 = k^2(k+1) = b_k,$$

$$d_k + b_k = (k+1)^3 + k^2(k+1) = (k+1)((k+1)^2 + k^2) > k(k+1)^2 = c_k, \text{ y}$$

$$b_k + c_k = k^2(k+1) + k(k+1)^2 > (k+1)(k^2 + k(k+1)) > (k+1)(k^2 + 2k + 1) = (k+1)^3 = d_k.$$

Según el Teorema 8.3.17, encontramos que a_k, b_k y c_k, y b_k, c_k y d_k son las longitudes de los lados dos triángulos. Como $k^3 < k^2(k+1) < k(k+1)^2 < (k+1)^3$, se obtiene que $a_k < b_k < c_k < d_k$, para toda $k > 1$. Ahora demostraremos que los triángulos son semejantes. Fijemos $k > 1$. Entonces,

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{k^3}{k^2(k+1)} = \frac{k}{k+1}, \quad \frac{b_k}{c_k} = \frac{k^2(k+1)}{k(k+1)^2} = \frac{k}{k+1} \quad \text{y} \quad \frac{c_k}{d_k} = \frac{k(k+1)^2}{(k+1)^3} = \frac{k}{k+1}.$$

Así, por el tercer criterio de semejanza (6.2.10), concluimos que $\Delta(a_k, b_k, c_k) \sim \Delta(b_k, c_k, d_k)$ con razón de similitud igual a $\frac{k}{k+1}$, para toda $k > 1$. Por lo tanto, los dos triángulos tienen sus ángulos correspondientes congruentes y dos pares de lados congruentes, pero nuestros triángulos no son congruentes. Como caso particular, para $k = 2$ tenemos que $\Delta(8,12,18) \cong_5 \Delta(12,18,27)$. ♣

10.2. El triángulo $\Delta(3,4,5)$

Un triángulo rectángulo en el que las longitudes de sus lados son números enteros positivos se llama *Pitagórico*.

10.2.1. Teorema. El triángulo $\Delta(3,4,5)$ es el único triángulo Pitagórico cuya área es igual a su semi-perímetro.

Prueba[a-173]: Sea $\Delta(a,b,c)$ un triángulo Pitagórico con hipotenusa c tal que $are(\Delta(a,b,c)) = s$. En otras palabras,

$$\frac{ab}{2} = \frac{a+b+c}{2}$$

$$ab = a + b + c.$$

Sustituyendo el valor de c de esta última identidad en la ecuación $c^2 = a^2 + b^2$, hallamos que

$$(ab - a - b)^2 = a^2 + b^2$$

$$(ab - (a+b))^2 = a^2 + b^2$$

$$a^2b^2 - 2ab(a+b) + a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2$$

$$a^2b^2 - 2a^2b - 2ab^2 + a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2$$

$$a^2b^2 + 2ab = 2a^2b + 2ab^2$$

$$ab + 2 = 2a + 2b$$

$$a = \frac{2b-2}{b-2}.$$

Supongamos $4 < b$. Entonces, vemos que

$$4 < b = 2b - b$$

$$8 + b < 2b + 4$$
$$16 + 2b < 4b + 8$$
$$-4b - 8 < -16 - 2b$$
$$8b - 4b - 8 + 4 < 8b - 16 - 2b + 4$$
$$2(2b - 2) < 6(b - 2)$$
$$a = \frac{2b-2}{b-2} < 3.$$

Como consecuencia, los únicos valores enteros posibles para a son 1, 2 y 3. Si $a = 1$, entonces $b - 2 = 2b - 2$ y, por tanto, $b = 0$, lo cual es imposible. Si $a = 2$, entonces $2b - 4 = 2b - 2$ y, por consiguiente, $2 = 0$, pero ésto es una contradicción. Por último, si $a = 3$, entonces $3b - 6 = 2b - 2$ y, por ello, $b = 4$, contrario a nuestra suposición. Esto prueba que cualquier triángulo Pitagórico $\Delta(a,b,c)$ cuya área sea igual a su semiperímetro, debe cumplir que $b \leq 4$. Por las condiciones que impusimos a a, debemos tener que $2 < b$. Si $b = 3$, entonces $a = 4$, y si $b = 4$, entonces $a = 3$. Así, $\Delta(3,4,5)$ es el único triángulo Pitagórico con hipotenusa c cuya área es igual a su semiperímetro. ♣

La siguiente fórmula trigonométrica se obtiene de una simple aplicación del algunas identidades trigonométricas conocidas aplicadas al triángulo $\Delta(3,4,5)$.

10.2.2. Teorema. $\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3} = 45.$

Prueba[a-118]: Según las fórmulas del Teorema 8.2.19 aplicadas al triángulo $\Delta(3,4,5)$, vemos que

$$\tan\frac{\angle A}{2} = \frac{c-b}{a} = \frac{1}{3} \text{ y } \tan\frac{\angle B}{2} = \frac{c-a}{b} = \frac{1}{2}.$$

Como una consecuencia de esto, obtenemos que

$$\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3} = \frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2} = \frac{90}{2} = 45. \clubsuit$$

10.3. Algunos triángulos rectángulos especiales

10.3.1. Teorema[a-Reid]. En el triángulo rectángulo $\Delta(\angle\frac{45}{2},\angle\frac{135}{2},\angle 90)$ con hipotenusa c se cumplen las relaciones $c = a\sqrt{4+2\sqrt{2}} = b\sqrt{4-2\sqrt{2}}$ y $b = a(1+\sqrt{2})$, en donde b es el lado opuesto al ángulo $\angle\frac{135}{2}$ y a es el cateto más pequeño.

Prueba: Consideremos el triángulo rectángulo $\Delta A'AC$ con hipotenusa y, y tal que $m(\angle A) = m(\angle A') = 45$ y $m(\angle C) = \angle 90$. Tenemos que $\overrightarrow{AB}$ es la bisectriz del ángulo $\angle CAA'$. Sin perder generalidad, podemos suponer que ΔABC es nuestro triángulo dado, en donde

$$m(\angle CAB) = \frac{45}{2},\ m(\angle ABC) = \frac{135}{2} \text{ y } m(\angle C) = \angle 90.$$

Del Teorema 8.1.4 vemos que $y = b\sqrt{2}$ y por el Teorema 3.2.9, sabemos que $b = a + x$. Por otra parte, de acuerdo con el Teorema 8.3.15, hallamos que

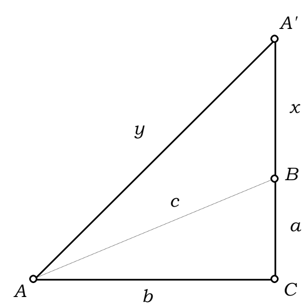


Figura 10.1

$$c = \frac{2}{b+y}\sqrt{\frac{by^2(y+2b)}{4}} = \frac{1}{b+b\sqrt{2}}\sqrt{2b^3(b\sqrt{2}+2b)} =$$

$$\frac{b}{1+\sqrt{2}}\sqrt{2(2+\sqrt{2})} = \frac{b}{1+\sqrt{2}}\sqrt{4+2\sqrt{2}}\ .$$

Usando el Teorema 8.3.4 y la identidad (*) de la demostración del Teorema 6.1.4, vemos que

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y} = \frac{a+x}{b+y} = \frac{b}{b+b\sqrt{2}}$$

$$a = \frac{b^2}{b+b\sqrt{2}} = \frac{b}{1+\sqrt{2}}$$

$$b = a(1+\sqrt{2}).$$

Pero estas identidades nos conducen a las relaciones buscadas

$$c = a\sqrt{4+2\sqrt{2}} = a((1+\sqrt{2})\sqrt{4-2\sqrt{2}} = b\sqrt{4-2\sqrt{2}}\ .\ ♣$$

10.3.2. Teorema[a-135]. En el triángulo rectángulo $\Delta(\angle 18, \angle 72, \angle 90)$ con hipotenusa c y cateto menor a se cumplen las relaciones $c = 2a\phi$ y $b = a\sqrt{5+2\sqrt{5}}$.

Prueba: Consideremos el siguiente triángulo isósceles ΔDBA:

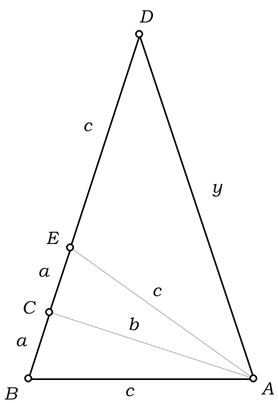


Figura 10.2

En este triángulo tenemos que $m(\angle D) = 36$, $m(\angle B) = 72$, $m(\angle A) = 72$, $m(\angle DAE) = 36$ y $m(\angle EAC) = m(\angle CAB) = 18$. Entonces, tenemos que ΔABC es nuestro triángulo, en donde $m(\angle BCA) = 90$, $m(\angle ABC) = 72$ y $m(\angle CAB) = 18$. También sabemos que los triángulos ΔEAD y ΔAEB son isósceles y $y = 2a + c$. Según la Fórmula de la Razón Cruzada (8.3.3), $\frac{c}{2a} = \frac{y \operatorname{sen} 36}{c \operatorname{sen} 36} = \frac{y}{c}$. Lo cual implica que

$$c^2 = 2a(2a + c)$$

$$c^2 - 2ac - 4a^2 = 0.$$

Por lo que debemos tener que

$$c = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 + 16a^2}}{2} = \frac{2a \pm 2a\sqrt{5}}{2} = a(1 \pm \sqrt{5})$$

y como c tiene que ser positivo, concluimos que $c = 2a\phi$. Por el Teorema de Pitágoras (8.5.1), encontramos que

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{4(1+\sqrt{5})^2 - a^2} = \sqrt{a^2(1+\sqrt{5})^2 - a^2} = a\sqrt{1+2\sqrt{5}+5-1} = a\sqrt{5+2\sqrt{5}}\ .\ ♣$$

10.3.3. Teorema[a-135]. En el triángulo rectángulo $\Delta(\angle 15, \angle 75, \angle 90)$ con hipotenusa c y cateto menor a, se cumplen las relaciones $c = a(\sqrt{2} + \sqrt{6})$ y $b = a(2+\sqrt{3})$.

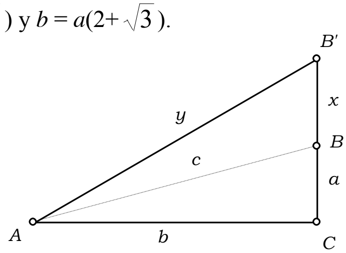


Figura 10.3

Prueba: En la figura 10.3, tenemos que $\Delta B'AC$ es un triángulo rectángulo con $m(\angle B') = 60$, $m(\angle A) = 30$ y $m(\angle C) = 90$. El punto $B \in B'C$ satisface que $\overrightarrow{AB}$ es la bisectriz del ángulo $\angle A$. Es claro que ΔABC es nuestro triángulo. Según el Teorema 8.1.5, se tiene que $y = 2(a + x)$ y $b = \sqrt{3}\,(a + x)$. De acuerdo con el Teorema 8.3.4 y la identidad (*) de la prueba del Teorema 6.1.4, encontramos que

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y} = \frac{a+x}{b+y} = \frac{a+x}{b+2(a+x)}$$

$$a = \frac{b(a+x)}{b+2(a+x)} = \frac{b(a+x)}{\sqrt{3}(a+x)+2(a+x)} = \frac{b}{\sqrt{3}+2}$$

$$b = a(2+\sqrt{3}).$$

Por otra parte, con base en el Teorema de Pitágoras (8.5.1), tenemos que

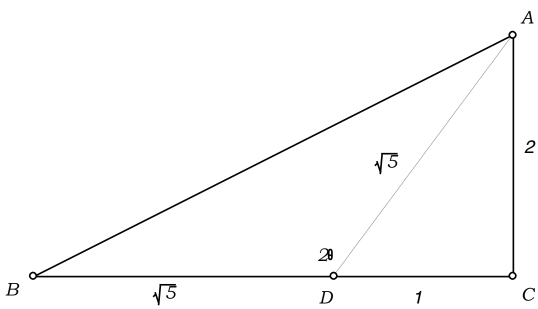
$$c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + a^2(2+\sqrt{3})^2 = a^2(8+4\sqrt{3}).$$

De aquí se siguen las identidades

$$c = a\sqrt{2}\,\sqrt{4+2\sqrt{3}} = a\sqrt{2}\,\sqrt{(1+\sqrt{3})^2} = a\sqrt{2}\,(1+\sqrt{3}) = a(\sqrt{2}+\sqrt{6}).$$ ♣

A continuación, damos una manera trigonométrica de obtener el número de áureo mediante el uso de la función tangente.

10.3.4. Teorema[a-56]. En el triángulo rectángulo $\Delta(2, 1+\sqrt{5}, \sqrt{2}\,\sqrt{5+\sqrt{5}}\,)$



se cumple que $\tan\angle\theta = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} = \phi.$

Figura 10.4

Prueba: En la figura 10.4 tenemos que $\angle C$ es un ángulo recto y que el triángulo ΔDBA es isósceles con $DA \cong DB$. Pongamos $\angle CDA = 2\angle\alpha$. Entonces, $\angle DBA \cong \angle BAD \cong \angle\alpha$. Por otra parte, sabemos que $m(\angle\alpha) + m(\angle\theta) = 90$. Por consiguiente,

$$m(\angle CDA) + m(\angle DAC) = 90 = m(\angle\alpha) + m(\angle\theta)$$

$$2\,m(\angle\alpha) + m(\angle DAC) = m(\angle\alpha) + m(\angle\theta)$$

$$m(\angle\alpha) + m(\angle DAC) = m(\angle\theta).$$

Por el Teorema 2.5.7, hallamos que $\angle\alpha + \angle DAC = \angle\theta$. Aplicando la definición de tangente, vemos que se cumple la igualdad $\tan\angle\theta = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$. ♣

El siguiente problema algebraico, aparentemente no geométrico, lo comenta M. Wald en su nota *A radical Problem*, No. 1441, J. Recreational Math. 18 (1985-86), 314.

10.3.5. Problema. ¿Cual número es mayor entre $\sqrt{10} + \sqrt{17}$ y $\sqrt{53}$?

Solución(J. Meeus): Consideremos los triángulos rectángulos $\Delta(1,3,\sqrt{10})$, $\Delta(1,4,\sqrt{17})$ y $\Delta(2,7,53)$ denotados por ΔABC, ΔBDF y ΔADE, respectivamente, en la figura 10.5. Como los triángulos ΔABC y ΔBDF no pueden ser semejantes, entonces debemos tener que los puntos A, B y D no son colineales. Por la Desigualdad del triángulo (4.4.9) y el Teorema de Pitágoras (8.5.1), tenemos que

$$|AD| < |AB| + |BD|$$

$$\sqrt{|AE|^2 + |DE|^2} < \sqrt{|AC|^2 + |BC|^2} + \sqrt{|BF|^2 + |DF|^2}$$

$$\sqrt{7^2 + 2^2} < \sqrt{3^2 + 1^2} + \sqrt{4^2 + 1^2}$$

$$\sqrt{53} < \sqrt{10} + \sqrt{17}. \clubsuit$$

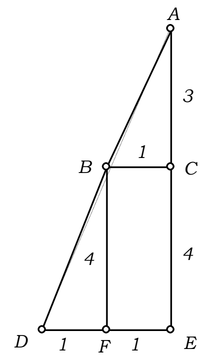


Figura 10.5

10.4. Triángulos casi-rectángulos

A continuación, estudiaremos algunas propiedades de los llamados triángulos casi-rectángulos: según la nota de N. Altshiler Court [a-2], estos triángulos aparecieron al principio del siglo pasado y el nombre de casi-rectángulo se le atribuye a A. Droz-Farny [a-45].

10.4.1. Definición. Un triángulo se llama *casi-rectángulo* si la diferencia de las medidas de dos de sus ángulos es 90.

El nombre de casi-rectángulo quizá se deba a que si en el triángulo ΔABC se cumple la identidad $m(\angle C) - m(\angle B) = 90$, entonces $m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) = 180 = m(\angle A) + 2m(\angle B) = 90$. El siguiente teorema es una consecuencia directa de una observación hecha por D. Block en su trabajo [a-13].

10.4.2. Teorema. Un triángulo ΔABC es casi-rectángulo con $m(\angle C) - m(\angle B) = 90$ si y solo si existen números reales positivos r, s y t tales que $r > s$, $r^2 + s^2 = t^2$, $a = r$, $b = \dfrac{rst}{r^2 - s^2}$ y $c = \dfrac{r^2 t}{r^2 - s^2}$.

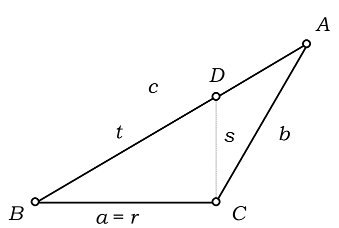


Figura 10.6

Prueba: *Necesidad*. Sea ΔABC un triángulo casi-rectángulo con $m(\angle C) - m(\angle B) = 90$. Sea D el punto de intersección de AB y la recta perpendicular a $\overleftrightarrow{BC}$ en el punto C. Pongamos $r = a$, $s = |DC|$ y $t = |BD|$. Por el Teorema de Pitágoras (8.5.1), $r^2 + s^2 = t^2$. Tenemos además que $\Delta ABC \sim \Delta ACD$, esto es cierto por el criterio 6.2.9. Por lo cual,

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{|AD|} = \frac{r}{s}.$$

De aquí obtenemos que $b = \dfrac{r|AD|}{s}$. Entonces,

$$b^2 = \frac{r^2|AD|^2}{s^2} = c|AD| = (t + |AD|)|AD|$$

$$r^2|AD| = (t + |AD|)s^2$$

$$|AD| = \frac{s^2 t}{r^2 - s^2}.$$

Por lo tanto, $r > s$, $b = \left(\dfrac{r}{s}\right)\left(\dfrac{s^2t}{r^2-s^2}\right) = \dfrac{rst}{r^2-s^2}$ y $c = t + |AD| = t + \dfrac{s^2t}{r^2-s^2} = \dfrac{r^2t}{r^2-s^2}$.

Suficiencia. Sean r, s y t tres números reales positivos tales que $r > s$, $r^2 + s^2 = t^2$, $a = r$, $b = \dfrac{rst}{r^2-s^2}$ y $c = \dfrac{r^2t}{r^2-s^2}$. Observemos que $\Delta(r,s,t)$ es un triángulo rectángulo con hipotenusa t. Sean R, S y T los vértices de dicho triángulo rectángulo. Sobre su cateto RT construimos un triángulo ΔPRT, de tal forma que $\angle S \cong \angle PTR$ y S, R y P sean colineales, como lo muestra la figura 10.7. Es evidente que ΔPST es un triángulo casi-rectángulo. Razonando, como en el párrafo anterior, hallamos que

$$|ST| = r = a,\ |TP| = \frac{rst}{r^2-s^2} = b \text{ y } |PS| = \frac{r^2t}{r^2-s^2} = c.$$

De acuerdo con el tercer criterio de congruencia (3.2.12), $\Delta PST \cong \Delta ABC$. Esto nos garantiza que el triángulo ΔABC es casi-rectángulo. ♣

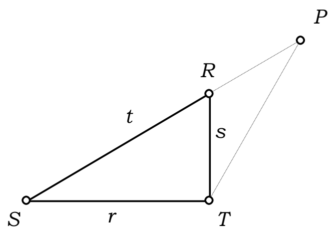


Figura 10.7

Del teorema anterior podemos encontrar una fórmula para producir una cantidad infinita de triángulos casi-rectángulos en los que las longitudes de sus lados sean números enteros positivos (esta fórmula aparece en [a-13]): Empezamos con un triángulo rectángulo $\Delta(r,s,t)$ con hipotenusa t tal que r, s y t sean números enteros positivos y $r > s$. Por el Teorema 10.4.2, sabemos que $\Delta\left(r, \dfrac{rst}{r^2-s^2}, \dfrac{r^2t}{r^2-s^2}\right)$ es un triángulo casi-rectángulo. Como los triángulos $\Delta\left(r, \dfrac{rst}{r^2-s^2}, \dfrac{r^2t}{r^2-s^2}\right)$ y $\Delta(r^2 - s^2, st, rt)$ son semejantes, el triángulo $\Delta(r^2 - s^2, st, rt)$ es también casi-rectángulo. Como un ejemplo particular es el triángulo casi-rectángulo $\Delta(7,15,20)$ producido por el triángulo rectángulo $\Delta(4,3,5)$ vía nuestra fórmula.

10.4.3. Teorema[a-13]. Sea $\Delta(r,s,t)$ un triángulo rectángulo con hipotenusa t tal que $r > s$. Si h' es la altura del triángulo $\Delta(r^2 - s^2, st, rt)$ con respecto al lado $r^2 - s^2$, entonces $h' = 2are(\Delta(r,s,t))$.

Prueba: Sea h la altura del triángulo $\Delta\left(r, \dfrac{rst}{r^2-s^2}, \dfrac{r^2t}{r^2-s^2}\right)$ con respecto al lado r. Como los triángulos $\Delta\left(r, \dfrac{rst}{r^2-s^2}, \dfrac{r^2t}{r^2-s^2}\right)$ y $\Delta(r^2 - s^2, st, rt)$ son semejantes,

$$\frac{h}{h'} = \frac{r}{r^2-s^2}.$$

Por otro lado, sabemos que

$$\frac{h}{s} = \frac{r^2t}{t(r^2-s^2)} = \frac{r^2}{r^2-s^2} \quad \text{(ver figura 10.7).}$$

Por lo tanto,

$$h' = h\,\frac{r^2-s^2}{r} = \left(\frac{sr^2}{r^2-s^2}\right)\left(\frac{r^2-s^2}{r}\right) = sr = 2are(\Delta(r,s,t)).\ ♣$$

El siguiente resultado se encuentra en el artículo [a-163].

10.4.4. Teorema. Un triángulo ΔABC es casi-rectángulo con $m(\angle C) - m(\angle B) = 90$ si y solo si

$$a^2(c^2+b^2) = (c^2 - b^2)^2.$$

Prueba: *Necesidad*. Es claro que $c > b$. De acuerdo con el Teorema 10.4.2, existen tres números reales positivos r, s y t tales que $r > s$, $r^2+s^2=t^2$, $a = r$, $b = \dfrac{rst}{r^2-s^2}$ y $c = \dfrac{r^2t}{r^2-s^2}$. Sustituyendo, hallamos que

$$a^2(c^2+b^2) = r^2\left(\frac{r^4t^2+r^2s^2t^2}{(r^2-s^2)^2}\right) = r^2\left(\frac{r^2t^2(r^2+s^2)}{(r^2-s^2)^2}\right) = r^2\left(\frac{r^2t^4}{(r^2-s^2)^2}\right) = \frac{r^4t^4}{(r^2-s^2)^2} \text{ y}$$

$$(c^2-b^2)^2 = \left(\frac{r^4t^2-r^2s^2t^2}{(r^2-s^2)^2}\right)^2 = \left(\frac{r^2t^2(r^2-s^2)}{(r^2-s^2)^2}\right)^2 = \left(\frac{r^2t^2}{r^2-s^2}\right)^2 = \frac{r^4t^4}{(r^2-s^2)^2}.$$

De aquí concluimos que $a^2(c^2+b^2) = (c^2-b^2)^2$.

Suficiencia. Si $a^2(c^2+b^2) = (c^2-b^2)^2$, entonces $a\sqrt{c^2+b^2} = (c+b)(c-b)$. Con centro en el vértice A, trazamos un círculo de radio b. Este círculo corta a la recta $\overleftrightarrow{BC}$ en un punto D y a la recta $\overleftrightarrow{AB}$ en dos puntos E y F (ver la figura 10.8). Notemos que $E \in AB$, pues $c > b$. Por el Teorema 9.6.1, $|BE||BF| = |BC||BD|$. De aquí vemos que

$$(c+b)(c-b) = a|BD| = a\sqrt{c^2+b^2}$$

$$|BD| = \sqrt{c^2+b^2}.$$

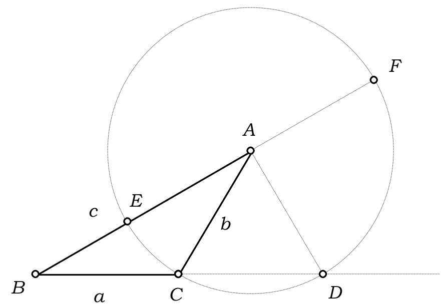


Figura 10.8

Por el recíproco del Teorema de Pitágoras (8.5.2), ΔABD es un triángulo rectángulo con hipotenusa $|BD|$. Por ello, $m(\angle BAD) = 90$. Así tenemos que $m(\angle ADB) = 90 - m(\angle B)$. Puesto que ΔABD es un triángulo isósceles, hallamos que

$$180 - m(\angle C) = m(\angle ADB) = 90 - m(\angle B).$$

Por lo tanto, $m(\angle C) - m(\angle B) = 90$. ♣

10.4.5. Teorema[a-113]. Si ΔABC es un triángulo casi-rectángulo con $m(\angle C) - m(\angle B) = 90$, entonces

$$\frac{2}{a^2} = \frac{1}{(c+b)^2} + \frac{1}{(c-b)^2}.$$

Prueba[a-14]: De acuerdo con el Teorema 10.4.2, existen tres números reales positivos r, s y t tales que $r > s$, $r^2+s^2=t^2$, $a = r$, $b = \dfrac{rst}{r^2-s^2}$ y $c = \dfrac{r^2t}{r^2-s^2}$. Sustituyendo y simplificando, obtenemos que

$$\frac{1}{(c+b)^2} + \frac{1}{(c-b)^2} = \frac{(r^2-s^2)^2}{r^2t^2(s+r)^2} + \frac{(r^2-s^2)^2}{r^2t^2(s-r)^2} = \frac{(r-s)^2(r+s)^2}{r^2t^2(s+r)^2} + \frac{(r-s)^2(r+s)^2}{r^2t^2(s-r)^2}$$

$$= \frac{(r-s)^2+(r+s)^2}{r^2t^2} = \frac{2r^2+2s^2}{r^2t^2} = 2\frac{r^2+s^2}{r^2t^2} = \frac{2}{r^2} = \frac{2}{a^2}. \text{ ♣}$$

10.4.6. Teorema[a-14]. Si ΔABC es un triángulo casi-rectángulo con $m(\angle C) - m(\angle B) = 90$, entonces

$$are(\Delta ABC) = \frac{a^2bc}{2(c^2-b^2)}.$$

Prueba: Consideremos la siguiente figura, en donde $DC \perp BC$:

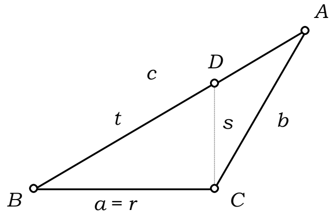


Figura 10.9

Por el Teorema 10.4.2, sabemos que existen números reales positivos r, s y t tales que $r > s$, $r^2 + s^2 = t^2$, $a = r$, $b = \dfrac{rst}{r^2 - s^2}$ y $c = \dfrac{r^2 t}{r^2 - s^2}$. Sabemos que $\Delta ABC \sim \Delta DCA$ y, por el Corolario 8.4.5,

$$\frac{are(\Delta ABC)}{are(\Delta DCA)} = \frac{r^2}{s^2}.$$

Por otra parte, tenemos la relación

$$are(\Delta ABC) = are(\Delta DBC) + are(\Delta DCA) = \frac{rs}{2} + are(\Delta DCA) = \frac{rs}{2} + \frac{r^2}{s^2} are(\Delta ABC).$$

Simplificando, $are(\Delta ABC) = \dfrac{r^3 s}{2(r^2 - s^2)}$. Como $\dfrac{a^2bc}{2(c^2 - b^2)} = \dfrac{1}{2}\dfrac{r^5 st^2 (r^2 - s^2)}{r^2 t^2 (r^2 - s^2)^2} = \dfrac{r^3 s}{2(r^2 - s^2)}$, concluimos que $are(\Delta ABC) = \dfrac{a^2bc}{2(c^2 - b^2)}$. ♣

10.5. Triángulos vux

10.5.1. Definición[a-27]. Un triángulo ΔABC se llama *vux* si la medida de uno de sus ángulos es el doble de la medida de uno de los otros dos ángulos.

La siguiente caracterización de los triángulos vux se debe a W. W. Willson [a-179]: La parte necesaria de dicha caracterización también se le acredita de manera independiente a F. Cheney [a-27].

10.5.2. Teorema. Un triángulo ΔABC es vux con $m(\angle C) = 2m(\angle B)$ si y solo si $b(b + a) = c^2$.

Prueba: *Necesidad*. Sea ΔABC un triángulo vux tal que $m(\angle C) = 2m(\angle B)$. Consideremos la siguiente figura:

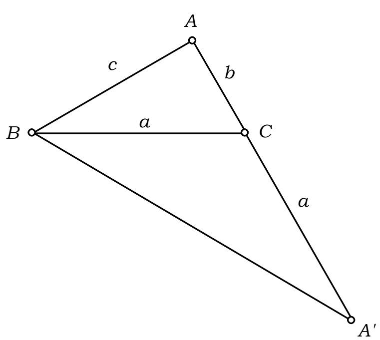


Figura 10.10

Sobre la recta $\overleftrightarrow{AC}$ colocamos un punto A', de tal modo que $BC \cong CA'$. Tenemos entonces que $\Delta CBA'$ es un triángulo isósceles. En consecuencia, $\angle A'BC \cong \angle CA'B$ y $m(\angle C) = 2m(\angle CA'B) = 2m(\angle B)$. De aquí vemos que $\angle B \cong \angle A'BC \cong \angle CA'B$ y $\angle A'BA \cong \angle C$. Por el primer criterio de semejanza (6.2.6) y el Teorema 4.3.4, se tiene que

$$\Delta ABC \sim \Delta AA'B.$$

En consecuencia, $\dfrac{b+a}{c} = \dfrac{c}{b}$. Por lo tanto, $b(b + a) = c^2$.

Suficiencia. Sea ΔABC un triángulo en el cual $b(b + a) = c^2$. Prolongamos AC hasta un punto A' tal que $BC \cong CA'$. Tenemos que $\Delta CBA'$ es un triángulo isósceles. Consideremos los triángulos ΔABC y $\Delta AA'B$ que comparten el ángulo $\angle A$. Sabemos que

$$\frac{|AA'|}{|AB|} = \frac{b+a}{c} = \frac{c}{b} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

Según el segundo criterio de semejanza (6.2.10), $\Delta ABC \sim \Delta BAA'$. Por ello, $\angle B = \angle CBA \cong \angle AA'B$. Según el Teorema 4.3.8, sabemos que $m(\angle C) = m(\angle ACB) = m(\angle A'BC) + m(\angle AA'B) = 2m(\angle AA'B)$. De aquí obtenemos la identidad $m(\angle C) = 2m(\angle AA'B) = 2m(\angle B)$. ♣

Sea ΔABC un triángulo vux tal que $m(\angle C) = 2m(\angle B)$. Por la caracterización anterior, sabemos que $b(b + a) = c^2$. Consideremos la figura 10.11. Sea C' el punto simétrico de C con respecto a H_a. Tenemos entonces que $\Delta AC'C$ es un triángulo isósceles con $AC \cong AC'$. De aquí y por el Teorema 4.3.8, hallamos que

$$\begin{aligned} 2m(\angle B) &= m(\angle C) = m(\angle CC'B) = m(\angle C'BA) + m(\angle BAC') \\ &= m(\angle B) + m(\angle BAC') \\ m(\angle B) &= m(\angle BAC') \\ \angle B &\cong \angle BAC'. \end{aligned}$$

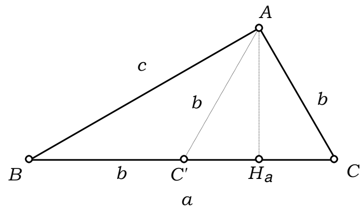


Figura 10.11

De donde se deduce que $\Delta C'AB$ es un triángulo isósceles con $b = |AC'| = |BC'|$. Esta observación es muy importante en la estructura de los triángulos vux, como se verá más adelante (Construcción 11.2.16).

10.5.3. Teorema[a-27]. Si ΔABC es un triángulo vux con $m(\angle C) = 2m(\angle B)$, entonces

$$|BH_a| - |H_aC| = b.$$

Prueba: Basemos nuestro argumento en la figura 10.11.Tenemos entonces que

$$|BH_a| - |H_aC| = |BH_a| - |C'H_a| = |BC'| = b. \clubsuit$$

El lector puede consultar el artículo [a-21] que trata sobre una generalización de los triángulos vux.

10.6. Triángulos cuyos lados están en progresión geométrica

Recordamos que una *progresión geométrica* es una sucesión de la forma e, eg, eg^2, eg^3, eg^4,................, en donde e y g son números reales. Al número g se le llama el *radio común* de la progresión. Si x, y y z son términos consecutivos de una progresión geométrica de radio común g, entonces $g = \frac{y}{x} = \frac{z}{y}$. Es decir, el término de en medio y es la media geométrica de x y z. Recíprocamente, si x, y y z son tres números tales que y es la media geométrica de x y z, entonces x, y y z son términos consecutivos de una progresión geométrica con radio común $g = \frac{y}{x} = \frac{z}{y}$ y se cumple que $y = xg$ y $z = xg^2$. Diremos que tres números x, y y z están en progresión geométrica si son términos consecutivos de una progresión geométrica. Los términos de nuestras progresiones geométricas serán números reales positivos.

10.6.1. Teorema[a-123]. Si los lados de un triángulo están en progresión geométrica, entonces su radio común g satisface la desigualdad $\frac{1}{\phi} < g < \phi$.

Prueba: Sea $\Delta(a,b,c)$ un triángulo tal que sus lados están en progresión geométrica con radio común g. Entonces, $\frac{b}{c} = g$ y, de aquí vemos que $b = gc$ y $a = gb = g^2c$. Según la Desigualdad del Triángulo (4.4.9),

$$\begin{gathered} c + gc > g^2c \quad \text{y} \quad gc + g^2c > c \\ 1 + g > g^2 \quad \text{y} \quad g + g^2 > 1 \\ g^2 - g - 1 < 0 \quad \text{y} \quad g^2 + g - 1 > 0. \end{gathered}$$

De aquí se deduce que $g < \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $g > \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\phi}$. ♣

10.6.2. Teorema. Si a, b y c son términos de una progresión geométrica cuyo radio común g satisface la desigualdad $\frac{1}{\phi} < g < \phi$, entonces a, b y c son los lados de un triángulo.

Prueba: Supongamos que $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = g$ y que $\frac{1}{\phi} < g < \phi$. Basta probar que a, b y c cumplen con las condiciones del Teorema 8.3.17. Efectivamente, tenemos que $g^2 - g - 1 > 0$ y $g^2 + g - 1 > 0$. Entonces, $c + b = c + gc > g^2 c = a$ y $a + b = gc + g^2 c > c$. Por otra parte, sabemos que la desigualdad $x^2 - x + 1 > 0$ se cumple para todo número positivo x. En particular, $g^2 - g + 1 > 0$. Por ello, $g^2 c + c = a + c > gc = b$. Así obtenemos que a, b y c forman los lados de un triángulo cuyos lados están en progresión geométrica. ♣

10.6.3. Teorema. Si los lados del triángulo $\Delta(a,b,c)$ están en progresión geométrica con radio común g, entonces $\Delta(a,b,c) \sim \Delta(g^2,g,1)$.

Prueba: Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = g$. Entonces, $b = gc$ y $a = gb = g^2 c$. Sustituyendo, $\frac{a}{g^2} = \frac{b}{g} = \frac{c}{1}$. Por el tercer criterio de semejanza (6.2.12), $\Delta(a,b,c) \sim \Delta(g^2,g,1)$. ♣

10.6.4. Corolario. Dos triángulos cuyos lados están en progresión geométrica son semejantes si y solo si tienen sus radios comunes iguales.

Prueba: Sean $\Delta(a,b,c)$ y $\Delta(a',b',c')$ dos triángulos semejantes cuyos lados están en progresión geométrica.
Necesidad. Sean g y g' los radios comunes de los triángulos $\Delta(a,b,c)$ y $\Delta(a',b',c')$, respectivamente. De acuerdo con el Teorema 10.6.3, sabemos que $\Delta(a,b,c) \sim \Delta(g^2,g,1)$ y $\Delta(a',b',c') \sim \Delta(g'^2,g',1)$. Entonces, $\Delta(g^2,g,1) \sim \Delta(g'^2,g',1)$. De donde obtenemos la igualdad $g = g'$.
Suficiencia. Supongamos que los triángulos $\Delta(a,b,c)$ y $\Delta(a',b',c')$ tienen el mismo radio común g. Por el Teorema 10.6.3, $\Delta(a,b,c) \sim \Delta(g^2,g,1)$ y $\Delta(a',b',c') \sim \Delta(g^2,g,1)$. Por lo tanto, $\Delta(a,b,c) \sim \Delta(a',b',c')$. ♣

Veamos un ejemplo que nos da la receta para producir triángulos $\cong_5$-congruentes cuyos lados tienen como longitud a un número natural y estos números son términos consecutivos de una progresión geométrica. Pongamos $g = \frac{3}{2}$. Como $\frac{1}{\phi} < \frac{3}{2} < \phi$, entonces cualquier terna de términos consecutivos de la progresión geométrica 64, 96, 144, 216, 324,... forman los lados de un triángulo. En particular, $\Delta(64,96,144) \cong_5 \Delta(96,144,216)$ y observemos que estos dos triángulos no son congruentes. De manera más general, podemos producir triángulos $\cong_5$-congruentes usando términos consecutivos de una progresión geométrica. En efecto, si a, b, c y d son términos consecutivos de una progresión geométrica cuyo radio común yace entre $\frac{1}{\phi}$ y ϕ, entonces $\Delta(a,b,c) \cong_5 \Delta(b,c,d)$, ésto lo garantizan los Teoremas 10.1.1 y 10.6.3.

Sabemos que en todo triángulo ΔABC se cumple que $2are(\Delta ABC) = a\,h_a = b\,h_b = c\,h_c$. De aquí obtenemos las identidades $\frac{h_a}{b} = \frac{h_b}{a}$, $\frac{h_a}{c} = \frac{h_c}{a}$ y $\frac{h_b}{c} = \frac{h_c}{b}$. Por otra parte, en el Problema 8.517 mencionamos que un triángulo es equilátero si y solo si se cumple la igualdad $\frac{h_a}{a} = \frac{h_b}{b} = \frac{h_c}{c}$. Si cambiamos el orden de los denominadores, encontramos las siguientes identidades:

$$(*)\qquad \frac{h_a}{a}=\frac{h_b}{c}=\frac{h_c}{b},\ \frac{h_a}{b}=\frac{h_b}{a}=\frac{h_c}{c},\ \frac{h_a}{c}=\frac{h_b}{b}=\frac{h_c}{a},\ \frac{h_a}{b}=\frac{h_b}{c}=\frac{h_c}{a}\ \text{y}\ \frac{h_a}{c}=\frac{h_b}{a}=\frac{h_c}{b}.$$

Si un triángulo satisface una de estas identidades, no necesariamente es equilátero. Los triángulos en donde se cumpla una de las identidades de (*) serán estudiados a continuación.

10.6.5. Definición[a-145]. Un triángulo ΔABC se llama de *auto-altura* si sus lados y alturas satisfacen una de las identidades enlistadas en (*).

Empezaremos nuestro estudio de los triángulos de auto-altura con un pequeño lema auxiliar.

10.6.6. Lema. Sea ΔABC un triángulo de auto-altura. Si $a \le b \le c$, entonces $\frac{h_a}{c}=\frac{h_b}{b}=\frac{h_c}{a}$.

Prueba: Supongamos, sin perder generalidad, que $a < b \le c$. El Problema 8.511 nos asegura que $h_c \le h_b < h_a$. Por otra parte, sabemos que $a h_a = b h_b = c h_c$. Desechemos los casos que no se cumplen:

Caso I. Supongamos que $\frac{h_a}{c}=\frac{h_b}{a}=\frac{h_c}{b}$. Entonces, $b h_a = c h_c = b h_b$. De donde se obtiene la igualdad $h_a = h_b$. Así que $a = b$, pero ésto es imposible.

Caso II. Supongamos que $\frac{h_a}{b}=\frac{h_b}{a}=\frac{h_c}{c}$. Se sigue entonces que $c h_b = a h_c$. Pero esto implica que $c \le a$, lo cual es una contradicción.

Caso III. Supongamos que $\frac{h_a}{b}=\frac{h_b}{c}=\frac{h_c}{a}$. Se tiene entonces que $b h_b = c h_a = a h_a$ y, por lo tanto, $a = c$, lo cual contradice nuestra suposición.

Caso IV. Supongamos que $\frac{h_a}{a}=\frac{h_b}{c}=\frac{h_c}{b}$. Por consiguiente, $a h_b = c h_a$, y de aquí vemos que $c < a$, lo cual es imposible.

Así concluimos que la única posibilidad es cuando se tenga la igualdad $\frac{h_a}{c}=\frac{h_b}{b}=\frac{h_c}{a}$. ♣

10.6.7. Corolario[a-145]. Todo triángulo isósceles de auto-altura es equilátero.

Prueba: Sea ΔABC un triángulo isósceles de auto-altura tal que $a \le b \le c$. Por el Teorema anterior, $\frac{h_a}{c}=\frac{h_b}{b}=\frac{h_c}{a}$. Si $a = b$, entonces de la igualdad $a h_b = b h_c$ deducimos la identidad $h_b = h_c$. Como $c h_b = b h_c$, entonces $c = b$. Supongamos ahora que $b = c$. Como $b h_a = c h_b$, se tiene entonces que $h_a = h_b$. Ya que $b h_a = a h_b$, se sigue que $b = a$. Esto demuestra que ΔABC es un triángulo equilátero. ♣

10.6.8. Teorema[a-145]. Un triángulo es de auto-altura si y solo si sus lados están en progresión geométrica.

Prueba: *Necesidad*. Sea ΔABC un triángulo de auto-altura. Sin perder generalidad, podemos suponer que $a \le b \le c$. De acuerdo con el Lema 10.6.6, $\frac{h_a}{c}=\frac{h_b}{b}=\frac{h_c}{a}$. Esta última identidad y la igualdad $a h_a = b h_b = c h_c$

implican que $\frac{a}{b} = \frac{h_c}{h_b} = \frac{b}{c}$. En consecuencia, b es la media geométrica de a y c. Por lo tanto, a, b y c están en progresión geométrica.

Suficiencia. Supongamos que a, b y c están en progresión geométrica y que $a \leq b \leq c$. Entonces, b es la media geométrica de a y c. En otras palabras, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$. De aquí obtenemos que

$$\frac{h_b}{b} = \frac{bh_b}{b^2} = \frac{ch_c}{ac} = \frac{h_c}{a} = \frac{h_a}{c}.$$

Por lo tanto, ΔABC es un triángulo de auto-altura. ♣

10.6.9. Teorema[a-123]. Un triángulo de auto-altura es rectángulo si y solo si el radio común de sus lados es igual a $\sqrt{\phi}$ ó a $\frac{1}{\sqrt{\phi}}$.

Prueba: *Necesidad*. Supongamos que $\Delta(a,b,c)$ es un triángulo rectángulo de auto-altura con hipotenusa a. Por el Teorema 10.6.3, sabemos que $\Delta(a,b,c) \sim \Delta(g^2,g,1)$, en donde g es el radio común de los lados a, b y c del triángulo dado. Por suposición, $\Delta(g^2,g,1)$ es un triángulo rectángulo con hipotenusa g^2. Según el Teorema de Pitágoras (8.5.1), hallamos que $(g^2)^2 = g^2 + 1$. Pongamos $x = g^2$. Sabemos que las soluciones de la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$ son ϕ y $\frac{1}{\phi}$. Si $x = \phi$, entonces $g = \sqrt{\phi}$ y si $x = \frac{1}{\phi}$, entonces $g = \frac{1}{\sqrt{\phi}}$.

Suficiencia. Supongamos que $\Delta(a,b,c)$ es un triángulo de auto-altura tal que $r = \sqrt{\phi}$ ó $g = \frac{1}{\sqrt{\phi}}$. Entonces, g^2 es raíz de la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$. Es decir, $(g^2)^2 = g^2 + 1$. De acuerdo con el inverso del Teorema de Pitágoras (8.5.2), vemos que $\Delta(g^2,g,1)$ es un triángulo rectángulo. Como $\Delta(a,b,c) \sim \Delta(g^2,g,1)$, entonces podemos asegurar que $\Delta(a,b,c)$ es también un triángulo rectángulo. ♣

10.7. Triángulos cuyos lados son proporcionales a sus medianas

Una *progresión aritmética* es una sucesión de la forma e, $e + d$, $e + 2d$, $e + 3d$,... en donde e y d son números reales. Al número d se le llama la *diferencia común* de la progresión. Si x, y y z son términos consecutivos de una progresión aritmética con diferencia común d, entonces tenemos que $y - x = z - y = d$, y entonces $2y = x + z$. Es decir, y es la media aritmética de x y z. Inversamente, si x, y y z son tres números tales que y es la media aritmética de x y z, entonces $2y = x + z$, y luego $y - x = z - y = d$. Por consiguiente, $x = e$, $y = e + d$, y $z = e + 2d$ son términos consecutivos de una progresión aritmética con diferencia común igual a d. Diremos que tres números x, y y z están en progresión aritmética si son términos consecutivos de una progresión aritmética. Veamos a continuación una condición necesaria y suficiente para que los lados de un triángulo estén en progresión aritmética.

10.7.1. Teorema. Los lados de un triángulo están en progresión aritmética si y solo si existen números reales e y d tales que $0 < e$, $0 < e + 3d$, $0 < d < e$, y además se cumple que e, $e + d$ y $e + 2d$ son las longitudes de los lados del triángulo.

Prueba: *Necesidad*. Sea ΔABC un triángulo tal que $|BC| = e$, $|AC| = e + d$ y $|AB| = e + 2d$, en donde e y d son números reales positivos. Según la Desigualdad del Triángulo (4.4.9), se deben cumplir las relaciones

$$0 < |BC| = e < |AC| + |AB| = e + d + e + 2d = 2e + 3d,$$
$$0 < |AC| = e + d < |BC| + |AB| = e + e + 2d = 2e + 3d \text{ y}$$

$$0 < |AB| = e + 2d < |BC| + |AC| = e + e + d = 2e + d.$$

De aquí hallamos que

$$e < 2e + 3d \text{ implica que } 0 < e + 3d;$$
$$e + d < 2e + 3d \text{ implica que } 0 < e + 2d; \text{ y}$$
$$e + 2d < 2e + d \text{ implica que } d < e.$$

Por lo tanto, $0 < e + 3d$ y $d < e$.

Suficiencia. Supongamos que e y d son números reales positivos tales que $0 < e + 3d$, $d < e$. Probaremos que e, $e + d$ y $e + 2d$ son las longitudes de los lados de un triángulo. En efecto, de las suposiciones encontramos que

$$e < 2e + 3d = (e + d) + (e + 2d),$$
$$e + d < 2e + 3d = e + (e + 2d) \text{ y}$$
$$e + 2d < 2e + d = e + (e + d).$$

De acuerdo con el Teorema 8.3.17, concluimos que e, $e + d$ y $e + 2d$ son las longitudes de los lados de un triángulo. ♣

Para introducir los triángulos que estudiaremos en esta sección, recordaremos algunas propiedades de las medianas de un triángulo. En el Teorema 8.3.14, se vio que las mediatrices de un triángulo ΔABC se pueden expresar en función de los lados:

(*) $$4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2, \quad 4m_b^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2 \quad \text{y} \quad 4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2.$$

Como una primera consecuencia directa de estas identidades, tenemos la relación (Problema 8.689 (a)):

(**) $$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Una segunda consecuencia interesante de las identidades de (*) es el siguiente teorema.

10.7.2. Teorema. Sea ΔABC un triángulo.

1. Si $\dfrac{m_a}{a} = \dfrac{m_b}{b}$, entonces $a = b$.
2. Si $\dfrac{m_a}{a} = \dfrac{m_c}{c}$, entonces $a = c$.
3. Si $\dfrac{m_b}{b} = \dfrac{m_c}{c}$, entonces $b = c$.

Prueba: Basta con verificar la primera igualdad. Supongamos que $\dfrac{m_a}{a} = \dfrac{m_b}{b} = p$ y $a \neq b$. Entonces, $m_a = ap$ y $m_b = bp$. Haciendo sustituciones en las dos primeras identidades de (*), hallamos que

$$4a^2p^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2 \text{ y } 4b^2p^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2$$
$$4a^2p^2 - 4b^2p^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2 - 2a^2 - 2c^2 + b^2$$
$$4p^2(a^2 - b^2) = 3(b^2 - a^2)$$
$$p^2 = -\frac{3}{4},$$

pero ésto es imposible. Por lo tanto, $a = b$. ♣

Como una consecuencia inmediata del teorema anterior tenemos la siguiente caracterización de los triángulos equiláteros.

10.7.3. Corolario. Un triángulo ΔABC es equilátero si y solo si $\dfrac{m_a}{a} = \dfrac{m_b}{b} = \dfrac{m_c}{c}$.

Esto motiva la consideración de la siguiente clase de triángulos.

10.7.4. Definición[a-144]. Un triángulo ΔABC se llama de *auto-mediana* si sus lados y sus medianas satisfacen una de las siguientes identidades:

$$\frac{m_a}{a}=\frac{m_b}{b}=\frac{m_c}{c},\quad \frac{m_a}{a}=\frac{m_b}{c}=\frac{m_c}{b},\quad \frac{m_a}{b}=\frac{m_b}{a}=\frac{m_c}{c},$$

$$\frac{m_a}{b}=\frac{m_b}{c}=\frac{m_c}{a},\quad \frac{m_a}{c}=\frac{m_b}{a}=\frac{m_c}{b}\quad \text{y}\quad \frac{m_a}{c}=\frac{m_b}{b}=\frac{m_c}{a}.$$

Del Corolario 10.7.3 observamos que si un triángulo de auto-mediana satisface la primera identidad de la Definición 10.7.4, entonces dicho triángulo tiene que ser equilátero.

10.7.5. Teorema. Si un triángulo es de auto-mediana, entonces la razón entre sus medianas y sus lados es igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Prueba: Sean ΔABC un triángulo de auto-mediana y p la razón entre las medianas y los lados del triángulo. Entonces, de acuerdo con la identidad (**), obtenemos que

$$m_a^2+m_b^2+m_c^2=p^2(a^2+b^2+c^2)=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

$$p^2=\frac{3}{4}$$

$$p=\frac{\sqrt{3}}{2}.\ \clubsuit$$

Observemos que si $\Delta(a,b,c)$ es un triángulo de auto-mediana, entonces existe una permutación $\sigma:\{a, b, c\}\to \{a, b, c\}$ tal que $m_a=\frac{\sigma(a)\sqrt{3}}{2}$, $m_b=\frac{\sigma(b)\sqrt{3}}{2}$ y $m_c=\frac{\sigma(c)\sqrt{3}}{2}$.

10.7.6. Teorema[a-144]. Un triángulo ΔABC es de auto-mediana si y solo si los cuadrados de las longitudes de sus lados están en progresión aritmética.

Prueba: *Necesidad*. Sean ΔABC un triángulo de auto-mediana. Por el teorema anterior, la razón entre las medianas y los lados del triángulo es igual a $p=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Si $m_a=\frac{\sqrt{3}}{2}a$, entonces

$$4m_a^2=3a^2=2b^2+2c^2-a^2$$

$$4a^2=2b^2+2c^2$$

$$2a^2=b^2+c^2.$$

Si $m_a=\frac{\sqrt{3}}{2}b$, entonces

$$4m_a^2=3b^2=2b^2+2c^2-a^2$$

$$b^2=2c^2-a^2$$

$$a^2+b^2=2c^2.$$

Por último, si $m_a=\frac{\sqrt{3}}{2}c$, entonces

$$4m_a^2=3c^2=2b^2+2c^2-a^2$$

$$c^2=2b^2-a^2$$

$$a^2+c^2=2b^2.$$

Así, todos los casos posibles nos garantizan que los cuadrados de los lados del triángulo están en progresión aritmética.

Suficiencia. Sean ΔABC un triángulo tal que los cuadrados de sus lados están en progresión aritmética. Sin perder generalidad, supongamos que $a^2 + c^2 = 2b^2$. Sustituyendo este valor en las identidades de (*), encontramos que

$$4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2 = a^2 + c^2 + 2c^2 - a^2 = 3c^2,$$
$$4m_b^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2 = 4b^2 - 2c^2 + 2c^2 - b^2 = 3b^2 \text{ y}$$
$$4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2 = 2a^2 + a^2 + c^2 - c^2 = 3a^2.$$

De donde podemos ver que $m_a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}c$, $m_b = \dfrac{\sqrt{3}}{2}b$ $m_c = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$. Por lo tanto, $\dfrac{m_a}{c} = \dfrac{m_b}{b} = \dfrac{m_c}{a}$. Esto prueba que el triángulo ΔABC es de auto-mediana. ♣

El siguiente Corolario se sigue directamente de las identidades de (*) y el teorema anterior.

10.7.7. Corolario. Un triángulo isósceles es de auto-mediana si y solo si es equilátero.

Los triángulos de auto-mediana también fueron considerados por C. F. Parry en su artículo [a-124]. C. F. Parry estudió el triángulo formado por las intersecciones de las medianas de un triángulo con el circuncírculo del mismo. Observó que si el triángulo original es isósceles, entonces el triángulo formado por dichas intersecciones es también isósceles. El recíproco de esta afirmación no se cumple en general. Lo que esencialmente probó C. F. Parry es que si dicho triángulo es isósceles, entonces el triángulo original es o bien isósceles o bien de auto-mediana. Probaremos que el recíproco del resultado de Parry también se cumple. Para este propósito, primero daremos una fórmula para calcular las longitudes de los lados del triángulo en cuestión.

10.7.8. Teorema[a-124]. Sea ΔABC un triángulo. Sean L, M y N los puntos de intersección de m_a, m_b y m_c con el circuncírculo del triángulo, respectivamente. Entonces,

$$|MN| = \frac{9ag}{4m_c m_b}, \quad |NL| = \frac{9bg}{4m_a m_c} \quad \text{y} \quad |LM| = \frac{9cg}{4m_a m_b},$$

en donde g es la potencia del centro de gravedad G del triángulo al circuncírculo del mismo.

Prueba: Por el Teorema 8.3.34, sabemos que $|AG| = \dfrac{2}{3}m_a$ y $|CG| = \dfrac{2}{3}m_c$. Sea $g = |AG||GL| = |BG||GM| = |CG||GN|$ la potencia de G con respecto al cicuncírculo del triángulo ΔABC. En los triángulos ΔAGC y ΔNGL, se cumple que $\angle CGA \cong \angle NGL$, por ser ángulos opuestos por el vértice (2.10.2). Según el Corolario 9.5.7, sabemos que

$$\angle LNC \cong \angle LAC \text{ y } \angle ALN \cong \angle ACN.$$

Así, por el criterio 6.2.6, $\Delta AGC \sim \Delta NGL$. Como consecuencia de ésto,

$$\frac{|NL|}{|AC|} = \frac{|GL|}{|CG|} = \frac{|NL|}{b} = \frac{|AG||GL|}{|AG||CG|} = \frac{9g}{4m_a m_c}$$

$$|NL| = \frac{9bg}{4m_a m_c}.$$

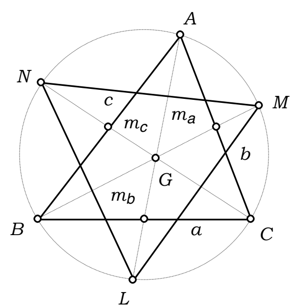


Figura 10.12

Las dos identidades restantes se establecen de manera similar. ♣

En el siguiente teorema, usaremos la notación que se usó en el teorema anterior.

10.7.9. Teorema. Sea ΔABC un triángulo cualquiera. El triángulo ΔLMN es isósceles si y solo si ΔABC es o bien isósceles ó bien de auto-mediana.

Prueba: *Necesidad*. Supongamos que ΔLMN es un triángulo isósceles tal que, sin perder generalidad, $|LM| = |MN|$. Entonces,

$$|LM| = \frac{9cg}{4m_a m_b} = \frac{9ag}{4m_c m_b} = |MN|$$

$$\frac{m_a}{c} = \frac{m_c}{a}$$

$$c\,m_c = a\,m_a$$

$$c^2\, 4m_c^2 = a^2\, 4m_a^2$$

$$c^2(2a^2 + 2b^2 - c^2) = a^2(2c^2 + 2b^2 - a^2)$$

$$2a^2c^2 + 2b^2c^2 - c^4 = 2a^2c^2 + 2b^2a^2 - a^4$$

$$a^4 - c^4 = 2b^2a^2 - 2b^2c^2$$

$$(a^2 + c^2)(a^2 - c^2) = 2b^2(a^2 - c^2).$$

Si $a^2 - c^2 = 0$, entonces $a = c$ y, por ello, ΔABC es isósceles. Supongamos pues que ΔABC no es isósceles. Entonces, $a^2 + c^2 = 2b^2$. Del Teorema 10.7.6 se sigue que el triángulo ΔABC es de auto-mediana.

Suficiencia. Supongamos primero que ΔABC es isósceles y, sin perder generalidad, supongamos también que $a = b$. Por el Teorema 8.3.23, $m_a = m_b$ y, por consiguiente, $\frac{a}{m_b} = \frac{b}{m_a}$. De aquí hallamos que

$$|MN| = \frac{9ag}{4m_c m_b} = \frac{9bg}{4m_a m_c} = |NL|.$$

Esto prueba que ΔLMN es un triángulo isósceles. Consideremos ahora el caso en que ΔABC sea un triángulo de auto-mediana. Sin perder generalidad, supongamos que $\frac{m_a}{c} = \frac{m_b}{b} = \frac{m_c}{a}$. Según el Teorema 10.7.8, obtenemos que

$$\frac{m_a}{c} = \frac{m_c}{a}$$

$$\frac{c}{m_a m_b} = \frac{a}{m_c m_b}$$

$$|LM| = \frac{9cg}{4m_a m_b} = \frac{9ag}{4m_c m_b} = |MN|.$$

Por lo tanto, $|LM| = |MN|$. Esto prueba que ΔLMN es un triángulo isósceles. ♣

Así hemos probado que si ΔABC es un triángulo de auto-mediana, entonces ΔLMN es un triángulo isósceles. El triángulo $\Delta(\frac{3}{2},1,1)$ es un triángulo isósceles que no es de auto-mediana.

K. R. S. Sastry [a-144] dio una manera de generar triángulos *Heronianos* (= triángulos cuyos lados tienen longitud igual a un número natural) de auto-altura mediante una modificación de la fórmula que Diofanto de Alejandría usó para generar triángulos Pitagóricos:

Sean m y n dos números enteros positivos tales que $m^2 - n^2 > 2mn$ y $4mn < m^2 + n^2$. Si ponemos $a = m^2 + n^2$, $b = m^2 - n^2 + 2mn$ y $c = m^2 - n^2 - 2mn$, entonces $\Delta(a,b,c)$ es un triángulo Heroniano de auto-mediana. En efecto, los lados $m^2 + n^2$, $m^2 - n^2 + 2mn$ y $m^2 - n^2 - 2mn$ de nuestro triángulo satisfacen que

$$b^2 + c^2 = (m^2 - n^2 + 2mn)^2 + (m^2 - n^2 - 2mn)^2 =$$
$$(m^2 - n^2)^2 + 2mn(m^2 - n^2) + 4m^2n^2 + (m^2 - n^2)^2 - 2mn(m^2 - n^2) + 4m^2n^2 =$$
$$2(m^2 - n^2)^2 + 8m^2n^2 = 2m^4 - 4m^2n^2 + 2n^4 + 8m^2n^2 = 2m^4 + 4m^2n^2 + 2n^4$$
$$2(m^2 + n^2)^2 = 2a^2 .$$

Esto demuestra que la igualdad $b^2 + c^2 = 2a^2$. Así, con base en el Teorema 10.7.6,

$$\Delta(m^2 + n^2, m^2 - n^2 + 2mn, m^2 - n^2 - 2mn)$$

es un triángulo Heroniano de auto-mediana.

Veamos algunos ejemplos concretos. La condición $m^2 - n^2 > 2mn$ implica claramente que $m > n$, pero esta condición no es suficiente, pues cuando $n = 1$ y $m = 2$, tenemos que $m^2 - n^2 - 2mn = -1$. Pongamos $n = 1$ y $2 < m$. La desigualdad $m^2 + 1 > 4m$ no se cumple en general en este caso, pues si $n = 1$ y $m = 3$, entonces $10 = m^2 + 1 > 4m = 12$. Así que debemos tener que $m > 3$. Concluimos que si $m > 3$ y $m^2 + 1 > 4m$, entonces $m^2 + 1$, $m^2 - 1 + 2m$ y $m^2 - 1 - 2m$ son los lados de un triángulo que satisfacen las condiciones impuestas. Poniendo $m = 4$ y $n = 1$ generamos el triángulo $\Delta(17,23,7)$. Por otro lado, C. F. Parry [a-124] también ideó un método para generar un triángulo Heroniano de auto-mediana a partir de un triángulo Pitagórico con ciertas características:

Si $\Delta(a,b,c)$ es un triángulo Pitagórico tal que $a > b > c$ y $2b > a > 2c$, entonces $\Delta(a,b + c,b - c)$ es un triángulo Heroniano de auto-mediana (por el Teorema 10.7.6). Particularmente, el triángulo Pitagórico $\Delta(13,12,5)$ nos proporciona el triángulo Heroniano de auto-mediana $\Delta(13,17,7)$.

También uno se puede preguntar acerca de las propiedades de los triángulos cuyas medidas de sus ángulos estén en progresión aritmética. Una clasificación de este tipo de triángulos fue sugerida por D. R. Rao [a-133] como una pregunta en la revista *School Science and Mathematics* (# 3275) y fue resuelta por R. A. Carman y algunos otros más. A continuación, damos la caracterización de Rao y la solución de Carman.

10.7.10. Teorema[a-133]. Las medidas de los ángulos de un triángulo están en progresión aritmética si y solo si uno de ellos tiene medida igual a 60.

Prueba(Carman): *Necesidad*. Sea ΔABC un triángulo tal que

$$m(\angle B) = m(\angle A) + d \text{ y } m(\angle C) = m(\angle A) + 2d,$$

en donde d es un número real positivo. De acuerdo con el Teorema 4.3.4, sabemos que

$$180 = m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) = m(\angle A) + m(\angle A) + d + m(\angle A) + 2d = 3m(\angle A) + 3d$$
$$60 = m(\angle A) + d = m(\angle B).$$

Suficiencia. Sea ΔABC un triángulo tal que $m(\angle B) = 60$. Por el Teorema 4.3.4, se cumple al menos una de las desigualdades $m(\angle A) \leq 60$ ó $m(\angle C) \leq 60$. Si $m(\angle A) = 60$, entonces $m(\angle C) = 60$ y, consecuentemente, los tres ángulos están en progresión aritmética con diferencia común igual a 0. Supongamos pues que $m(\angle A) < 60$. Pongamos $m(\angle A) = 60 - d$ y $m(\angle C) = 60 + d'$, en donde d y d' son números reales positivos. Por el Teorema 4.3.4, hallamos que

$$180 = m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) = 60 - d + 60 + 60 + d',$$

pero de aquí deducimos que $d = d'$. Por lo tanto, $m(\angle B) = m(\angle A) + d$ y $m(\angle C) = m(\angle A) + 2d$. ♣

10.8. Triángulos cuyos lados están en progresión aritmética

J. H. Butchart propuso el siguiente enunciado como una pregunta en la revista Amer. Math. Monthly 1940, p. 708 (ver también el Problema 82 del libro [l-182]).

10.8.1. Teorema. Si las longitudes de los lados de un triángulo están en progresión aritmética, entonces la recta que une su incentro y su centro de gravedad es paralela a alguno de los lados del triángulo.

Prueba(D. L. Mackay): Sea ΔABC un triángulo cuyos lados están en progresión aritmética.

Figura 10.13

Sin perder generalidad, supongamos que a es el lado mayor, y que $a + c = 2b$. Sean P el punto de intersección de la recta paralela a BC que pasa por G y h_a, y P' el punto de intersección de la recta paralela a BC que pasa por I y h_a. Del Teorema 8.3.34, sabemos que $\frac{|GM_a|}{m_a} = \frac{1}{3}$. Por lo cual, con base en el Teorema 6.1.13, $\frac{|PH_a|}{h_a} = \frac{1}{3}$. Por otro lado, sabemos que

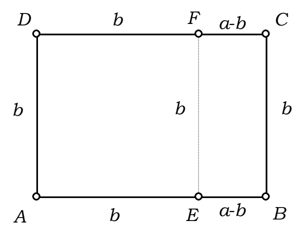
$$\frac{bh_a}{2} = are(\Delta ABC) = are(\Delta IAB) + are(\Delta IBC) + are(\Delta ICA) = \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br = \frac{r(a+b+c)}{2} = \frac{3br}{2}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{r}{h_a}.$$

Pero como $\frac{r}{h_a} = \frac{|P'H_a|}{h_a}$, tenemos entonces que $\frac{|P'H_a|}{h_a} = \frac{1}{3}$. Por lo tanto, $P = P'$. De donde obtenemos que $\overleftrightarrow{IG} \parallel BC$. ♣

10.9. Rectángulos áureos

Todo rectángulo que no es un cuadrado se puede descomponer en un cuadrado y en un rectángulo como lo muestra la figura de la derecha.



$a > b$

Figura 10.14

10.9.1. Definición. Un rectángulo se llama *áureo* si es semejante al rectángulo de su descomposición.

Para los Griegos, los rectángulos áureos eran aquellos rectángulos con la forma más bella, y es por eso que uno los puede encontrar en su arquitectura. Por ejemplo, el Paternón de Atenas testifica la utilización de los rectángulo áureos en la arquitectura Griega (ver el libro de H. E. Huntley [l-185]).

10.9.2. Teorema. Sea $\square ABCD$ un rectángulo con $a > b$. Entonces, $\square ABCD$ es áureo si y solo si $a = b\phi$.

Prueba: Sabemos que

$$\square ABCD \sim \square EBCF \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{a-b} \Leftrightarrow a^2 - cb - b^2 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{b+5\sqrt{b^2}}{2} = b\phi. \clubsuit$$

No es difícil ver que todo rectángulo semejante a un rectángulo áureo es también áureo. Usando esta observación podemos dividir un rectángulo áureo en un número infinito de rectángulos áureos como lo muestra la siguiente figura:

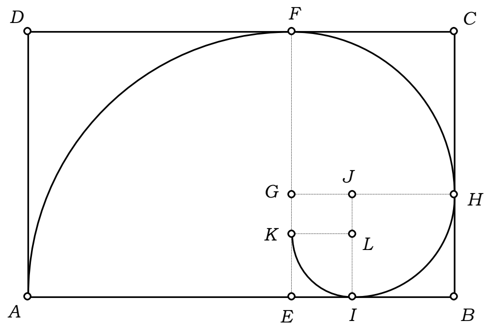


Figura 10.15

Empecemos con un rectángulo áureo $\square ABCD$ con $a > b$. Por definición, $\square ABCD$ es semejante al rectángulo de su descomposición $\square EBCF$. De igual manera, $\square EBCF$ es semejante al rectángulo de su descomposición $\square EBHG$, y luego $\square EBHG$ es semejante a su rectángulo de su descomposición $\square EIJG$. Podemos continuar así hasta el infinito. Si al mismo tiempo que trazamos los rectángulos áureos trazamos arcos como lo muestra la figura 10.15, se obtiene la espiral logarítmica. En la naturaleza, el enrollamiento de una amonita se efectúa según la espiral logarítmica. Esto se debe a que las células del caparazón son semejantes entre si. Una discusión muy detallada sobre este hecho y otros similares se encuentra en el libro de T. A. Cook [l-111].

Problemas

10.1[I-209]. Probar que el ángulo mayor del triángulo $\Delta(3,4,\sqrt{38})$ mide más de 120.
10.2. Probar que en el triángulo $\Delta(7,5,3)$ la medida de su ángulo mayor es 120.
10.3. ¿Para qué valores de x es el triángulo $\Delta(3x,2x+9,5x-18)$ isósceles?
10.4. En el triángulo $\Delta(\angle 90,\angle 60,\angle 30)$, probar las siguientes identidades:
a. $a = 4|BH_a| = 2m_a$.
b. $b = 2|AH_a| = 3|AB_b| = \frac{3}{2}b_b$.
c. $b_b = \frac{4}{3}h_a$.
d. $m_a = c$.

10.5. Consideremos el triángulo $\Delta(20,16,12)$. Sean D y E los puntos de intersección de t_a con $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{AC}$, respectivamente.
a. Calcular las longitudes de los lados del triángulo ΔDAE.
b. Probar que los puntos D, A, M_a y C son concíclicos.
10.6. En el triángulo $\Delta(\angle 35,\angle 100,\angle 43)$, probar que se cumple la congruencia $BH_b \cong H_bC$.
10.7. En el triángulo $\Delta(10,8,6)$, calcular los perímetros de los triángulos ΔABH_a y ΔAH_aC.
10.8. En el triángulo $\Delta(6,8,10)$ trazamos una recta paralela AB que pase por el punto B_a y corte a AC en el punto D. Calcular $|AD|$ y $|DC|$.
10.9. Consideremos el triángulo $\Delta(6,3,4)$. Por el punto B_a trazamos una recta paralela a e_a que corte a AB en el punto E y a $\overleftrightarrow{AC}$ en el punto F. Calcular las longitudes de los segmentos BE y CF.
10.10. En el triángulo $\Delta(10,12,6)$, sean $D \in AB$, $E \in BC$ y $F \in AC$ tales que $\square BEFD$ es un paralelogramo. Si $|EC| = 2$, calcular el perímetro del paralelogramo $\square BEFD$.
10.11. En el triángulo rectángulo $\Delta(\angle 90,\angle 60,\angle 30)$ calcular $\frac{|AB_b|}{|B_bC|}$.

10.12. Consideremos el triángulo $\Delta(\angle 90,\angle 30,\angle 60)$ en el cual $|AC| = 4$. Sea D el punto de intersección de $\overleftrightarrow{AC}$ y t_a. Encontrar las longitudes de los lados del triángulo ΔAH_aD.
10.13. En el triángulo rectángulo $\Delta(\angle 90,\angle 60,\angle 30)$ sabemos que $|AB| = 2$. Sean D la proyección de H_a sobre AC y E la proyección de D sobre AH_a. Calcular las longitudes de los lados del triángulo ΔEH_aD.
10.14. Sea l un recta perpendicular al lado BC del triángulo $\Delta(8,5,5)$ en el punto B. Si P es el punto de intersección de l y b_c, calcular $d(P,\overleftrightarrow{BC})$ y $d(P,\overleftrightarrow{AC})$.
10.15. En cierto triángulo rectángulo $\Delta(\angle 90,\angle 60,\angle 30)$ tenemos que $|AB| = 2$. Por los puntos B y C trazamos rectas perpendiculares a $\overleftrightarrow{BC}$ que corten a $\overleftrightarrow{AB}$ y a $\overleftrightarrow{AC}$ en los puntos D y E, respectivamente. Encontrar las longitudes de los lados de los triángulos ΔEBA y ΔACD.
10.16. En el triángulo rectángulo $\Delta(15,12,9)$, sean D la proyección de H_a sobre AC y E la intersección de la bisectriz del ángulo $\angle AH_aB$ y AB. Encontrar las longitudes de los lados y las diagonales del cuadrilátero $\square H_aDAE$.

10.17[l-209]. Si en el triángulo ΔABC los segmentos BH_a, CH_a y AH_a están en proporción 2:3:6, probar que $m(\angle A) = 45$.
10.18[l-209]. Probar que si los ángulos de un triángulo están en proporción 1:2:3, entonces sus lados están en proporción 1: $\sqrt{3}$:2.
10.19. Calcular las medidas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo sabiendo que las medidas de sus tres ángulos están en progresión geométrica.
10.20. Si las medidas de los ángulos de un triángulo rectángulo están en progresión aritmética, calcular la media de cada uno de los ángulos agudos del triángulo.
10.21(PUC-RS-80). Las medidas de los ángulos de un cierto triángulo están en progresión aritmética de razón 20. Calcular la media del ángulo menor del triángulo.
10.22. Las medidas de los ángulos de un cierto triángulo están en progresión aritmética. Si el mayor de ellos es igual al doble del menor, calcular la media de cada uno de los ángulos del triángulo.
10.23[l-1]. Si los lados de un triángulo $\Delta(a,b,c)$ están en progresión aritmética y $a < b < c$, probar que $ac = 6Rr$.
10.24[l-195]. Si los lados de un triángulo $\Delta(a,b,c)$ están en progresión aritmética y a es el lado menor, probar que

$$\cos\angle A = \frac{4c-3b}{2c}.$$

10.25. Si las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo están en progresión aritmética con diferencia común d, en donde d es un número natural positivo, probar que su inradio es igual a d.
10.26l-32, Problem 1]. Si las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo están en progresión aritmética, probar que las longitudes de sus lados están en proporción 3 : 4 : 5.
10.27. Sea $\Delta(a,b,c)$ un triángulo tal que a, b y c están en progresión aritmética.

a. Probar que $\cot\frac{\angle A}{2}$, $\cot\frac{\angle B}{2}$ y $\cot\frac{\angle C}{2}$ también están en progresión aritmética.

b. Probar que $\cos\angle A\cot\frac{\angle A}{2}$, $\cos\angle B\cot\frac{\angle B}{2}$ y $\cos\angle C\cot\frac{\angle C}{2}$ también están en progresión aritmética.

10.28. Sea $\Delta(a,b,c)$ un triángulo. Si a^2, b^2 y c^2 están en progresión aritmética, probar que $\cot\angle A$, $\cot\angle B$ y $\cot\angle C$ también están en progresión aritmética.
10.29. Si en un triángulo ΔABC se cumple que $m(\angle A)= m(\angle B) - m(\angle C)$, ¿qué se puede decir de este triángulo?
10.30[l-238]. Sea ΔABC un triángulo tal que $m(\angle C) = 60$ y $a = 4b$. Probar que $c = \sqrt{13}\, b$.
10.31. Sea ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$. Si $m(\angle A) = 120$, probar que $2h_a$ es mayor que cualquiera de los lados del triángulo.
10.32. Si ΔABC es un triángulo isósceles con $AB \cong AC$ y $m(\angle B) = 120$, probar que $|AC|^2 = 3|AB|^2$.
10.33. Sea ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$. Si $m(\angle BB_bC) = 120$, calcular la medida de cada uno de los ángulos del triángulo.
10.34[l-1]. Si ΔABC es un triángulo isósceles con $AB \cong AC$ y $m(\angle A) = 20$, probar que $a^3 + b^3 = 3ab^2$.
10.35. Si ΔABC es un triángulo tal que $m(\angle B) = 60$ y $m(\angle C) = 30$, probar que $a = 2c$.
10.36. Sea ΔABC un triángulo tal que $m(\angle A) = 75$ y $m(\angle B) = 60$. Calcular las longitudes de los lados AB y BC, h_a, el área y el perímetro del triángulo en función de b.
10.37. Sea ΔABC un triángulo isósceles en el cual $m(\angle A) = 120$. Si D y E trisecan a BC, probar que ΔADE es un triángulo equilátero.
10.38. Sea ΔABC un triángulo tal que $m(\angle A) = 60$. Probar que $|BC| = |BB_c| + |CB_b|$.
10.39. Si en un triángulo ΔABC se tiene que $m(\angle C) = 3m(\angle B)$ y si D es el punto de intersección de AB y la mediatriz de BC, probar que DC corta al triángulo ΔABC en dos triángulos isósceles.
10.40. Si en el triángulo ΔABC se tiene que $\angle B = 2\angle C$ es agudo, probar que $|AC| < 2|AB|$.
10.41[l-32, Problem 189]. Si en el triángulo ΔABC se cumple que $m(\angle B) = 18$ y $m(\angle C) = 36$, probar que $R = a - b$.
10.42. Si ΔABC es un triángulo tal que $m(\angle A) = 2m(\angle C)$, probar que $\Delta ABC \cong \Delta B_aBA$.

10.43[l-164]. Si en un triángulo ΔABC se tiene que $m(\angle A) = 2m(\angle C)$, $|BC| = 2 + |AB|$ y $|AC| = 5$, encontrar las longitudes de sus lados AB y BC.
10.44. Sea ΔABC un triángulo tal que $m(\angle A) = 2m(\angle B)$. Si $D \in BC$ y $E \in AC$ satisfacen que $AB \cong AD \cong DE \cong C$, calcular la medida de cada uno de los ángulos del triángulo ΔABC.
10.45. Sea ΔABC un triángulo tal que $|BC| = 2|AB|$.

a. Probar que si el ángulo $\angle A$ es recto, entonces $m(\angle B) = 60$, $m(\angle C) = 30$ y $b = \sqrt{3}\,C$.

b. Si M es el punto medio de BM_a, probar que m_a es la bisectriz del ángulo $\angle MAC$.

10.46. Sea ΔABC un triángulo tal que $m(\angle B) = 2m(\angle C)$. Prolongamos AB hasta un punto E tal que $BE \cong BH_a$ y sea D el punto de intersección de las rectas $\overleftrightarrow{EH_a}$ y AC. Probar las siguientes afirmaciones:

a. $DA \cong DH_a \cong DC$.

b. $\Delta ADE \sim \Delta ABC$.

c. $AE \cong H_aC$.

10.47. Sea ΔABC un triángulo equilátero cuyos lados tienen longitud 1. Probar que no existe un punto $P \in int(\Delta ABC)$ tal que $d(P,A)$, $d(P,B)$ y $d(P,C)$ sean números enteros.

10.48. Sean ΔABC un triángulo equilátero y $P \in int(\Delta ABC)$. Si $\overrightarrow{BP}$ es la bisectriz del ángulo $\angle B$ y $m(\angle BAP) = 20$ ¿Cuál de los segmentos PA, PB y PC es el más grande y el más pequeño?
10.49. Sobre cada uno de los lados de un triángulo equilátero ΔABC y hacia su exterior construimos cuadrados $\square LMCB$, $\square ACPQ$ y $\square BARS$. Probar las siguientes afirmaciones.

a. $AM \cong BQ \cong CS$.

b. El triángulo ΔSMQ es equilátero.

c. El triángulo que los segmentos AM, BQ y CS forman con sus intersecciones es equilátero.

10.50. Sea ΔABC un triángulo rectángulo con hipotenusa a tal que $b = 2c$. Supongamos que $M \in BC$ y que $P \in AB$ y $Q \in AC$ son las proyecciones de M sobre los lados AB y AC, respectivamente. Construimos hacia el exterior del triángulo ΔABC dos cuadrados $\square PARS$ y $\square AQTV$. Si el área de la región poligonal $SPMQTVAR$ es igual a p, expresar las longitudes de los segmentos MP y MQ en función de p y c.
10.51[l-164]. En el triángulo $\Delta(21,17,10)$ está inscrito un rectángulo de modo que dos de sus vértices se encuentran en uno de los lados del triángulo y los otros dos en los lados restantes del triángulo. Si el perímetro del rectángulo es igual a 22.5, encontrar las longitudes de los lados de dicho rectángulo.

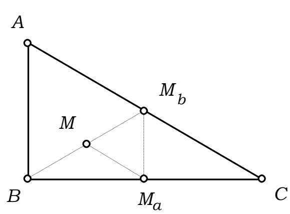
10.52[l-164]. En un triángulo rectángulo ΔABC con hipotenusa a se tiene que $\cos\angle H_aAM_a = \frac{40}{41}$. Hallar $\frac{b}{c}$.

10.53[l-164]. Sea ΔABC un triángulo rectángulo con hipotenusa a. Si $b_b = \frac{b\sqrt{3}}{3}$, calcular

a. la medida del ángulo $\angle A$, y

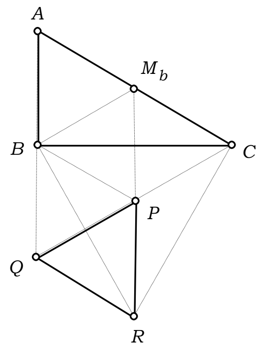
b. las longitudes de los catetos en función de la hipotenusa.

10.54[a-52]. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle B$ tal que $m(\angle A) = 60$ y $m(\angle A) = 30$. Si ΔAM_bP es un triángulo equilátero que yace en el exterior del triángulo ΔABC, probar que ΔPBC es también un triángulo equilátero.
10.55[a-52]. En la figura:



tenemos un triángulo ΔABC rectángulo en $\angle B$ tal que $m(\angle A) = 60$ y $m(\angle A) = 30$. Si M es el punto medio de m_b, probar que ΔMM_aM_b es un triángulo equilátero.

10.56[a-52]. En la figura:



ΔABC es un triángulo rectángulo en $\angle B$ tal que $m(\angle A) = 60$ y $m(\angle C) = 30$. Si $\Delta P M_b B$, ΔQCA y ΔRCB son triángulos equiláteros, probar que ΔPQR es un triángulo equilátero.

10.57[l-209]. Si en el triángulo ΔABC se cumplen las identidades $\tan\frac{\angle A}{2} = \frac{5}{6}$ y $\tan\frac{\angle B}{2} = \frac{20}{37}$, encontrar $\tan\frac{\angle C}{2}$ y probar que $a + b = 2b$.

10.58(Baltic Way 1999, Problem 12). Sea ΔABC un triángulo tal que $2|AB| = |AC| + |BC|$. Probar que I, O, M_a y M_b son concíclicos.

10.59[a-163]. a. Encontrar las medidas de los ángulos de un triángulo casi-rectángulo isósceles.

b. Encontrar las medidas de los ángulos de un triángulo isósceles tal que una de sus bisectrices divide al triángulo en dos triángulos casi-rectángulos, y dar las medidas de los ángulos de ambos triángulos.

c. Probar que uno de los dos triángulos formados por una de las bisectrices de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo es casi-rectángulo.

10.60. Dar un ejemplo de un triángulo que no sea rectángulo y que una de sus bisectrices divida al triángulo en dos triángulos, de tal forma que uno de ellos sea casi-rectángulo.

10.61. Probar que todos los triángulos casi-rectángulos isósceles son semejantes.

10.62. Encontrar las medidas de los ángulos de un triángulo casi-rectángulo cuyas medidas de sus ángulos están en progresión aritmética con diferencia común igual a 15.

10.63. Sea ΔABC un triángulo casi-rectángulo con $m(\angle C) - m(\angle B) = 90$. Probar las siguientes identidades:

a. $m(\angle C B_a A) = 45$.

b. $b_a = e_a$.

10.64. Probar que un triángulo rectángulo es de auto-mediana si y solo si el cateto más grande es igual a $\sqrt{2}$ veces el cateto más pequeño.

10.65. ¿Es posible que un triángulo Pitagórico sea de auto-mediana?

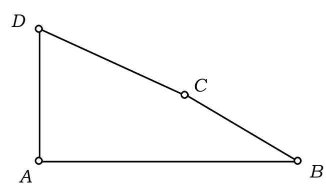
10.66. Probar que $\Delta(4,5,6)$ es un triángulo vux.

10.67. Consideremos el cuadrilátero $\square\ (4,6,12,8)$. Si $E \in AC$ satisface que $\overrightarrow{BE}$ es la bisectriz de $\angle B$, probar que $\overrightarrow{DE}$ es la bisectriz del ángulo $\angle D$.

10.68. La siguiente definición es de J. Garfunkel:

Definición. Un cuadrilátero $\square ABCD$ se llama *equilic* si $AD \cong BC$ y

$$m(\angle A) + m(\angle B) = 120.$$



Los siguientes enunciados son algunos de los resultados que J. Garfunkel prueba en su artículo [a-52]:

a. Uno de los ángulos de un cuadrilátero equilic es recto si y solo si una de sus diagonales es congruente con uno de los dos lados no congruentes del mismo cuadrilátero.

b. Si sobre el lado AB y hacia su interior de un cuadrilátero equilic $\square ABCD$ construimos un triángulo equilátero ΔPAB, probar que ΔPCD es también un triángulo equilátero.

c. Probar que en un cuadrilátero equilic los puntos medios de sus diagonales y el punto medio de uno de sus dos lados no congruentes forman los vértices de un triángulo equilátero.

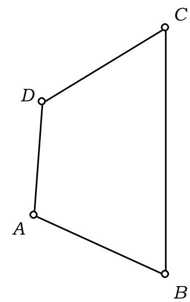
d. Sobre tres lados consecutivos de un cuadrilátero equilic $\square ABCD$ construimos exteriormente dos triángulos equiláteros ΔPAD y ΔQDC e interiormente un triángulo equilátero ΔRBC. Probar que ΔPQR es un triángulo equilátero.

e. Sobre tres lados AC, DC y DB de un cuadrilátero equilic $\square ABCD$ y en el semiplano determinado por $\overleftrightarrow{AB}$ que contenga a C construimos triángulos equiláteros ΔPAC, ΔQDC y ΔRDB. Probar que P, Q y R son colineales.

Algunos de estos resultados se comentan también en el libro [l-186].

10.69. En su trabajo [a-53], J. Garfunkel estudió los siguientes cuadriláteros:

Definición. Un cuadrilátero $\square ABCD$ se llama *casi-isósceles* si $AB \cong CD$ y $m(\angle B) + m(\angle C) < 180$.



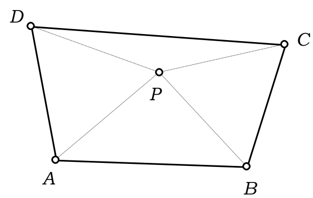
Le dejamos al lector que demuestre las siguientes propiedades de los cuadriláteros casi-isósceles que aparecen en [a-53]:

a. Un cuadrilátero $\square ABCD$ es casi-isósceles si y solo si al trazar triángulos equiláteros ΔFAB y ΔECD hacia el exterior del mismo los puntos E y F junto con el punto medio de AD resultan ser colineales.

b. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero casi-isósceles. Entonces, los puntos medios de los lados AD y BC y los puntos medios de las diagonales del cuadrilátero son los vértices de un rombo.

10.70. La siguiente definición es de C. M. Dodge:

Definición. Un cuadrilátero $\square ABCD$ se llama *bow-tie* si podemos encontrar un punto P en su interior, de tal forma que los triángulos ΔPBC y ΔPDA sean equiláteros.



A continuación, enunciamos algunos de los resultados que C. M. Dodge prueba en su artículo [a-43]:

a. En un cuadrilátero bow-tie $\square ABCD$, probar que los triángulos ΔPBC y ΔPDA son congruentes si y solo si el cuadrilátero original es un trapecio isósceles.

b. Probar que las diagonales de un cuadrilátero bow-tie son congruentes y forman un ángulo de medida 60.

Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero bow-tie.

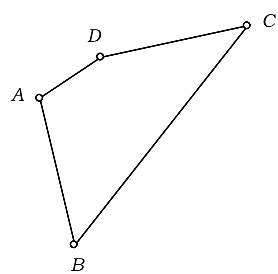
c. Sobre las diagonales AC y BD del cuadrilátero trazamos triángulos equiláteros ΔQAC y ΔRBD en una misma orientación. Probar que ΔPQR es un triángulo equilátero.

d. Si M y N son los puntos medios de AC y BD, respectivamente, probar que ΔPMN es un triángulo equilátero.

e. Si M, N, L y O son los puntos medios de AB, BC, CD y DA, respectivamente, probar que ΔMNL y ΔLOM son triángulos equiláteros congruentes.

10.71. La noción que enunciamos a continuación es de C. M. Dodge:

Definición. Un cuadrilátero $\square ABCD$ se llama *squarilic* si $AB \cong CD$ y si los ángulos $\angle B$ y $\angle C$ son complementarios.



Las siguientes afirmaciones son parte de los resultados que C. M. Dodge demuestra en su artículo [a-44]:

Sea$\square ABCD$ un cuadrilátero squarilic.

a. Probar que los puntos medios de las diagonales del cuadrilátero y los puntos medios de BC y AD son los vértices de un cuadrado.

b. Si trazamos cuadrados en una misma orientación sobre los lados BC y AD del cuadrilátero, probar que estos cuadrados tienen el mismo centro.

c. Si trazamos cuadrados en una misma orientación sobre los lados AB y CD del cuadrilátero, probar que la recta que une los centros de dichos cuadrados es paralela a la recta que contiene al lado BC y biseca al lado AD.

d. Si trazamos cuadrados en una misma orientación sobre las diagonales AC y BD del cuadrilátero, probar que dichos cuadrados tienen el mismo centro.

10.72[l-40]. Probar que las bisectrices de los ángulos $\angle C$ y $\angle D$ del trapecio $\square$ (9,4,12,5) se cortan en el lado AB.

CAPÍTULO 11

CONSTRUCCIONES CON REGLA Y COMPÁS

En los tiempos de Euclides, los instrumentos fundamentales empleados por los geómetras fueron la regla sin graduación y el compás. En aquella época, los geómetras griegos pensaron que cualquier problema sobre construcciones geométricas se podía llevar a cabo usando solamente la regla y el compás de manera combinada. Pero, siglos más tarde, se demostró que con dichos instrumentos no es posible construir un cuadrado que tenga la misma área que un círculo y que es imposible trisecar un ángulo no degenerado cualquiera (ver detalles e información histórica sobre la imposibilidad de ambas construcciones en [l-129, vol. I]). Sin embargo, hay una cantidad muy grande de construcciones geométricas que se pueden realizar usando la regla y el compás, y que han sido resultado de muchas investigaciones. En 1797, Lorenzo Mascheroni probó que toda construcción geométrica que se resuelve usando regla y compás se puede resolver usando compás solamente (una demostración de este enunciado aparece en [l-129, vol. I 194-197]). Posteriormente, se supo que el Teorema de Mascheroni apareció mucho antes en el libro escrito por G. Mohr titulado "Euclides Danicus" publicado en 1672. Recomendamos el libro de A. N. Kostovski [l-197] que contiene varias construcciones usando compás solamente. Uno también podría preguntarse si es posible llevar a cabo todas las construcciones geométricas usando solamente regla. Es sabido que es imposible encontrar el centro de un círculo usando regla como único instrumento (ver, por ejemplo, el libro de A. S. Smogorzhevski [l-298]), pero usando solamente compás sí es posible encontrarlo (ver la Construcción 11.3.18). En este capítulo usaremos la regla y el compás ya que en algunos casos las construcciones con compás son más largas y en muchísimos otros casos no han sido precisadas. Recomendamos al lector que deseé conocer más sobre construcciones geométricas la excelente recopilación de problemas hecha por J. Petersen [l-263]. En este capítulo, convenimos en que la palabra *construir* se referirá a construir usando solamente regla sin graduación y compás. Cabe señalar que las construcciones geométricas son fundamentales en el arte y en la industria. La ornamentación arquitectónica como el diseño de edificios y puentes, la creación de maquinaria industrial y la elaboración de muebles son ejemplos concretos del uso de las construcciones geométricas. Con estos ejemplos, podemos darnos cuenta, que las aplicaciones de la geometría son infinitas. Los artistas encuentran en la geometría una fuente de inspiración para crear sus obras. En los libros [l-250], [l-251] y [l-252], uno puede encontrar algunos usos del cuadrado, el triángulo y el pentágono en el arte.

11.1. Construcciones básicas

En geometría, la solución de un problema de construcción consiste tanto en la explicación de cómo se construye la figura como en la justificación del por qué con los pasos indicados se obtiene la figura con las propiedades deseadas.

Los puntos en el plano que se pueden construir usando solo regla y compás son los puntos que surgen de las siguientes intersecciones:

1. La intersección de dos rectas.
2. La intersección de una recta y un círculo.
3. La intersección de dos círculos.

Todas las construcciones geométricas requieren de las construcciones de algunos de estos tres tipos de puntos, los cuales nos indican la posición correcta en donde debemos trazar ya sea un segmento o un círculo.

11.1.1. Construcción. Construir un segmento congruente a un segmento dado.

Sea AB un segmento.
1. Fijamos una recta l y sobre ella un punto C.
2. Haciendo centro en C y con radio igual a $|AB|$, trazamos un círculo que corte a l en un punto D.

Según el Teorema 1.8.1, $AB \cong CD$. ♣

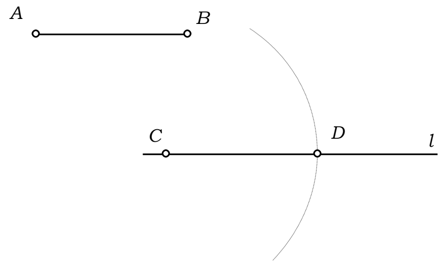


Figura 11.1

11.1.2. Construcción. Construir la mediatriz de un segmento.

Sea AB un segmento.
1. Con centro en A trazamos un primer círculo de radio mayor que la longitud del segmento AB.
2. Haciendo centro en B trazamos un segundo círculo con el mismo radio que el anterior que corte al primer círculo en los puntos P y Q.

Tenemos entonces que los triángulos ΔPAB y ΔQAB son isósceles con $AP \cong BP \cong AQ \cong BQ$. Esto quiere decir que el cuadrilátero $\square AQBP$ es un rombo que por los Teoremas 5.3.1 y 5.4.1, $AB \perp \overleftrightarrow{PQ}$ y los segmentos AB y PQ se cortan en su punto medio M. Por lo tanto, $\overleftrightarrow{PQ}$ es la mediatriz de AB. ♣

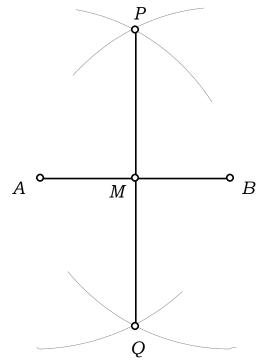


Figura 11.2

11.1.3. Construcción. Construir el punto medio de un segmento.

Si AB es un segmento, entonces mediante la construcción anterior, trazamos la mediatriz m de AB y así el punto medio de AB será el punto de intersección de m con AB (ver figura 11.2).

Veamos enseguida cómo encontrar el punto medio de un segmento utilizando, solamente compás [l-223]:

Sea AB un segmento.
1. Con centro en A y radio AB trazamos un círculo.
2. Trazamos el círculo $C(B,|AB|)$, el cual corta al círculo $C(A,|AB|)$ en el punto C.
3. Trazamos el círculo $C(C,|AB|)$, el cual corta al círculo $C(A,|AB|)$ en el punto D.
4. Trazamos el círculo $C(D,|AB|)$, el cual corta al círculo $C(A,|AB|)$ en el punto E.
5. Trazamos el círculo $C(E,|EB|)$, el cual corta al círculo $C(B,|AB|)$ en el punto F.
6. Trazamos el círculo $C(F,|AB|)$. Sea M el punto donde este círculo corta al segmento AB.

Por construcción, sabemos que los triángulos ΔEBF y ΔFMB son isósceles con $EB \cong EF$ y $FM \cong FB$. Es claro que $\Delta EBF \sim \Delta FMB$, pues comparten el ángulo de vértice B y aplicamos el Corolario 6.2.9. De donde vemos que

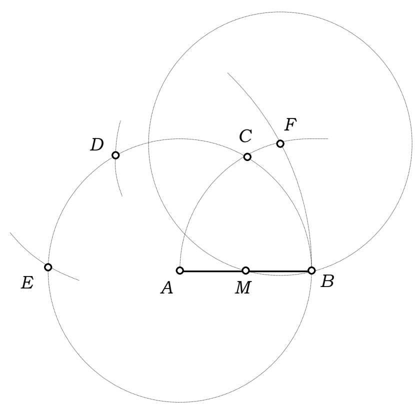


Figura 11.3

$\dfrac{|EB|}{|FB|} = \dfrac{|FB|}{|MB|}$. No es difícil ver que los puntos E, A y B son colineales (Problema 9.194) y, por consiguiente, EB es un diámetro del círculo $\mathrm{C}(A,|AB|)$. Así tenemos que $|EB| = 2|AB| = 2|FB|$. Lo cual implica que $|MB| = \dfrac{|AB|}{2}$. Es decir, M es el punto medio de AB. ♣

11.1.4. Construcción. Dados una recta l y un punto $A \in l$ construir una recta perpendicular a l en el punto A.

1. Haciendo centro en A trazamos un círculo de radio arbitrario que corte a l en los puntos P y Q.
2. Mediante la Construcción 11.1.2, trazamos la mediatriz m del segmento PQ.

Como A es el punto medio de PQ, $A \in m$ y sabemos que $l \perp m$. Por lo tanto, m es la perpendicular buscada.

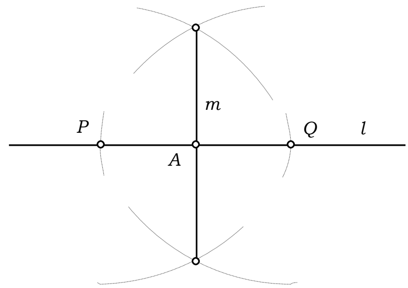


Figura 11.4

Otras construcciones sobre este mismo problema son las siguientes:

1. Con centro en A trazamos un primer círculo que corte a l en un punto que llamaremos B.
2. Con centro en B trazamos un segundo círculo de radio idéntico que el primero que corte al primer círculo en el punto Q.
3. Con centro en Q y radio igual al círculo, primero trazamos un tercer círculo.
4. Sea P el punto de intersección de la recta $\overleftrightarrow{BQ}$ y el tercer círculo.

Como $AQ \cong BQ \cong PQ$, tenemos entonces que BP es un diámetro del tercer círculo. Según el Teorema 9.5.2, el ángulo $\angle BAP$ es recto. Por lo tanto, $l \perp \overleftrightarrow{AP}$.

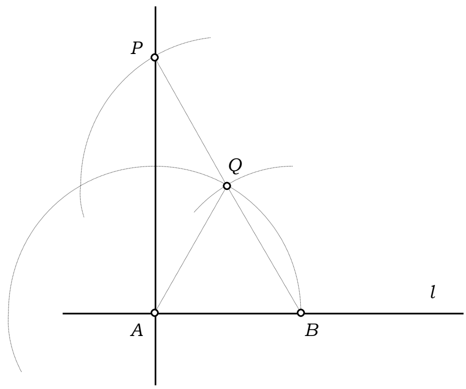


Figura 11.5

1. Con centro en A y radio arbitrario trazamos un primer círculo que corte a l en los puntos B y C.
2. Con centro en B trazamos un segundo círculo de radio idéntico al primer círculo que corte a este en el punto E.
3. Repetimos el procedimiento del segundo paso, teniendo a C como centro y radio igual que el primer círculo, trazamos un tercer círculo que corte al primero en el punto F.
4. Sea P el punto de intersección de las rectas $\overleftrightarrow{BE}$ y $\overleftrightarrow{CF}$.

Como $BE \cong AE \cong AF \cong CF$ y $BA \cong AC$, por el criterio (3.2.12), tenemos que los triángulos isósceles ΔEBA y ΔFAC son congruentes. Como consecuencia de esto, hallamos que $\angle ABP \cong \angle PCA$. Por el Teorema 3.2.9, vemos que ΔPBC es un triángulo isósceles. Según el Teorema 4.3.1, sabemos que PA es una altura del triángulo ΔPBC. Por lo tanto, $l \perp \overleftrightarrow{AP}$.

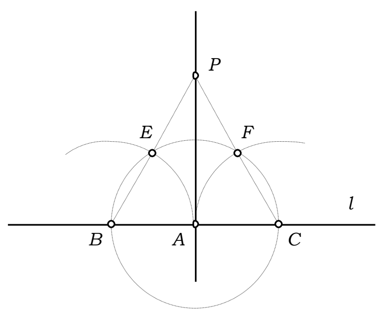


Figura 11.6

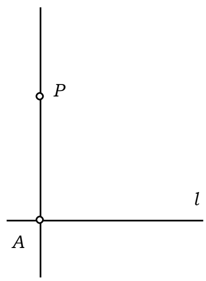


Figura 11.7

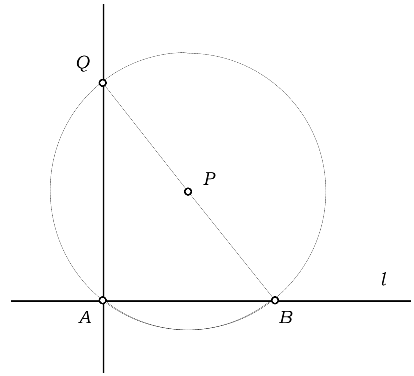


Figura 11.8

1. Fijamos un punto arbitrario P fuera de l.

2. Si $d(P,l) = |PA|$ (ver figura 11.7), entonces unimos P y A y, consecuentemente, la recta $\overleftrightarrow{PA}$ resulta ser perpendicular a l en el punto A, esto lo testifica el Teorema 4.4.12.

3. Supongamos que $d(P,l) > |PA|$ (ver figura 11.8). Con centro en P y radio $|AP|$ trazamos un círculo que corte a l en un punto B diferente de A.

4. Trazamos la recta $\overleftrightarrow{PB}$ y nos fijamos en su otro punto de intersección Q con el círculo trazado.

Como BQ es un diámetro del círculo que trazamos, por el Teorema 9.5.2, el ángulo $\angle QAB$ es recto. Por lo tanto, $l \perp \overleftrightarrow{AQ}$. ♣

11.1.5. Construcción. Construir una recta paralela a una recta dada, de tal forma que las dos rectas estén a una distancia dada.

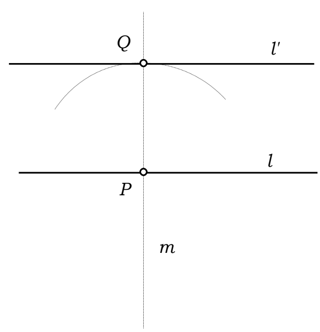


Figura 11.9

Sea l una recta y a un número real positivo.

1. Construimos una recta perpendicular m a l que pase por un punto fijo $P \in l$ (Construcción 11.1.4).
2. Con centro en P y radio a trazamos un círculo que corte a m en el punto Q.
3. Finalmente, trazamos una recta l' que sea perpendicular a m en el punto Q (Construcción 11.1.4).

Del Teorema 3.7.1 sabemos que $l \parallel l'$ y es evidente que

$$d(l,l') = |PQ| = a. \clubsuit$$

11.1.6. Construcción. Dados una recta l y un punto $P \notin l$ construir una recta perpendicular a l y que pase por el punto P.

1. Con centro en P trazamos un círculo de radio mayor que la distancia de P a l que corte a l en los puntos A y B.

2. Trazamos la mediatriz m del segmento AB (11.1.2).

Como AB es una cuerda del círculo del primer paso, por el Teorema 9.2.5, sabemos que $P \in m$. Por lo tanto, m es la recta buscada. ♣

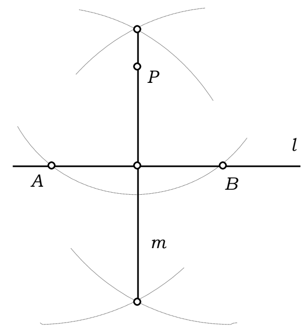


Figura 11.10

11.1.7. Construcción. Construir la proyección de un punto sobre una recta que no lo contenga.

Sean l una recta y $P \notin l$.

1. Mediante la Construcción 11.1.6, trazamos la recta m perpendicular a l que pase por el punto P.

2. Sea Q el punto de intersección de l y m.

Claramente Q es la proyección de P sobre l. ♣

11.1.8. Construcción. Dada una recta l y $P \notin l$, construir una recta paralela a l que pase por el punto P.

1. Con base en la Construcción 11.1.6, trazamos una recta m perpendicular a l que pase por el punto P.

2. Usando la Construcción 11.1.4, trazamos una recta l' perpendicular a m en el punto P.

De acuerdo con el Teorema 3.7.1, $l \parallel l'$ y $P \in l'$.

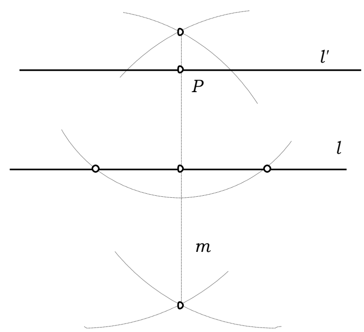


Figura 11.11

Damos a continuación otras tres construcciones:

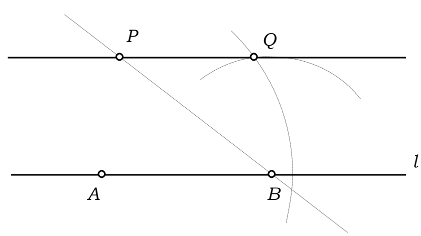


Figura 11.12

1. Fijamos dos puntos A y B sobre l.

2. Trazamos la recta que pasa por los puntos P y B.

3. Con centro en A trazamos un primer círculo de radio $|PB|$.

4. Trazamos un segundo círculo con centro B y radio $|AP|$ que corte al primer círculo en el punto Q que está ubicado en el mismo semiplano determinado por l que contiene a P.

Tenemos entonces que $\Delta PAB \cong \Delta QAB$, ya que tienen sus tres lados correspondientes congruentes (3.2.12). Por consiguiente, $\square ABQP$ es un trapecio isósceles y, por lo tanto, $\overleftrightarrow{PQ} \parallel l$.

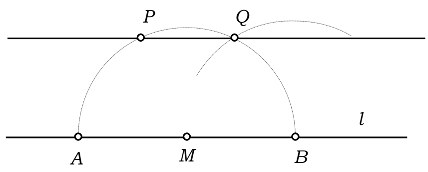


Figura 11.13

1. Fijamos un punto M de l tal que $d(P,l) < |MP|$.
2. Con centro en M trazamos un primer círculo de radio $|MP|$ que corte a l en los puntos A y B.
3. Trazamos un segundo círculo con centro en B y radio $|AP|$ que corte al primero en el punto Q que está en el mismo semiplano, determinado por l que contiene a P.

Observemos que ΔPAB y ΔQAB son triángulos rectángulos (por el Teorema 9.5.2) que comparten la hipotenusa y $|PA| \cong |QB|$. Según el Teorema 3.6.5, $\Delta PAB \cong \Delta QAB$. De aquí podemos deducir que $\square ABQP$ es un trapecio isósceles con $\overleftrightarrow{PQ} \parallel l$.

1. Fijamos dos puntos A y B sobre l.
2. Con centro en P trazamos un primer círculo de radio $|AB|$.
3. Haciendo centro en B y radio $|AP|$ trazamos un segundo círculo que corte al primero en el punto Q ubicado en el mismo semiplano determinado por l que contiene a P.

De acuerdo con el Teorema 5.3.1, sabemos que $\square ABQP$ es un paralelogramo y, por ello, $\overleftrightarrow{PQ} \parallel l$. ♣

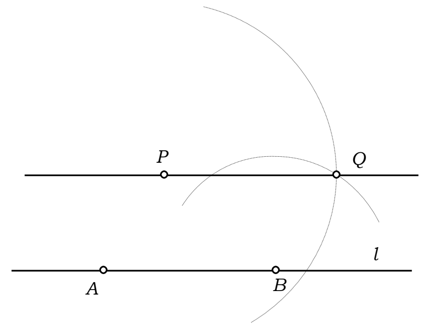


Figura 11.14

11.1.9. Construcción. Dividir un segmento en k partes congruentes, en donde $k > 1$ es un número entero.

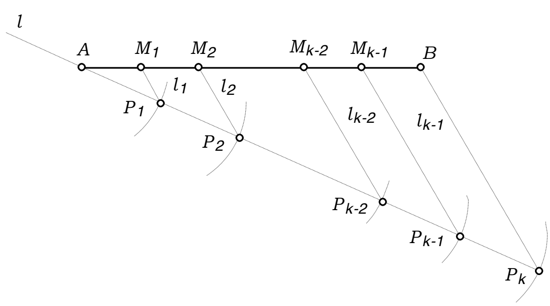


Figura 11.15

Sean AB un segmento y k un número entero positivo mayor que 1.

1. Por A trazamos una recta auxiliar l.
2. Fijemos un número real positivo r. Con centro en A trazamos un círculo de radio r que corte a l en el punto P_1. Ahora con centro en P_1 y radio r trazamos un segundo círculo que corte a l en el punto P_2, de tal forma que P_1 quede entre A y P_2. Continuamos el proceso hasta un punto P_{k-1}. Con centro en P_{k-1} y radio r trazamos un k–ésimo círculo que corte a l en el punto P_k, de tal forma que P_{k-1} quede entre P_{k-2} y P_k.
3. Trazamos la recta que une a B con P_k.
4. Mediante la Construcción 11.1.8, por cada uno de los puntos P_1, $P_2, \ldots,$ P_{k-2} y P_{k-1} trazamos $k-1$ rectas l_1, $l_2, \ldots,$ l_{k-2} y l_{k-1} paralelas a $\overleftrightarrow{P_k B}$ que corten a l en los puntos M_1, $M_2, \ldots,$ M_{k-2} y M_{k-1}, respectivamente. Como $AP_1 \cong P_1P_2 \cong \ldots \cong P_{k-2}P_{k-1} \cong P_{k-1}P_k$, por el Teorema 6.1.10, obtenemos que

$$AM_1 \cong M_1M_2 \cong \ldots \cong M_{k-2}M_{k-1} \cong M_{k-1}B. \text{ ♣}$$

11.1.10. Construcción. Dados una recta l, $A \in l$ y $B \notin l$, encontrar un punto $P \in l$ tal que $|AP| + |PB|$ sea igual a un número real positivo dado.

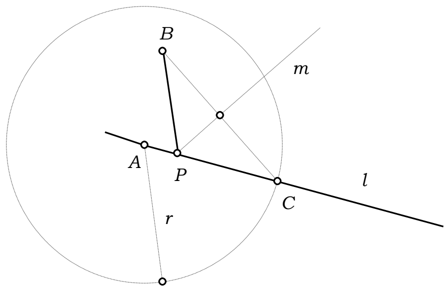


Figura 11.16

Sea $r > 0$ un número real.

1. Tracemos un círculo con centro en el punto A y de radio r. Sea C uno de los puntos de intersección de este círculo y la recta l.

2. Trazamos la mediatriz m del segmento BC (Construcción 11.1.2).

Sea P el punto de intersección de las rectas l y m. Entonces, tenemos que

$$|AP| + |PB| = |AP| + |PC| = r. \clubsuit$$

11.1.11. Construcción. Construir un ángulo congruente a uno dado.

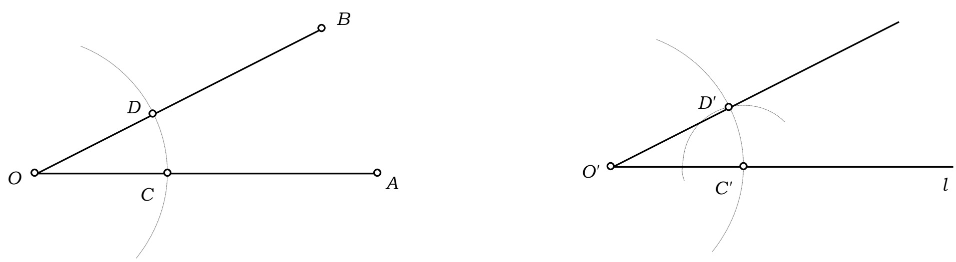


Figura 11.17

Sea $\angle AOB$ un ángulo. Si nuestro ángulo es degenerado la construcción es trivial. Supongamos que el ángulo $\angle AOB$ no es degenerado.

1. Fijamos una recta l y sobre ella un punto O'.

2. Con centro en O trazamos un primer círculo de radio arbitrario que corte a $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ en los puntos C y D, respectivamente.

3. Con el mismo radio del primer círculo y haciendo centro en O' trazamos un segundo círculo que corte a l en el punto C'.

4. Trazamos un tercer círculo con centro C' y radio $|CD|$. Este círculo corta al segundo círculo en el punto D'.

Por el tercer criterio de congruencia (3.2.12), sabemos que $\Delta DOC \cong \Delta D'O'C'$. En consecuencia,

$$\angle AOB = \angle COD \cong \angle C'O'D'. \clubsuit$$

En la construcción anterior, lo que realmente vimos es cómo construir un ángulo congruente a uno dado, de tal forma que uno de sus lados esté sobre una recta dada y su vértice sea un punto dado de la misma recta.

11.1.12. Construcción. Construir la bisectriz de un ángulo no degenerado.

Sea $\angle AOB$ un ángulo no degenerado.

1. Con centro en O trazamos un primer círculo de radio arbitrario que corte a los lados $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ en los puntos C y D, respectivamente.
2. Con centro en C trazamos un segundo círculo con el mismo radio que el primero.
3. Con centro en D trazamos un tercer círculo con el mismo radio que el primero.

Sea P el punto de intersección del segundo y tercer círculo.

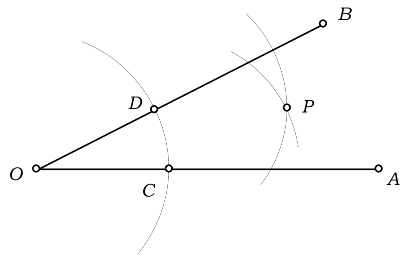


Figura 11.18

Afirmamos que $\overrightarrow{OP}$ es la bisectriz de $\angle AOB$. En efecto, el cuadrilátero $\square OCPD$ es un rombo y nuestra conclusión se sigue directamente del Teorema 5.4.1. ♣

11.1.13. Construcción. Construir la bisectriz de un ángulo cuyo vértice no se conoce.

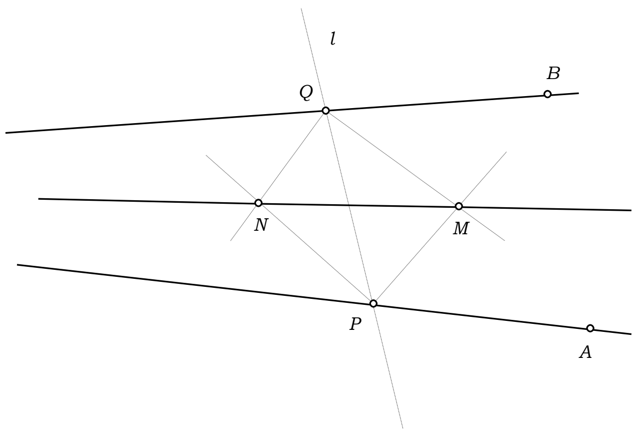


Figura 11.19

Sea $\angle AOB$ un ángulo no degenerado tal que su vértice O no está en los límites del dibujo.

1. Trazamos una recta l arbitraria que corte a $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ en los puntos P y Q, respectivamente.

2. Construimos (11.1.12) las cuatro bisectrices de los ángulos formados por la recta l y las rectas $\overleftrightarrow{OA}$ y $\overleftrightarrow{OB}$ (ver figura 11.19). Sean M y N los puntos de intersección de dichas bisectrices.

Según el Teorema de la Bisectriz (4.7.9), sabemos que

$$d(M,l) = d(M,\overleftrightarrow{OA}) \text{ y } d(M,l) = d(M,\overleftrightarrow{OB}).$$

Por lo cual,

$$d(M,\overleftrightarrow{OA}) = d(M,\overleftrightarrow{OB}).$$

Así, por el mismo Teorema de la Bisectriz (4.7.9), vemos que M pertenece a la bisectriz del ángulo $\angle AOB$. Con un argumento muy similar, podemos probar que el punto N también pertenece a la bisectriz del ángulo $\angle AOB$.

Por lo tanto, la bisectriz del ángulo $\angle AOB$ yace sobre la recta $\overleftrightarrow{MN}$. ♣

11.1.14. Construcción. Construir un ángulo suplementario de un ángulo dado.

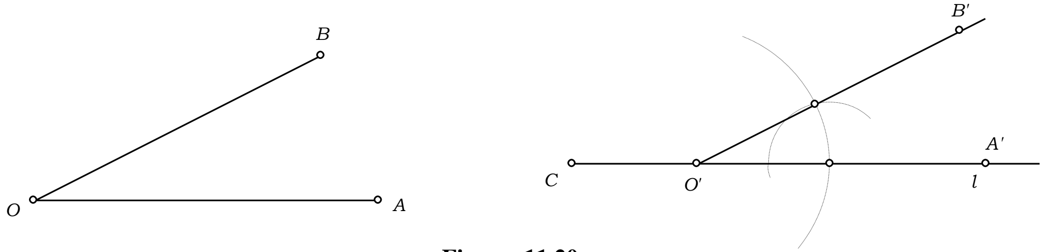


Figura 11.20

Sea $\angle AOB$ un ángulo.

1. Sobre una recta fija l construimos un ángulo $\angle A'O'B'$ congruente a $\angle AOB$ (11.1.11).

Es evidente que el ángulo $\angle B'O'C$ formado por la semirrecta $\overrightarrow{O'B'}$ y la semirrecta $\overleftarrow{O'A'}$ es un ángulo suplementario de $\angle AOB$. ♣

11.1.15. Construcción. Construir un ángulo complementario de un ángulo agudo dado.

Sea $\angle AOB$ un ángulo agudo.

1. Sobre una recta fija l construimos el ángulo $\angle AOB$ (11.1.11).
2. Usando la Construcción 11.1.4, trazamos una recta m perpendicular a l en el punto O.

En m nos fijamos en la semirrecta $\overrightarrow{OC}$ que está en el semiplano determinado por l que contiene al punto B. Es claro que $\angle BOC$ es un ángulo complementario de $\angle AOB$. ♣

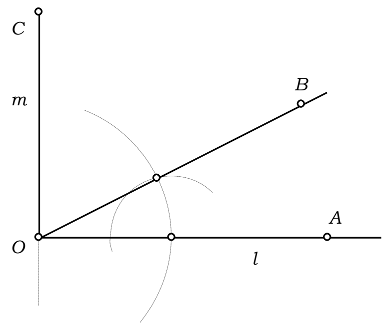


Figura 11.21

11.1.16. Construcción. Construir un ángulo recto.

1. Por la Construcción 11.1.4, podemos construir dos rectas perpendiculares l y m.

Estas rectas nos determinan cuatro ángulos rectos. ♣

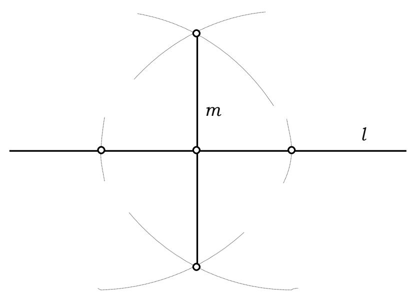


Figura 11.22

11.1.17. Construcción. Construir ángulos de medidas 45, 60, 30 y 120.

Para conseguir un ángulo de 45 basta, según la Construcción 11.1.12, bisecar un ángulo recto. Si construimos (11.2.2) un triángulo equilátero, cualquiera de sus ángulos tendrá medida 60 (Corolario 4.3.5). Para construir un ángulo de 30, podemos bisecar un ángulo de 60, o alternativamente, por la Construcción 11.1.15, construimos un ángulo complementario de un ángulo que mida 60. Para la construcción de un ángulo de 120, basta construir (11.1.14) un ángulo suplementario a un ángulo de medida 60. ♣

La siguiente construcción es de D. B. Hirschhorn [a-68].

11.1.18. Construcción. Construir un ángulo de medida 75.

1. Trazamos un círculo C(A,r) arbitrario y fijamos sobre él un punto B.
2. Trazamos el círculo C(B,r) y sea C uno de los puntos en los que este corta a C(A,r).
3. Trazamos el círculo C(C,r) y sea E uno de los puntos en los que este círculo corta al círculo C(A,r).
4. Sea F el punto de intersección de EB y el círculo C(B,r).

Veremos que $\angle BAF$ es el ángulo solicitado. En efecto, sabemos por construcción que ΔABC es un triángulo equilátero y, por ello, $m(\angle CBA) = 60$ (Corolario 4.3.5). Por construcción, $\square ABCE$ resulta ser un rombo y, de aquí, con base en el Teorema 5.4.1, vemos que $\overrightarrow{BE}$ es la bisectriz del ángulo $\angle CBA$. Por lo cual, $m(\angle FBA) = 30$. Ya que ΔBFA es un triángulo isósceles con $BA \cong BF$, según los Teoremas 3.2.9 y 4.3.4, concluimos que $m(\angle AFB) = m(\angle BAF) = 75$. ♣

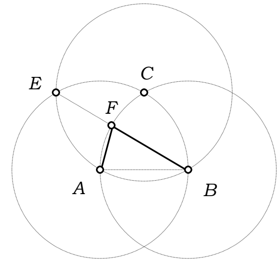


Figura 11.23

11.1.19. Construcción. Dado un punto, construir su punto simétrico con respecto a otro punto dado.

Sean A y P dos puntos.
1. Trazamos el círculo C(P,|PA|).
2. Sea A' el punto de intersección de $\overleftrightarrow{PA}$ con el círculo C(P,|PA|) diferente de A.

Claramente A' es el punto simétrico de A con respecto a P. ♣

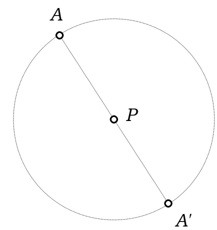


Figura 11.24

11.1.20. Construcción. Dado un punto, construir su punto simétrico con respecto a una recta dada.

Sean A un punto y l una recta.
1. Construimos (11.1.7) la proyección B de A sobre l.
2. Trazamos el círculo C(B,|AB|).
3. Sea A' el punto de intersección del círculo C(B,|AB|) con la recta $\overleftrightarrow{AB}$ diferente de A.

Evidentemente, A' es el punto simétrico de A con respecto a la recta l. ♣

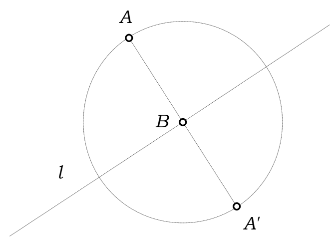


Figura 11.25

11.2. Construcciones de triángulos

11.2.1. Construcción. Construir un triángulo congruente a uno dado

Sea ΔABC un triángulo.
1. Sobre una recta fija l construimos un segmento $B'C'$ tal que $B'C' \cong BC$ (Construcción 11.1.1).
2. Con centro en B' trazamos un primer círculo de radio |AB|.
3. Haciendo centro en C' trazamos un segundo círculo de radio |AC| que corte al primero en el punto A'.

De acuerdo con el tercer criterio de congruencia (3.2.12), hallamos que $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$. ♣

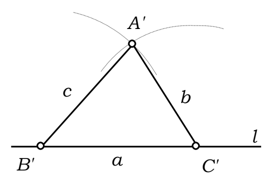


Figura 11.26

11.2.2. Construcción. Construir un triángulo equilátero, conociendo la longitud de sus lados.

Sea a un número real positivo.

1. Fijamos un segmento BC de longitud a.
2. Con centro en B y radio a trazamos un primer círculo.
3. Haciendo centro en C y con radio a trazamos un segundo círculo que corte al primero en el punto A.

Es claro que ΔABC es un triángulo equilátero y la longitud de sus lados es igual a a. ♣

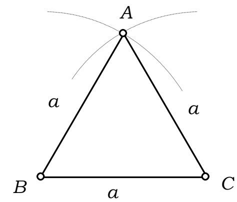


Figura 11.27

A continuación, analizaremos algunas construcciones de un triángulo cuando solo se dan tres de sus seis partes (las cuales son sus tres vértices y sus tres lados).

11.2.3. Construcción (*LLL*). Construir un triángulo, conociendo sus tres lados.

Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo.

1. Sobre una recta fija l construimos un segmento BC de longitud a (Construcción 11.1.1).
2. Con centro en B trazamos un primer círculo de radio c.
3. Con centro en C trazamos un segundo círculo de radio b que corte al primero en el punto A.

ΔABC es el triángulo pedido. Cabe mencionar que en este caso hay solamente una solución, según lo testifica el criterio 3.2.12. ♣

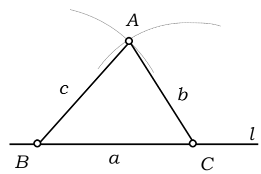


Figura 11.28

11.2.4. Construcción (*LAL*). Construir un triángulo, conociendo dos de sus lados y el ángulo comprendido entre ellos.

Supongamos que conocemos los lados a y c, y el ángulo $\angle B$ de un cierto triángulo.

1. Construimos primero el ángulo $\angle B$ siguiendo las indicaciones de la Construcción 11.1.11.
2. Trazamos el círculo con centro en B y radio a que corte a un primer lado del ángulo $\angle B$ en el punto C.
3. Trazamos el círculo con centro en B y radio b que corte al segundo lado del ángulo $\angle B$ en el punto A.

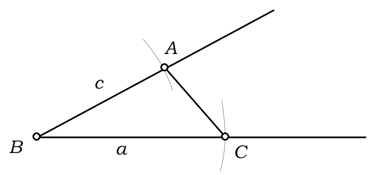


Figura 11.29

Según el primer criterio de congruencia (3.2.6), hallamos que ΔABC es el triángulo deseado. Observamos que hay una única solución en este caso. ♣

11.2.5. Construcción (*ALA*). Construir un triángulo, conociendo dos de sus ángulos y el lado comprendido entre ellos.

Supongamos que conocemos los ángulos $\angle B$ y $\angle C$, y la longitud a del lado BC de un cierto triángulo.

1. Construimos primero el ángulo $\angle B$ (Construcción 11.1.11).
2. Haciendo centro en B y con radio a trazamos un círculo que corte a un primer lado del ángulo $\angle B$ en el punto C.
3. De acuerdo con la Construcción 11.1.11, construimos el ángulo $\angle C$ que tenga como vértice al punto C del segundo paso y el punto B esté en uno de sus lados. Este ángulo corta al ángulo $\angle B$ en el punto A.

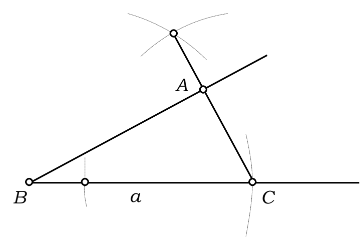


Figura 11.30

Por el segundo criterio de congruencia (3.2.7), vemos que ΔABC es nuestro triángulo. También, en este caso hay una única solución. ♣

11.2.6. Construcción (*AAL*). Construir un triángulo, conociendo dos de sus ángulos y el lado opuesto a uno de ellos.

Supongamos que conocemos los ángulos $\angle B$ y $\angle C$, y la longitud del lado b de un cierto triángulo. En este caso, vemos que la construcción del triángulo se reduce a la Construcción 11.2.5 pues conocemos también la medida del ángulo $\angle A$ que es, por el Teorema 4.3.4, igual a $180 - (m(\angle B) + m(\angle C))$. Para la construcción requerida, usamos los ángulos $\angle A$ y $\angle C$ y su lado comprendido b. Es fácil ver que solo hay una solución. ♣

Las construcciones que estudiaremos a continuación ofrecen más de una solución.

11.2.7. Construcción (*AAA*). Construir un triángulo, conociendo sus tres ángulos.

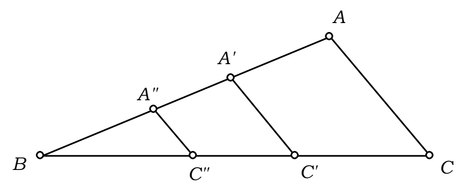


Figura 11.31

Supongamos que conocemos los tres ángulos $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$ de un triángulo. Aquí se necesita más información si queremos un triángulo muy especial, pues hay una cantidad infinita de soluciones, ya que dos triángulos semejantes poseen sus ángulos correspondientes congruentes. Para construir uno de estos triángulos basta con dar una longitud arbitraria para cualquiera de sus lados y usar una de las Construcciones 11.2.4, 11.2.5 o 11.2.6. En la figura 11.31, se ofrecen al menos tres posibles soluciones, pues los triángulos ΔABC, $\Delta A'BC'$ y $\Delta A''BC''$ tienen sus ángulos correspondientes congruentes. ♣

11.2.8. Construcción (*LLA*). Construir un triángulo, conociendo dos de sus lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

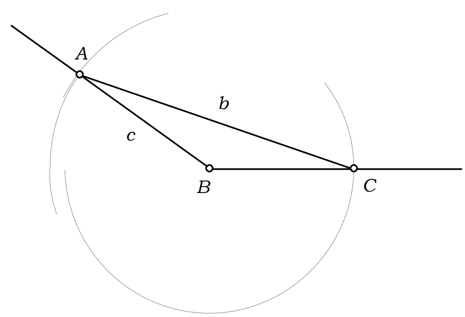


Figura 11.32

Supongamos que conocemos el ángulo $\angle B$ y la longitud de los lados b y c de un triángulo. Hay que considerar cuatro posibles casos:

Caso I. $\angle B$ es un ángulo obtuso. Según el Teorema 4.4.3, sabemos que $c < b$.

1. Primero construimos el ángulo $\angle B$ (Construcción 11.1.11).
2. Con centro en B trazamos el círculo de radio c que corte a un primer lado del ángulo $\angle B$ en el punto A.
3. Trazamos el círculo con centro en A y radio b que corte al segundo lado del ángulo $\angle B$ en el punto C.

De acuerdo con el criterio de congruencia (3.2.13), ΔABC es nuestro triángulo. Cabe destacar que en este caso la solución es única.

Caso II. $\angle B$ es un ángulo recto. Repetimos los pasos del primer caso. Tenemos entonces que ΔABC es un triángulo rectángulo con hipotenusa b y solo es posible hallar uno de estos triángulos según el Teorema 3.6.5.

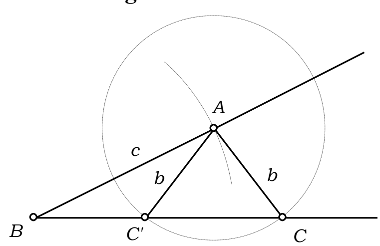


Figura 11.33

Caso III. $\angle B$ es agudo y $c > b$.

1. Construimos el ángulo $\angle B$ mediante la Construcción 11.1.11.
2. Con centro en B trazamos un círculo de radio c que corte a un primer lado del ángulo $\angle B$ en el punto A.
3. Trazamos un círculo con centro en A y radio b que corte al segundo lado del ángulo $\angle B$ en los puntos C y C'.

Tenemos dos soluciones en este caso que son los triángulos ΔABC y $\Delta ABC'$ (ver la figura 11.33).

Caso IV. $\angle B$ es agudo y $c \leq b$.

1. Primero procedemos a la construcción del ángulo $\angle B$ siguiendo los pasos de la Construcción 11.1.11.
2. Trazamos el círculo con centro en B y radio c, el cual corta a un primer lado del ángulo $\angle B$ en el punto A.
3. Con centro en A y radio b trazamos un círculo que corte al segundo lado del ángulo $\angle B$ en el punto C: por la suposición que hicimos, solo es posible obtener un solo punto de intersección.

Así que solo hay una solución en este caso que resulta ser el triángulo ΔABC. ♣

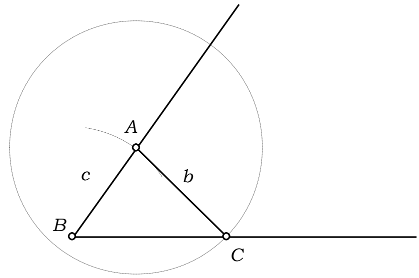


Figura 11.34

En la construcción anterior, es importante destacar que cuando se requiera la construcción de un triángulo dados dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, uno primero construye el ángulo opuesto, posteriormente el lado adyacente a este ángulo, y finalmente el segundo lado.

Vale la pena resumir las construcciones de un triángulo dados el ángulo $\angle B$ y los lados b y c:

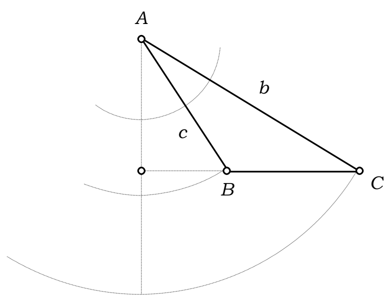


Figura 11.35

I. $\angle B$ es obtuso.
$b \leq c \Rightarrow$ no hay solución.
$b > c \Rightarrow$ una solución.

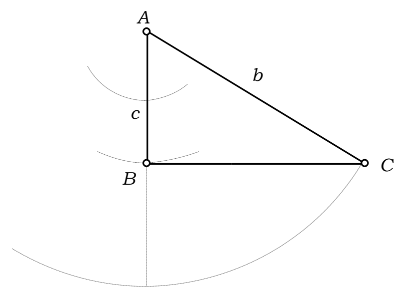


Figura 11.36

II. $\angle B$ es recto.
$b \leq c \Rightarrow$ no hay solución.
$b > c \Rightarrow$ una solución.

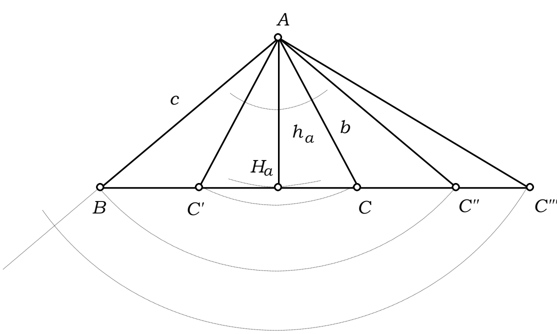


Figura 11.37

III. $\angle B$ es agudo.
$b < h_a \Rightarrow$ no hay solución.
$b = h_a \Rightarrow$ una solución ΔABH_a.
$h_a < b < c \Rightarrow$ dos soluciones ΔABC y $\Delta ABC'$.
$b = c \Rightarrow$ una solución $\Delta ABC''$ que es un triángulo isósceles.
$b > c \Rightarrow$ una solución $\Delta ABC'''$.

Las construcciones precedentes sobre triángulos son fundamentales y el lector tendrá que aprenderlas muy bien antes de continuar con esta sección.

11.2.9. Construcción. Construir un triángulo, conociendo a, h_a y m_a .

Es importante observar que la construcción es imposible si $h_a > m_a$. Supongamos pues que $h_a \leq m_a$.

1. Construimos un segmento BC de longitud a sobre una recta l (Construcción 11.1.1).
2. Construimos (11.1.3) el punto medio M del segmento BC.
3. Trazamos (11.1.5) la recta l' paralela a l tal que $d(l,l') = h_a$.
4. Con centro en M y radio m_a trazamos un círculo que corte a l' en el punto A (el círculo y la recta l' se pueden cortar en dos puntos, ya que $h_a \leq m_a$).

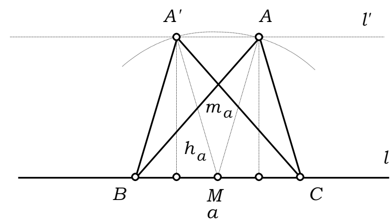


Figura 11.38

Hay dos soluciones cuando $h_a < m_a$ (ver figura 11.38) que son los triángulos ΔABC y $\Delta A'BC$, A' sería el segundo punto de intersección del círculo y la recta l'. Si $h_a = m_a$, habría una única solución que sería un triángulo isósceles, de acuerdo con el Teorema 8.3.39. ♣

En algunos casos, como en la construcción anterior, puede haber más de una solución a la construcción que se solicita. La construcción que sigue también posee dos soluciones.

11.2.10. Construcción. Construir un triángulo, conociendo a, c y h_a .

1. Por la Construcción 11.1.1, sobre una recta fija l construimos un segmento BC de longitud a.
2. Trazamos el círculo de radio c y centro B.
3. Mediante la Construcción 11.1.5, construimos una recta l' paralela a l tal que $d(l,l') = h_a$. Esta recta l' corta al círculo del segundo paso en un punto A.

Claramente, los triángulo ΔABC y $\Delta A'BC$ satisfacen todas las condiciones requeridas. ♣

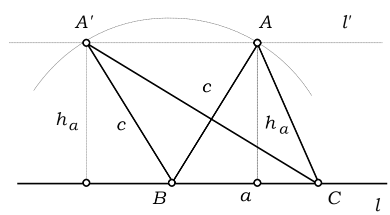


Figura 11.39

11.2.11. Construcción. Construir un triángulo rectángulo, conociendo sus catetos.

Sean b y c las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo.

1. Sobre una recta fija l construimos (11.1.1) un segmento AB de longitud c.
2. Trazamos (11.1.4) la recta l' perpendicular a l en el punto A.
3. Trazamos el círculo de radio b y centro A. Sean C y C' los puntos donde este círculo corta a la recta l'.

Hay dos soluciones que son los triángulos ΔABC y $\Delta ABC'$. ♣

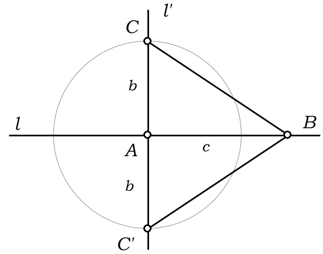


Figura 11.40

11.2.12. Construcción. Construir un triángulo rectángulo, conociendo su hipotenusa y uno de sus catetos.

Sean a la hipotenusa y c un cateto de un triángulo rectángulo.

1. Sobre una recta l construimos un segmento BC de longitud a (Construcción 11.1.1).
2. Trazamos un primer círculo que tenga a BC como diámetro.
3. Haciendo centro en B y con radio c construimos un segundo círculo que corte al primero en el punto A.

De acuerdo con el Teorema 9.5.2, sabemos que $\angle CBA$ es un ángulo recto. Así que el triángulo ΔABC es rectángulo en $\angle A$ y resulta ser el triángulo requerido, pues $|AB| = c$ y $|BC| = a$. ♣

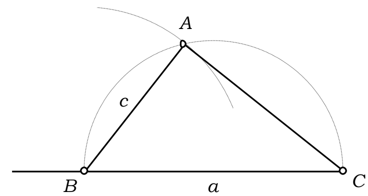


Figura 11.41

11.2.13. Construcción. Construir un triángulo rectángulo, conociendo su hipotenusa y uno de sus ángulos agudos.

Sean c la hipotenusa y $\angle B$ un ángulo agudo de un triángulo rectángulo.

1. Primero construimos el ángulo $\angle B$ (11.1.11).
2. Trazamos el círculo con centro en B y radio c. Este círculo corta a un primer lado del ángulo $\angle B$ en el punto A.
3. Trazamos una recta perpendicular al segundo lado del ángulo $\angle B$ que pase por el punto A (Construcción 11.1.6).

Es obvio que ΔABC es nuestro triángulo. ♣

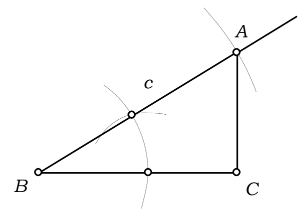


Figura 11.42

11.2.14. Construcción. Construir un triángulo conociendo a, $b + c$ y h_b.

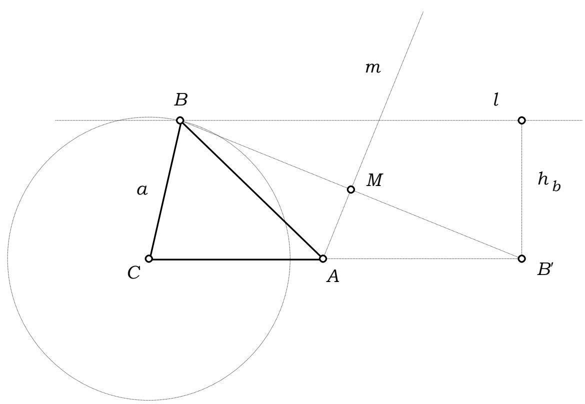


Figura 11.43

1. Primero construimos (11.1.1) un segmento CB’ de longitud $b + c$.
2. Haciendo uso de la Construcción 11.1.5, trazamos una recta l paralela a la recta CB’ tal que $d(l, \overleftrightarrow{CB'}) = h_b$.
3. Con centro en C trazamos el círculo de radio a que corte a l en el punto B.
4. Trazamos la mediatriz m del segmento BB’ (Construcción 11.1.2).

Sea A el punto de intersección de m y CB’. Según el Teorema 4.2.2, sabemos que $AB \cong AB$’. Por ello,

$$|CA| + |AB| = |CA| + |AB'| = |CB'| = b + c.$$

Así vemos que ΔABC es el triángulo deseado. ♣

11.2.15. Construcción. Construir un triángulo conociendo R, $\angle B - \angle C$ y h_a.

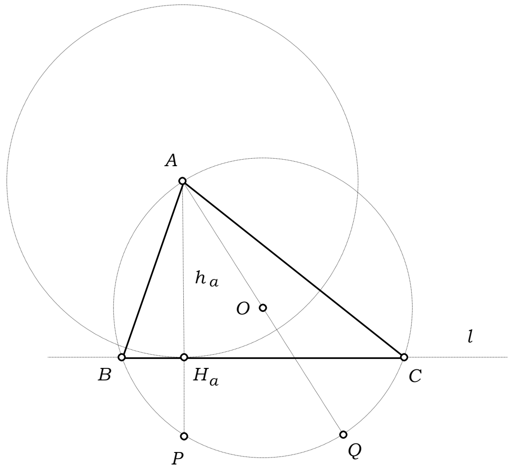


Figura 11.44

1. Trazamos el círculo C(O,r) y sobre él fijamos un punto A.
2. Mediante la Construcción 11.1.11, trazamos un ángulo inscrito $\angle PAQ$ sobre el círculo C(O,r) de tal manera que $O \in AQ$ y $\angle PAQ \cong \angle B - \angle C$.
3. Trazamos el círculo C(A, h_a), el cual corta a AP en el punto H_a.
4. Construimos (11.1.4) la recta l perpendicular a $\overleftrightarrow{AP}$ en el punto H_a.

Sean B y C los puntos de intersección de l con C(O,r). Vemos claramente que el triángulo ΔABC cumple que O es su circuncentro, r su circunradio y h_a su altura correspondiente al lado BC. Según el Problema 8.516, encontramos que

$$m(\angle H_a AO) = \frac{m(\angle B) - m(\angle C)}{2}. \clubsuit$$

11.2.16. Construcción [a-27]. Sea ΔABC un triángulo vux con $\angle C \cong 2\angle B$. Dados dos lados del triángulo ΔABC, construirlo.

Caso I. Se dan los lados b y c.
1. Como muestra la figura 11.45, primero construimos (11.2.3) un triángulo isósceles $\Delta C'AB$ tal que $b = |C'A| = |C'B|$ y $c = |AB|$.
2. Trazamos el círculo con centro en A' y radio b. Este círculo corta a $\overleftrightarrow{BC'}$ en un punto C.

Sabemos que el triángulo $\Delta AC'C$ es isósceles con

$$|AC| = |AC| = b.$$

Nuestro triángulo resulta ser el triángulo ΔABC. Efectivamente,

$$m(\angle C) = m(\angle CC'A) = m(\angle C'BA) + m(\angle BAC') =$$
$$2m(\angle C'BA) = 2m(\angle B)$$
$$m(\angle C) = 2m(\angle B)$$
$$\angle C \cong 2\angle B.$$

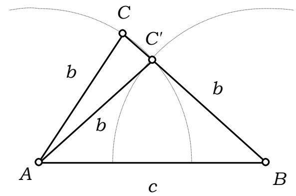


Figura 11.45

Caso II. Se dan los lados b y a.

1. Sobre una recta fijamos tres puntos consecutivos B, C' y C, de tal forma que $|BC| = a$ y $|BC'| = b$ (Construcción 11.1.1).

2. Teniendo a $C'C$ como un lado, construimos (11.2.3) un triángulo isósceles $\Delta AC'C$ tal que $b = |AC| = |AC'|$.

Argumentando de manera similar como en el primer caso, se llega a que ΔABC es un triángulo vux con $m(\angle C) = 2m(\angle B)$.

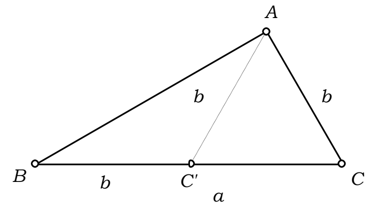


Figura 11.46

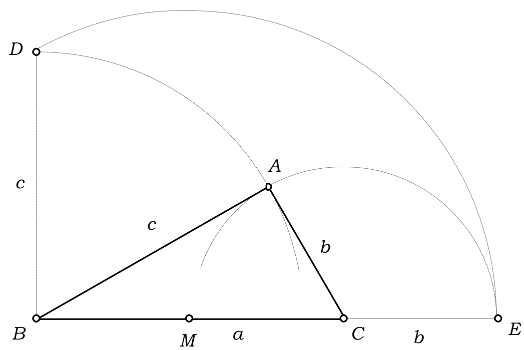


Figura 11.47

Caso II. Se dan los lados a y c.
Según el Teorema 10.5.2, hallamos que

$$b(b + a) = c^2$$
$$b^2 + ba - c^2 = 0$$
$$b = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4c^2}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + 4c^2} - a}{2}.$$

Veremos que b se puede construir con regla y compás, y al mismo tiempo construimos el triángulo:

1. Fijamos un segmento BC de longitud a (11.1.1).
2. Trazamos un segmento BD de longitud c que sea perpendicular a BC en el punto B (11.1.1 y 11.1.4).
3. Construimos el punto medio M de BC (11.1.3).
4. Haciendo centro en M y radio $|MD|$ trazamos un primer círculo que corte a $\overleftrightarrow{BC}$ en el punto E.
5. Con centro en B y radio c trazamos un segundo círculo.
6. Trazamos un tercer círculo con centro en C y radio $|CE|$ que corte al segundo círculo en el punto A.

De acuerdo con el Teorema de Pitágoras (8.5.1), sabemos que

$$|MD|^2 = \frac{a^2}{4} + c^2$$

y, por ello,

$$|CE| = |ME| - |MC| = |MD| - |MC| =$$
$$\frac{\sqrt{a^2 + 4c^2}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + 4c^2} - a}{2} = b.$$

Esto demuestra que b se puede construir con regla y compás. Ya que los lados del triángulo ΔABC cumplen con la relación $b(b + a) = c^2$, por el Teorema 10.5.2, concluimos que

$$m(\angle C) = 2m(\angle B). \clubsuit$$

11.3. Construcciones relacionadas con círculos

11.3.1. Construcción. Construir un círculo que tenga como diámetro un segmento dado.

Sea AB un segmento.
1. Construimos (11.1.3) el punto medio M del segmento AB.
2. Trazamos el círculo $\mathrm{C}(M, \frac{|AB|}{2})$.

Es claro que el círculo $\mathrm{C}(M, \frac{|AB|}{2})$ tiene como diámetro al segmento AB. ♣

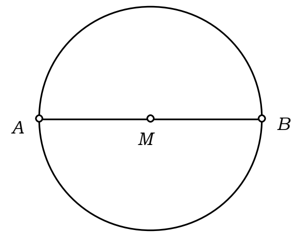


Figura 11.48

11.3.2. Construcción. Construir un círculo de radio dado que pase por dos puntos dados.

Sean A y B dos puntos y $r > 0$ un número real. Pongamos $a = |AB|$. Por el Teorema 9.2.5, sabemos que el centro del círculo que se busca debe de estar sobre la mediatriz del segmento AB.
1. Trazamos (11.1.2) la mediatriz m del segmento AB.
Consideraremos tres posibles casos:

Caso I. $r > \frac{a}{2}$.
2. Con centro en el punto B trazamos un círculo de radio r, el cual corta a m en los puntos O y O'.
Por estar O y O' sobre la mediatriz m de AB, vemos que $|AO| = |BO| = |AO'|=|BO'| = r$.
Por consiguiente, A y B pertenecen a los círculos $\mathrm{C}(O,r)$ y $\mathrm{C}(O',r)$. En este caso, encontramos solo dos soluciones.

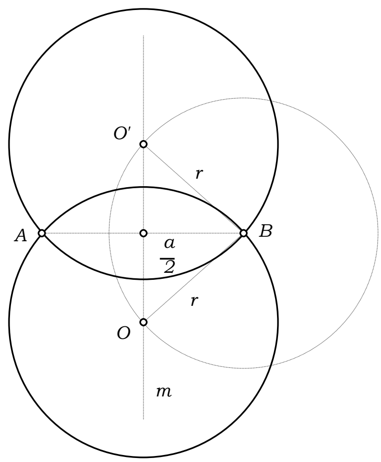


Figura 11.49

Caso II. $r = \frac{a}{2}$.
2. Trazamos (11.1.3) el punto medio M de AB.
En este caso solo existe una solución que es el círculo $\mathrm{C}(M, \frac{a}{2})$.

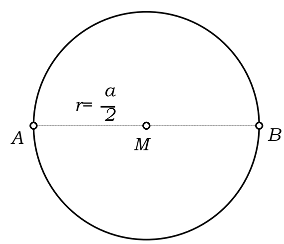
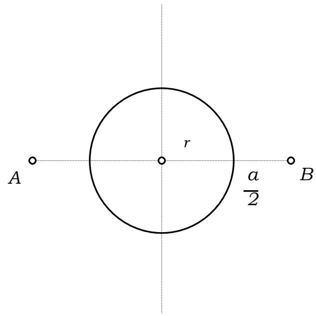


Figura 11.50



En el último caso, cuando $r < \frac{a}{2}$ no hay solución (ver figura 11.51). Pues si suponemos que $A, B \in C(O,r)$, entonces tendríamos que $a = |AB| \le 2r$, lo cual contradice nuestra suposición. ♣

Figura 11.51

11.3.3. Construcción. Por tres puntos dados no colineales trazar un círculo que los contenga.

Sean A, B y C tres puntos no colineales.
1. Trazamos (11.1.2) las mediatrices de los segmentos AB, BC y AC. Sea O el punto de concurrencia de dichas mediatrices (esto es posible por el Teorema 8.3.26).
2. Con centro en O trazamos un círculo de radio $|OA|$.

El punto O resulta ser el circuncentro del triángulo ΔABC y el círculo del segundo paso su circuncírculo. Por ello, dicho círculo es el requerido. ♣

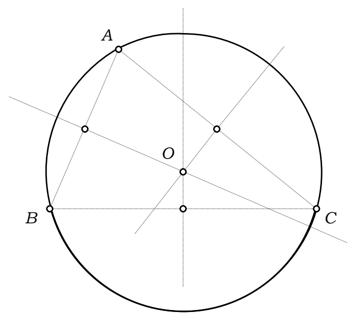


Figura 11.52

Las tres primeras construcciones que hemos visto en esta sección nos dicen cuál información es necesaria para construir un determinado círculo. Por ejemplo, de la construcción 11.3.3 podemos deducir que un círculo queda determinado por tres de sus puntos. Con base en esto, podemos formular la siguiente construcción:

11.3.4. Construcción. Dado un círculo, encontrar su centro.

Damos un círculo del cual desconocemos su centro.
1. Sobre el círculo dado fijamos tres puntos distintos A, B y C.
2. Trazamos (11.1.2) las mediatrices l y m de los segmentos AC y BC, respectivamente.

Afirmamos que el punto de intersección O de las mediatrices l y m es el centro del círculo. En efecto, los puntos que fijamos A, B y C equidistan del centro del círculo. Esto nos garantiza que el centro del círculo debe pertenecer a las mediatrices l y m (Teorema 4.7.8). Por lo tanto, O es el centro del círculo dado. ♣

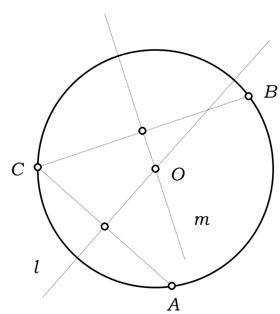


Figura 11.53

11.3.5. Construcción. Trazar una recta tangente a un círculo dado en un punto dado del mismo círculo.

Sean C(O,r) un círculo y $A \in$ C(O,r).

1. Trazamos (11.1.4) una recta l perpendicular a la recta $\overleftrightarrow{OA}$ en el punto A.

De acuerdo con el Teorema 4.4.12, si $P \in l - \{A\}$, entonces $r = |OA| < |OP|$. Lo cual significa que la recta l es tangente al círculo C(O,r) en el punto A. ♣

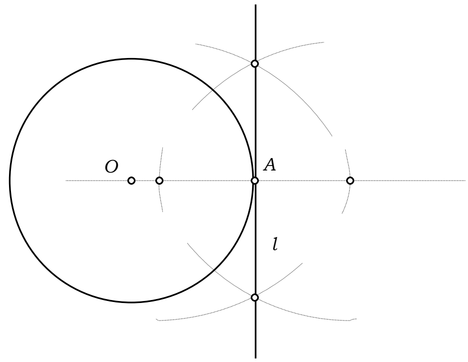


Figura 11.54

11.3.6. Construcción. Construir una recta tangente a un círculo dado que sea paralela a una recta dada.

Sean C(O,r) un círculo y l una recta.

1. Construimos (11.1.6) una recta m perpendicular a l que pase por O y corte a C(O,r) en los puntos A y B.

2. Construimos (11.1.4) dos rectas t_1 y t_2 perpendiculares a m en los puntos A y B, respectivamente.

Como $l \perp m, t_1 \perp m$ y $t_2 \perp m$, por el Teorema 3.7.1, hallamos que $t_1 \parallel l$ y $t_2 \parallel l$. Por lo cual, las rectas t_1 y t_2 son paralelas a l y tangentes a C(O,r) en los puntos A y B, respectivamente. ♣

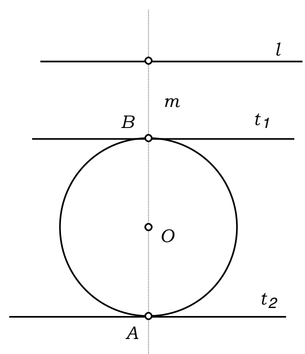


Figura 11.55

11.3.7. Construcción. Construir una recta tangente a un círculo dado desde un punto dado fuera del círculo.

Sean C(O,r) un círculo y $P \in ext($C$(O,r))$.

1. Trazamos la recta $\overleftrightarrow{PO}$.

2. Trazamos (11.3.1) el círculo de diámetro $|OP|$, el cual corta al círculo original C(O,r) en los puntos A y B.

Según el Teorema 9.5.2, $\angle OAP$ es un ángulo recto y, por ello, $\overleftrightarrow{OA} \perp \overleftrightarrow{AP}$. Del Teorema 9.3.6 se sigue que la recta $\overleftrightarrow{AP}$ es tangente a C(O,r) en el punto P. Del mismo modo, se establece que la recta $\overleftrightarrow{BP}$ es tangente a C(O,r) en el punto P. ♣

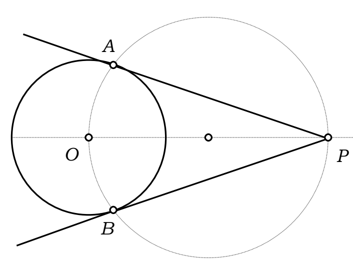


Figura 11.56

11.3.8. Construcción. Trazar un círculo que pase por dos puntos dados y que sea tangente a un círculo dado.

Sean A y B dos puntos fuera del círculo C(O,r).

1. Trazamos un círculo cualquiera que pase por los puntos A y B y corte a C(O,r) en los puntos C y D.

2. Sea E el punto de intersección de $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$.

3. Desde el punto E trazamos una recta tangente a C(O,r) en el punto R (Construcción 11.3.7).

El círculo C(O',r') que pasa por los tres puntos A, B y R es el círculo deseado. En efecto, la potencia del punto E con respecto al círculo C(O,r), con base al Teorema 9.6.1, es igual a

$$|ER|^2 = |ED||EC|$$

y la potencia E con respecto al círculo C(O',r') es igual al producto $|EA||EB|$. Pero como $|ED||EC| = |EA||EB|$, se sigue que $|ER|^2 = |EA||EB|$. Así, aplicando el Problema 9.346, concluimos que ER es también tangente a C(O',r') en el punto R. ♣

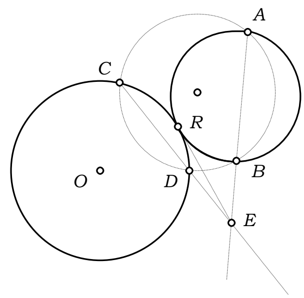


Figura 11.57

11.3.9. Teorema. Trazar un círculo que pase por dos puntos dados y sea tangente a una recta dada.

Sean l una recta, y A y B dos puntos en el plano fuera de l.

Supongamos primero que las rectas l y $\overleftrightarrow{AB}$ no son paralelas.

1. Sea C el punto de intersección de l y $\overleftrightarrow{AB}$.

2. Haciendo centro en C y con radio iguala la media geométrica de $|CA|$ y $|CB|$ (la media geométrica de dos números reales positivos se obtiene mediante la Construcción 11.5.1), trazamos un primer círculo que corte a l en los puntos M y N.

3. Trazamos el círculo que pase por lo puntos A, B y M (Construcción 11.3.3).

Tenemos que la potencia de C con respecto al círculo que pasa por los puntos A, B y M es igual a $|CA|CB|$ y como $|CM|$ es la media geométrica de $|CA|CB|$, hallamos que $|CM|^2 = |CA|CB|$. Según el Problema 9.346, vemos que $l = \overleftrightarrow{PM}$ es tangente al círculo que pasa por los puntos A, B y M en el punto M. Otra solución es el círculo que pasa por los puntos A, B y N.

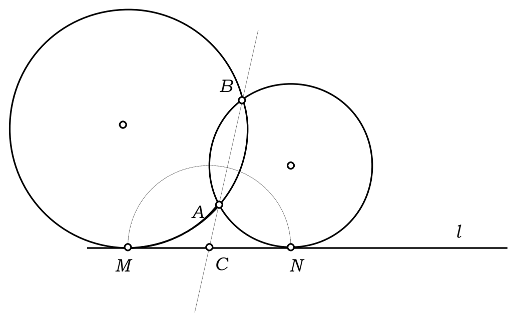


Figura 11.58

Supongamos ahora que $l \parallel \overleftrightarrow{AB}$.

1. Trazamos la mediatriz m del segmento AB(11.1.2).

2. Sea C el punto de intersección de la rectas m y l.

De acuerdo con el Teorema 9.3.6, el círculo buscado es el círculo que pasa por los puntos A, B y C, pues su diámetro que pasa por C, es perpendicular a la recta l. En este caso, hay solamente una solución. ♣

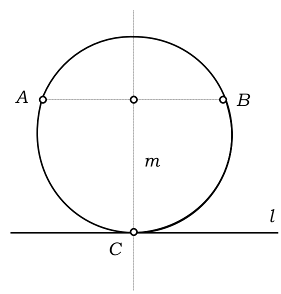


Figura 11.59

11.3.10. Construcción. Construir una recta tangente a dos círculos dados.

Sean C(O,r) y C(O',r') dos círculos distintos. Tenemos que considerar varios casos por separado:

Caso I. $\mathrm{C}(O,r) \subseteq ext(\mathrm{C}(O',r'))$ y $r = r'$.

1. Trazamos la recta $\overleftrightarrow{OO'}$.

2. Trazamos las rectas l y l' perpendiculares a $\overleftrightarrow{OO'}$ en los puntos O y O', respectivamente (11.1.4).

Las rectas l y l' cortan a los círculos $\mathrm{C}(O,r)$ y $\mathrm{C}(O',r')$ en los puntos A y B, y A' y B', respectivamente. Por el Teorema 9.3.6, hallamos que las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{A'B'}$ resultan ser tangentes a los dos círculos dados. Solo encontramos dos soluciones en este caso.

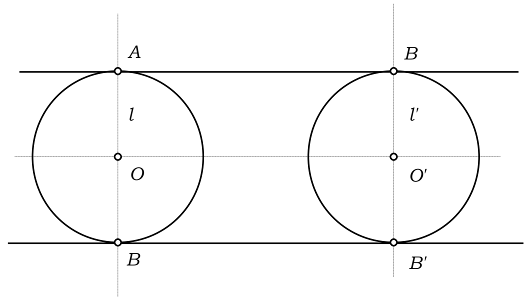


Figura 11.60

Caso II. $\mathrm{C}(O,r) \subseteq ext(\mathrm{C}(O',r'))$ y $r \neq r'$. Sin perder generalidad, supongamos que $r > r'$.

1. Haciendo centro en O, trazamos el círculo $\mathrm{C}(O,r-r')$.

2. Usando la Construcción 11.3.7, desde el punto O' trazamos dos rectas m y n tangentes al círculo $\mathrm{C}(O, r-r')$ en los puntos M y N, respectivamente.

4. Trazamos las rectas $\overleftrightarrow{OM}$ y $\overleftrightarrow{ON}$. Estas rectas cortan a $\mathrm{C}(O,r)$ en los puntos A y B, respectivamente.

5. Por A y B trazamos rectas paralelas a $\overleftrightarrow{OM}$ y $\overleftrightarrow{ON}$, respectivamente (11.1.8).

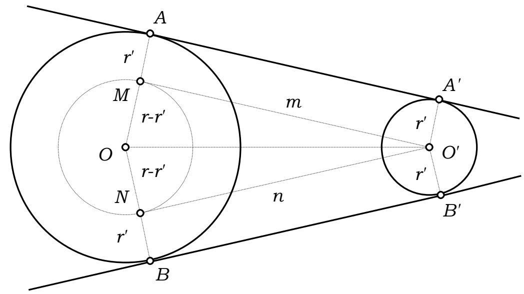


Figura 11.61

Afirmamos que las rectas construidas en el quinto paso son las deseadas. En efecto, primero veremos que dichas rectas cortan al círculo $\mathrm{C}(O',r')$. Sean A' y B' las proyecciones de O' sobre dichas rectas (ver figura 11.61). De acuerdo con el Teorema 9.3.6, sabemos que $\overleftrightarrow{O'M} \perp \overleftrightarrow{OA}$ y $\overleftrightarrow{O'N} \perp \overleftrightarrow{OB}$. Por lo cual, el Teorema 3.7.2 nos asegura que $\overleftrightarrow{OA} \perp \overleftrightarrow{AA'}$ y $\overleftrightarrow{OB} \perp \overleftrightarrow{BB'}$. Del Teorema 3.7.1 deducimos que los cuadriláteros $\square AMO'A'$ y $\square BNO'B'$ son rectángulos. Por consiguiente, $AM \cong O'A'$ y $BN \cong O'B'$ y, por ello, $|O'A'| = r' = |O'B'|$. Es decir, $A', B' \in \mathrm{C}(O',r')$. Como $\overleftrightarrow{O'A'} \perp \overleftrightarrow{AA'}$ y $\overleftrightarrow{O'B'} \perp \overleftrightarrow{BB'}$, por el Teorema 9.3.6, hallamos que $\overleftrightarrow{AA'}$ y $\overleftrightarrow{BB'}$ son tangentes a $\mathrm{C}(O',r')$ y, por este mismo teorema, también obtenemos que $\overleftrightarrow{AA'}$ y $\overleftrightarrow{BB'}$ son tangentes a $\mathrm{C}(O,r)$.

Con el procedimiento anterior encontramos dos rectas tangentes. Veamos que hay otras dos rectas tangentes:

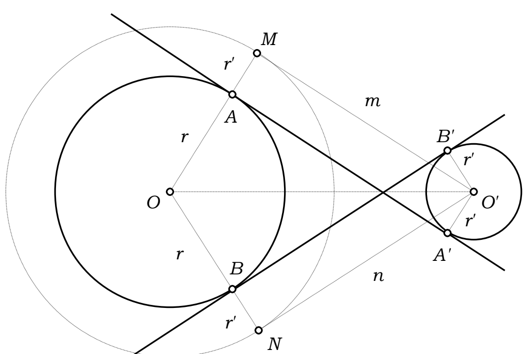


Figura 11.62

1. Haciendo centro en O, trazamos el círculo $\mathrm{C}(O,r+r')$.

2. Mediante la Construcción 11.1.7, desde el punto O', trazamos dos rectas m y n tangentes a $\mathrm{C}(O, r-r')$ en los puntos M y N, respectivamente.

4. Trazamos las rectas $\overleftrightarrow{OM}$ y $\overleftrightarrow{ON}$, las cuales cortan a $\mathrm{C}(O,r)$ en los puntos A y B, respectivamente.

5. Trazamos rectas que pasen por O' y que sean paralelas a $\overleftrightarrow{OM}$ y $\overleftrightarrow{ON}$. Dichas rectas cortan a $\mathrm{C}(O',r')$ en los puntos A' y B'.

Por las mismas razones anteriores, las rectas $\overleftrightarrow{AA'}$ y $\overleftrightarrow{BB'}$ son tangentes a los círculos $\mathrm{C}(O,r)$ y $\mathrm{C}(O',r')$. En este caso, es posible construir cuatro rectas tangentes a los dos círculos dados.

Las construcciones de los casos restantes son muy similares a las ya expuestas. Por esta razón, solo daremos un pequeño bosquejo de dichas construcciones:

Caso III. $\mathrm{C}(O,r)$ y $\mathrm{C}(O',r')$ son tangentes exteriormente y $r \neq r'$. En este caso, hay solamente tres rectas tangentes (ver figura 11.63).

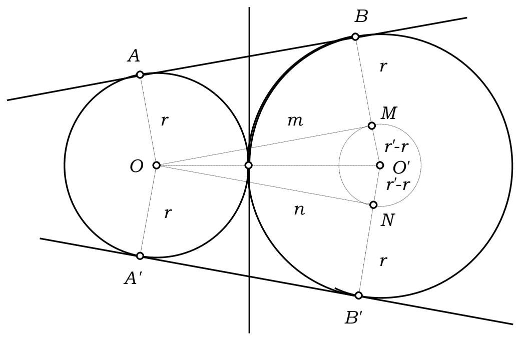


Figura 11.63

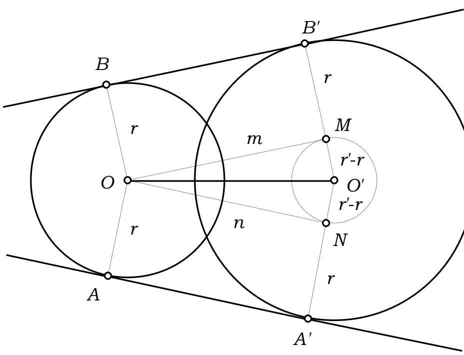


Figura 11.64

Caso IV. $\mathrm{C}(O,r)$ y $\mathrm{C}(O',r')$ se cortan en dos Puntos y $r \neq r'$. En este caso, solamente dos rectas son posibles de construir (ver la figura 11.64).

Caso V. $\mathrm{C}(O,r)$ y $\mathrm{C}(O',r')$ son tangentes internamente en el punto P. En este caso, mediante la Construcción 11.1.4, trazamos la recta l perpendicular a $\overleftrightarrow{OO'}$ en el punto P (ver figura 11.65). Hay solamente una solución en este último caso. ♣

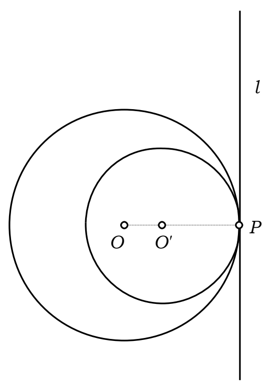


Figura 11.65

11.3.11. Construcción. Dadas dos rectas paralelas y un punto entre ambas, construir un círculo tangente a las dos rectas dadas que pase por el punto dado.

Sean m y n dos rectas paralelas y P un punto entre ellas.

1. Pongamos $r = d(m,n)$ y procedemos a construir (11.1.5) una recta l que sea paralela a m y n y que esté entre ambas a una distancia $\frac{r}{2}$.

2. Haciendo centro en P trazamos un círculo de radio r que corte a l en el punto O.

Sabemos que las proyecciones del punto O sobre las rectas m y n son los únicos puntos en común con el círculo $C(O,r)$. Por consiguiente, las rectas m y n son tangentes a $C(O,r)$. Como $d(O,P) = r$, tenemos que $P \in C(O,r)$. Por lo tanto, $C(O,r)$ es el círculo deseado. ♣

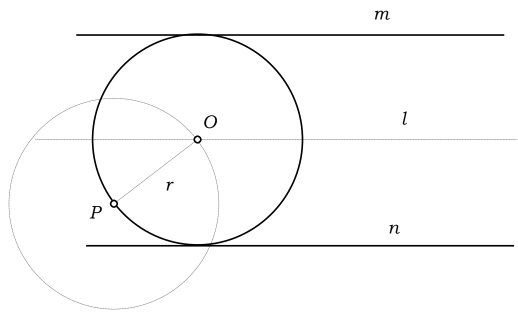


Figura 11.66

11.3.12. Construcción. Dados un segmento AB y un número real positivo a, encontrar un punto P en el plano tal que $|AB|^2 = a^2 + |PB|^2$.

Claramente se debe cumplir la desigualdad $|AB| > a$.

1. Trazamos el círculo $C(A,a)$.

2. Construimos (11.3.7) la recta que pase por B y sea tangente al círculo $C(A,a)$ en el punto C.

Por el Teorema 9.3.6, sabemos que $\angle ACB$ es un ángulo recto. Por lo cual, ΔCAB es un triángulo rectángulo con hipotenusa AB. Aplicando el Teorema de Pitágoras 8.5.1, hallamos que $|AB|^2 = a^2 + |PB|^2$. ♣

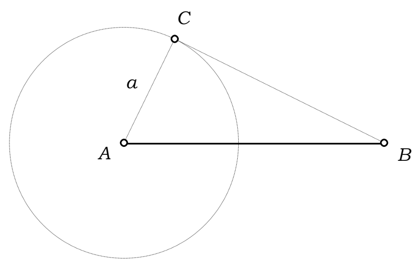


Figura 11.67

11.3.13. Construcción. Construir un círculo que sea tangente a los lados de un ángulo no degenerado dado y cuyos puntos de tangencia estén a una distancia dada del vértice.

Sean $\angle\alpha$ un ángulo no degenerado con vértice O y $r > 0$ un número real.

1. Trazamos el círculo $C(O,r)$ que corte a los lados del ángulo en los puntos P y Q.

2. Construimos (11.1.12) la bisectriz $\overrightarrow{OC}$ del ángulo $\angle\alpha$.

3. Trazamos (11.1.4) la recta perpendicular a $\overleftrightarrow{OP}$ en el punto P, la cual corta a $\overrightarrow{OC}$ en el punto R.

Veamos que $C(R,|RP|)$ es el círculo deseado. En efecto, por el criterio de congruencia 3.2.6, sabemos que $\Delta POR \cong \Delta QOR$. De donde hallamos que Q es la proyección de R sobre uno de los lados del ángulo en cuestión, y $|RP| = |RQ|$. Por consiguiente, $RQ \perp \overleftrightarrow{OQ}$ y $P, Q \in C(R,|RP|)$. El Teorema 9.3.6 nos asegura que los lados $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$ del ángulo $\angle\alpha$ son tangentes al círculo $C(R,|RP|)$ en los puntos P y Q, respectivamente. ♣

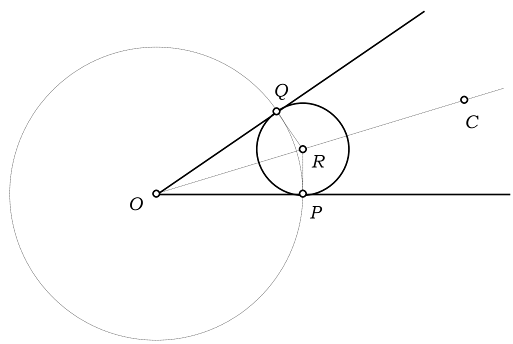


Figura 11.68

A continuación, damos una aplicación de la construcción anterior.

11.3.14. Construcción. A través de un punto dado, trazar una recta que corte a un ángulo no degenerado dado en dos puntos, de tal forma que se obtenga un triángulo de perímetro dado.

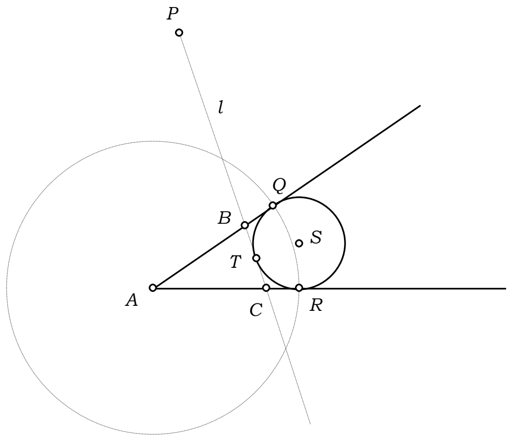


Figura 11.69

Sean P un punto, $\angle\alpha$ un ángulo no degenerado con vértice A, y p un número real positivo.

1. Construimos (11.3.13) el círculo $\mathrm{C}(S,r)$ tangente a los lados del ángulo en los puntos Q y R, y tal que

$$|AQ| = |AR| = \frac{p}{2}.$$

2. Trazamos (11.3.7) la recta l que pasa por P y es tangente a $\mathrm{C}(S,r)$ en el punto T.

Sean B y C los puntos de intersección de l con $\overleftrightarrow{AQ}$ y $\overleftrightarrow{AR}$, respectivamente. De acuerdo con el Corolario 9.10.4, sabemos que

$$s = \frac{per(\Delta ABC)}{2} = |AB| + |BT| = |AC| + |CT|$$

$$per(\Delta ABC) = |AB| + |BT| + |AC| + |CT| = |AB| + |BQ| + |AC| + |CR| = |AQ| + |AR| = \frac{p}{2} + \frac{p}{2} = p. \ \clubsuit$$

11.3.15. Construcción. Construir un ángulo inscrito en un círculo dado que sea congruente a un ángulo dado.

Sean $\mathrm{C}(O,r)$ un círculo y $\angle\alpha$ un ángulo no degenerado. Según el Corolario 9.5.7, podemos suponer, sin perder generalidad, que $\angle\alpha$ es agudo, pues de otro modo consideramos el ángulo $\angle 180 - \angle\alpha$.

1. Duplicamos el ángulo $\angle\alpha$, esto es posible según la Construcción 11.1.11. A este ángulo lo denotamos por $\angle\beta$.
2. Siguiendo la Construcción 11.1.11, trazamos un ángulo central $\angle AOB$ de $\mathrm{C}(O,r)$ cuyo vértice sea el punto O y tal que

$$m(\angle AOB) = m(\angle\beta) = 2m(\angle\alpha).$$

Tomamos un punto $P \in \mathrm{C}(O,r) \cap ext(\angle AOB)$. El Teorema 9.5.6 nos asegura que

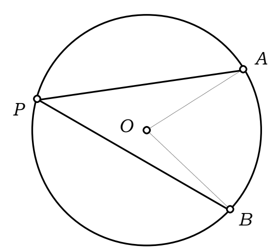


Figura 11.70

$$m(\angle APB) = \frac{m(\angle AOB)}{2} = \frac{m(\angle\beta)}{2} = m(\angle\alpha)$$

$$\angle APB \cong \angle\alpha.$$

En este caso, hay una cantidad infinita de soluciones, una por cada punto de $\mathrm{C}(O,r) \cap ext(\angle AOB)$. $\clubsuit$

11.3.16. Construcción. Dado un segmento AB, encontrar un punto P en el plano tal que el ángulo $\angle AOB$ sea congruente a un ángulo no degenerado dado.

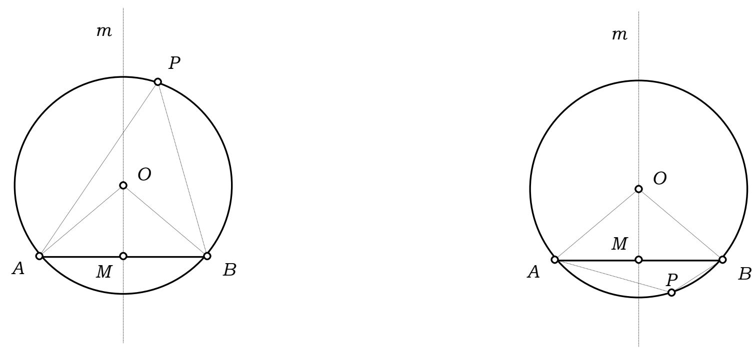


Figura 11.71

Sea $\angle\alpha$ un ángulo no degenerado. Primero supongamos que $\angle\alpha$ no es recto.

1. Construimos (11.1.3) el punto medio M del segmento AB.
2. Construimos (11.1.2) la mediatriz m del segmento AB.
3. Usando la construcción del Problema 11.317, localizamos un punto $O \in m$ tal que $m(\angle AOM) = m(\angle\alpha)$, en cuyo caso $\angle\alpha$ es agudo, o bien, $m(\angle AOM) = 180 - m(\angle\alpha)$, en cuyo caso $\angle\alpha$ es obtuso.
4. Trazamos el círculo $\mathrm{C}(O,|OA|)$.

Sea $P \in \mathrm{C}(O,r)$. En virtud del Teorema 9.5.6, tenemos que $m(\angle AOB) = 2m(\angle APB)$ si $P \notin int(\angle AOB)$, y $m(\angle AOB) = 2(180 - m(\angle APB))$ si $P \in int(\angle AOB)$. Por ello, si el ángulo $\angle\alpha$ es agudo, entonces

$$m(\angle AOB) = 2m(\angle APB) = 2m(\angle AOM) = 2m(\angle\alpha)$$
$$m(\angle APB) = m(\angle\alpha)$$
$$\angle APB \cong \angle\alpha,$$

siempre que $P \notin int(\angle AOB)$. Si el ángulo $\angle\alpha$ es obtuso, entonces

$$m(\angle AOB) = 2(180 - m(\angle APB)) = 2m(\angle AOM) = 2(m(\angle\alpha) - 180)$$
$$2(180 - m(\angle APB)) = 2(180 - m(\angle\alpha))$$
$$m(\angle APB) = m(\angle\alpha)$$
$$\angle APB \cong \angle\alpha,$$

cuando $P \in int(\angle AOB)$.

En el caso en que el ángulo $\angle\alpha$ sea recto, construimos (11.3.1) el círculo $\mathrm{C}(M,r)$ de diámetro AB. Si $P \in \mathrm{C}(M,r) - \{A, B\}$, por el Teorema 9.5.2, obtenemos que $\angle APB$ es un ángulo recto y, entonces, por el Teorema 2.6.2, $\angle APB \cong \angle\alpha$. Observemos que hay una cantidad infinita de soluciones para la construcción solicitada. ♣

11.3.17. Construcción. Dado un triángulo, construir su incírculo y sus tres excírculos.

Sea ΔABC un triángulo.

1. Mediante la Construcción 11.1.12, trazamos las bisectrices b_b y b_c de los ángulos $\angle B$ y $\angle C$ del triángulo.

El incentro I del triángulo es el punto de intersección de las bisectrices b_b y b_c, y su inradio es $r = d(I, \overleftrightarrow{BC})$. Entonces, $\mathrm{C}(I,r)$ es el incírculo de ΔABC.

2. Trazamos (11.1.12) las bisectrices de los ángulos exteriores del triángulo dado que son adyacentes a los ángulos interiores $\angle B$ y $\angle C$.

El excentro I_a del triángulo es el punto de intersección de las bisectrices que se construyeron en el segundo paso y su exradio es $r_a = d(I_a, \overleftrightarrow{AC})$. Así que $\mathrm{C}(I_a, r_a)$ es el excírculo del triángulo ΔABC opuesto al vértice A.

3. Trazamos las bisectrices de los ángulos exteriores del triángulo adyacentes a los ángulos interiores $\angle A$ y $\angle C$ del triángulo dado (Construcción 11.1.12).

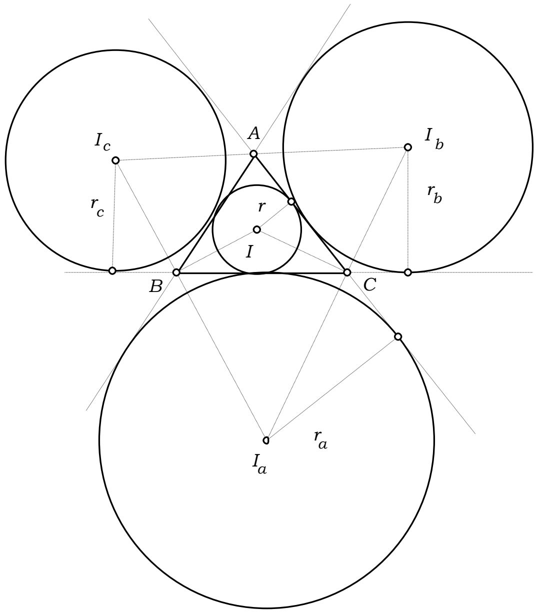


Figura 11.72

El excentro I_b del triángulo es el punto de intersección de las bisectrices construidas en el tercer paso. Entonces, $\mathrm{C}(I_b, r_b)$, en donde $r_b = d(I_b, \overleftrightarrow{BC})$, es el excírculo de ΔABC opuesto al vértice B.

De manera completamente similar, se construye el tercer excentro I_c de nuestro triángulo. Por lo cual, $\mathrm{C}(I_c, r_c)$, en donde $r_c = d(I_c, \overleftrightarrow{BC})$, es el tercer excírculo de ΔABC opuesto al vértice C. ♣

El problema de encontrar el centro de un círculo usando solamente compás se le acredita a L. Mascheroni. Este problema llamó mucha la atención de los geómetras cuando apareció en el libro *Geometría del Compasso*, escrito por L. Mascheroni, publicado en Pavia por el año de 1797. Después de dos siglos, se vuelve a formular como una pregunta en Problem 125, Eureka vol. 2, no. 6 (1976), 120 – 123, y en Problem 29.8, *Math. Spectrum* vol. 30 no. 1 (1997–98), 23. Se han publicado diversas soluciones del problema de Mascheroni. Una de ellas aparece con todo detalle en el libro de A. N. Kostovski [l-197, p.44 – 47]. A continuación, damos la solución de E. Kent que aparece en la revista *Math. Spectrum*.

11.3.18. Construcción(L. Mascheroni). Usando compás solamente, encontrar el centro de un círculo.

[a-86]. Sea $\mathrm{C}(O,r)$ un círculo del cual se desconoce la ubicación de su centro O.

1. Fijamos un punto $P \in \mathrm{C}(O,r)$.
2. Fijamos un número positivo $t < r$.
4. Trazamos el círculo $\mathrm{C}(P,t)$. Sean Q y R los puntos de intersección de los círculos $\mathrm{C}(P,t)$ y $\mathrm{C}(O,r)$.
5. Trazamos los círculos $\mathrm{C}(Q,t)$ y $\mathrm{C}(R,t)$ y marcamos con la letra S a su punto de intersección diferente de P.

Según el Problema 9.337, sabemos que los puntos P, S y O son colineales. Sea H la proyección de Q sobre PS. De acuerdo con el Teorema de Pitágoras (8.5.1), hallamos que

$$|QH|^2 = |OQ|^2 - |OH|^2 = |OQ|^2 - (|OP| - |PH|)^2 = |OQ|^2 - |OP|^2 + 2|OP||PH| - |PH|^2 .$$

Por consiguiente, $|QH|^2 = 2|OP||PH| - |PH|^2$. Por otro lado, tenemos que

$$|PQ|^2 = |PH|^2 + |QH|^2 = |PH|^2 + 2|OP||PH| - |PH|^2$$
$$|PQ|^2 = 2|OP||PH| = 2r|PH|.$$

De aquí obtenemos la identidad

$$|PS| = 2|PH| = \frac{|PQ|^2}{r} = \frac{t^2}{r}.$$

6. Trazamos el círculo C(O,$|PS|$).

7. Repetimos los pasos 2, 3, 4 y 5 con el círculo C(O,$|PS|$) en lugar del círculo C(O,r).

Obtenemos así dos puntos $P' \in$ C(O,$|PS|$) y S' tales que $|P'S'| = \dfrac{t^2}{|PS|} = r$. Hemos conseguido, usando compás solamente, un segmento cuya longitud es igual al radio del círculo C(O,r). El centro de nuestro círculo puede ahora ser localizado trazando dos círculos de radio $|P'S'|$ cuyos centros estén sobre el círculo C(O,r). ♣

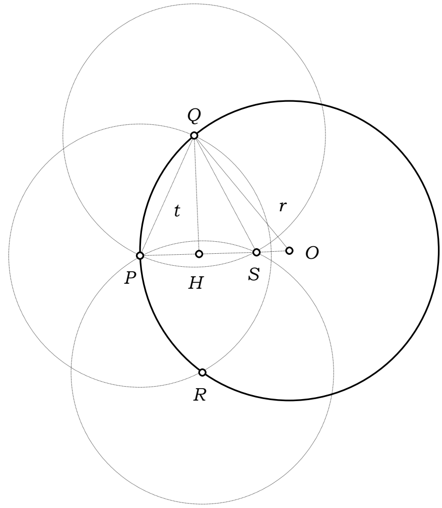


Figura 11.73

Otra construcción del centro de un círculo, usando solo compás se encuentra en el libro [l-223, Problema # 97].

11.3.19. Construcción. Construir el punto medio de un arco.

Sea $\overset{\frown}{AB}$ un arco de un círculo C(O,r).

1. Construimos (11.1.2) la mediatriz m del segmento AB.

Sea M el punto de intersección de la recta m y el arco $\overset{\frown}{AB}$. Por estar M en la mediatriz de AB, con base en el Teorema 4.2.2, hallamos que $AM \cong MB$. El Teorema 9.11.14 nos asegura que $\overset{\frown}{AM} \cong \overset{\frown}{MB}$. Es decir, M es el punto medio del arco $\overset{\frown}{AB}$. ♣

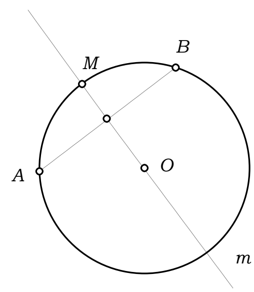


Figura 11.74

11.3.20. Construcción. Dividir un arco de un círculo dado en dos arcos, de tal modo que las longitudes de las cuerdas que los sustentan estén en una proporción dada.

Sean $\overset{\frown}{AB}$ un arco de un círculo C(O,r) y $p > 0$ un número real.

1. Ubicamos (6.3.1) un punto $C \in AB$ tal que $\dfrac{|AC|}{|CB|} = p$.

2. Localizamos (11.3.19) el punto medio M del arco mayor determinado por los puntos A y B (ver figura 11.75).

Sea D el punto de intersección de la recta $\overleftrightarrow{MC}$ y C(O,r). Del Teorema 9.11.14 vemos que $\angle ADM \cong \angle MDB$. Lo cual significa que la semirrecta $\overrightarrow{DM}$ es la bisectriz del ángulo $\angle ADB$. Se sigue del Teorema 8.3.4 que $\dfrac{|DA|}{|AC|} = \dfrac{|DB|}{|CB|}$. Lo cual implica que $\dfrac{|DA|}{|DB|} = \dfrac{|AC|}{|CB|} = p$. ♣

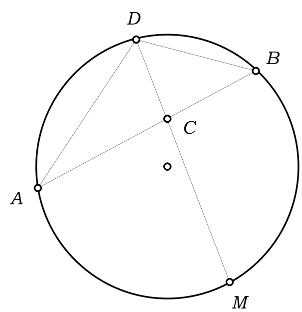


Figura 11.75

Veamos que también es posible hablar de simetría dentro de un círculo.

11.3.21. Definición. Sean C(O,r) un círculo y $P \in$ C(O,r). Dado $A \in$ C(O,r), decimos que el punto $B \in$ C(O,r) es el *punto simétrico* de A con respecto al punto P en el círculo C(O,r) si P es el punto medio del arco $\overset{\frown}{AB}$.

11.3.22. Construcción. Dado un círculo C(O,r) y $P \in$C(O,r), construir el punto simétrico de un punto de C(O,r) con respecto a P en el mismo círculo.

Sea $A \in$ C(O,r).
1. Trazamos el círculo C(P,$|PA|$).
2. Sea B el punto de intersección de C(P,$|PA|$) con el círculo C(O,r) diferente de A.
El Teorema 9.11.14 nos asegura que P es el punto medio del arco $\overset{\frown}{AB}$. Por definición, B es el punto solicitado. ♣

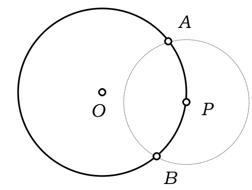


Figura 11.76

11.3.23. Construcción. En un círculo dado, inscribir un triángulo del cual solo conocemos los puntos medios de los tres arcos que determinan sus vértices sobre el círculo dado.

Sean C(O,r) un círculo y L, M, $N \in$ C(O,r).

1. Tomamos un punto $P \in \overset{\frown}{NL}$ y construimos (11.3.22) su punto simétrico Q con respecto a L en el círculo C(O,r).
2. Construimos (11.3.22) el punto simétrico R de Q con respecto a M en el círculo C(O,r).
3. Construimos (11.3.22) el punto simétrico S de R con respecto aN en el círculo C(O,r).
4. Localizamos (11.3.19) el punto medio A del arco $\overset{\frown}{PS}$.
De acuerdo con el Problema 9.497, sabemos que el punto medio del arco $\overset{\frown}{PS}$ es el vértice A del triángulo. Con este procedimiento, uno puede encontrar los vértices B y C del triángulo solicitado. ♣

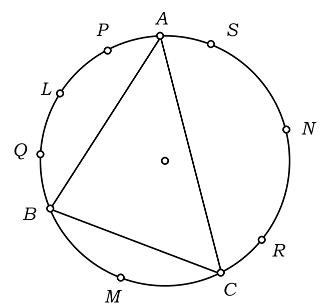


Figura 11.77

11.3.24. Construcción. Mediante círculos concéntricos, dividir un círculo en tres regiones con la misma área.

Prueba: Sean C(O,r) un círculo y $P \in$ C(O,r).
1. Dividimos (11.1.9) el segmento PO en tres segmentos congruentes entre sí. Sean A, $B \in PO$ los puntos de tal trisección.
2. Trazamos el círculo de diámetro PO.
3. Trazamos (11.1.4) dos rectas perpendiculares a PO en los puntos A y B. Sean M y N los puntos donde dichas rectas perpendiculares cortan al círculo de diámetro PO, respectivamente.
4. Trazamos los círculos C(O,$|OM|$) y C(O,$|ON|$).
Por el Teorema 9.5.2, sabemos que ΔMPO es un triángulo rectángulo con hipotenusa PO y es claro que $ON \cong PM$ y $AM \cong BN$. Por ello y por el Teorema de Pitágoras (8.5.1),

$$|OP|^2 - |ON|^2 = |OP|^2 - |PM|^2 = |OM|^2 .$$

Según el Teorema de Pitágoras (8.5.1), hallamos que

$$|ON|^2 = |NB|^2 + |BO|^2 = |AM|^2 + (2|AO|)^2 = |AM|^2 + 4|AO|^2 .$$

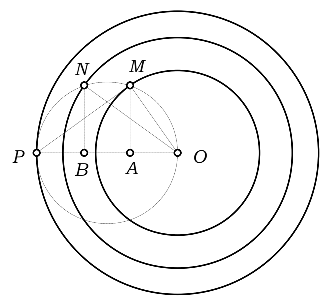


Figura 11.78

Pero por el Teorema 8.1.2 (4), sabemos que

$$|AM|^2 = |PA||AO| = 2|AO||AO| = 2|AO|^2 .$$

Del Teorema de Pitágoras (8.5.1) y sustituyendo, llegamos a que

$$|OM|^2 = |AM|^2 + |AO|^2 = 2|AO|^2 + |AO|^2 = 3|AO|^2 .$$

Por ello y el Teorema de Pitágoras 8.5.1, de nueva cuenta,

$$|ON|^2 - |OM|^2 = |AM|^2 + 4|AO|^2 - |OM|^2 = |AM|^2 + 4|AO|^2 - 3|AO|^2 = |AM|^2 + |AO|^2 = |OM|^2 .$$

De aquí obtenemos las identidades

$$\pi|OP|^2 - \pi|ON|^2 = \pi|OM|^2$$
$$are(\mathrm{C}(O,r)) - are(\mathrm{C}(O,|ON|)) = are(\mathrm{C}(O,|OM|))$$
$$\pi|ON|^2 - \pi|OM|^2 = \pi|OM|^2$$
$$are(\mathrm{C}(O,|ON|)) - are(\mathrm{C}(O,|OM|)) = are(\mathrm{C}(O,|OM|)),$$

tal como se deseaba. ♣

La siguiente construcción fue hallada en la página 31 del libro [l-289].

11.3.25. Construcción. Dividir un círculo en cuatro arcos congruentes.

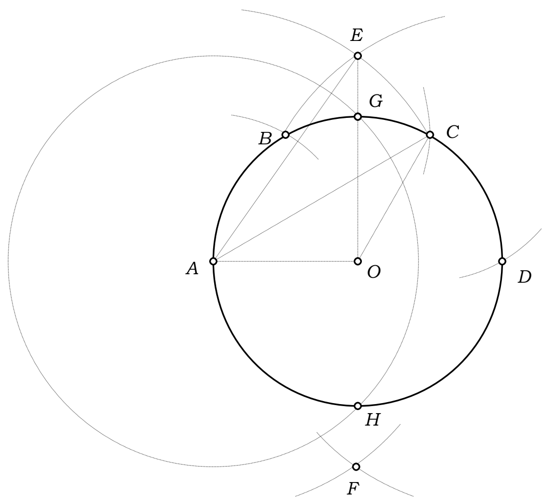


Figura 11.79

Sea $\mathrm{C}(O,r)$ un círculo.

1. Fijamos un punto $A \in \mathrm{C}(O,r)$.
2. Usando círculos de radio r trazamos sobre el círculo $\mathrm{C}(O,r)$ tres puntos B, C y D tales que $|AB| = |BC| = |CD| = r$ (ver la figura 11.79).
3. Trazamos los círculos $\mathrm{C}(A,|AC|)$ y $\mathrm{C}(D,|AC|)$. Sean E y F los puntos de intersección de estos dos círculos.
4. Trazamos el círculo $\mathrm{C}(A,|OE|)$.

Sean G y H los puntos de intersección de los círculos $\mathrm{C}(A,|OE|)$ y $\mathrm{C}(O,r)$. Veamos que A, G, D y H son los puntos solicitados. En efecto, no es difícil ver que AD es un diámetro del círculo en cuestión. Como ΔAOB, ΔBOC y ΔCOD son triángulos equiláteros, deducimos que ΔAOC es un triángulo isósceles tal que $m(\angle COA) = 120$ y $m(\angle OAC) = m(\angle ACO) = 30$.De aquí y del Teorema 8.1.5 podemos ver que $|AC| = \sqrt{3}\,r$. Por construcción, sabemos que $|AE| = |AC| = \sqrt{3}\,r$. Consideremos el triángulo rectángulo ΔEAO. De acuerdo con el Teorema de Pitágoras (8.5.1),

$$|AE|^2 = |AO|^2 + |OE|^2$$
$$3r^2 = r^2 + |OE|^2$$
$$3r^2 - r^2 = |OE|^2$$
$$|OE|^2 = 2r^2$$
$$|OE| = \sqrt{2}\, r.$$

Por consiguiente, $|AG| = |GD| = |DH| = |HA| = |OE| = \sqrt{2}\, r$. Finalmente, el Teorema 9.11.9 implica que

$$\overset{\frown}{AG} \cong \overset{\frown}{GD} \cong \overset{\frown}{DH} \cong \overset{\frown}{HA}. \ ♣$$

11.3.26. Construcción. Construir un ovoide de diámetro dado.

Sea AB un segmento.

1. Construimos (11.1.2) la mediatriz m del segmento AB, siendo M el punto medio de AB.
2. Trazamos el círculo $C(M,|MA|)$.
   Sea R uno de los puntos de intersección de m y el círculo $C(M,|MA|)$.
3. Trazamos el círculo $C(A,|AB|)$ y sea P uno de los puntos donde este círculo corta a la recta $\overleftrightarrow{AR}$.
4. Trazamos el círculo $C(B,|AB|)$ y seleccionamos uno de los puntos, digamos Q, en donde este círculo corta a la recta $\overleftrightarrow{BR}$ (ver la figura 11.80). Claramente, por construcción, vemos que $|RP| = |RQ|$.
5. Trazamos el círculo $C(R,|RP|)$.

Nuestro ovoide es la curva formada por el semicírculo de diámetro AB y los arcos $\overset{\frown}{AQ}$, $\overset{\frown}{QP}$ y $\overset{\frown}{PB}$. ♣

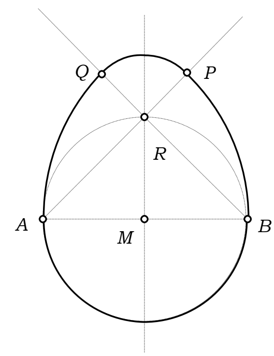


Figura 11.80

11.3.27. Construcción de una Espiral de Tres Centros.

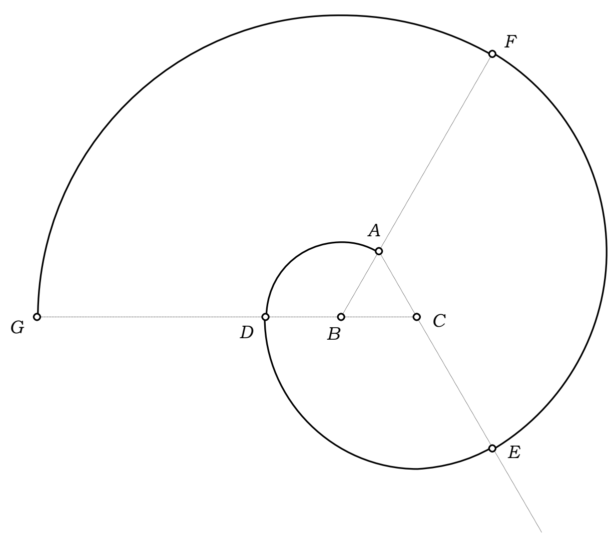


Figura 11.81

1. Construimos (11.2.2.) un triángulo equilátero ΔABC.
2. Construimos el arco $\overset{\frown}{AD}$ de centro B y radio $|BA|$ tal que $D \in \overleftrightarrow{BC}$.
3. Construimos el arco $\overset{\frown}{DE}$ de centro C y radio $|CD|$ tal que $E \in \overleftrightarrow{AC}$.
4. Construimos el arco $\overset{\frown}{EF}$ de centro A y radio $|AE|$ tal que $F \in \overleftrightarrow{AB}$.
5. Construimos el arco $\overset{\frown}{FG}$ de centro B y radio $|BF|$ tal que $G \in \overleftrightarrow{BC}$.

Y así continuamos sucesivamente, hasta donde uno desee parar. ♣

Para construir una espiral de dos centros uno empieza con un segmento, y para la de cuatro centros la figura de partida es un cuadrado (Problemas 11.425 y 11.426).

11.3.28. Construcción[a-160]. Construir el símbolo de la trinidad.

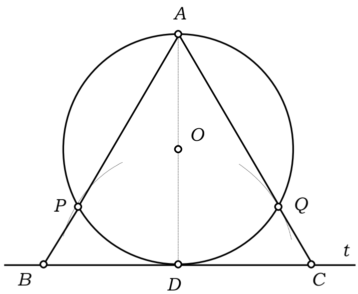


Figura 11.82

1. Construimos un círculo $\mathsf{C}(O,r)$ y fijamos un punto A sobre él.
2. Trazamos el diámetro AD.
3. Haciendo centro en D construimos un círculo con radio r que corte al círculo $\mathsf{C}(O,r)$ en los puntos P y Q.
4. Construimos (11.1.4) la recta t perpendicular a AD en el punto D.
5. Marcar los dos puntos de intersección de las rectas $\overleftrightarrow{AP}$ y $\overleftrightarrow{AQ}$ con la recta t.

Afirmamos que el triángulo ΔABC es equilátero. Efectivamente, por construcción sabemos que $AD \perp t$, y el Teorema 9.3.6 asegura que $PD \perp AB$ y $QD \perp AC$, pues AP y AQ son tangentes al círculo $\mathsf{C}(O,r)$. En particular, AD es la mediana y la altura del triángulo ΔABC. Es fácil ver que ΔABC es un triángulo isósceles con $\angle B \cong \angle C$. Sabemos que el triángulo ΔOPD es equilátero, pues $OP \cong OD \cong PD$, por construcción. Ya que ΔAPD es un triángulo rectángulo con hipotenusa AD, debemos tener que $m(\angle BAD) = 30$. De igual manera, podemos probar que $m(\angle DAC) = 30$. Así, $m(\angle BAC) = 60$. Puesto que ΔABC es un triángulo isósceles, se sigue la identidad $m(\angle B)= m(\angle C) = 60$. Por lo tanto, ΔABC es un triángulo equilátero. ♣

11.3.29. Definición. Decimos que un arco se *enlaza* con un segmento, cuando el centro del arco se encuentra en la recta perpendicular al segmento en el punto que tiene en común con el arco. Se dice que dos arcos se *enlazan* cuando sus centros y el punto que tienen en común son colineales.

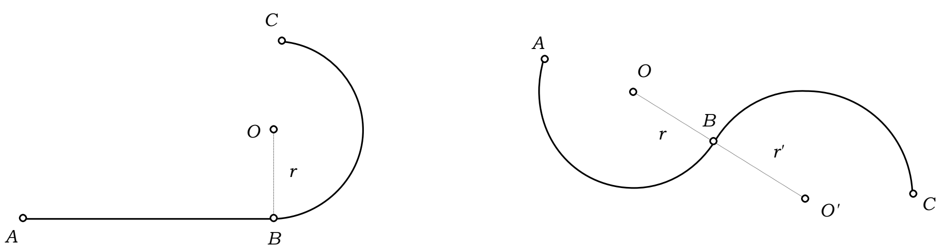


Figura 11.83

11.3.30. Construcción. Enlazar dos segmentos paralelos con un arco.

Sean AB y CD dos segmentos paralelos que se quieren enlazar con un arco. Para que los dos segmentos se puedan enlazar con un arco, se debe tener que uno de los segmentos formados por los puntos extremos de los dos segmentos dados sea perpendicular a uno de ellos.
Sin perder generalidad, supongamos que $AB \perp BD$.

1. Construimos (11.3.1) el círculo de diámetro BD.

Claramente, el semicírculo de diámetro BD es el arco solicitado. ♣

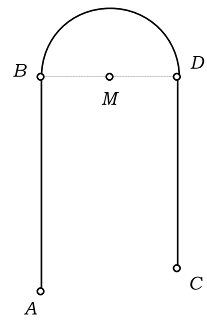


Figura 11.84

11.3.31. Construcción. Enlazar un arco dado con otro arco que pase por un punto dado.

Sean $\overset{\frown}{AB}$ un arco de centro O y C un punto en el plano fuera del arco dado.

1. Trazamos (11.1.2) la mediatriz m del segmento BC.
2. Sea O' el punto de intersección de m y la recta $\overleftrightarrow{OB}$.
3. Trazamos el círculo $\mathcal{C}(O',|O'B|)$.

Por construcción, vemos que el arco $\overset{\frown}{BC}$ está enlazado con el arco $\overset{\frown}{AB}$. ♣

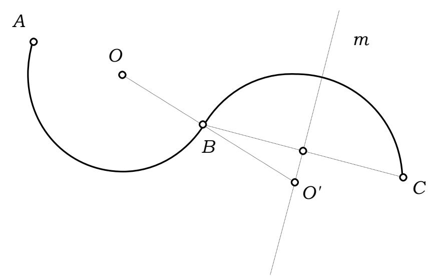


Figura 11.85

En la arquitectura, los arcos han sido fundamentales en la ornamentación de edificios. En la edad media, para el diseño de puertas y ventanas, se usaron principalmente los arcos. A continuación, veremos las construcciones geométricas de algunos de los arcos ornamentales mas conocidos.

11.3.32. Construcción de un Arco por Tranquil.

Tenemos dos segmentos paralelos AD y BC tales $AD < BC$.

1. Prolongamos (11.1.1) el segmento AD hasta un punto E tal que $AE \cong BC$ (ver la figura 11.86).
2. Trazamos el círculo $\mathcal{C}(E,|ED|)$, el cual corta a EC en el punto F.
3. Trazamos (11.1.2) la mediatriz m del segmento FC.
4. Construimos (11.1.8) la recta paralela a EC que pasa por el punto D.
5. Sea Q el punto de intersección de m con la recta de paso anterior.
6. Trazamos el círculo $\mathcal{C}(Q,|DQ|)$, el cual corta a m en un punto P.

Tenemos entonces que $|DQ| = |EM| = |QP|$, en donde M es el punto medio de FC. Por consiguiente,
$|MP| = |QP| - |MQ| = |EM| - |MQ| = |EM| - |DE| = |EM| - |EF| = |FM| = |MC|$.
Lo cual significa que P y C pertenecen al círculo de radio $|MC|$ y centro M.

7. Trazamos el círculo $\mathcal{C}(M,|MC|)$.

A la curva formada por los arcos $\overset{\frown}{DP}$ y $\overset{\frown}{PC}$ se le llama *arco por tranquil*. ♣

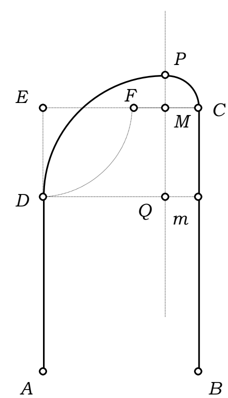


Figura 11.86

11.3.33. Construcción de un Arco Gótico.

1. Trazamos (11.1.1) un segmento AB.
2. Trazamos el círculo $\mathrm{C}(A,|AB|)$.
3. Trazamos el círculo $\mathrm{C}(B,|AB|)$.

Sea C uno de los puntos de intersección de los círculos $\mathrm{C}(A,|AB|)$ y $\mathrm{C}(B,|AB|)$. A la curva formada por los arcos $\overset{\frown}{AC}$ y $\overset{\frown}{CB}$ se le conoce como *arco gótico*. ♣

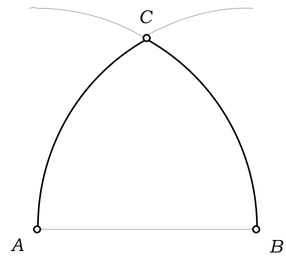


Figura 11.87

11.3.34. Construcción de un Arco Escarzano

1. Trazamos (11.1.1) un segmento AB.
2. Construimos (11.1.2) la mediatriz del segmento AB.
3. Fijamos un punto $C \in m - \{M\}$, en donde M es el punto medio del segmento AB.
4. Trazamos el círculo $\mathrm{C}(C,|AC|)$.

El arco $\overset{\frown}{AB}$ del círculo $\mathrm{C}(C,|AC|)$ es conocido como *arco Escarzano*. ♣

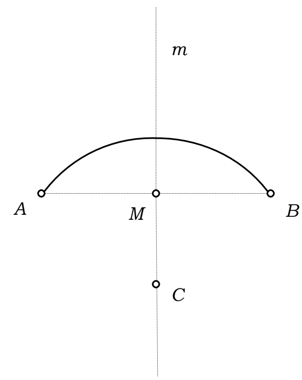


Figura 11.88

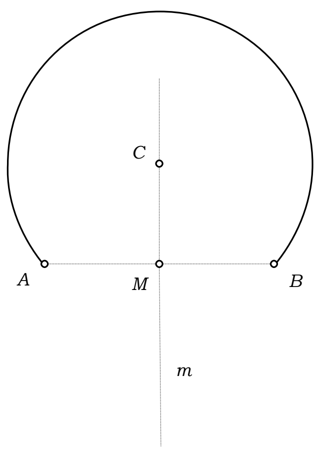


Figura 11.89

11.3.35. Construcción de un Arco Arábigo.

1. Trazamos (11.1.1) un segmento AB.
2. Trazamos (11.1.2) la mediatriz del segmento AB.
3. Fijamos un punto $C \in m - \{M\}$, en donde M es el punto medio del segmento AB.
4. Trazamos el círculo $\mathrm{C}(C,|AC|)$.

Al arco $\overset{\frown}{AB}$ del círculo $\mathrm{C}(C,|AC|)$ se le llama *arco arábigo*. ♣

11.3.36. Construcción de una Ojiva de Lanceta.

1. Trazamos (11.1.1) un segmento AB.
2. Construimos (11.1.1) un segmento CD tal que $AB \subseteq CD$ y $CA \cong BD$.
3. Trazamos el círculo $\mathrm{C}(C,|CB|)$.
4. Trazamos el círculo $\mathrm{C}(D,|AD|)$.

Tomamos a uno de los puntos de intersección de $\mathrm{C}(A,|AB|)$ y $\mathrm{C}(B,|AB|)$ y lo denotamos por E. La curva formada por los arcos $\overset{\frown}{AE}$ y $\overset{\frown}{EB}$ se llama *ojiva de lanceta*. ♣

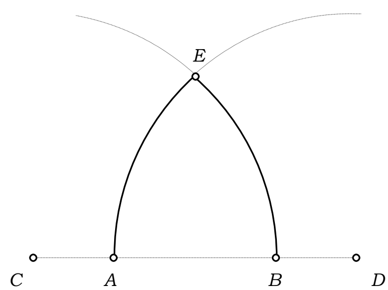


Figura 11.90

11.3.37. Construcción de un Arco Persa.

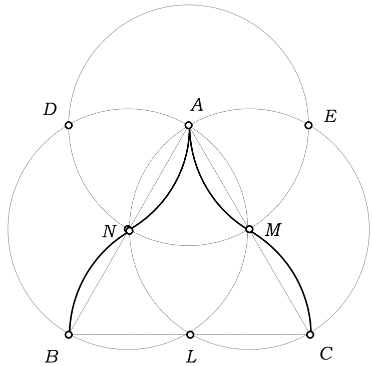


Figura 11.91

1. Construimos (11.2.2) un triángulo equilátero ΔABC cuyos lados tengan longitud $2a$.
2. Construimos (11.1.3) los puntos medios L, M y N de BC, AC y AB, respectivamente.
3. Trazamos el círculo $\mathcal{C}(L,a)$, el cual corta a AC y AB en los puntos M y N, respectivamente.
4. Trazamos los círculos $\mathcal{C}(M,a)$ y $\mathcal{C}(N,a)$.
5. Trazamos el círculo $\mathcal{C}(A,a)$. Sean D y E los puntos de intersección del círculo $\mathcal{C}(A,a)$ con los círculos $\mathcal{C}(N,a)$ y $\mathcal{C}(M,a)$, respectivamente, por supuesto diferentes de M y N.

La figura formada por los arcos $\overset{\frown}{BN}$, $\overset{\frown}{NA}$, $\overset{\frown}{AM}$ y $\overset{\frown}{MC}$ es conocida con el nombre de *arco persa*. ♣

11.3.38. Construcción de un Arco Apainelado de Tres Centros.

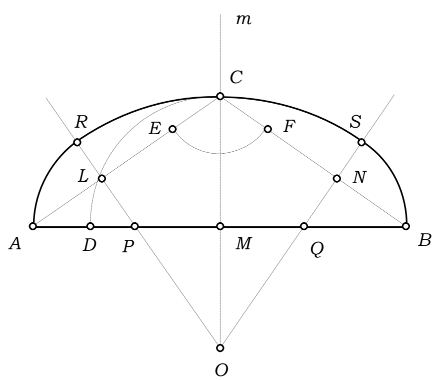


Figura 11.92

Sean AB un segmento y h un número real positivo.

1. Construimos (11.1.2) la mediatriz m del segmento AB y sea M el punto medio de AB (11.1.3).
2. Con centro en M, trazamos el círculo de radio h. Sean C y D los puntos de intersección de m y AM con dicho círculo, respectivamente (ver la figura 11.92).
3. Trazamos el círculo $\mathcal{C}(C,|AD|)$. Sean E y F puntos, donde este círculo corta a AC y BC, respectivamente.
4. Construimos (11.1.2) las mediatrices de los segmentos AE y BF, siendo L y N los puntos medios de AE y BF, respectivamente (11.1.3).

Es evidente que las mediatrices del cuarto inciso y m son concurrentes, digamos que en un punto O, esto es cierto porque estas rectas son la mediatrices del triángulo ΔCAB (8.3.26).

5. Sean P y Q los puntos de intersección de $\overleftrightarrow{OL}$ y AM, y $\overleftrightarrow{ON}$ y MB, respectivamente.
6. Trazamos el arco $\overset{\frown}{AR}$ de centro P y radio $|AP|$, en donde $R \in \overleftrightarrow{OL}$.
7. Trazamos el arco $\overset{\frown}{SB}$ de centro Q y radio $|QB|$, en donde $S \in \overleftrightarrow{ON}$.

Por construcción tenemos que $|AP| = |QB|$. Se le deja al lector, como un ejercicio, probar la igualdad

$$|OR| = |OC| = |OS|.$$

8. Trazamos el arco $\overset{\frown}{RCS}$ cuyo centro es O y cuyo radio es $|OC|$.

Nuestro *arco apainelado de tres centros* es la curva formada por los arcos $\overset{\frown}{AR}$, $\overset{\frown}{RCS}$ y $\overset{\frown}{SB}$. ♣

11.4. Construcciones de cuadriláteros.

11.4.1. Construcción. Construir un cuadrilátero conociendo dos de sus lados, el ángulo comprendido entre estos dos lados y los ángulos contiguos a dicho ángulo comprendido.

Sean a y d dos números reales positivos y $\angle\alpha$, $\angle\beta$ y $\angle\gamma$ tres ángulos no degenerados cuyas medidas suman un número menor que 180.

1. Construimos (11.1.11) un ángulo $\angle A$ con vértice A que sea congruente con el ángulo $\angle\alpha$.
2. Trazamos el círculo $C(A,a)$. Sea B el punto de intersección de este círculo con uno de los lados de $\angle A$.
3. Haciendo centro en A trazamos el círculo $C(A,d)$. Sea D el punto de intersección de $C(A,d)$ y el lado de $\angle A$ que no contiene a B.
4. Construimos(11.1.11) un ángulo $\angle B$ con vértice B que tengaun lado sobre una recta que contenga a un lado del ángulo $\angle A$, que su segundo lado esté en el mismo semiplano determinado por $\overleftrightarrow{AB}$ que contenga al punto D y que sea congruente con el ángulo $\angle\beta$.

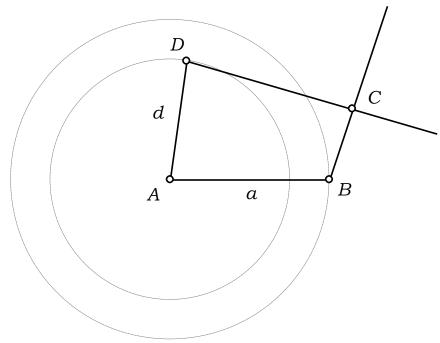


Figura 11.93

5. Construimos un ángulo $\angle D$ con vértice D tal que tenga un lado común con el ángulo $\angle A$, su segundo lado esté en el mismo semiplano determinado por $\overleftrightarrow{AD}$ que contenga al lado no común del ángulo $\angle A$, y que sea congruente con el ángulo $\angle\gamma$.

Sea C el punto de intersección del lado del ángulo $\angle B$ que no contenga al punto A, y del lado del ángulo $\angle D$ que no contenga a A. Tenemos entonces que $\square ABCD$ es el cuadrilátero requerido. ♣

11.4.2. Construcción. Construir un cuadrilátero conociendo dos de sus lados, el ángulo comprendido entre estos dos lados y dos ángulos, uno de los cuales es opuesto a dicho ángulo comprendido.

Sean a y d dos números reales positivos y $\angle\alpha$, $\angle\beta$ y $\angle\gamma$ tres ángulos no degenerados tales que la suma de sus medidas es menor que 180.

1. Por medio de la Construcción 11.1.11, trazamos un ángulo $\angle A$ con vértice A que sea congruente a $\angle\alpha$.
2. Trazamos el círculo $C(A,a)$ y sea B el punto de intersección de este círculo con uno de los lados de $\angle A$.
3. Construimos (11.1.11) un ángulo $\angle B$ con vértice B tal que tenga un lado sobre una recta que contenga a uno de los lados del ángulo $\angle A$, su segundo lado esté en el mismo semiplano determinado por $\overleftrightarrow{AB}$ que contenga al lado no común del ángulo $\angle A$ y que sea congruente con $\angle\beta$.
4. Trazamos el círculo $C(A,d)$ y etiquetamos con D al punto de intersección de $C(A,d)$ y el lado de $\angle A$ que no contiene a B.
5. Sobre la recta que contiene el lado del ángulo $\angle B$ que no contiene al punto A construimos un ángulo $\angle QOP$, como lo muestra la figura 11.94,que sea congruente con el ángulo $\angle\gamma$ (11.1.11).

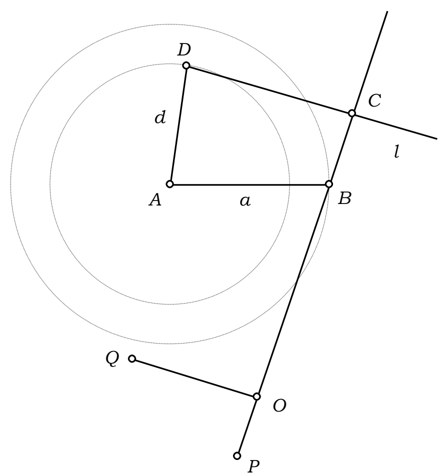


Figura 11.94

6. Haciendo uso de la Construcción 11.1.8, trazamos una recta l que pase por D y sea paralela a $\overleftrightarrow{OQ}$. La recta l corta $\overleftrightarrow{OB}$ en el punto C.

En el cuadrilátero $\square ABCD$ se cumple que $\angle\alpha \cong \angle A$, $\angle\beta \cong \angle B$, $\angle\gamma \cong \angle C$, $|AB| = a$ y $|AD| = d$. ♣

11.4.3. Construcción. Construir un cuadrilátero, conociendo un ángulo y las longitudes de sus cuatro lados.

Sean a, b, c y d cuatro números reales positivos y $\angle\alpha$ un ángulo no degenerado.

1. Construimos (11.1.11) un ángulo $\angle A$ con vértice A que sea congruente a $\angle\alpha$.
2. Trazamos el círculo $\mathrm{C}(A,a)$ que corte a uno de los lados del ángulo $\angle A$ en el punto B .
3. Haciendo centro en B, trazamos el círculo $\mathrm{C}(B,b)$.
4. Trazamos el círculo $\mathrm{C}(A,d)$ que corte al lado del ángulo $\angle A$ que no contiene al punto B en un punto que denotaremos por D.
5. Trazamos el círculo $\mathrm{C}(D,c)$.

Sea C el punto de intersección de los círculos $\mathrm{C}(B,b)$ y $\mathrm{C}(D,c)$ que está en el mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{AB}$ que contiene a D.

Obviamente $\square ABCD$ es el cuadrilátero requerido. ♣

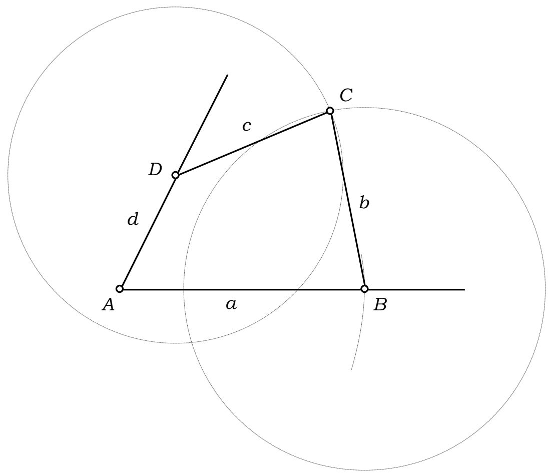


Figura 11.95

11.4.4. Construcción. Construir un cuadrilátero, conociendo tres de sus lados y los dos ángulos comprendidos entre estos tres lados.

Sean a, b y d tres números reales positivos y $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ dos ángulos no degenerados tales que la suma de sus medidas es menor que 180.

1. Construimos (11.1.1) un ángulo $\angle A$ con vértice A que sea congruente al ángulo $\angle\alpha$.
2. Con centro en el punto A trazamos el círculo de radio a. Sea B el punto de intersección del círculo $\mathrm{C}(A,a)$ y uno de los lados del ángulo $\angle A$.
3. Usando la Construcción 11.1.11, construimos otro ángulo $\angle B$ con vértice B, que tenga un lado sobre una recta que contenga a uno de los lados del ángulo $\angle A$, su segundo lado esté en el mismo semiplano determinado por $\overleftrightarrow{AB}$ que contenga al lado no común del ángulo $\angle A$ y que sea congruente con $\angle\beta$.
4. Con centro en B trazamos el círculo $\mathrm{C}(B,b)$.
5. Trazamos el círculo $\mathrm{C}(A,d)$.

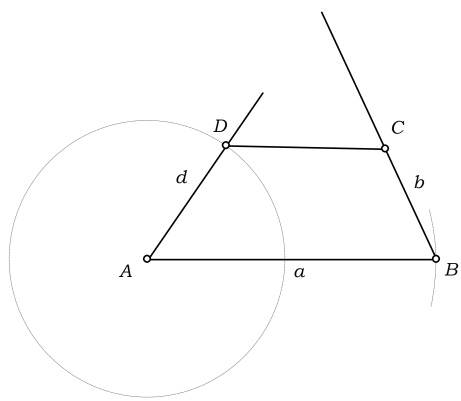


Figura 11.96

Sean C el punto de intersección del lado del ángulo $\angle B$ que no contenga al punto A y el círculo $\mathrm{C}(B,b)$, y D el punto de intersección del lado del ángulo $\angle A$ que no contenga al punto B y el círculo $\mathrm{C}(A,d)$. Entonces, $\square ABCD$ es el cuadrilátero deseado. ♣

Algunas de las construcciones que presentaremos a continuación se derivan de las anteriores, pero daremos construcciones alternativas cuando este sea el caso.

11.4.5. Construcción. Construir un paralelogramo tal que uno de sus ángulos sea congruente a un ángulo dado.

Sea $\angle\alpha$ un ángulo no degenerado.

1. Fijamos una recta l, y sobre ella fijamos dos puntos cualesquiera A y B.

2 Construimos (11.1.11) un ángulo $\angle BAD$ congruente al ángulo $\angle\alpha$ que tenga a A como su vértice y uno de sus lados esté sobre la recta l y pase por el punto B.

3. Por D trazamos una recta m paralela a l (11.1.8).

4. Por B trazamos una recta n paralela a $\overleftrightarrow{AD}$ (11.1.8), la cual corta a m en el punto C.

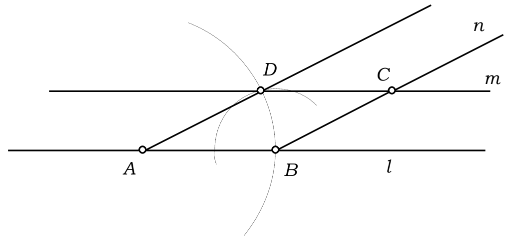


Figura 11.97

Claramente, el cuadrilátero $\square ABCD$ es un paralelogramo y se cumple la congruencia $\angle\alpha \cong \angle A$. ♣

11.4.6. Construcción. Construir un rectángulo dadas las longitudes de sus lados.

Sean a y b dos números reales positivos.

1. Según 11.1.11, podemos construir un ángulo recto $\angle XOY$.

2. Haciendo centro en A y con radio a, trazamos un círculo que corte a $\overrightarrow{AX}$ en el punto B.

3. Haciendo centro en A y con radio b, trazamos un segundo círculo que corte a $\overrightarrow{AY}$ en el punto D.

4. Por el punto B trazamos una recta l paralela a $\overrightarrow{AY}$ (11.1.8).

5. Por el punto D trazamos una recta m que sea paralela a $\overrightarrow{AX}$ (11.1.8). Esta recta corta a l en un punto que será denotado por C.

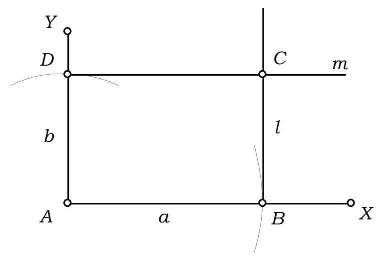


Figura 11.98

Tenemos entonces que $\square ABCD$ es un rectángulo, pues sus cuatro ángulos son rectos y además se cumplen las identidades $|AB| = |DC| = a$ y $|AB| = |DC| = a$. ♣

Aunque la construcción siguiente es un caso particular de la anterior (poniendo $a = b$), daremos una construcción diferente.

11.4.7. Construcción. Construir un cuadrado, dada la longitud de sus lados.

Sea $a > 0$ un número real.

1. Construimos un segmento AB de longitud a.

2. Usando la Construcción 11.1.4, trazamos una recta que sea perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ en el punto A.

3. Con centro en A trazamos un primer círculo de radio a, que corte a la recta perpendicular del paso anterior en el punto D.

4. Trazamos el círculo $C(D,a)$.

5. Trazamos el círculo $C(B,a)$, el cual corta al círculo $C(D,a)$ en el punto C.

Es evidente que todos los lados del cuadrilátero $\square ABCD$ tienen longitud igual a a. Por lo tanto, $\square ABCD$ es un cuadrado de lado a. ♣

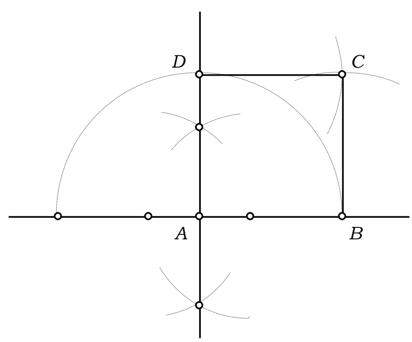


Figura 11.99

11.4.8. Construcción. Construir un cuadrado conociendo la longitud de sus diagonales.

Sea d un número real positivo.

1. Trazamos dos rectas l y m que sean perpendiculares en el punto O (Construcción 11.1.4).

2. Con centro en el punto O trazamos un círculo de radio $\frac{d}{2}$.

Sean A y C los puntos de intersección del círculo $\mathrm{C}(O, \frac{d}{2})$ y la recta m, y B y D los puntos de intersección del círculo $\mathrm{C}(O, \frac{d}{2})$ con la recta l. Directamente de la construcción, vemos que $\square ABCD$ es el cuadrado solicitado. ♣

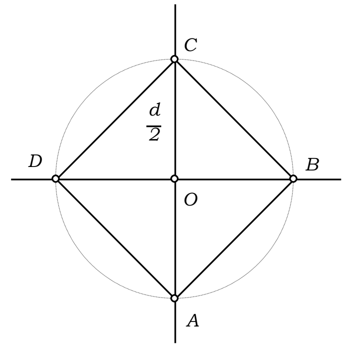


Figura 11.100

11.4.9. Construcción. Construir un rectángulo, conociendo la longitud de sus diagonales y la longitud de uno de sus lados.

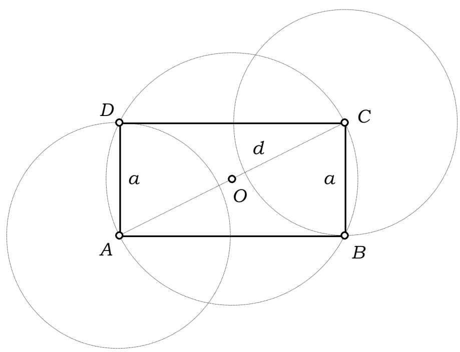


Figura 11.101

Sean d y a dos números reales positivos tales que $a < d$.

1. Trazamos un círculo $\mathrm{C}(O, \frac{d}{2})$.

2. Fijamos un diámetro AC de $\mathrm{C}(O, \frac{d}{2})$.

3. Construimos los círculos $\mathrm{C}(A,a)$ y $\mathrm{C}(C,a)$, los cuales cortan al círculo $\mathrm{C}(O, \frac{d}{2})$ en los puntos D y B, respectivamente.

Consideremos el cuadrilátero $\square ABCD$. El Teorema 9.5.2 nos asegura que los ángulos $\angle CBA$ y $\angle ADC$ son rectos. Por ello, ΔABC y ΔCDA son triángulos rectángulos. Según el criterio 3.6.45, hallamos que $\Delta ABC \cong \Delta CDA$. En consecuencia,

$$\angle ACB \cong \angle CAD \text{ y } \angle BAC \cong \angle DCA.$$

De aquí se sigue que

$$m(\angle DCB) = m(\angle ACB) + m(\angle DCA) = m(\angle CAD) + m(\angle DCA) = 90.$$

Lo cual quiere decir que $\angle DCB$ es un ángulo recto. Similarmente, se prueba que $\angle CBA$ es también un ángulo recto. Por lo tanto, $\square ABCD$ es un rectángulo cuyas diagonales tienen longitud d y $|AD| = |BC| = a$. ♣

11.4.10. Construcción. Construir un paralelogramo, conociendo las longitudes de sus diagonales y la medida de uno de los ángulos que ellas forman.

Sean e y f las longitudes de las diagonales del paralelogramo y $\angle\alpha$ uno de los ángulos que forman.

1. Trazamos dos rectas l y m secantes en el punto O tales que uno de los ángulos que forman es congruente a $\angle\alpha$ (construcción 11.1.11).

2. Trazamos el círculo $\mathrm{C}(O, \frac{e}{2})$. Este círculo corta a l en los puntos A y C.

3. Con centro en O, trazamos el círculo de radio $\frac{f}{2}$ y sean B y D los puntos de intersección de este círculo con la recta m.

Por el Teorema 5.3.1, $\square ABCD$ es el paralelogramo deseado. ♣

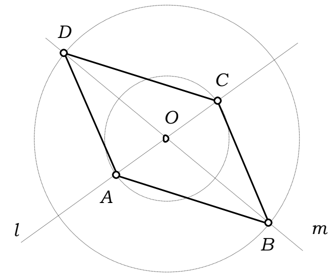


Figura 11.102

11.4.11. Construcción. Construir un trapecio dada una altura, la longitud de uno de sus lados paralelos y las longitudes de sus diagonales.

Sean h la altura del trapecio, a la longitud de uno de sus lados paralelos, y e y f las longitudes de sus diagonales.

1. Construimos un segmento AB de longitud a (11.1.1).

2. Construimos (11.1.5) una recta l paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ tal que $d(l, \overleftrightarrow{AB}) = h$.

3. Con centro en A trazamos el círculo de radio e, el cual corta a l en el punto C (como puede haber dos posibilidades para la elección de este punto, tomamos el que está más cercano a B).

4. Trazamos el círculo $\mathrm{C}(B,f)$, el cual corta a l en el punto D (en este caso también hay dos posibilidades para la elección de este punto, tomamos aquel punto que está más cercano a A).

Afirmamos que $\square ABCD$ es el trapecio deseado. ♣

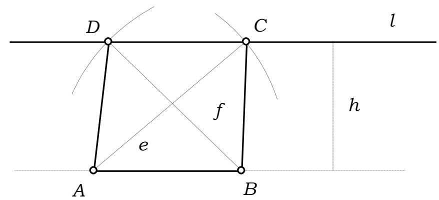


Figura 11.103

11.4.12. Construcción. Construir un triángulo que tenga la misma área que un cuadrilátero dado.

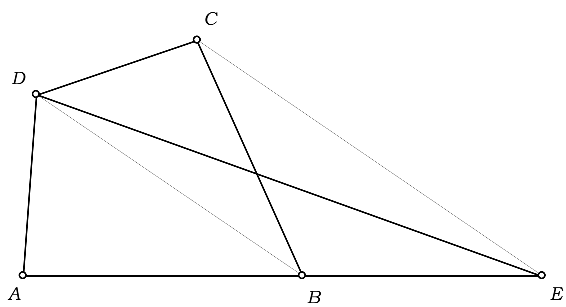


Figura 11.104

Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero.

1. Unimos B y D con un segmento.

2. Mediante la construcción 11.1.8, por el vértice C trazamos una recta l paralela a DB que corte a $\overleftrightarrow{AB}$ en el punto E.

Tenemos entonces que

$$are(\square ABCD) = are(\Delta DAB) + are(\Delta BCD).$$

Pero los triángulos ΔBCD y ΔBED tienen un lado común que es DB y la altura correspondiente congruente. De donde vemos que $are(\Delta BCD) = are(\Delta BED)$. Por lo tanto,

$$are(\square ABCD) = are(\Delta DAB) + are(\Delta BED) = are(\Delta DAE). \clubsuit$$

11.4.13. Construcción. Construir un cuadrado que tenga la misma área que un rectángulo dado.

Sea $\square ABCD$ un rectángulo cuyos lados tengan longitudes a y b.

1. Con centro en B y radio b, trazamos un primer círculo que corte a $\overleftrightarrow{AB}$ en el punto E, tal y como se muestra en la figura 11.105.
2. Trazamos un segundo círculo de diámetro AE (11.3.1).
3. Prolongamos BC hasta que corte al segundo círculo en un punto que etiquetamos como F.

Por el Teorema 8.1.2 (4), sabemos que

$$|AB||BE| = |BF|^2.$$

Por lo tanto, el cuadrado requerido es aquél que tenga a BF como uno de sus lados. ♣

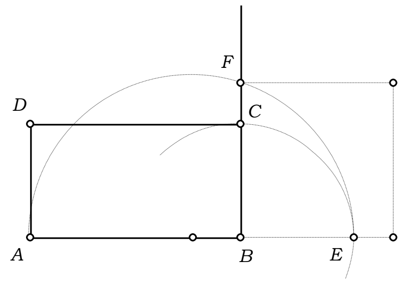


Figura 11.105

11.4.14. Construcción. Construir un cuadrilátero cíclico, conociendo uno de sus ángulos, la longitud de un lado adyacente a dicho ángulo y las longitudes de sus diagonales.

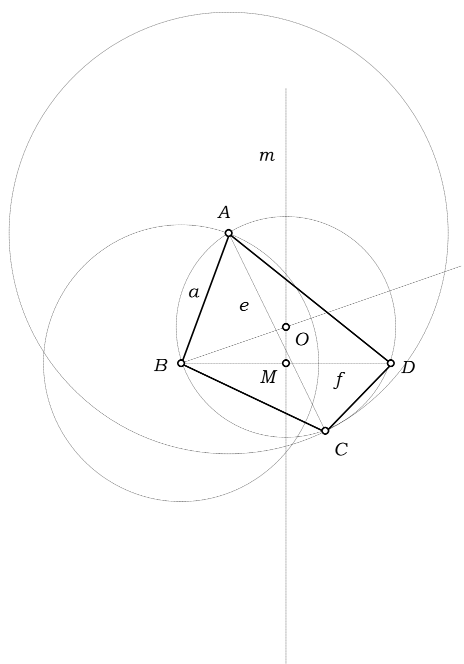


Figura 11.106

Sean $\angle\alpha$, a, e y f las partes conocidas del cuadrilátero.

1. Construimos un segmento BD de longitud f (Construcción 11.1.1).
2. Trazamos la mediatriz m del segmento BD (11.1.2). Sea M el punto medio del segmento BD.
3. En este paso, supondremos que $m(\angle\alpha) \leq 90$ (de otro modo, consideramos su ángulo suplementario $\angle 180 - \angle\alpha$). Construimos (11.1.11) un ángulo con vértice B y lado $\overrightarrow{BD}$ cuya medida sea $90 - m(\angle\alpha)$ y que corte a m en el punto O. Observamos que $m(\angle BDO) = 90 - m(\angle\alpha)$. De aquí hallamos que $\angle BOM \cong \angle\alpha$ y $\angle MOD \cong \angle\alpha$, puesto que $\Delta OBM \cong \Delta ODM$.
4. Trazamos el círculo $C(O,r)$, en donde $r = |OB| = |OD|$.
5. Trazamos el círculo $C(B,a)$. Sea A el punto donde este círculo corta al círculo $C(O,r)$ en el semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{BD}$ que contiene al punto O.
6. Haciendo centro en el punto A, trazamos el círculo de radio e. Sea C el punto en donde dicho círculo corta al círculo $C(O,r)$ en el semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{BD}$ que no contenga al punto O.

Verifiquemos que el cuadrilátero $\square ABCD$ cumple con todas las condiciones dadas. En efecto, del Teorema 9.5.6 hallamos que

$$m(\angle A) = m(\angle BAD) = \frac{m(\angle BOD)}{2} = m(\angle\alpha).$$

Por ello, $\angle A \cong \angle\alpha$. De la construcción deducimos las identidades

$$|AB| = a,\ |AC| = e \text{ y } |BD| = f. \ ♣$$

11.4.15. Construcción Trazar una elipse tangente a los cuatro lados de un rombo dado.

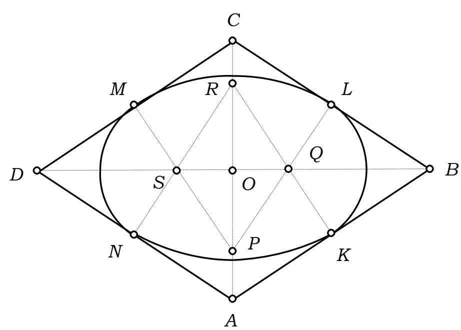


Figura 11.107

Sea $\square ABCD$ un rombo.

1. Construimos (11.1.2) las mediatrices de los lados AB, BC, CD y DA, siendo K, L, M y N los puntos medios de AB, BC, CD y DA, respectivamente.

Sabemos, por el Problema 5.365, que las mediatrices de BC y CD se cortan en un punto $P \in AC$, las mediatrices de BC y AB se cortan en un punto $Q \in BD$, las mediatrices de AB y DA se cortan en un punto $R \in AC$ y las mediatrices de DC y DA se cortan en un punto $S \in BD$.

2. Trazamos el arco $\overset{\frown}{NM}$ de centro S y radio $|SN|$.
3. Trazamos el arco $\overset{\frown}{ML}$ de centro P y radio $|PM|$.
4. Trazamos el arco $\overset{\frown}{LK}$ de centro Q y radio $|QL|$.
5. Trazamos el arco $\overset{\frown}{KN}$ de centro R y radio $|RK|$.

Los arcos $\overset{\frown}{NM}$, $\overset{\frown}{ML}$, $\overset{\frown}{LK}$ y $\overset{\frown}{KN}$ forman la elipse solicitada. ♣

11.5. Algunas construcciones relacionadas con segmentos

11.5.1. Construcción. Construir la media geométrica de dos números positivos.

Sean a y b dos números positivos.

1. Sobre una recta fija l construimos segmentos AB y BC tales que $|AB| = a$ y $|BC| = b$ (Construcción 11.1.1).
2. Teniendo a AC como diámetro trazamos un semicírculo (11.3.1).
3. Trazamos (11.1.4) una recta perpendicular a l que corte al semicírculo en el punto D.

Pongamos $x = |BD|$. Según el Teorema 9.5.2, tenemos que el ángulo $\angle ADC$ es recto. Así, ΔDAC es un triángulo rectángulo con hipotenusa AC. Se sigue del Teorema 8.1.2 (4) que $x^2 = |DB|^2 = |AB||BC| = ab$. ♣

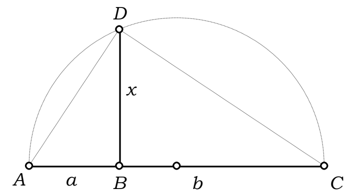


Figura 11.108

11.5.2. Construcción. Sean AB un segmento y C un punto entre A y B. Encontrar un punto $D \in AB$ tal que
$$|AD|^2 = |AC||AB|.$$

1. Trazamos (11.3.1) un semicírculo con diámetro AB.
2. Construimos (11.1.4) una recta l perpendicular $\overleftrightarrow{AB}$ en el punto C que corte al semicírculo en el punto E.
3. Con centro en A y radio $|AE|$, trazamos un círculo que corte a AB en el punto D.

Por el Teorema 9.5.2, sabemos que ΔEAB es un triángulo rectángulo en $\angle AEB$. De acuerdo con el Teorema 8.1.2 (1), $\dfrac{|AE|}{|AB|} = \dfrac{|AC|}{|AE|}$ y, por tanto, tenemos que $\dfrac{|AD|}{|AB|} = \dfrac{|AC|}{|AD|}$.

De donde se sigue la igualdad $|AD|^2 = |AC||AB|$. ♣

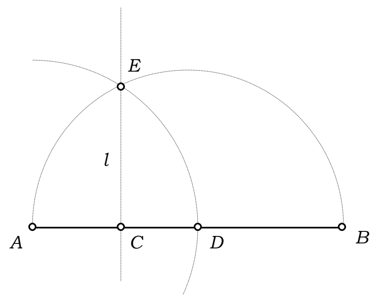


Figura 11.109

11.5.3. Definición. Se llama *división áurea* a la división de un segmento en dos partes tales que la longitud de la mayor es la media geométrica de la longitud de la menor y de la longitud del segmento original.

A la división áurea también se le conoce como la media y extrema razón.

Supongamos que AB es un segmento cualquiera y que el punto $C \in AB$ divide al segmento áureamente. En otras palabras, $\dfrac{|AB|}{|AC|} = \dfrac{|AC|}{|CB|}$. Supongamos que $|AC| = x$ es la división áurea mayor. Es decir, $x > a - x = |CB|$, en donde $a = |AB|$. Al sustituir estos valores, nos encontramos con las relaciones

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$$
$$\frac{a-x}{x} = \frac{x}{a}$$
$$\frac{a-x}{x} + \frac{x}{x} = \frac{x}{a} + \frac{a}{a}$$
$$\frac{a}{x} = \frac{x+a}{a}.$$

De aquí, veremos que el número áureo ϕ está relacionado con la división áurea de un segmento. Efectivamente, si $x = 1$, entonces tenemos que $a^2 - a - 1 = 0$. Sabemos que la solución positiva a esta ecuación es el número áureo $a = \phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

11.5.4. Teorema. Si x es la división áurea más grande de un segmento AB, entonces $a - x$ es la división áurea de x.

Prueba: Sabemos que

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$$
$$\frac{a}{x} - \frac{x}{x} = \frac{x}{a-x} - \frac{a-x}{a-x}$$
$$\frac{a-x}{x} = \frac{x-(a-x)}{a-x}$$
$$\frac{x}{a-x} = \frac{a-x}{x-(a-x)}.$$

Lo cual significa que $a - x$ es la división áurea de x. ♣

11.5.5. Construcción. Construcción de la división áurea de un segmento.

Sea AB un segmento y pongamos $a = |AB|$.

1. Construimos un segmento AC de longitud $2a$ tal que B sea el punto medio de AC (Construcción 11.1.1).
2. Construimos (11.1.3) el punto medio P del segmento BC.
3. Trazamos un semicírculo con diámetro AC (11.3.1).
4. Trazamos (11.1.4) la recta l perpendicular a AC en el punto B que corte al semicírculo en el punto D.
5. Haciendo centro en P y con radio $|PD|$ trazamos un círculo que corte a AB en el punto E.

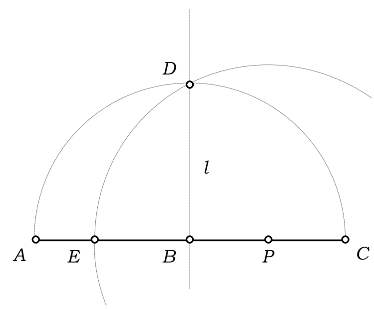


Figura 11.110

Pongamos $|EB| = x$. Sabemos que $|BP| = \dfrac{a}{2}$. De acuerdo con el Teorema 8.1.2 (4), hallamos que

$$a^2 = |EB|(|EP| + |BP|) = |EB|(|EB| + |BP| + |BP|) = x(x + \frac{a}{2} + \frac{a}{2}) = x(x + a).$$

De donde se sigue la identidad $\dfrac{x}{a} = \dfrac{a}{x+a}$. Esto prueba que AE y EB es la división áurea del segmento AB. ♣

A continuación, calculamos el valor numérico de la división áurea de un segmento cualquiera.

11.5.6. Teorema. La división áurea más grande de un segmento AB está dado por $x = \dfrac{a(\sqrt{5}-1)}{2}$, en donde $a = |AB|$.

Prueba: Por suposición, sabemos que $\dfrac{x}{a} = \dfrac{a}{x+a}$. Equivalentemente, $x^2 + ax - a^2 = 0$. La única raíz positiva de esta ecuación es el número

$$x = \frac{-a+\sqrt{a^2+4a^2}}{2} = \frac{-a+a\sqrt{5}}{2} = \frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}. \clubsuit$$

El número $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ usualmente se denota por el símbolo ϕ'. Se sabe que ϕ' es la solución negativa de la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$, $\frac{1}{\phi} = -\phi'$, $\phi + \phi' = 1$ y $\phi\phi' = -1$. La serie de libros en francés [l-89], [l-165] y [l-312] está dedicada a resumir las propiedades y relaciones del número áureo ϕ.

11.5.7. Construcción. Usando solamente círculos, dividir un segmento áureamente.

Sea AB un segmento y definimos $a = |AB|$.

1. Trazamos un primer círculo de radio $\frac{a}{2}$ y centro O que sea tangente a la recta $\overleftrightarrow{AB}$ en el punto B (Problema 11.307).

2. Sean C y D los puntos de intersección de la recta $\overleftrightarrow{AO}$ con el círculo $\mathrm{C}(O, \frac{a}{2})$.

3. Teniendo a A como centro y radio $|AC|$ trazamos un segundo círculo que corte a AB en el punto E.

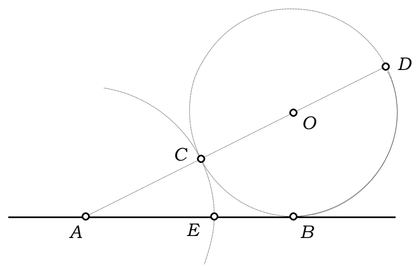


Figura 11.111

Según el Teorema 9.6.1, la potencia de A con respecto al círculo $\mathrm{C}(O, \frac{a}{2})$ es $|AC||AD| = |AB|^2 = a^2$. Como $|AC| = |AE|$, vemos que $|AE||AD| = a^2$ y, por consiguiente,

$$\frac{|AD|}{a} = \frac{a}{|AE|}$$

$$\frac{|AE|}{a} = \frac{|AD|-a}{a} = \frac{a-|AE|}{|AE|} = \frac{|EB|}{|AE|}.$$

Así, queda probado que el punto E divide áureamente al segmento AB. ♣

11.5.8. Construcción. Construir el número ϕ.

1. Construimos (11.1.1) un segmento AB de longitud 1.

2. Construimos (11.1.4) una recta l perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ en el punto A.

3. Trazamos el círculo $\mathrm{C}(A,1)$ y fijamos uno de los puntos, digamos C, en donde este círculo corta a la recta l.

4. Construimos (11.3.1) el círculo $\mathrm{C}(O, \frac{1}{2})$ de diámetro AC.

Sea D el punto de intersección de $\mathrm{C}(O, \frac{1}{2})$ y $\overleftrightarrow{OB}$ tal que D y B están en diferentes semiplanos determinados por l. Por construcción, sabemos que $|DB| = |DO| + |OB| = \frac{1}{2} + |OB|$. De acuerdo con el Teorema de Pitágoras (8.5.1), obtenemos que

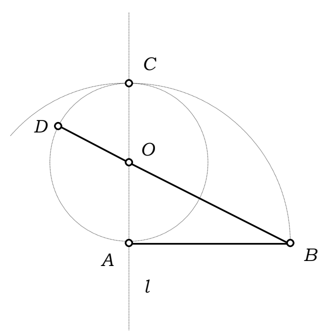


Figura 11.112

$$|OB|^2 = |OA|^2 + |AB|^2 = (\frac{1}{2})^2 + 1$$

$$|OB| = \sqrt{\frac{1}{4}+1} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Por lo tanto, $|DB| = \frac{1}{2} + |OB| = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$. ♣

11.5.9. Construcción. Construir el número ϕ'.

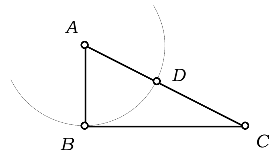


Figura 11.113

1. Por medio de la Construcción 11.2.11, trazamos un triángulo rectángulo ΔABC con hipotenusa AC tal que $|BC| = 1$ y $|AB| = \frac{1}{2}$.

2. Trazamos el círculo $C(A, \frac{1}{2})$.

Sea D el punto de intersección del círculo $C(A, \frac{1}{2})$ y AC. Por el Teorema de Pitágoras (8.5.1), sabemos que

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 = (\frac{1}{2})^2 + 1 = \frac{5}{4}$$

$$|DC| = |AC| - |AD| = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\phi} = \phi'.♣$$

A continuación, describimos otra construcción de la división áurea ideada por K. Hofstetter [a-76].

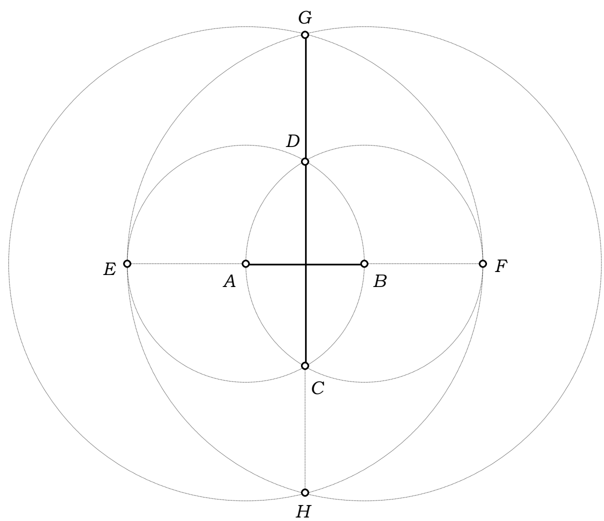


Figura 11.114

Sea AB un segmento arbitrario.

1. Trazamos el círculo $C(A,|AB|)$. Sea E el punto de intersección de este círculo y la recta $\overleftrightarrow{AB}$ distinto de B.

2. Trazamos el círculo $C(B,|AB|)$. Sean F el punto de intersección de este círculo y la recta $\overleftrightarrow{AB}$ distinto de A, y C y D los puntos de intersección de los círculos $C(A,|AB|)$ y $C(B,|AB|)$.

3. Trazamos el círculo C(A,$|AF|$).

4. Trazamos el círculo C(B,$|BE|$). Sean G y H los puntos de intersección de los círculos C(A,$|AF|$) y C(B,$|BE|$).

Para nuestros fines, supongamos que $|AB| = 2$. Del Problema 9.335 sabemos que los puntos G, D, C y H son colineales. Por otra parte, el Problema 9.328 nos asegura que $|CD| = 2\sqrt{3}$ y $|CG| = \sqrt{15} + \sqrt{3}$. De donde se sigue la relación

$$\frac{|CG|}{|CD|} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \phi.$$

Es decir, D divide al segmento CG áureamente.

Otras construcciones de la división áurea de un segmento similares a la anterior, se discuten en el artículo [a-77].

11.5.10. Construcción. Sean A y B dos puntos cualesquiera sobre una recta l. Encontrar un punto $P \in AB$ tal que la suma

$$|PA|^2 + 2|PB|^2$$

sea mínima.

Pongamos $a = |AB|$ y $x = |PA|$. Entonces, tenemos que

$$\begin{gathered}
|PA|^2 + 2|PB|^2 = p \\
x^2 + 2(a-x)^2 = p \\
x^2 + 2a^2 - 4ax + 2x^2 = p \\
3x^2 + 2a^2 - 4ax - p = 0 \\
x = \frac{4a \pm \sqrt{16a^2 - 12(2a^2 - p)}}{6}.
\end{gathered}$$

Para que exista una solución se debe cumplir que

$$\begin{gathered}
0 \leq 16a^2 - 12(2a^2 - p) \\
12(2a^2 - p) \leq 16a^2 \\
3(2a^2 - p) \leq 4a^2 \\
6a^2 - 3p \leq 4a^2 \\
2a^2 \leq 3p \\
\frac{2}{3}a^2 \leq p.
\end{gathered}$$

Por consiguiente, la solución mínima debe satisfacer la igualdad $p = \frac{2}{3}a^2$. De donde vemos que $x = \frac{2a}{3}$. La Construcción 11.1.1 nos garantiza la construcción, con regla y compás, de un segmento de longitud $\frac{2a}{3}$. Así que P es el punto del segmento AB que satisface la identidad

$$|PA| = \frac{2a}{3}. \clubsuit$$

11.5.11. Construcción. Sean A, O y B tres puntos consecutivos. Encontrar un punto $X \in \overleftrightarrow{AB}$ tal que si M es el punto medio del segmento XB, entonces

$$|OA| = \frac{|AM|}{4}.$$

Pongamos $a = |OA|$, $b = |OB|$ y $x = |OX|$. Consideremos dos posibles casos:

Caso I. El punto O precede a X sobre la recta $\overleftrightarrow{AB}$. Por el Problema 1.321 (b), sabemos que

$$|OM| = \frac{|OX| + |OB|}{2} = \frac{x+b}{2}.$$

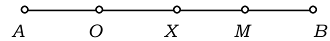


Figura 11.115

De aquí obtenemos que

$$|AM| = |AO| + |OM| = a + \frac{x+b}{2} = \frac{2a+b+x}{2}.$$

$$2|AM| = 2a + b + x.$$

Pero queremos que se cumpla la igualdad $|AM| = 4|OA| = 4$. Así que para esto, se debe cumplir la relación

$$8a = 2a + b + x$$

$$6a = b + x$$

$$x = 6a - b.$$

De aquí vemos que el punto X que buscamos está a distancia $6a - b$ del punto O.

Caso II. El punto X precede a O sobre la recta $\overleftrightarrow{AB}$. De nueva cuenta por el Problema 1.321 (b), tenemos que

$$|OM| = \frac{|OB| - |OX|}{2} = \frac{b-x}{2}.$$

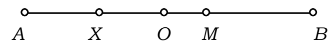


Figura 11.116

En consecuencia,

$$|AM| = |AO| + |OM| = a + \frac{b-x}{2} = \frac{2a+b-x}{2}.$$

Como en el caso anterior, de esta última igualdad llegamos a que

$$8a = 2a + b - x$$

$$6a = b - x$$

$$x = b - 6a.$$

Por lo tanto, nuestro punto X está a distancia $6a - b$ del punto O. ♣

11.6. Construcciones de las medias de dos números reales positivos

Primero recordaremos las definiciones de las medias de dos números reales positivos.

11.6.1. Definición. Sean a y b dos números reales positivos.

1. La *media geométrica* de a y b es el número $\sqrt{ab} = G(a,b)$.
2. La *media aritmética* de a y b es el número $\frac{a+b}{2} = A(a,b)$.
3. La *media armónica* de a y b es el número $\frac{2ab}{a+b} = H(a,b)$.
4. La *raíz media cuadrada* de a y b es el número $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = R(a,b)$.
5. [a-108] La *raíz media armónica* de a y b es el número $\sqrt{\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}} = RH(a,b)$.

En esta sección, daremos construcciones con regla y compás de las medias de dos números reales positivos. Describiremos algunas de sus interpretaciones geométricas y estableceremos algunas de sus relaciones. Empezamos con las interpretaciones geométricas hechas por Eli Maor [a-108].

Damos un rectángulo con lados a y b.

Figura 11.117

1. Si se quiere construir un cuadrado de lado x y equivalente al rectángulo dado, entonces debemos tener la igualdad $ab = x^2$. Es decir, $x = \sqrt{ab}$ es la media geométrica de a y b.

2. Si queremos construir un cuadrado de lado x que tenga el mismo perímetro que el rectángulo dado, entonces $2(a + b) = 4x$. De donde vemos que $x = \dfrac{a+b}{2}$ tendría que ser la media aritmética de a y b.

3. Si se desea construir un cuadrado de lado x tal que su área y perímetro estén en proporción con el área y perímetro del rectángulo dado, entonces $\dfrac{ab}{2(a+b)} = \dfrac{x^2}{4x}$. Así que $x = \dfrac{2ab}{a+b}$ sería la media armónica de a y b.

4. Si deseamos construir un cuadrado de lado x que tenga la misma diagonal que el rectángulo dado, entonces se debe cumplir que $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2}\,x$. Por lo cual, $x = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ sería la raíz media cuadrada de a y b.

5. Si se construye un cuadrado de lado x tal que su área y su diagonal estén en proporción con el área y la diagonal del rectángulo dado, entonces $\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{x^2}{\sqrt{2}x}$. Como resultado de esto, tenemos que $x = \sqrt{\dfrac{2a^2b^2}{a^2+b^2}}$ sería la raíz media armónica de a y b.

11.6.2. Construcción. Dados dos números reales positivos a y b construir su media geométrica, su media aritmética, su media armónica, su raíz media cuadrada y su raíz media armónica.

Sin perder generalidad, supongamos que $b \geq a$. Daremos la construcción sugerida por K. Iles y L. J. Wilson en su artículo [a-82], y por J. Hung Wei [a-79]:

1. Construimos un segmento AB de longitud $a + b$, y sobre él ubicamos un punto C tal que $|AC| = a$ y $|CB| = b$ (11.1.1).
2. Trazamos (11.3.1) un semicírculo de diámetro AB y centro O.
3. Construimos (11.1.4) la recta perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ en el punto C que corte al semicírculo en el punto P.
4. Construimos (11.1.7) la proyección Q del punto C sobre el segmento PO.
5. Construimos (11.1.4) la recta perpendicular a PO en el punto O, y sobre ella ubicamos (11.1.1) un punto M tal que $|OM| = \dfrac{b-a}{2}$.
6. Sea N la proyección del punto Q sobre el segmento PM (11.1.7).

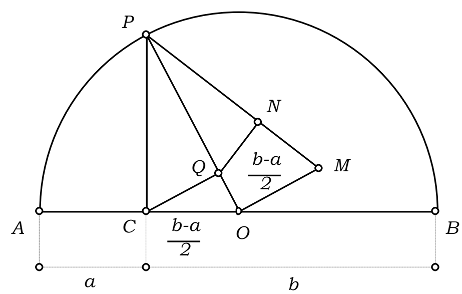


Figura 11.118

Observamos que $|CO| = \dfrac{b-a}{2}$ y $|PO| = \dfrac{a+b}{2}$. Del Teorema 8.1.2 (4) hallamos que

$$|PC|^2 = |AC||CB| = ab$$
$$|PC| = \sqrt{ab}\,.$$

Según el Teorema 8.1.2 (1), en el triángulo rectángulo ΔPCO se cumple la igualdad $|PC|^2 = |PQ||PO|$. Pero esto implica que

$$|PQ| = \frac{|PC|^2}{|PO|} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2ab}{a+b}.$$

Consideremos ahora los triángulos rectángulos ΔPOM y ΔPNQ. En el primero de ellos se cumple, por el Teorema de Pitágoras (8.5.1), la identidad

$$|PM|^2 = |OM|^2 + |PO|^2 = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{2}$$
$$|PM| = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\,.$$

Como los triángulos rectángulos ΔPOM y ΔPNQ tienen un ángulo congruente ($\angle PMO \cong \angle NQP$), el criterio 8.1.9 nos asegura el cumplimiento de la semejanza $\Delta POM \sim \Delta PNQ$. En consecuencia, $\frac{|PQ|}{|PM|} = \frac{|PN|}{|PO|}$. Por lo tanto,

$$|PN| = \frac{|PQ||PO|}{|PM|} = \frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{2ab}{a+b}\right)}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}} = \sqrt{\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}}\,. \clubsuit$$

11.6.3. Teorema. Dados dos números reales positivos a y b, su media geométrica, su media aritmética, su media armónica, su raíz media cuadrada y su raíz media armónica satisfacen las desigualdades

$$\sqrt{\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}} \le \frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\,.$$

La igualdad se da si y solo si $a = b$.

Prueba: Basándonos en la figura 11.118 y usando el Corolario 4.4.6, obtenemos las desigualdades

$$|PN| \le |PQ| \le |PC| \le |PO| \le |PM|.$$

De donde se siguen de manera directa las desigualdades

$$\sqrt{\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}} \le \frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\,.$$

No es difícil ver que la igualdad se da cuando $a = b$. Supongamos que $\sqrt{\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. Entonces

$$\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2}{2}$$
$$4a^2b^2 = (a^2+b^2)^2$$
$$2ab = a^2+b^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = 0$$
$$a = b. \clubsuit$$

A. Schild [a-146] encontró las siguientes relaciones entre las medias y ciertos ángulos.

11.6.4. Teorema. Sean a y b dos números reales positivos. Entonces, se cumplen las identidades:

$$G(a,b) = A(a,b)\operatorname{sen}\angle POC,$$
$$H(a,b) = A(a,b)(\operatorname{sen}\angle POC)^2,$$
$$R(a,b) = A(a,b)\operatorname{sen}\angle PMO \text{ y}$$
$$RH(a,b) = H(a,b)\operatorname{sen}\angle PMO,$$

los ángulos en cuestión se localizan en la figura 11.118.

Prueba: Veamos la demostración de estas relaciones, basándonos en la figura 11.118:
Sabemos que se cumple la igualdad $\operatorname{sen}\angle POC = \dfrac{|PC|}{|PO|}$ y, por ello, $|PC| = |PO|\operatorname{sen}\angle POC$. Es decir, $G(a,b) = A(a,b)\operatorname{sen}\angle POC$. Como $\operatorname{sen}\angle QCO = \operatorname{sen}\angle POC = \dfrac{|PQ|}{|PC|}$, hallamos las identidades $|PQ| = |PC|\operatorname{sen}\angle POC = |PO|(\operatorname{sen}\angle POC)^2$ y, por consiguiente, $H(a,b) = A(a,b)(\operatorname{sen}\angle POC)^2$. Ya que $\operatorname{sen}\angle PMO = \dfrac{|PO|}{|PM|}$, se obtiene que $|PM| = |PO|\operatorname{sen}\angle PMO$. Por lo cual, $R(a,b) = A(a,b)\operatorname{sen}\angle PMO$. Por último, sabemos que $\operatorname{sen}\angle NQP = \operatorname{sen}\angle PMO = \dfrac{|PN|}{|PQ|}$ y, por lo tanto, $|PN| = |PQ|\operatorname{sen}\angle PMO$. Como resultado de esta se obtiene la igualdad $RH(a,b) = H(a,b)\operatorname{sen}\angle PMO$.♣

El siguiente resultado se menciona en los artículos [a-104] y [a-151].

11.6.5. Teorema. Sean $\square ABCD$ un trapecio con $AB \parallel CD$ y O el punto de intersección de sus diagonales. Si $M \in BC$ y $N \in AD$ satisfacen que $O \in MN$ y $MN \parallel AB$, entonces $|MN|$ es la media armónica de $|AB|$ y $|CD|$.

Prueba: Según el Teorema 6.2.5, sabemos que $\Delta DNO \sim \Delta DAB$ y $\Delta AON \sim \Delta ACD$. De aquí obtenemos las identidades

$$\frac{|NO|}{|AB|} = \frac{|DN|}{|DA|} \text{ y } \frac{|NO|}{|DC|} = \frac{|AN|}{|DA|}.$$

Por consiguiente,

$$\frac{|NO|}{|AB|} + \frac{|NO|}{|DC|} = \frac{|DN|}{|DA|} + \frac{|AN|}{|DA|} = \frac{|DN|+|AN|}{|DA|} = \frac{|DA|}{|DA|} = 1$$

$$|NO|\left(\frac{|}{|AB|} + \frac{1}{|DC|}\right) = |NO|\frac{|AB|+|DC|}{|AB||DC|} = 1$$

$$|NO| = \frac{|AB||DC|}{|AB|+|DC|}.$$

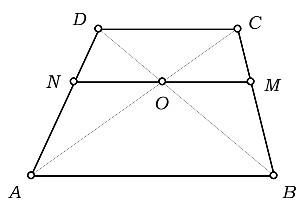


Figura 11.119

De manera similar, se demuestra la igualdad $|MO| = \dfrac{|AB||DC|}{|AB|+|DC|}$. Por lo tanto,

$$|MN| = |MO| + |NO| = \frac{2|AB||DC|}{|AB|+|DC|}. \clubsuit$$

Enseguida enunciamos algunas fórmulas que relacionan las medias entre sí.

11.6.6. Teorema. Sean a y b dos números reales positivos. Entonces,
1[a-151]. $G(H(a,b),A(a,b)) = G(a,b)$ y
2. $G(R(a,b),RH(a,b)) = G(a,b)$.

Prueba: 1. De la definición se siguen directamente las identidades

$$G(H(a,b),A(a,b)) = \sqrt{H(a,b)A(a,b)} = \sqrt{\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\left(\frac{a+b}{2}\right)} = \sqrt{ab}\,.$$

2. Claramente,

$$G(R(a,b),RH(a,b)) = \sqrt{R(a,b)RH(a,b)} = \sqrt[4]{\frac{a^2+b^2}{2}\,\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}} = \sqrt{ab}\,. ♣$$

11.7. Construcciones de expresiones algebraicas

Comenzamos esta sección con las construcciones de algunas expresiones algebraicas elementales.

11.7.1. Construcción. Sean a y b dos números reales positivos. En cada caso, construir un segmento de longitud x:

1. $x = a + b$.
2. x = $a - b$ suponiendo $a > b$.
3. $x = ab$.
4. $x = \dfrac{a}{b}$.
5. $x = \sqrt{ab}$.
6. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$
7. $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ suponiendo $a > b$.

Analicemos cada uno de los incisos por separado:

1. Sea AB un segmento de longitud a. Con centro en B y radio b, trazamos un círculo que corte a $\overleftrightarrow{AB}$ en el punto C. Entonces, tenemos que $x = |AC| =|AB| + |BC| = a + b$.

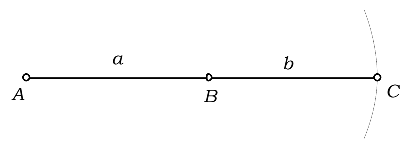


Figura 11.120

2. Sea AB un segmento de longitud a. Con centro en B y radio b trazamos un círculo que corte a AB en el punto C (esto es posible ya que $a > b$). Entonces, $x = |AC| =|AB| - |CB| = a - b$.

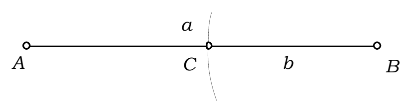


Figura 11.121

3. Basta con construir la cuarta proporcional del número 1, a y b (Construcción 6.3.4).

4. x resulta ser la cuarta proporcional de b, a y el número 1. Por lo cual, aplicamos la Construcción 6.3.4 para obtener x.

5. La construcción viene dada por la media geométrica de a y b (Construcción 11.5.1).

6. Construimos (11.2.11) un triángulo rectángulo con catetos a y b. De acuerdo con el Teorema de Pitágoras (8.5.1), concluimos que $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

7. En este caso, basta con construir (11.2.12) un triángulo rectángulo con cateto a e hipotenusa b (la construcción de este triángulo rectángulo es posible, ya que estamos suponiendo que $a > b$). Por el Teorema de Pitágoras (8.5.1), obtenemos que

$$a^2 = x^2 + b^2$$
$$x = \sqrt{a^2 - b^2}\,. ♣$$

Para construir la raíz cuadrada de un número real positivo a, basta aplicar la construcción del quinto inciso de la construcción anterior poniendo $b = 1$. Me gustaría enfatizarlos los detalles de esta construcción para su mejor entendimiento.

1. Construimos (11.7.1) un segmento AB de longitud $a + 1$.
2. Con centro en A y radio 1, trazamos un círculo que corte a AB en el punto C.
3. Trazamos el semicírculo de diámetro AB (11.3.1).
4. Usando la Construcción 11.1.4, trazamos la recta perpendicular a AB en el punto C que corte al semicírculo de diámetro AB en el punto D.

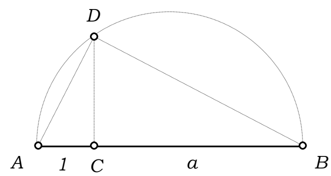


Figura 8.122

De acuerdo con el Teorema 9.5.2, sabemos que ΔDAB es un triángulo rectángulo en $\angle D$. Por el Teorema 8.1.2 (4), tenemos que $|DC|^2 = |AC||CB| = 1a = a$. Así obtenemos que $|DC| = \sqrt{a}$.

11.7.2. Construcción. Sean a, b y c tres números reales positivos. En cada caso, construir un segmento de longitud x:

1. $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.
2. $x = \sqrt{a^2 - b^2 - c^2}$ con $a^2 > b^2 + c^2$.

1. Para la primera ecuación, construimos un triángulo rectángulo con catetos a y b (11.2.11). Según el Teorema de Pitágoras (8.5.1), tenemos que la longitud de la hipotenusa de este triángulo rectángulo es igual a $\sqrt{a^2 + b^2}$. Sobre esta hipotenusa construimos (11.2.11) un segundo triángulo rectángulo con catetos $\sqrt{a^2 + b^2}$ y c. Aplicando otra vez el Teorema de Pitágoras (8.5.1), encontramos que la longitud de la hipotenusa de este nuevo triángulo rectángulo es igual a $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

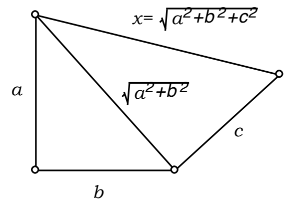


Figura 11.123

2. Primero construimos un triángulo rectángulo con hipotenusa a y cateto b (11.2.12). Del Teorema de Pitágoras (8.5.1), vemos que el cateto restante de este triángulo tiene longitud $\sqrt{a^2 - b^2}$. Sobre este cateto construimos (11.2.12) un segundo triángulo rectángulo, de tal forma que su hipotenusa tenga longitud $\sqrt{a^2 - b^2}$ y uno de sus catetos tenga longitud c. Según el Teorema de Pitágoras (8.5.1), la longitud del cateto restante de este segundo triángulo es igual a

$$x = \sqrt{a^2 - b^2 - c^2}. \clubsuit$$

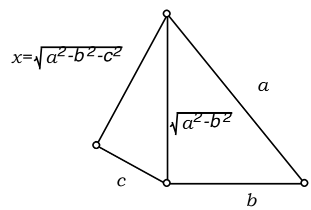


Figura 11.124

11.7.3. Construcción. Construir dos segmentos conociendo la suma y el producto de sus longitudes.

Sean a y b las longitudes de los segmentos. Por hipótesis, conocemos la suma $a + b = c$ y el producto $ab = d^2$.

1. Construimos (11.7.1) un segmento AB de longitud c.
2. Trazamos (11.3.1) el semicírculo de diámetro AB.
3. Trazamos (11.1.4) una recta perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ en el punto B.
4. Sobre la recta del paso anterior ubicamos (11.7.1) un punto D, de tal forma que $|BD| = d$ (ver figura 11.125).

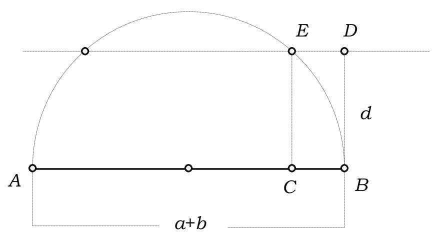


Figura 11.125

5. Construimos (11.1.8) la recta paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ y que pase por el punto D. Esta recta l corta al semicírculo de diámetro AB en un punto que denotamos por E. El punto E es muy posible obtenerlo, ya que por una de las desigualdades del Teorema 11.6.3, sabemos que $d = \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

6. Construimos (11.1.6) una recta perpendicular $\overleftrightarrow{AB}$ que pase por el punto E y corte al segmento AB en el punto C.

Los segmentos requeridos son AC y CB. Claramente, vemos que $|AC| + |CB| = c$. De acuerdo con el Teorema 8.1.2 (4), $|CE| = d$ es la media geométrica de $|AC|$ y $|CB|$. Es decir, $d^2 = |AC||CB|$. ♣

11.7.4. Construcción. Construir dos segmentos conociendo la diferencia y el producto de sus longitudes.

Denotemos por a y b a las longitudes de los segmentos que se desean. Supongamos que conocemos su diferencia $a - b = c$ y su producto $ab = d^2$.

1. Trazamos (11.3.1) un círculo de diámetro c y fijamos uno de sus diámetros AB.

2. Construimos (11.1.4) una recta perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ en el punto B y ubicamos (11.7.1) sobre ella un punto C tal que $|BC| = d$ (ver la figura 11.126).

Sean D y F los puntos de intersección de la recta $\overleftrightarrow{OC}$ con el círculo del primer paso. Afirmamos que los segmentos buscados son FC y DC. En efecto, sabemos que $|FC| - |DC| = |FD| = c$. Según el Teorema de Pitágoras (8.5.1), hallamos que

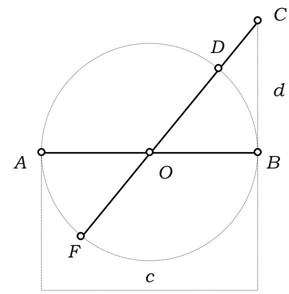


Figura 11.126

$$d^2 = |OC|^2 - |OB|^2 = (|OD| + |DC|)^2 - |OB|^2 = |OD|^2 + 2|OD||DC| + |DC|^2 - |OB|^2$$
$$= 2|OD||DC| + |DC|^2 = |DC|\,(2|OD| + |DC|) = |DC|\,(|FD| + |DC|) = |DC||FC|. \; ♣$$

Veamos cómo construir de las raíces de una ecuación de segundo grado:
Consideremos la ecuación general de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, en donde $a \neq 0$. Esta ecuación es equivalente a la ecuación $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Así, el estudio de la ecuación general de segundo grado se reduce al estudio de la ecuación $x^2 + bx + c = 0$. También, sabemos que si x_1 y x_2 son las raíces reales de la ecuación $x^2 + bx + c = 0$, entonces se cumplen las identidades $x_1 + x_2 = -b$ y $x_1 x_2 = c$. Así pues, el problema de encontrar las raíces de la ecuación $x^2 - bx + c = 0$, con $b, c > 0$, queda resuelto al aplicar la Construcción 11.7.3. A continuación, presentamos otro método.

11.7.5. Construcción. Encontrar las raíces de la ecuación $x^2 - bx + c = 0$, con $b, c > 0$.

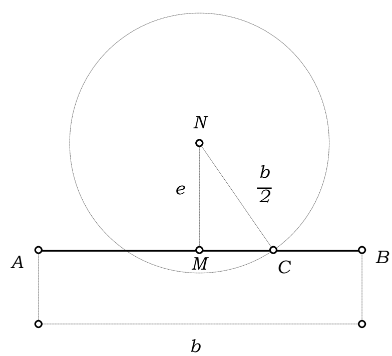


Figura 11.127

Supongamos que la ecuación $x^2 - bx + c = 0$ tiene sus raíces reales. Así que se debe cumplir la desigualdad $b^2 - 4c > 0$. Pongamos $c = e^2$.

1. Construimos (11.1.1) un segmento AB de longitud b.
2. Construimos (11.1.3) el punto medio M de AB.
3. Trazamos (11.1.4) la recta perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ en el punto M, y sobre ella ubicamos (11.7.1) un punto N tal que $|MN| = e$.
4. Haciendo centro en N, trazamos un círculo de radio $\frac{b}{2}$ que corte a AB en el punto C tal como lo muestra la figura 11.127 (esto es posible porque $\frac{b}{2} > e$).

Tenemos entonces que

$$|AC| + |CB| = |AB| = b = -(-b) \text{ y}$$
$$|AC||CB| = (|AM| + |MC|)(|MB| - |MC|) =$$
$$(|AM| + |MC|)(|AM| - |MC|) = |AM|^2 - |MC|^2 =$$
$$|AM|^2 - (|NC|^2 - |MN|^2) =$$
$$\frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4} + e^2 = c.$$

Con esto se prueba que $x_1 = |AC|$ y $x_2 = |CB|$ son las raíces reales de la ecuación $x^2 - bx + c = 0$. ♣

La siguiente construcción geométrica se basa en el hecho de que podemos construir geométricamente ciertas longitudes que estén dadas por expresiones algebraicas o que sean raíces de ciertas ecuaciones de segundo grado.

11.7.6. Construcción. Construir un triángulo rectángulo conociendo su perímetro y su altura correspondiente a la hipotenusa.

Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$. Supongamos que conocemos a h_a y $per(\Delta ABC) = p$. De aquí obtenemos las identidades $bc = h_a a$ y $a + b + c = p$. Por consiguiente,

$$(b + c)^2 = b^2 + 2bc + c^2 = b^2 + c^2 + 2h_a a = a^2 + 2h_a a$$
$$(p - a)^2 = a^2 + 2h_a a$$
$$p^2 - 2pa + a^2 = a^2 + 2h_a a$$
$$p^2 - 2pa = 2h_a a$$
$$p^2 = 2pa + 2h_a a = 2a(p + h_a)$$
$$a = \frac{p^2}{2(p + h_a)}.$$

De esta forma, queda determinada la hipotenusa a. Como $c = p - a - b$ y $bc = h_a a$, tenemos entonces que

$$b(p - a - b) = h_a a$$
$$b^2 + b(a - p) + h_a a = 0$$
$$b = \frac{p - a \pm \sqrt{(a - p)^2 - 4h_a a}}{2}.$$

La construcción de b se obtiene mediante la Construcción 11.7.1. Conociendo el valor de a y b, obtenemos el valor de $c = p - a - b$, el cual es posible construirlo según lo indica la Construcción 11.7.1. ♣

11.7.7. Construcción[a-26]. Dados dos números naturales positivos p y q, encontrar un número natural positivo r tal que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

1. Fijamos un segmento arbitrario AB.

2. Trazamos (11.1.4) dos rectas m y n perpendiculares a $\overleftrightarrow{AB}$ en los puntos A y B, respectivamente.

3. Sobre un mismo semiplano determinado por $\overleftrightarrow{AB}$ localizamos (11.1.1) dos puntos $C \in m$ y $D \in n$, de tal manera que $|AC| = p$ y $|BD| = q$.
Sean E el punto de intersección de los segmentos AD y BC.

4. Sea F la proyección de E sobre la recta $\overleftrightarrow{AB}$ (11.1.7).
Pongamos $|EF| = r$. De acuerdo con el Teorema 6.2.5, se cumplen las semejanzas $\Delta CAB \sim \Delta EFB$ y $\Delta DAB \sim \Delta EAF$. En consecuencia,

$$\frac{p}{r} = \frac{|AB|}{|FB|}.$$

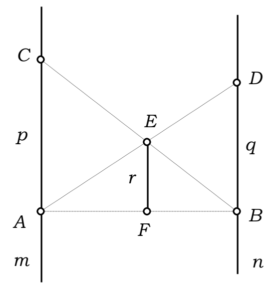


Figura 11.128

De aquí vemos que $|FB| = |AB|\frac{r}{p}$. Por otra parte, sabemos que

$$\frac{q}{r} = \frac{|AB|}{|AF|} = \frac{|AB|}{|AB| - |FB|} = \frac{|AB|}{|AB| - |AB|\frac{r}{p}} = \frac{1}{1 - \frac{r}{p}}$$

$$q(1 - \frac{r}{p}) = r$$

$$q - \frac{q}{p}r = r$$

$$q - \frac{q}{p}r = r$$

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}. \clubsuit$$

Vale la pena remarcar que la longitud del segmento AB en la Construcción anterior no tiene ninguna importancia para encontrar el segmento de longitud r. Un problema interesante que formula Z. Usiskin [a-170] y que tiene que ver con la solución a una ecuación particular de la Construcción 11.7.7 es el siguiente:

Encontrar los lados de un rectángulo cuyos lados son números enteros y su área es igual a su perímetro.

Supongamos que $\square ABCD$ es un rectángulo cuyos lados tienen como longitud a los números naturales p y q, y que se cumple la relación

$$are(\square ABCD) = pq = 2p + 2q = per(\square ABCD).$$

Entonces, $\frac{1}{2} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Para obtener las soluciones de esta ecuación, observamos primero que no se pueden tener ambas desigualdades $\frac{1}{4} > \frac{1}{p}$ y $\frac{1}{4} > \frac{1}{q}$. Así que podemos suponer que $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{p}$. Es decir, $p \leq 4$. Se puede verificar fácilmente que p no puede ser igual a 1 y tampoco a 2. Si $p = 3$, entonces $q = 6$; y si $p = 4$, entonces $q = 4$. De esta forma, hemos obtenido las dos únicas posibilidades para las longitudes de los lados del rectángulo requerido $\square ABCD$.

Aunque ya sabemos construir (11.7.1) la raíz cuadrada de un número real positivo, presentaremos a continuación otra construcción distinta que sirve solo para encontrar las raíces de los números enteros positivos.

11.7.8. Construcción[a-141]. Para cada número entero positivo p, construir con regla y compás un segmento de longitud $\sqrt{p}$.

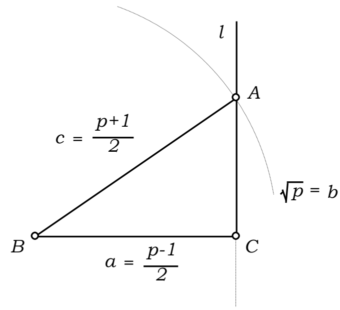


Figura 11.129

Podemos suponer que $p > 2$. Consideraremos dos casos:

Caso I. p es impar.

1. Construimos un segmento BC de longitud $a = \dfrac{p-1}{2}$ (11.7.1).

2. Construimos (11.1.4) la recta l perpendicular a $\overleftrightarrow{BC}$ en el punto C.

3. Haciendo centro en B trazamos un círculo de radio $c = \dfrac{p+1}{2}$ el cual corta a l en el punto A (esto es posible ya que $a < c$).

Claramente, ΔABC es un triángulo rectángulo con hipotenusa c. Según el Teorema de Pitágoras (8.5.1),

$$c^2 = a^2 + b^2 = \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 + b^2 = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2$$

$$b = \sqrt{\frac{p^2+2p+1}{4} - \frac{p^2-2p+1}{4}} = \sqrt{p}\,.$$

Caso II. p es par. Entonces, $p = 2k$ para algún número entero positivo k. Si k es un número impar, entonces construimos, usando la primera parte, un segmento de longitud $\sqrt{k}$, y otro, usando la Construcción 11.7.1, de longitud $\sqrt{2}$. De aquí, por la Construcción 11.7.1, podemos encontrar un segmento de longitud $\sqrt{2}\sqrt{k} = \sqrt{2k} = \sqrt{p}$. Supongamos entonces que k es par. Procedamos de la siguiente manera:

1. Construimos (11.7.1) un segmento BC de longitud $a = \dfrac{k-2}{2}$.

2. Construimos (11.1.4) la recta l perpendicular a $\overleftrightarrow{BC}$ en el punto C.

3. Trazamos el círculo de centro B y de radio $c = \dfrac{k+2}{2}$.

Sea A el punto de intersección del círculo del tercer paso y la recta l este punto existe pues $a < c$.

Tenemos entonces que ΔABC es un triángulo rectángulo en $\angle C$. De acuerdo con el Teorema de Pitágoras (8.5.1),

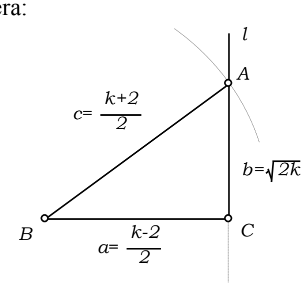


Figura 11.130

$$c^2 = a^2 + b^2 = \left(\frac{k-2}{2}\right)^2 + b^2 = \left(\frac{k+2}{2}\right)^2$$
$$b = \sqrt{\frac{k^2+4k+4}{4} - \frac{k^2-4k+4}{4}} = \sqrt{2k} = \sqrt{p}\,. \clubsuit$$

Enseguida, damos otro ejemplo en donde se requiere álgebra elemental para la solución de un problema geométrico.

11.7.9. Construcción. Sea AB un diámetro de un círculo $\mathrm{C}(O,r)$. Determinar una cuerda MN de $\mathrm{C}(O,r)$ paralela a AB tal que
$$|AM|^2 + |MN|^2 + |NB|^2 = 4.$$

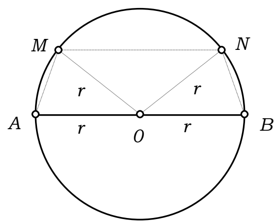


Figura 9.131

Prueba: Consideremos una cuerda arbitraria MN del círculo $\mathrm{C}(O,r)$ paralela a AB. Por el Problema 9.819, sabemos que $\square ABNM$ es un trapecio isósceles. Por ello, $MA \cong NB$ y $\Delta OMA \cong \Delta ONB$. La ley de los cosenos (8.2.8) afirma que
$$\cos\angle MOA = \frac{r^2 + r^2 - |AM|^2}{2r^2} = \frac{2r^2 - |AM|^2}{2r^2} \text{ y}$$
$$\cos\angle NOM = \frac{2r^2 - |MN|^2}{2r^2}.$$
Por consiguiente,
$$|AM|^2 = 2r^2(1 - \cos\angle MOA) \text{ y}$$
$$|MN|^2 = 2r^2(1 - \cos\angle NOM) = 2r^2\, 2\left(\mathrm{sen}\frac{\angle NOM}{2}\right)^2 = 4r^2\left(\mathrm{sen}\frac{\angle NOM}{2}\right)^2.$$
Pero como
$$m(\angle BON) + m(\angle NOM) + m(\angle MOA) = 180 \text{ y } \angle BON \cong \angle MOA,$$
tenemos entonces que
$$m(\angle MOA) + m\left(\frac{\angle NOM}{2}\right) = 90.$$
Sustituyendo, llegamos a que
$$|MN|^2 = 4r^2(\mathrm{sen}(\angle 90 - \angle MOA))^2 = 4r^2(\cos\angle MOA)^2.$$
Por lo cual,
$$4 = |AM|^2 + |MN|^2 + |NB|^2 =$$
$$2r^2(1 - \cos\angle MOA) + 4r^2(\cos\angle MOA)^2 + 2r^2(1 - \cos\angle MOA) =$$
$$4r^2(1 - \cos\angle MOA) + 4r^2(\cos\angle MOA)^2.$$
De aquí se sigue directamente la desigualdad
$$1 = r^2(1 - \cos\angle MOA) + r^2(\cos\angle MOA)^2.$$
Pongamos $x = \cos\angle MOA$. Entonces, tenemos que

$$1 = r^2(1 - x) + r^2 x^2$$
$$r^2 x^2 - x r^2 + r^2 - 1 = 0.$$

Usando la fórmula para obtener las raíces de una ecuación de segundo grado, encontramos que

$$x = \frac{r^2 \pm \sqrt{r^4 - 4r^2(r^2 - 1)}}{2r^2} = \frac{r^2 \pm r\sqrt{4 - 3r^2}}{2r^2} = \frac{r \pm \sqrt{4 - 3r^2}}{2r}.$$

Para que exista al menos una solución, se debe cumplir que $3r^2 \leq 4$ o lo que es equivalente $r \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$. Si el radio del círculo cumple con esta condición, entonces el ángulo $\angle MOA$ se calcula con la ecuación

$$\cos\angle MOA = \frac{r \pm \sqrt{4 - 3r^2}}{2r}.$$

Hay una única solución si $r = \frac{2}{\sqrt{3}}$ y dos posibles soluciones si $r < \frac{2}{\sqrt{3}}$. ♣

Finalizamos esta sección con un problema tomado del libro de M. García Ardua [l-148], el cual corresponde al Problema número 489. Este problema ofrece una interpretación geométrica de una expresión algebraica bastante compleja.

11.7.10.Problema. Dados cuatro segmentos de longitudes a, b, c y d, hallar geométricamente el número

$$\frac{\sqrt{a^3}\,x\sqrt{\frac{1}{cd}}}{y},$$

en donde x y y satisfacen las ecuaciones $\frac{x}{b-x} = \frac{b-x}{b}$ y $\frac{x}{y} = \frac{y}{b}$.

Solución: Sabemos que

$$\frac{\sqrt{a^3}\,x\sqrt{\frac{1}{cd}}}{y} = \frac{x\sqrt{\frac{a^3}{cd}}}{y} = \frac{x\sqrt{\frac{a^2}{c}\frac{a}{d}}}{y}.$$

Pongamos $p = \frac{a^2}{c}$. De aquí vemos que $\frac{c}{a} = \frac{a}{p}$. Es decir, a es la media geométrica de c y p. Así queda determinado el valor p. Procedemos a construir (6.3.4) la cuarta proporcional q de los números a, d y p, la cual satisface la relación $\frac{p}{d} = \frac{q}{a}$. De donde hallamos que $q = p\frac{a}{d} = \frac{a^2}{c}\frac{a}{d}$. Así, nuestra ecuación original se transforma en la ecuación $\frac{x\sqrt{q}}{y}$. Sabemos es posible construir el número $\sqrt{q}$ (11.7.1 (5)). De la identidad $\frac{x}{b-x} = \frac{b-x}{b}$ vemos que x es la longitud del segmento menor de la división áurea del segmento de longitud b (página 806). De la segunda igualdad $\frac{x}{y} = \frac{y}{b}$ observamos que y es la media geométrica de x y b (11.5.1). Esto determina a los números x y y. Finalmente, la expresión $\frac{x\sqrt{q}}{y}$ representa a la cuarta proporcional de los números x, $\sqrt{q}$ y y, la cual es posible hallarla mediante la Construcción 6.3.4. ♣

Para llevar a cabo una construcción geométrica solicitada, uno generalmente deduce los pasos de la construcción partiendo del dibujo que bosqueja una posible solución. En los métodos de transformaciones geométricas para resolver problemas de construcciones geométricas, es necesario que las partes conocidas se coloquen en algún lugar estratégico obteniendo así una figura auxiliar. Dentro de esta figura auxiliar se construyen las partes restantes de la figura original, y posteriormente dichas partes se regresan a la figura inicial para obtener la construcción solicitada. Por lo general, la figura auxiliar y la original son bastante diferentes entre sí y aparentemente no tienen relación alguna. Sin embargo, la figura auxiliar se obtiene bajo ciertas transformaciones de la figura original, y viceversa. Así, la figura que muestra la construcción solicitada se obtiene mediante ciertas transformaciones de la figura auxiliar. Las propiedades de la figura transformada se pueden inferir de las propiedades conocidas de la figura original.
Veamos un ejemplo elemental:

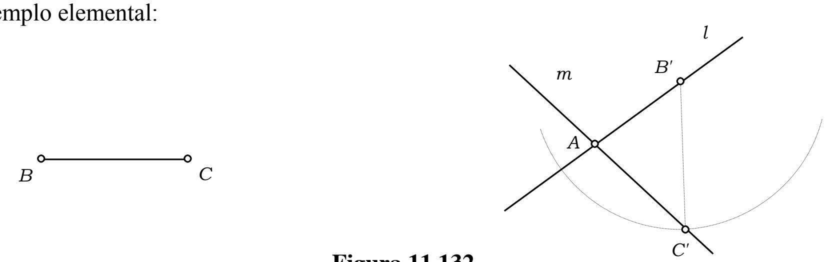


Figura 11.132

Se tiene un segmento BC que se quiere trasladar, de tal manera que se forme un triángulo junto con dos rectas dadas l y m que se cortan en un punto A. Primero procedemos a fijar un punto $B' \in l$, de tal forma que el círculo $C(B',|BC|)$ corte a la recta m en al menos un punto que denotamos por C'. Claramente, $\Delta AB'C'$ es el triángulo buscado. Aquí se resolvió el problema trasladando el segmento dado. Los métodos que se usan en las transformaciones de figuras geométricas son *traslación paralela*, *reemplazamiento* y *rotación*. Las construcciones geométricas se pueden clasificar según el método que use una de sus soluciones. En este libro, abordaremos solo los métodos de traslación paralela y reemplazamiento.

11.8. Traslación paralela

En esta sección, hablaremos principalmente del *método de traslación paralela*. Por traslación, se entenderá intuitivamente construir una figura geométrica congruente a una dada en un sitio elegido siguiendo una dirección dada. Es decir, algunas de la partes de una figura trazada en algún lugar diferente del deseado se transforman paralelamente para obtener las partes requeridas de la construcción buscada. Veamos primero una configuración que ilustrará el significado de traslación paralela.

11.8.1. Configuración. Sea ΔABC un triángulo

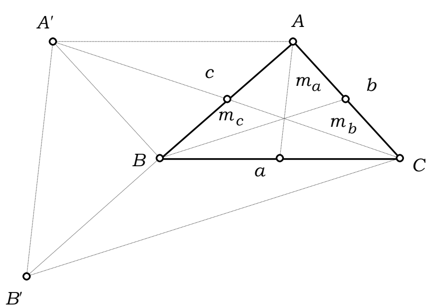


Figura 11.133

1. Extendemos BA hasta un punto B' tal que $AB \cong BB'$. Esto se puede hacer simplemente trazando el círculo $\mathcal{C}(B,c)$, siendo B' el punto distinto de A donde este círculo corta a la recta $\overleftrightarrow{AB}$.

2. Trazamos (11.1.8) una recta paralela a BC que pase por el vértice A y sobre ella ubicamos (11.1.1) un punto A', de tal forma que $A'A \cong BC$.

En esta configuración, que se cumplen las siguientes propiedades:

a. $\square BCAA'$ es un paralelogramo.

b. Cada uno de los lados del triángulo $\Delta A'B'C$ duplica a una de las medianas del triángulo original ΔABC.

c. $AB \cong BB'$ y $BA' \cong AC$.

d. B es el centro de gravedad del triángulo$\Delta A'B'C$.

e. $are(\Delta A'B'C) = 3are(\Delta ABC)$.

Enseguida, probaremos éstas afirmaciones:

a. Esto es cierto por el Teorema 5.3.2 (1.a).

b. Como $\square BCAA'$ es un paralelogramo, sus diagonales se cortan en su punto medio (5.3.1). De aquí vemos que $|A'C| = 2m_c$. Según el Teorema del Segmento Medio (4.3.10), hallamos que $|B'C| = 2m_b$ y también se tiene que $|A'B'|$ es igual al doble de la longitud de la mediana correspondiente al vértice B del triángulo $\Delta BAA'$. Pero esta mediana es congruente a m_a, ya que $\Delta ABC \cong \Delta BAA'$.

c. Por construcción, tenemos que $AB \cong BB'$ y del primer inciso se sigue la congruencia $BA' \cong AC$.

d. Por el Teorema 5.3.1, sabemos que BA y $A'C$ se cortan en su punto medio. Por ello, $B'A$ contiene a la mediana correspondiente al vértice B' del triángulo $\Delta A'B'C$. Como $BC \parallel A'A$ y B es el punto medio de AB', entonces $\overleftrightarrow{BC}$ corta a $A'B'$ en su punto medio (esto es por el Teorema 8.3.2). Así probamos que B es el centro de gravedad del triángulo $\Delta A'B'C$.

e. Como A y A' son equidistantes de $\overleftrightarrow{BC}$, tenemos entonces que $are(\Delta ABC) = are(\Delta BCA')$. De acuerdo con el Corolario 8.4.9, hallamos que

$$are(\Delta A'B'C) = 3are(\Delta BCA') = 3are(\Delta ABC). \clubsuit$$

En la configuración anterior vimos cómo los lados de un triángulo ΔABC se transforman paralelamente para obtener el triángulo $\Delta A'B'C$. Inversamente, del triángulo $\Delta A'B'C$ se puede obtener, mediante una traslación paralela, el triángulo ΔABC (para esto basta conocer el centro de gravedad y aplicar el Problema 8.673). La Configuración 11.8.1 se aplica a las construcciones de triángulos conociendo algunas de sus partes. Esto lo ejemplificaremos en la siguiente construcción:

11.8.2. Construcción. Dados m_a, m_b y m_c, construir el triángulo

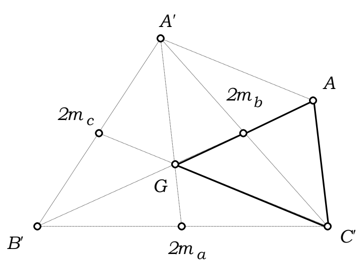


Figura 11.134

1. Construimos (11.8.1) el triángulo $\Delta(2m_a, 2m_b, 2m_c)$ cuyos vértices se denotarán por A', B' y C'.

2. Procedemos a construir el centro de gravedad G del triángulo $\Delta A'B'C'$ (Problema 11.149).

3. Prolongamos (11.1.1) el segmento $B'G$ hasta un punto A tal que $B'G \cong GA$.

La Configuración 11.8.1 nos garantiza que $\Delta GC'A$ es el triángulo solicitado. ♣

11.8.3. Construcción. Desde un punto fuera de un círculo dado, trazar una recta que corte al círculo en dos puntos tales que sus distancias a una recta dada tengan suma igual a un número positivo dado.

Sean $\mathcal{C}(O,r)$ un círculo, $P \in ext(\mathcal{C}(O,r))$, l una recta y $a > 0$ un número real.

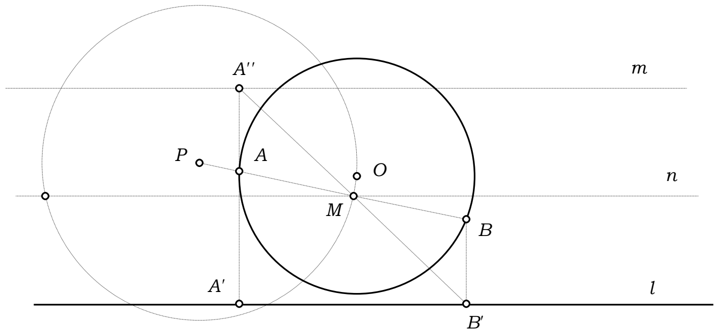


Figura 11.135

1. Trazamos (11.1.5) una recta m paralela a l, de tal forma que $d(l,m) = a$.
2. Trazamos el círculo $\mathcal{C}(P,|PO|)$.
3. Usando la Construcción 11.1.5 de nueva cuenta, trazamos una recta n paralela a l y m tal que $d(n,l) = d(n,m)$. Sea M el punto de intersección de n y el círculo $\mathcal{C}(P,|PO|)$.
4. Sean A y B los puntos de intersección de la recta $\overleftrightarrow{PM}$ con el círculo $\mathcal{C}(O,r)$.

Veremos que los puntos A y B son los requeridos. Del Problema 9.55 sabemos que M es el punto medio de la cuerda AB. Sean A' y A'' las proyecciones del punto A sobre las rectas l y m, respectivamente, y B' el punto de intersección de las rectas $\overleftrightarrow{A''M}$ y l. Como n es equidistante a las rectas l y m, del Problema 4.302 se sigue que M es el punto medio del segmento $A''B'$. De acuerdo con el criterio de congruencia 3.2.6, $\Delta MA''A \cong \Delta MB'B$. Por ello, $AA'' \cong B'B$ y $\angle AA''M \cong \angle BB''M$. Del Teorema 3.4.4 vemos que $\overleftrightarrow{A'A''} \parallel \overleftrightarrow{BB'}$. Ya que $AA'' \perp m$, por el Teorema 3.7.2 tenemos que $\overleftrightarrow{BB'} \perp l$. De aquí deducimos que

$$d(A,l) + d(B,l) = |AA'| + |BB'| = |AA'| + |AA''| = |A'A''| = d(l,m) = a. \clubsuit$$

11.8.4. Construcción. Construir un círculo de radio dado, teniendo su centro sobre un círculo dado y corte a un segundo círculo dado en un arco de longitud dada.

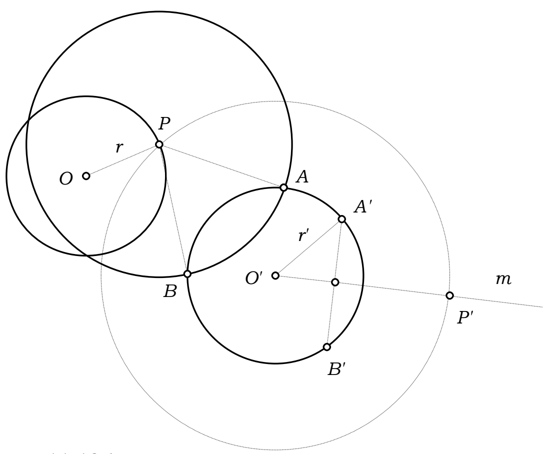


Figura 11.136

Sean C(O,r) y C(O',r') dos círculos, $\overset{\frown}{A'B'}$ un arco de C(O',r') y $a > 0$ un número real positivo.

1. Trazamos (11.1.2) la mediatriz m del segmento $A'B'$.

2. Haciendo centro en B' trazamos un círculo de radio a que corte a m en el punto P' que está en el semiplano, determinado por la recta $\overleftrightarrow{A'B'}$ que no contiene al punto O'.

3. Trazamos el círculo C(O',|$O'P'$|) y fijamos un punto P en donde este círculo corte al círculo C(O,r).

Nuestro círculo es el círculo C(P,a). En efecto, sean A y B los puntos intersección de C(P,a) y C(O',r'). Del Problema 9.473 encontramos que $l(\overset{\frown}{A'B'}) = l(\overset{\frown}{AB})$. ♣

11.8.5. Construcción. Dados un círculo C(O,r) y dos de sus cuerdas AB y CD, encontrar un punto $P \in$ C(O,r), de tal forma que si PA y PB cortan a CD en los puntos E y F, respectivamente, entonces la longitud |EF| este dada.

Sea $a > 0$ un número real.

1. Trazamos (11.1.1) una recta l paralela a CD que pase por el punto A, y corte a C(O,r) en el punto B'.

2. Trazamos el círculo C(A,a) y sea R el punto donde este círculo corta a AB'.

3. Sea $\angle\alpha$ el ángulo inscrito en C(O,r) cuyos lados pasan por los puntos A y B. Ubicamos (11.3.16) un punto Q en el interior del círculo C(O,r), de tal manera que $\angle RQB \cong \angle\alpha$.

4. Construimos (11.3.3) el círculo que pasa por los puntos Q, R y B. Fijamos el punto F, en donde dicho círculo corta al segmento CD.

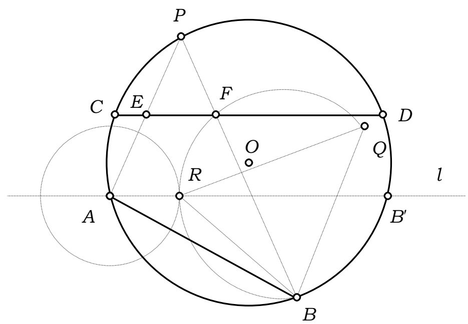


Figura 11.137

Sean P el punto de intersección del círculo C(O,r) y la recta $\overleftrightarrow{BF}$, y E el punto de intersección de PA y CD. Por el Corolario 9.5.7, sabemos que $\angle RFB \cong \angle RQB$ y, por lo tanto, $\angle RQB \cong \angle\alpha$. Pero como $\angle APB \cong \angle\alpha$ (esto es cierto por el Corolario 9.5.7), tenemos entonces que $\angle RFB \cong \angle APB$. Según el Teorema 3.4.6, $PA \parallel FR$. Por consiguiente, $\square ARFE$ es un paralelogramo. El Teorema 5.3.1 nos asegura que a = |AR| = |EF|. ♣

11.8.6. Construcción. Dados dos círculos secantes, por uno de los dos puntos comunes trazar una recta que corte a los círculos formando dos cuerdas de tal manera que la suma de sus longitudes esté dada.

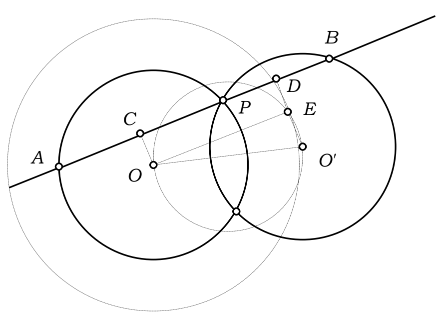


Figura 11.138

Sean C(O,r) y C(O',r') dos círculos secantes, P uno de sus puntos comunes y $a > 0$ un número real.

1. Construimos (11.3.1) el círculo de diámetro OO'.

2. Trazamos el círculo $\mathrm{C}(O, \frac{a}{2})$. Sea E el punto en donde este círculo interseca al círculo del primer paso.

3. Construimos (11.1.8) una recta l paralela a OE que pase por el punto P.

Sean A y B los puntos en donde la recta l corta a los círculos $\mathrm{C}(O,r)$ y $\mathrm{C}(O',r')$, respectivamente. Sean C y D las proyecciones de los centros O y O' sobre la recta l, respectivamente. Es evidente que $\square COED$ es un paralelogramo y, por lo tanto, $CD \cong OE$. Observemos que los puntos O', E y D son colineales (esto es consecuencia del Teorema 9.5.2). De acuerdo con el Teorema 9.2.7, hallamos que OC y ED cortan a AP y PB por la mitad, respectivamente. Como resultado de esto, encontramos que

$$|AP| + |PB| = 2|CP| + 2|PD| = 2|CD| = 2|OE| = 2\frac{a}{2} = a. \clubsuit$$

11.8.7. Construcción. Dados dos círculos $\mathrm{C}(O,r)$ y $\mathrm{C}(O',r')$, trazar un radio en cada uno de ellos que sean paralelos y que desde un punto dado se vean bajo ángulos congruentes.

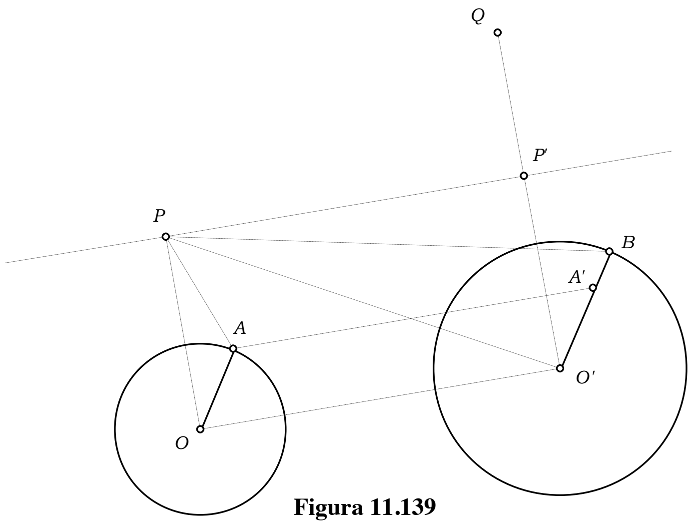


Figura 11.139

Sea P un punto en el plano. Sin perder generalidad, supongamos que $r \leq r'$.

1. Construimos (11.1.8) la recta l paralela a $\overleftrightarrow{OO'}$ que pasa por el punto P.

2. Trazamos (11.1.8) la recta paralela a $\overleftrightarrow{OP}$ que pase por el punto O' y corte a l en el punto P'.

3. Sobre la recta $\overleftrightarrow{O'P'}$ localizamos (6.3.1) un punto Q tal que $\frac{|O'P'|}{|O'Q|} = \frac{r}{r'}$.

4. Trazamos (11.3.3) el círculo que pasa por los puntos P, O' y Q, y corta al círculo $\mathrm{C}(O',r')$ en el punto B.

5. Trazamos (11.1.8) la recta paralela a $\overleftrightarrow{O'B}$ que pase por el punto O y corte a $\mathrm{C}(O,r)$ en el punto A.

Por construcción, sabemos que $OA \parallel O'B$. Para proceder a la demostración de que OA y $O'B$ son los radios buscados, trazamos una recta (11.1.8) paralela $\overleftrightarrow{OO'}$ que pase por el punto A y corte a $O'B$ en el punto A'. De acuerdo con el Teorema 5.3.1, $PO \cong P'O'$ y $OA \cong O'A'$. Del Teorema 6.2.16 hallamos que $\Delta POA \cong \Delta P'O'A'$. De aquí se obtiene que $\angle OPA \cong \angle O'P'A'$. Ya que

$$\frac{|O'P'|}{|O'Q|} = \frac{r}{r'} = \frac{|OA|}{|O'B|} = \frac{|O'A'|}{|O'B|},$$

por el Teorema 6.1.14, obtenemos que $P'A' \parallel BQ$. Según el Teorema 3.4.6, $\angle O'P'A' \cong \angle O'QB$. Por otro lado, con base en el Corolario 9.5.7, sabemos que $\angle O'PB \cong \angle O'QB$. Por ello, $\angle O'PB \cong \angle OPA$ tal como se deseaba. $\clubsuit$

11.8.8. Construcción. Dados un segmento y dos círculos, encontrar un punto en cada uno de los círculos, de tal forma que el segmento que determinan sea congruente y paralelo a un segmento dado.

Sean AB un segmento y $C(O,r)$ y $C(O',r')$ dos círculos.

1. Construimos (11.1.8) la recta l paralela a AB que pase por el punto O.
2. Sobre la recta l ubicamos (11.1.1) un punto P tal que $PO \cong AB$.
3. Trazamos el círculo $C(P,r)$ y sea B' el punto donde este círculo corta al círculo $C(O',r')$.
4. Construimos (11.1.8) la recta paralela a PB' que pase por el punto O y corte a $C(O,r)$ en el punto A'.

Por construcción, sabemos que $r = |OA'| = |PB'|$ y $OA' \parallel PB'$. De acuerdo con el Teorema 5.3.1, tenemos que $\square A'B'PO$ es un paralelogramo y, por consiguiente,

$$|OP| = |AB| = |A'B'| \text{ y } AB \parallel A'B'. \clubsuit$$

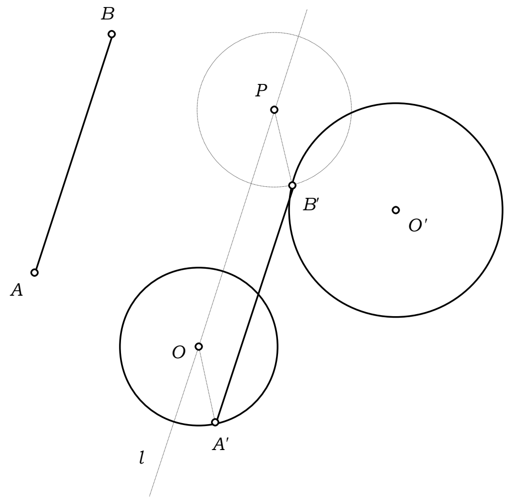


Figura 11.140

11.8.9. Construcción. En un círculo dado, inscribir un triángulo del cual solo se conoce la dirección de uno de sus lados, la longitud de la bisectriz del ángulo opuesto a dicho lado y un punto por donde pasa dicha bisectriz.

Sean $C(O,r)$ un círculo, l una recta, b_a un número real positivo y $P \in int(C(O,r))$.

1. Construimos (11.1.8) una recta m paralela a l que corte al círculo $C(O,r)$ en los puntos D y E.
2. Trazamos (11.1.2) la mediatriz n del segmento DE. Sea F el punto de intersección de n y $C(O,r)$.
3. Trazamos la recta $\overleftrightarrow{FP}$ y sea A el punto de intersección de esta recta con el círculo $C(O,r)$.
4. Haciendo centro en el punto A trazamos el círculo de radio b_a. Sea B_a el punto de intersección de este círculo y $\overleftrightarrow{FP}$.
5. Construimos (11.1.8) una recta paralela a m que pase por el punto B_a y corte a $C(O,r)$ en los puntos B y C.

Consideremos el triángulo ΔABC. Según el Problema 9.623, $\overrightarrow{AF}$ es la bisectriz del ángulo $\angle A$. Además, por construcción, sabemos que $BC \parallel l$, pues $m \parallel BC$ y $m \parallel l$, y $AB_a = b_a \subseteq \overrightarrow{AE}$. $\clubsuit$

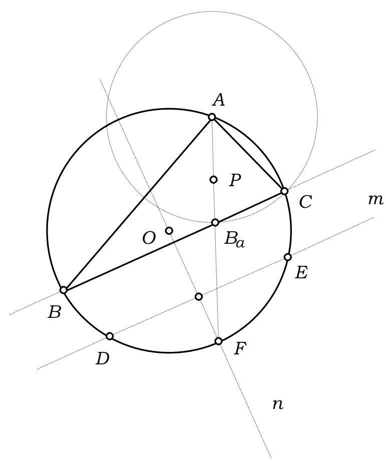


Figura 11.141

11.8.10. Construcción. Dado un triángulo ΔABC, trazar una recta l que corte a los lados AB y BC en los puntos P y Q, respectivamente, de tal forma que las longitudes de los segmentos PA y QC estén en una proporción dada.

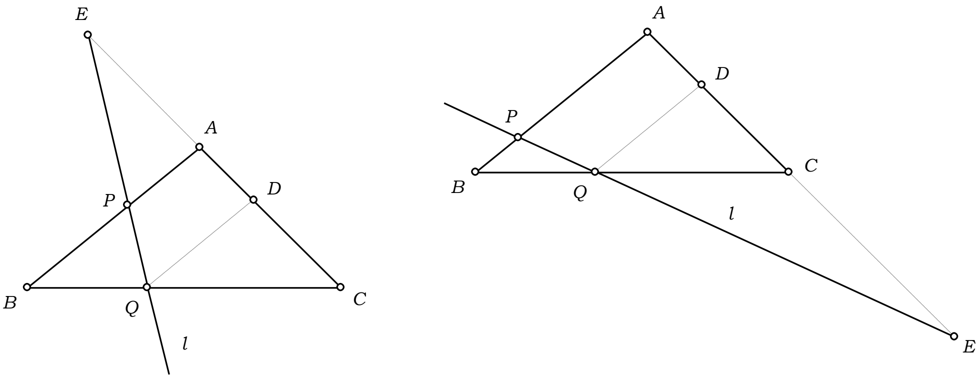


Figura 11.142

Sea $p > 0$ un número real.

1. Fijamos un punto $Q \in BC$.
2. Construimos (11.1.8) una recta paralela a AB que pase por el punto Q y corte AC en el punto D.
3. Ubicamos (6.3.1) un punto $E \in \overleftrightarrow{AD} - AD$ tal que $\frac{|AE|}{|ED|} = \frac{|AC|}{|AB|}p$ (las dos posibles posiciones del punto E sobre la recta $\overleftrightarrow{AD}$ se muestran en la figura 11.142).

Pongamos $l = \overleftrightarrow{EQ}$ y sea P el punto de intersección de l y AB. Por el Teorema 6.2.5, tenemos que $\Delta ABC \sim \Delta DQC$ y $\Delta EPA \sim \Delta EQD$. Como una consecuencia de éstas semejanzas, hallamos que

$$\frac{|PA|}{|QD|} = \frac{|EA|}{|ED|}, \frac{|BC|}{|QC|} = \frac{|AC|}{|DC|} \text{ y } \frac{|AB|}{|QD|} = \frac{|AC|}{|DC|}.$$

De aquí se sigue que $\frac{|PA|}{|QC|} = \frac{|EA||QD|}{|ED|}\frac{|AC|}{|BC||DC|} = \frac{|EA|}{|ED|}\frac{|AC|}{|BC|}\frac{|QD|}{|DC|} = \frac{|AC|}{|AB|}p\frac{|AB|}{|AC|} = p.$ ♣

11.8.11. Construcción. En un círculo dado inscribir un cuadrilátero □$ABCD$ del cual solo se conoce la diagonal AC, la dirección de la segunda diagonal, y sabemos que el cuadrilátero es también circunscrito.

Sean $\mathsf{C}(O,r)$ un círculo, AC una de sus cuerdas y l una recta.

1. Construimos (11.1.6) una recta m perpendicular a l que pase por el centro O del círculo dado.
2. Sean K y L los puntos de intersección de m y $\mathsf{C}(O,r)$, y I el punto de intersección de AK y CL.

En la prueba del Teorema 9.10.25 (ver Problema 9.715 5 (g)), se vio que $\overrightarrow{AK}$ y $\overrightarrow{CL}$ tienen que ser las bisectrices de los ángulos $\angle A$ y $\angle C$, respectivamente, del cuadrilátero. Además, tenemos que I es el centro del círculo inscrito en el cuadrilátero.

3. Construimos (11.3.19) los puntos medios M y N de los dos arcos (menor y mayor) sustentados por AC.

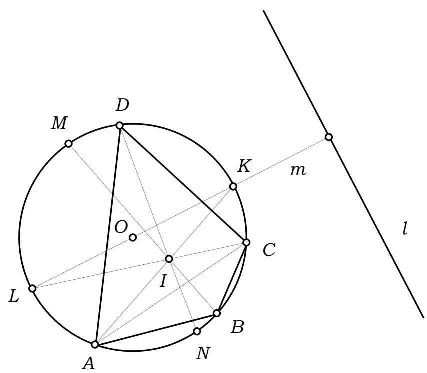


Figura 11.143

De acuerdo con los Teoremas 4.7.9 y 9.11.14, sabemos que las bisectrices de los ángulos $\angle B$ y $\angle D$ deben pasar por el punto I y por los puntos M y N, respectivamente. Esto nos indica cómo encontrar los vértices B y D. Efectivamente, B y D son los puntos de intersección de las rectas $\overleftrightarrow{IM}$ y $\overleftrightarrow{IN}$ con el círculo $\mathsf{C}(O,r)$, respectivamente. ♣

11.8.12. Construcción. Construir un paralelogramo dados uno de sus lados y sus diagonales.

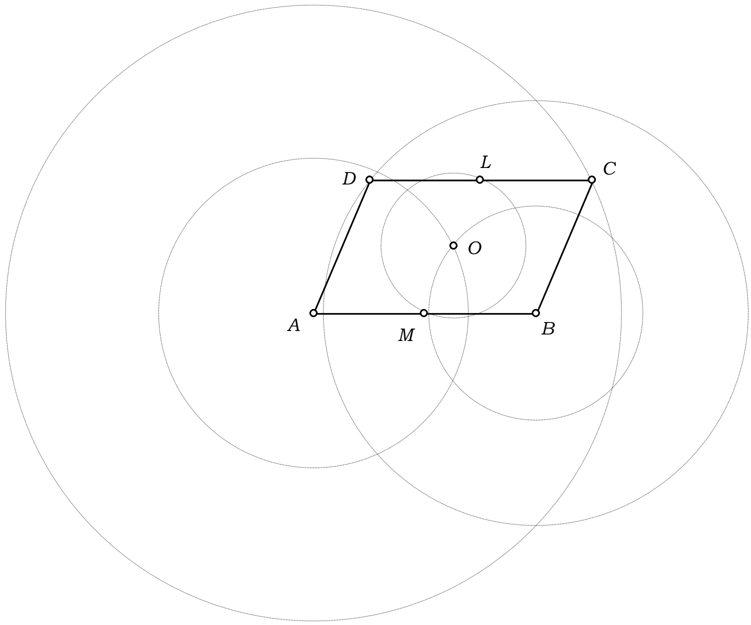


Figura 11.144

Sean a, e y f las partes conocidas del paralelogramo.

1. Trazamos (11.1.1) un segmento AB de longitud a.
2. Trazamos los círculos $\mathsf{C}(A,e)$ y $\mathsf{C}(B,f)$.
3. Trazamos los círculos $\mathsf{C}(A,\frac{e}{2})$ y $\mathsf{C}(B,\frac{f}{2})$. Sea O uno de los puntos de intersección de estos dos círculos.
4. Construimos (11.1.3) el punto medio M del segmento AB.
5. Haciendo centro en O, trazamos el círculo de radio $|OM|$, el cual corta a la recta $\overleftrightarrow{OM}$ en el punto L.
6. Trazamos (11.1.8) una recta paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ que pase por el punto L, y corte a los círculos $\mathsf{C}(A,e)$ y $\mathsf{C}(B,f)$ en los puntos C y D, respectivamente.

Como las diagonales del cuadrilátero $\square ABCD$ se cortan en su punto medio, por el Teorema 5.3.1, $\square ABCD$ es un paralelogramo, el cual satisface claramente nuestras condiciones.♣

11.8.13. Configuración. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero cualquiera.

1. Trazamos una recta paralela a AC que pase por el vértice D.
2. Por C trazamos una recta paralela a AD que corte a la recta del primer inciso en el punto E.
3. Trazamos una recta paralela a BD que pase por el punto E.
4. Finalmente, trazamos una recta paralela a AC que pase por B y corte a la recta del tercer inciso en el punto F.

Vemos que los segmentos AB y AD se transforman de manera paralelamente rectilínea en los segmentos CF y CE, respectivamente. El cuadrilátero $\square BFED$ se ha obtenido del cuadrilátero $\square ABCD$ bajo una traslación paralela rectilínea. Analicemos algunas de las propiedades de este cuadrilátero $\square BFED$:

a. $\square BFED$ es un paralelogramo.
b. $\square ACED$ y $\square ABFE$ son paralelogramos.
c. $CE \cong DA$ y $CF \cong AB$.
d. Los lados del paralelogramo $\square BFED$ son congruentes a las diagonales del cuadrilátero $\square ABCD$, y sus ángulos son congruentes a los ángulos formados por las diagonales del cuadrilátero original.
e. $\angle A \cong \angle FCE$, $\angle B \cong \angle BCF$ y $\angle D \cong \angle ECD$.
f. Las longitudes de las diagonales $\square BFED$ son el doble de las longitudes de los segmentos que unen los puntos medios de los lados opuestos del cuadrilátero $\square ABCD$.
g. $are(\square BFED) = 2are(\square ABCD)$.

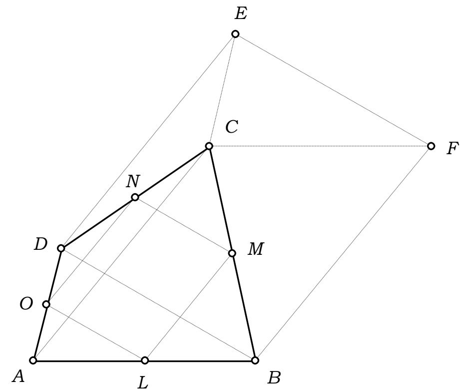


Figura 11.145

Procedamos a demostrar estas afirmaciones.

a. Por construcción, $AC \parallel DE$, $AC \parallel BF$ y $BD \parallel EF$. Por ello, $DE \parallel BF$ y $BD \parallel EF$. Por lo cual, $\square BFED$ es un paralelogramo.

b. Por construcción, es claro que $\square ACED$ es un paralelogramo. Como $\square BFED$ es un paralelogramo, por el Teorema 5.3.1, sabemos que $BF \cong DE$, y como $\square ACED$ es también un paralelogramo, $AC \cong DE$. Entonces, tenemos que $AC \cong BF$. Ya que $AC \parallel BF$, por el Teorema 5.3.1, concluimos que $\square ABFE$ es un paralelogramo.

c. Como $\square ACED$ y $\square ABFE$ son paralelogramos, del Teorema 5.3.1 se sigue que $CE \cong DA$ y $CF \cong AB$.

d. Es consecuencia de los Teoremas 3.4.10 y 5.3.1.

e. Por el primer criterio de congruencia (3.2.6), hallamos que $\Delta ABD \cong \Delta CFE$ y $\Delta DAC \cong \Delta CED$. De aquí se siguen las congruencias $\angle A \cong \angle FCE$, $\angle B \cong \angle BCF$ y $\angle D \cong \angle ECD$. Por el Teorema 3.4.4, $\angle B \cong \angle BCF$.

f. Sean L, M, N y O los puntos medios de AB, BC, CD y DA, respectivamente. Por el Teorema del Segmento Medio (4.3.10), sabemos que $2|ON| = |AC| = |BF| = |DE|$, $2|NM| = |DB| = |EF|$, $ON \parallel AC$ y $MN \parallel DB$. De aquí deducimos que $OL \parallel DB$, $MN \parallel EF$, $LM \parallel BF$ y $ON \parallel DE$. El primer criterio de semejanza de cuadriláteros 6.5.5 nos asegura que $\square LMNO \sim \square BFED$. Por consiguiente, $\dfrac{|BE|}{|LN|} = \dfrac{|DF|}{|MO|} = \dfrac{|DE|}{|ON|} = 2$.

g. Sabemos que $\Delta DAC \cong \Delta ECD$, $\Delta CAB \cong \Delta BFC$ y $\Delta DAB \cong \Delta FCE$. Por lo tanto,

$$are(\square BFED) = are(\Delta DBC) + are(\Delta BFC) + are(\Delta FCE) + are(\Delta ECD) =$$
$$are(\Delta DBC) + are(\Delta CAB) + are(\Delta DAB) + are(\Delta DAC) =$$
$$are(\Delta DBC) + are(\Delta DAB) + are(\Delta CAB) + are(\Delta DAC) = 2are(\square ABCD). \clubsuit$$

A continuación, damos una aplicación de la configuración anterior.

11.8.14. Construcción. Construir un paralelogramo conociendo las longitudes de sus lados y el ángulo que forman sus diagonales.

Sean a, b y $\angle\alpha$ las partes conocidas del paralelogramo.

1. Trazamos (11.1.11) dos rectas l y m que se corten en el punto D y tal que uno de los ángulos que forman sea congruente con $\angle\alpha$.
2. Construimos (Problema 11.182) un triángulo ΔDBE tal que $|BE| = 2b$, y C es el punto medio de BE que satisface $|DC| = a$ y $|BC| = |CE| = b$.
3. Trazamos (11.1.8) una recta n paralela a DC que pase por el punto B.

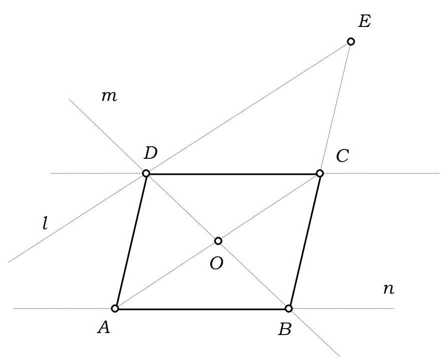


Figura 11.146

4. Trazamos (11.1.8) otra recta paralela a BE que pase por el punto D y corte a la recta n en el punto A.

Claramente, $\square ABCD$ es un paralelogramo. En virtud del Teorema 5.3.1, $|AB| = |DC| = a$ y $|AD| = |BC| = b$. Como $AD \parallel CE$ y $|AD| = |CE| = b$, por el Teorema 5.3.2 (1.a), $\square ACED$ es también un paralelogramo. En particular, tenemos que $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{DE}$. Según el Teorema 3.4.6, $\angle BOC \cong \angle BDE$, en donde O es el punto de intersección de las diagonales de $\square ABCD$. Pero como $\overleftrightarrow{DB} = m$ y $\overleftrightarrow{DE} = l$, se sigue entonces que $\square ABCD$ es el paralelogramo deseado. ♣

11.8.15. Construcción. Construir un trapecio isósceles, conociendo las longitudes de sus lados paralelos y una de sus diagonales.

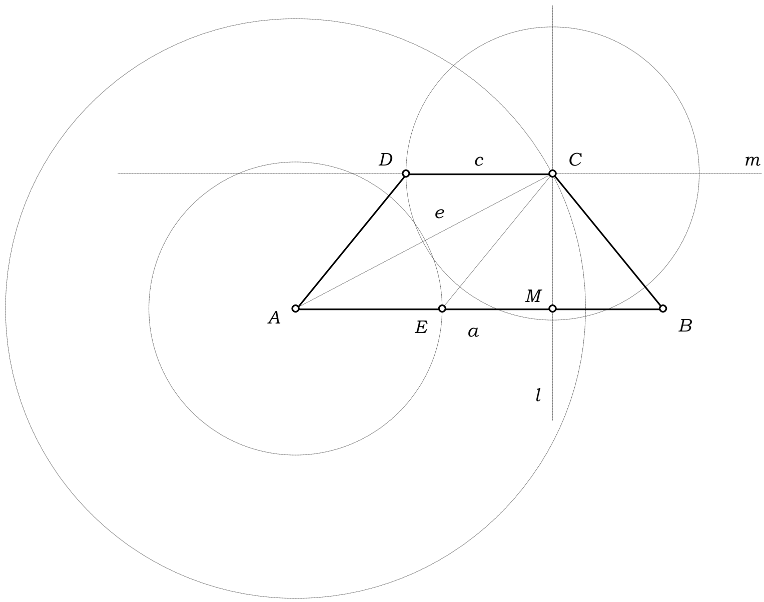


Figura 11.147

Sean a, c y e las partes conocidas del trapecio isósceles. Sin perder generalidad, supongamos que $a > c$.

1. Construimos (11.1.1) un segmento AB de longitud a.
2. Trazamos el círculo $\mathrm{C}(A,c)$ y sea E el punto donde este círculo corta al segmento AB.
3. Construimos (11.1.3) el punto medio M del segmento EB.
4. Trazamos (11.1.4) la recta l perpendicular a AB en el punto M.
5. Sea C el punto de intersección de l con el círculo $\mathrm{C}(A,e)$.
6. Construimos (11.1.8) la recta m paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ que pasa por el punto C.
7. Sea D el punto de intersección de m y el círculo $\mathrm{C}(C,c)$, el cual está en el mismo semiplano determinado por la recta l que contiene al punto A.

De acuerdo con el Teorema 5.3.2 (1.a), sabemos que $\square AECD$ es un paralelogramo. Por el Teorema 8.3.39, ΔCEB es un triángulo isósceles con $CE \cong CB$. De donde vemos que $DA \cong CE \cong CB$. Por consiguiente, $\square ABCD$ es el trapecio que se deseaba construir. ♣

11.8.16. Construcción. Sean m y n dos rectas paralelas, $A \in m$ y $B \in n$. Si P es un punto en el plano, trazar una recta l que pase por P y corte a m y n en los puntos X y Y, respectivamente, de tal forma que $|AX| + |BY|$ sea igual a un número real positivo dado.

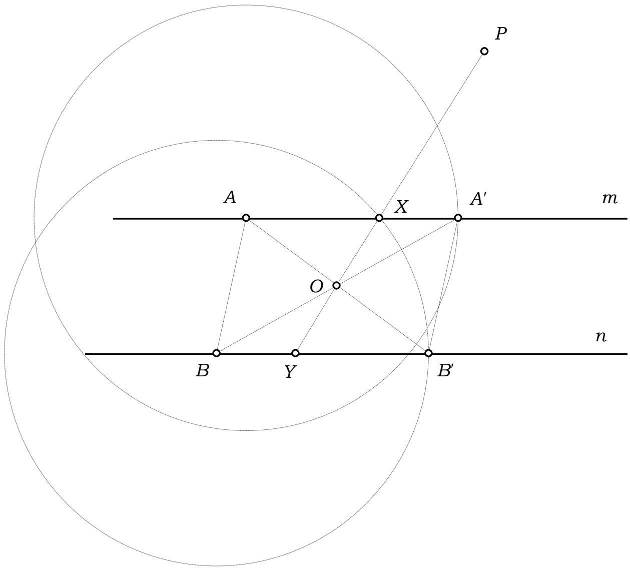


Figura 11.148

Sea $a > 0$ un número real.

1. Sea A' el punto de intersección de m con el círculo $\mathcal{C}(A,a)$.
2. Sea B' el punto de intersección de n con el círculo $\mathcal{C}(B,a)$.
3. Sea O el punto de intersección de AB' y BA'.
4. Denotamos por X y Y a los puntos de intersección de la recta $\overleftrightarrow{OP}$ con las rectas m y n, respectivamente.

En virtud del Teorema 5.3.2 (1.a), $\square BB'A'A$ es un paralelogramo. Sea O el punto de intersección de las diagonales de este paralelogramo. De acuerdo con el Problema 5.143, vemos que $BY \cong XA'$. Por lo tanto,

$$a = |AA'| = |AX| + |XA'| = |AX| + |BY|. \clubsuit$$

11.8.17. Construcción. Sean l y m dos rectas paralelas, $L \in l$, $M \in m$ y P y Q dos puntos que no estén entre l y m. Encontrar puntos $X \in l$ y $Y \in m$ tales que $XY \parallel LM$ y si $X' \in l$ y $Y' \in m$ satisfacen que $X'Y' \parallel LM$, entonces

$$|PX| + |XY| + |YQ| \leq |PX'| + |X'Y'| + |Y'Q|.$$

1. Construimos (11.1.8) la recta paralela a LM que pase por el punto Q, y sobre ella ubicamos (11.1.1) un punto R tal que $LM \cong RQ$. Sea X el punto de intersección de l y PR
2. Trazamos (11.1.8) la recta paralela a LM que pase por el punto X. Sea Y el punto de intersección de esta recta con la recta m.

Por construcción, sabemos que $XY \parallel LM$. Tomemos $X' \in l$ y $Y' \in m$ tales que $X'Y' \parallel LM$. De acuerdo con el Teorema 5.3.1, $\square X'Y'QR$ es un paralelogramo y, por tanto, $X'R \cong Y'Q$. De los Teoremas 4.4.9 y 5.3.1 hallamos que

$$|PX| + |XY| + |YQ| = |PX| + |XY| + |XR| = |PR| + |XY|$$
$$\leq |PX'| + |X'R| + |XY| = |PX'| + |X'Y'| + |Y'Q|. \quad \clubsuit$$

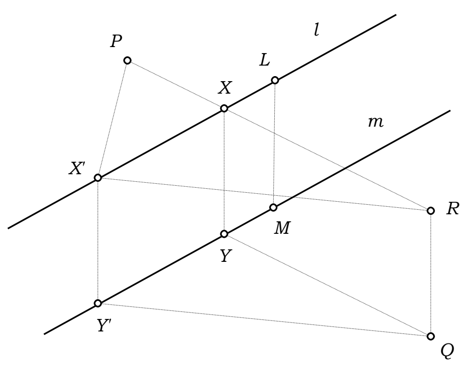


Figura 11.149

11.8.18. Construcción. Dados tres puntos en el plano, por uno de ellos trazar una recta de tal forma que la razón entre las distancias de los puntos restantes a la recta esté dada.

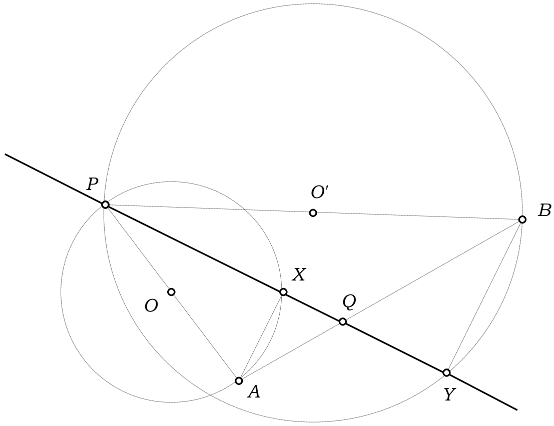


Figura 11.150

Sean P, A y B tres puntos en el plano y $p > 0$ un número real.

1. Construimos (11.3.1) el círculo $C(O,r)$ que tenga a PA como diámetro.
2. Trazamos (11.3.1) el círculo $C(O',r')$ que tenga a PB como diámetro.
3. Localizamos (6.3.1) un punto $Q \in AB$ tal que $\dfrac{|AQ|}{|QB|} = p$.

Denotemos por X y Ya los puntos donde la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ corta a los círculos $C(O,r)$ y $C(O',r')$, respectivamente. Según el Teorema 9.5.2, los ángulos $\angle PXA$ y $\angle BYQ$ son rectos. Del primer criterio desemejanza (6.2.6) deducimos que $\Delta AQX \sim \Delta BQY$. Como resultado de esta semejanza, concluimos que

$$\frac{|AX|}{|BY|} = \frac{|AQ|}{|QB|} = p = \frac{d(A,l)}{d(B,l)}. \clubsuit$$

11.9. Reemplazamiento

El método de *reemplazamiento* consiste esencialmente en reemplazar ciertas partes de la figura inicial por otras convenientes para obtener una figura auxiliar y, dentro de esta última, proceder a encontrar las partes restantes de la construcción que se solicita. Veamos a continuación un ejemplo:

11.9.1. Teorema. Construir un cuadrilátero □*ABCD* circunscrito conociendo *AB*, *AD*, ∠*B* y ∠*D*.

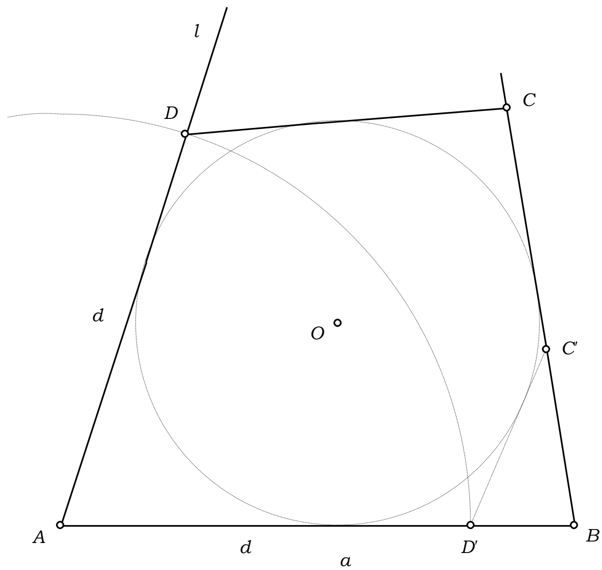


Figura 11.151

Pongamos $a = |AB|$ y $d = |AD|$. Sin perder generalidad, supongamos que $d < a$.

1. Construimos (11.1.1) un segmento *AB* de longitud *a*.
2. Trazamos el círculo C(*A*,*d*) siendo *D*' el punto en donde este círculo corta a *AB*.
3. Construimos (11.2.5) el triángulo Δ*C*'*D*'*B* tal que *m*(∠*BD*'*C*') = 180 − *m*(∠*D*), ∠*B* sea uno de sus ángulos y |*D*'*B*| = *a* − *d*.
4. Construimos (11.3.17) el excírculo C(*O*,*r*) del triángulo Δ*C*'*D*'*B* opuesto al vértice *B* y tangente a *D*'*C*'.
5. Trazamos (11.3.7) la recta *l* tangente a C(*O*,*r*) que pase por el punto *A*.
6. Sea *D* un punto de intersección de *l* y C(*A*,*d*).
7. Construimos (11.3.7) la recta tangente a C(*O*,*r*) que pase por el punto *D* y corte a la recta $\overleftrightarrow{BC'}$ en el punto *C*.

Sabemos que |*AB*| = *a*, |*DA*| = *d* y ∠*B* es uno de los ángulos del cuadrilátero □*ABCD*. Del Problema 9.115 y del Teorema 9.3.9, hallamos que ∠*C*'*D*'*A* ≅ ∠*ADC*. Pero como ∠*C*'*D*'*A* es un ángulo suplementario de ∠*BD*'*C*', el cual es a su vez un ángulo suplementario de ∠*D*, por el Teorema 2.7.8, obtenemos que ∠*C*'*D*'*A* ≅ ∠*D*. Con esto se demuestra que □*ABCD* es el cuadrilátero solicitado. ♣

En la construcción anterior, vimos que el vértice *D* es reemplazado por el punto *D*' y el vértice *C* es reemplazado por el punto *C*'. Así, colocamos ciertas piezas de la figura original de una manera estratégica en la figura auxiliar. Posteriormente, dentro de nuestra figura auxiliar, conseguimos poner al vértice *D* en su lugar, y luego obtener los lados restantes *CD* y *BC*.

11.9.2. Teorema. Construir un triángulo ΔABC, conociendo a, b y $\angle A - \angle B$.

De nuestra suposición observamos que $\angle A > \angle B$. Por el Teorema 4.4.3, sabemos que $a > b$.

1. Construimos (11.1.1) un segmento BC de longitud a.
2. Trazamos (11.1.11) un ángulo $\angle\alpha$ cuyo vértice sea el punto B, tenga a $\overrightarrow{BC}$ como uno de sus lados y $\angle\alpha \cong \angle A - \angle B$.
3. Sea D el punto en donde el círculo $C(B,b)$ corta al lado del ángulo $\angle\alpha$ que no contiene al punto C.
4. Construimos (11.1.2) la mediatriz m del segmento DC. Denotemos por E al punto de intersección de m y $\overleftrightarrow{BD}$.
5. Ubicamos (11.1.1) un punto $A \in \overleftrightarrow{CE}$ tal que A y E estén en diferentes semiplanos determinados por la recta $\overleftrightarrow{BC}$ y $|AE| = |BE|$.

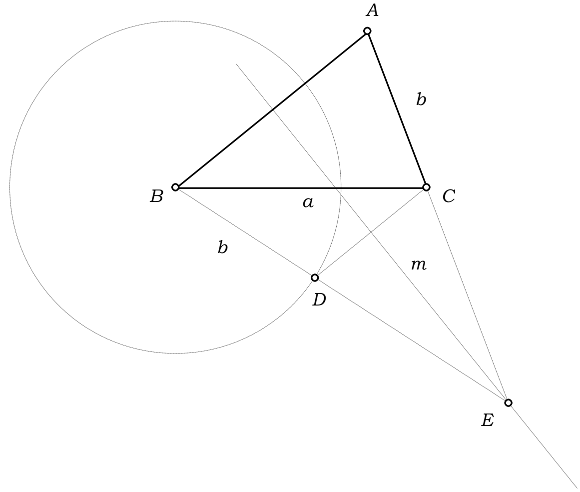


Figura 11.152

Nos encontramos con que los triángulos ΔEAB y ΔECD son isósceles (el primero es por construcción y el segundo es por el Teorema 4.2.2). Por ello, $BD \cong AC$ y $\angle EBA \cong \angle BAC$. Así, hallamos que $|BC| = a$ y $|AC| = b$. Por lo tanto, ΔABC es el triángulo solicitado. ♣

En la construcción que se llevó a cabo en 11.9.2, se reemplazó el vértice B por el vértice C, el vértice C por el vértice B y el vértice A por el vértice E. De esta forma, se dibuja el ángulo dado $\angle A - \angle B$ dentro de la figura auxiliar. Posteriormente, se obtienen las partes restantes del triángulo.

11.9.3. Construcción. Construir un triángulo ΔABC, conociendo a, h_a y $\angle B - \angle C$.

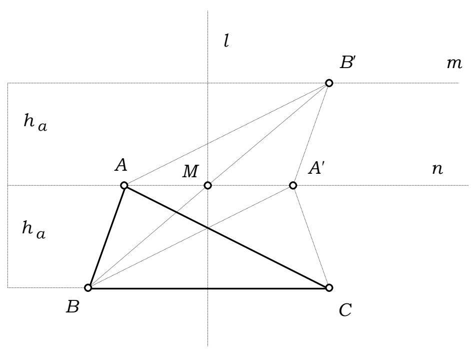


Figura 11.153

De nuestra suposición deducimos la desigualdad $\angle B > \angle C$.

1. Construimos (11.1.1) un segmento BC de longitud a.
2. Aplicando la Construcción 11.1.5 dos veces, trazamos dos rectas m y n paralelas a $\overleftrightarrow{BC}$, de tal forma que se cumpla la igualdad $d(m,n) = d(\overleftrightarrow{BC},n) = h_a$ y que la recta n esté entre las rectas m y $\overleftrightarrow{BC}$.
3. Construimos (11.1.2) la mediatriz l del segmento BC, la cual corta a la recta n en el punto M.
4. Sea B' el punto de intersección de $\overleftrightarrow{BM}$ y m.

5. Ubicamos (Problema 11.345) un punto $A \in n$, de tal manera que $m(\angle BAB') = 180 - m(\angle B - \angle C)$.

Para proceder a la justificación, construimos el punto simétrico A' de A con respecto al punto M. Según el Teorema 5.3.1, $\square ABA'B'$ es un paralelogramo. Por el mismo Teorema 5.3.1, hallamos que $\angle A'BA$ y $\angle BAB'$ son suplementarios. Por lo cual, $m(\angle A'BA) = m(\angle B - \angle C)$. De acuerdo con el Teorema 5.5.6, $\square ABCA'$ es un trapecio isósceles y, por ello, $\Delta ABC \cong \Delta A'BC$. De aquí tenemos que $\angle ACB \cong \angle CBA'$. Veamos ahora que ΔABC es el triángulo deseado. Efectivamente, claramente su altura con respecto al vértice A es h_a, $|BC| = a$ y

$$m(\angle CBA) - m(\angle CBA') = m(\angle CBA) - m(\angle ACB) = m(\angle A'BA) = m(\angle B - \angle C). \clubsuit$$

Otro método de reemplazamiento consiste en producir la solución mediante la construcción de una figura simétrica, posteriormente mediante el eje de simetría, uno encuentra las partes requeridas de la construcción. La siguiente construcción es un claro ejemplo de este procedimiento.

11.9.4. Construcción. En una recta dada, encontrar un punto cuya distancia a un punto dado sobre la misma recta sea igual a su distancia a una segunda recta dada.

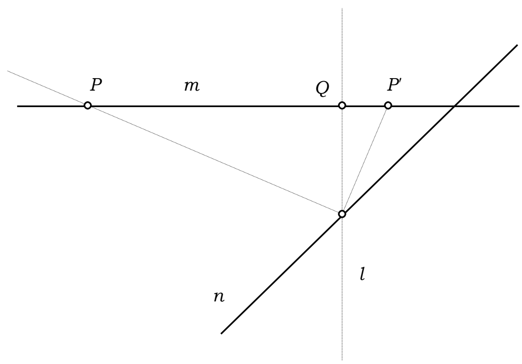


Figura 11.154

Sean m y n dos rectas, y $Q \in m$. Para nuestra construcción, es necesario considerar dos casos:

Caso I. m y n no son perpendiculares.

1. Trazamos (11.1.4) la recta l perpendicular a m en el punto Q.
2. Construimos (11.1.12) la bisectriz de uno de los ángulos que forman las rectas l y n, y sea P el punto de intersección de dicha bisectriz y la recta m.

Del Teorema 4.7.9 obtenemos que $d(P,l) = d(P,n)$. Pero como $d(P,l) = |PQ|$, concluimos que P es el punto solicitado. Hay la posibilidad de obtener dos soluciones: basta con trazar la bisectriz del ángulo formado por l y n que no se consideró en el segundo paso e intersecar dicha bisectriz con la recta m, obteniendo así un segundo punto P', que por las mismas razones anteriores es también una solución.

Caso II. Ahora supongamos que $m \perp n$.

1. Sea Q' el punto de intersección de m y n.
2. Construimos el punto medio P de QQ'.

Claramente, P satisface las condiciones. $\clubsuit$

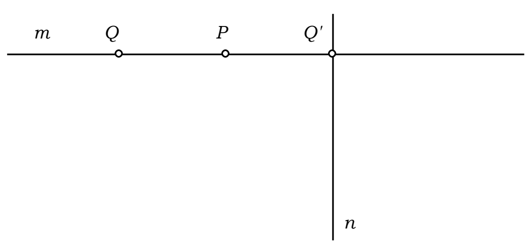


Figura 11.155

Problemas

11.1. En cada caso, realizar la construcción que se solicita:
a. Dos rectas l y m y puntos $A, B \in l$ y $C, D \in m$ tales que CB y AD se corten en su punto medio.
b. Dos rectas l y m y puntos $A, B \in l$ y $C \in m$ tales que $AB \cong BC \cong AC$.
c. Tres rectas l, m y n y puntos $A \in l$, $B \in m$ y $C \in n$ tales que $|AC| = |AB| + |BC|$.
d. Tres rectas l, m y n y puntos $A \in l$, $B \in m$ y $C \in n$ tales que $2|AC| = 3|AB| + |BC|$.
11.2. Dado un segmento, usando solamente el compás, hallar un punto sobre la recta que contiene al segmento dado diferente de los puntos del segmento.
11.3. Dado un punto construir un segmento de longitud dada cuyo punto dado sea el punto medio del mismo.
11.4. Duplicar un segmento.
11.5. Dividir un segmento en 8 partes iguales.
11.6. Construir un segmento que tenga longitud igual a la suma de las longitudes de tres segmentos dados.
11.7. Dados cuatro segmentos de longitudes a, b, c y d construir un segmento de longitud:

1. $a + 3b$. 2. $3a + 2b$. 3. $\sqrt{ab+cd}$. 4. $\sqrt{ab-cd}$ si $ab > cd$.
5. abc. 6. $\dfrac{ab}{c}$. 7. $\sqrt{a^2-b^2-c^2}$ si $a^2 > b^2 + c^2$. 8. $\sqrt{ab+c}$
9. $\dfrac{a+b\sqrt{2}}{5}$. 10. $\sqrt{3a^2+4b^2}$. 11. $\sqrt{a^4+b^4}$. 12. $\sqrt[4]{a^4+b^4}$. 13. $a\sqrt{3} + b\sqrt{5}$
14. $\sqrt{6a^2}$. 15. $\sqrt{2}\,a$. 16. $\dfrac{\sqrt{a+b+c}}{\sqrt{a-b-c}}$. 17. $\dfrac{a}{b}\,\dfrac{1}{c}$. 18. $\sqrt{abcd}$. 19. $\sqrt{(\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c})(\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{c^2}{d})}$.
20. $\sqrt{\dfrac{ad}{bc}}$. 21. $\dfrac{c}{d}(\dfrac{\sqrt{ab}}{cd}+\dfrac{\sqrt{cd}}{ab})$. 22. $\sqrt{a^2+\sqrt{b^2+c^2}}$.

11.8. Dado un segmento de longitud a, encontrar un segmento de longitud b tal que
$$\frac{a}{a-b} = \frac{a-b}{b}.$$
11.9. Dados tres segmentos de longitudes a, b y c, encontrar un segmento de longitud x tal que
$$\frac{x^2}{c^2} = \frac{a}{b}.$$
11.10. Dados cuatro segmentos de longitudes a, b, c y d, encontrar un segmento de longitud x tal que
$$\frac{a-b}{c-d} = \frac{1}{x}.$$
11.11. Dado un segmento de longitud unidad, construir un segmento de longitud 4, uno de longitud $\frac{1}{8}$, uno de longitud $\frac{6}{10}$ y uno de longitud $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$.
11.12. Construir un segmento cuya longitud sea igual a $\frac{3}{4}$ de la longitud de un segmento dado.
11.13. Construir un segmento de longitud p, sabiendo que hay un segmento de longitud $p - 2q$ y otro de longitud q.
11.14. Construir un segmento conociendo su segmento áureo.
11.15. Sean AB y CD dos segmentos de longitudes 9 y 7, respectivamente. Usando estos dos segmentos construir uno de longitud 1.

11.16. Dados segmentos de longitudes a, b, c, d, e, f, y g, construir uno de longitud $x = \dfrac{ab+cd}{efg}$.

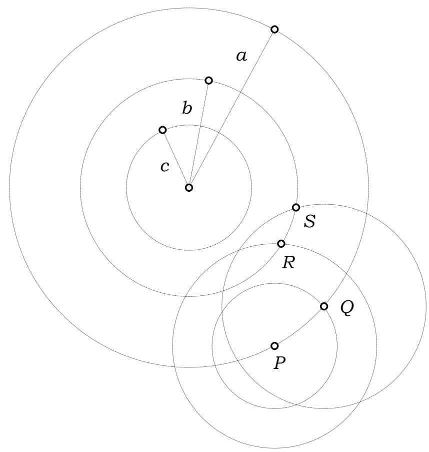
11.17. Dados dos segmentos de longitudes $a = \dfrac{x+y}{4}$ y $b = 3\sqrt{xy}$, construir dos segmentos de longitudes x y y.

11.18[I-223]. Usando solamente compás, veamos cómo encontrar la cuarta proporcional de los números a, b y c:

Sin perder generalidad, supongamos que $a > b > c$.

1. Trazamos los círculos concéntricos C(O,a), C(O,b) y C(O,c).
2. Fijamos un punto $P \in$ C(O,a) y trazamos el círculo C(P,c), el cual corta a C(O,a) en un punto Q.
3. Trazamos dos círculos C(P,r) y C(Q,r) congruentes de radio conveniente que corten a C(O,b) en los puntos R y S, respectivamente.

Si $x = |RS|$, probar que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{x}$.



11.19[I-238]. Dividir un segmento de longitud 3 en dos segmentos tales que la diferencia de los cuadrados de sus longitudes sea igual a 1.
11.20. Duplicar un ángulo agudo dado.
11.21. Dados dos ángulos agudos, construir un ángulo congruente a la suma de los dos ángulos dados.
11.22. Dados dos ángulos de diferente medida, construir un ángulo cuya medida sea igual a la diferencia de las medidas de los dos ángulos dados.
11.23. Construir un ángulo cuya medida sea igual a la suma de las medianas de tres ángulos dados, sabiendo que la suma de sus medidas no rebasa 180.
11.24. Sean $\angle\alpha$, $\angle\beta$ y $\angle\gamma$ tres ángulos. Construir un ángulo cuya medida sea igual a:

a. $m(\angle\alpha) + m(\angle\beta) - m(\angle\gamma)$, b. $\dfrac{m(\angle\alpha)+m(\angle\beta)}{2}$ y c. $\dfrac{m(\angle\alpha)-m(\angle\beta)}{4}$.

11.25. Construir ángulos de medidas 15, 75, 105 y 165.
11.26. Construir el ángulo suplementario adyacente de un ángulo dado.
11.27. Construir el ángulo complementario adyacente de un ángulo agudo dado.
11.28. Construir un ángulo cuya medida sea igual a $\frac{1}{3}$ la medida de uno de sus complementarios.
11.29. Construir un ángulo cuya medida sea igual a $\frac{3}{5}$ la medida de uno de sus suplementarios.
11.30. Dados dos rectas l y m y un punto $P \in l$, encontrar un punto Q sobre l tal que $d(P,Q) = 2d(Q,m)$.
11.31. Dados dos rectas y un punto en cada una de ellas, trazar una recta tal que corte a cada una de las rectas dadas, de tal forma que las distancias de los puntos de intersección a los puntos dados estén en una razón dada. ¿Es posible pedir que el segmento que forman los puntos de intersección tenga una longitud dada?
11.32. Sea AB un segmento de longitud 20. Sobre $\overleftrightarrow{AB}$ encontrar un punto M tal que $|AM| + 2|BM| = 32$.
11.33. Sean A, B y C tres puntos consecutivos y $0 < r$, s dos números reales. Encontrar puntos $M \in AB$ y $N \in BC$ tales que $|MN| = |AB|s + |BC|r$.
11.34. Sean AB un segmento y $C \in AB$. Encontrar un punto $P \in \overleftrightarrow{AB}$ tal que $|PC|^2 = |PA||PB|$.
11.35. Dados un segmento AB y un número real positivo r, encontrar $P \in \overleftrightarrow{AB}$ tal que $|AP|^2 = |BP|^2 + r$.
11.36. Dado un segmento AB encontrar un punto P en el plano tal que $|AB|^2 = |PA|^2 + |PB|^2$.

11.37. Sean A, B y C tres puntos consecutivos tales que $|AB| = |BC| = |CD|$. Encontrar un punto $M \in \overleftrightarrow{AB}$ tal que
$$|MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2 + |MD|^2 = k^2,$$
para un número real positivo dado k.

11.38. Si k es un número real y A y B son dos puntos en el plano, encontrar un punto $M \in \overleftrightarrow{AB}$ tal que
$$|MA|^2 + 3|MB|^2 = k^2.$$

11.39. Dado un segmento AB encontrar un punto $X \in \overleftrightarrow{AB}$ tal que $|AX|$ sea la media geométrica de $|BX|$ y $|AB|$.

11.40. Dado un segmento AB encontrar dos puntos $C, D \in AB$ tales que
$$|AC| = \frac{2}{3}|AB|,\ \ |CD| = \frac{1}{8}|AB| \ \text{ y } \ |DB| = \frac{5}{24}|AB|.$$

11.41. Dado un punto P sobre una recta l, encontrar puntos A, $B \in l$ tales que $P \in AB$, las longitudes de AP y PM estén en una proporción dada y AB tenga una longitud dada.

11.42. Dados tres puntos consecutivos O, A y B, encontrar un punto $M \in \overleftrightarrow{AB}$ tal que $|OM|^2 = |AM||BM|$.

11.43. Sea AB un segmento, l una recta que pasa por A y $C \in l - \{A\}$. Encontrar un punto P en la mediatriz de AC, de tal forma que $d(P,l) = d(P,B)$.

11.44. Trazar una recta paralela a una dada que equidiste de dos puntos dados.

11.45 [l-56]. Sean l y m dos rectas paralelas y A, $B \in l$. Encontrar un punto $P \in m$ tal que $|PA| = 2|PB|$.

11.46. Por un punto dado P, trazar tres rectas en las cuales se puedan tomar puntos A, B y C, en cada una de ellas, de tal forma que sean colineales, $AB \cong BC$ y los segmentos PA, PB y PC tengan longitud dada.

11.47. Dados tres puntos no colineales, encontrar un punto equidistante a ellos, ¿es posible encontrar siempre un punto equidistante a cuatro puntos dados?

11.48. Dados tres puntos colineales, hallar un cuarto punto colineal con los puntos dados tal que la distancia entre este punto y el punto de en medio de los tres dados sea la media geométrica entre las distancias de dicho punto a los dos puntos dados restantes.

11.49 [l-78]. Sean A, B y C tres puntos colineales tales que B es el punto medio de AC. Sea P un punto tal que $AP \cong AB$ y $PC \cong AC$.

a. Si M es el punto medio de AB, probar que $PM \cong PA$.

b. Dados dos puntos A y B, deducir cómo hallar el punto medio del segmento AB, usando compás solamente.

El último problema aparece como un acertijo en el libro [l-126], y en él se explica una solución.

11.50. Dados dos rectas secantes y un punto fuera de ambas, encontrar un punto equidistante de las dos rectas dadas que esté a una distancia dada del punto dado.

11.51. Dados dos rectas y un punto fuera de ambas, encontrar un punto en una de las rectas equidistante del punto dado y de la otra recta dada.

11.52. Sean m y n dos rectas secantes. Determinar un punto P tal que equidiste de las dos rectas a una distancia dada.

11.53. Sean l y m dos rectas que se intersecan en el punto P. Encontrar todos los puntos que sean equidistantes a las dos rectas dadas y al punto de intersección.

11.54. Dadas tres rectas concurrentes, ¿es posible hallar un punto que equidiste de las tres rectas dadas y del punto de concurrencia?

11.55. Dadas tres rectas no concurrentes y no paralelas entre sí, encontrar un punto que equidiste de las tres rectas dadas, ¿es posible encontrar dicho punto en el caso cuando dos rectas sean paralelas y la tercera sea una transversal a ellas?

11.56. Dadas tres rectas concurrentes, trazar una recta que corte a las tres rectas dadas, formando dos segmentos congruentes.

11.57. Dadas tres rectas concurrentes, trazar por un punto dado una recta que corte a las tres rectas, formando dos segmentos tales que la razón de sus longitudes esté dada.

11.58. Dados una recta l y un punto $A \notin l$, construir el punto simétrico de A con respecto a la recta l y la proyección de A sobre la misma recta l.

11.59. Dados dos rectas secantes l y m y un punto P fuera de ellas, encontrar puntos $A \in l$ y $B \in m$, de tal forma que P sea el punto medio del segmento AB.

11.60. Dados dos rectas secantes l y m y un punto P fuera de ellas, encontrar puntos $A \in l$ y $B \in m$, de tal forma que los puntos A y B sean simétricos con respecto al punto P.
11.61. Trazar por cada uno de dos puntos dados rectas que sean paralelas y que estén a una distancia dada.
11.62. Por un punto dado, trazar una recta que corte a dos rectas dadas, de tal forma que los segmentos determinados por el punto dado y los dos puntos de intersección de la recta con las rectas dadas sean congruentes.
11.63. Por un punto dado, trazar una recta transversal a dos rectas paralelas tal que el segmento que determinan los puntos de intersección tenga una longitud dada.
11.64. Sean m y n dos rectas paralelas, $A \in m$ y $P \notin m \cup n$. Trazar una recta l que pase por el punto P y corte a m y n en los puntos B y C, respectivamente, de tal forma que $AB \cong AC$.
11.65. Por un punto dado, trazar una recta transversal a dos rectas paralelas tal que la suma de las distancias del punto dado a cada uno de los dos puntos de intersección esté dada.
11.66. Por un punto dado, trazar una recta transversal a dos pares de rectas paralelas con diferente dirección de tal forma que se obtengan dos segmentos congruentes.
11.67. Tenemos dos rectas paralelas y puntos A y B en cada una de ellas. Por un punto dado trazar una recta que corte a las rectas paralelas en los puntos P y Q de tal forma que la razón $\dfrac{|AP|}{|BQ|}$ esté dada.
11.68. Dados dos rectas y un punto en cada una de ellas, trazar por cada uno de los puntos dados una recta de tal manera que las rectas así obtenidas sean paralelas y la suma de las longitudes de los segmentos que ellas determinan con las rectas dadas esté dada.
11.69. Dadas dos rectas paralelas l y m, una transversal a ellas n y un punto P fuera de las tres rectas, trazar una recta que pase por el punto P y corte a las rectas l, m y n en los puntos A, B y C, respectivamente, de tal forma que las longitudes $|AB|$ y $|PC|$ estén en una proporción dada.
11.70. Sean l y m dos rectas paralelas. Supongamos que I es un punto entre l y m y los puntos $A \in l$ y $B \in m$ satisfacen que $AB \perp l$ y $AB \perp m$. Encontrar dos puntos $C \in l$ y $D \in m$ tales que
a. $CD \perp l$ y $CD \perp m$, y
b. Si P y Q son los puntos de intersección de la rectas $\overleftrightarrow{IC}$ y $\overleftrightarrow{AB}$, y las rectas $\overleftrightarrow{ID}$ y $\overleftrightarrow{AB}$, respectivamente, entonces el área del triángulo ΔIPQ es igual a un número real positivo dado.
11.71. Sean l y m dos rectas paralelas y $A \in l$ y $B \in m$ tales que $AB \perp l$ y $P \in AB$.
a. Trazar una recta que pase por el punto P y corte a l y m en los puntos C y D, respectivamente, de tal manera que $m(\angle BDP) = 45$.
b. Trazar una recta que pase por el punto P y corte a l y m en los puntos M y N, respectivamente, de tal forma que la suma $are(\Delta PCM) + are(\Delta PDN)$ sea igual a un número dado.
11.72 [a-70] Usando el Teorema del Segmento Medio (4.3.10), construir una recta paralela a una recta dada que pase por un punto dado fuera de ella.
11.73. Sean $\angle\alpha$ un ángulo no degenerado con vértice O y $P \in int(\angle\alpha)$. Encontrar puntos A y B en los lados del ángulo $\angle\alpha$, de tal forma que ΔOAB sea un triángulo isósceles con base AB y $P \in AB$.
11.74. Dados un ángulo no degenerado y un punto en él, trazar por el punto dado dos rectas tal que con los lados del ángulo se formen dos triángulos equivalentes.
11.75. Dados una recta y un punto sobre ella, trazar un ángulo cuyo vértice sea el punto dado y su bisectriz esté sobre la recta dada.
11.76. Dados una recta y dos puntos en distintos semiplanos determinados por la recta dada, hallar un punto sobre la recta tal que se pueda tener un ángulo cuyo vértice es este punto y cada uno de sus lados pase por uno de los puntos dados y su bisectriz esté sobre la recta dada.
11.77. Si l es una recta que está entre los puntos A y B, encontrar un punto $P \in l$ tal que los ángulos de vértice P y cuyos lados sean $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$ y las semirrectas de l de vértice P sean congruentes.
11.78. Dados una recta l, dos puntos A y B sobre ella, y dos puntos C y D en un mismo semiplano determinado por l, encontrar un punto $P \in l$ tal que $m(\angle APC) = 3m(\angle BPD)$.
11.79. Dados una recta l y dos puntos A y B en un mismo semiplano determinado por dicha recta, encontrar un punto $P \in l$ tal que las rectas $\overleftrightarrow{PA}$ y $\overleftrightarrow{PB}$ determinen con la recta l dos ángulos congruentes.

11.80. Sean l y m dos rectas secantes y $P \notin l \cup m$. Trazar una recta que pase por el punto P y que forme con las rectas l y m dos ángulos congruentes.
11.81. Dados dos puntos y dos rectas secantes, trazar una recta equidistante a los dos puntos dados y que forme con las rectas dadas dos ángulos congruentes.
11.82. Trazar una recta por un punto dado que corte a dos rectas dadas, formando dos ángulos tales que uno sea el triple del otro.
11.83. Tomando como vértice un punto dado, construir un ángulo congruente a un ángulo dado cuyos lados corten a una recta dada en un segmento de longitud dada.
11.84. Definición. Dos rectas se llaman *antiparalelas* con relación a dos rectas que se cortan si el cuadrilátero que forman es cíclico.
a. Dados un ángulo y un punto en su exterior, trazar un ángulo congruente al ángulo dado y cuyo vértice sea el punto dado, de tal forma que las rectas que contienen sus lados sean antiparalelas con las rectas que contienen a los lados del ángulo dado.
b. Por un punto dado, trazar dos rectas que formen un ángulo congruente a un ángulo dado y que sean antiparalelas con las rectas que contienen a los lados del ángulo dado.
11.85. Dados dos puntos, por uno de ellos trazar una recta tal que su distancia al otro punto esté dada.
11.86. Dados dos puntos y dos números reales positivos a y b, trazar una recta tal que sus distancias a los dos puntos dados sean iguales a a y a b.

11.87. Sean $\angle AOB$ un ángulo no degenerado y $P \in \overrightarrow{OA}$. Encontrar un punto $Q \in \overrightarrow{OA}$ tal que $d(P,Q) = d(Q, \overrightarrow{OB})$.

11.88. Sea $\angle AOB$ un ángulo no degenerado. Encontrar un punto $P \in \overrightarrow{OA}$ tal que $d(P,A) = d(P, \overrightarrow{OB})$.

11.89. Sea $\angle AOB$ un ángulo no degenerado. Si $M \in int(\angle AOB)$, encontrar puntos $P \in \overrightarrow{OA}$ y $Q \in \overrightarrow{OB}$, de tal forma que M sea el punto medio de PQ.

11.90. Sean $\angle AOB$ un ángulo no degenerado y $C \in int(\angle AOB)$. Dado $I \in \overrightarrow{OC}$, encontrar $P \in \overrightarrow{OA}$ y $Q \in \overrightarrow{OB}$ tales que I sea el punto medio del segmento PQ.
11.91. Sean $\angle AOB$ ángulo no degenerado y l una recta que corte los dos lados del ángulo. Encontrar dos puntos $C \in \overrightarrow{OA}$ y $D \in \overrightarrow{OB}$ tales que $DC \perp l$ y que DC y l se corten en el punto medio de DC.

11.92. Sean $\angle AOB$ ángulo no degenerado y $a > |OA|$. Encontrar un punto $M \in \overrightarrow{OB}$ tal que $|OM| + |MA| = a$.
11.93. Sean $\angle\alpha$ un ángulo no degenerado con vértice O y P un punto en su interior. Trazar una recta l que pase por el punto P y corte a los lados de $\angle\alpha$ en lo puntos A y B, de tal forma que el cociente $\dfrac{|OA|}{|OB|}$ esté dado.

11.94. Sean $\angle AOB$ un ángulo no degenerado y $C \in int(\angle AOB)$. Dado $I \in \overrightarrow{OC}$, encontrar una recta l que pase por I y que corte a $\overrightarrow{OA}$ y a $\overrightarrow{OB}$ en los puntos P y Q, respectivamente, de tal modo que $\dfrac{|IQ|}{|IP|} = \dfrac{4}{5}$.
11.95. Dado un punto en el interior de un ángulo, trazar una recta que corte a los lados del ángulo dado tal que los dos segmentos determinados por el punto dado y los puntos de intersección sean tales que el producto de sus longitudes esté dada.
11.96. Sean A, B y C tres puntos consecutivos y r y s dos números reales positivos. Encontrar puntos $M \in AB$ y $N \in BC$ tales que $\dfrac{|MB|}{|BN|} = \dfrac{|AM|}{|NC|} = \dfrac{r}{s}$.

11.97. Sean AB un segmento y $r > 0$ un número real. Encontrar dos puntos $M, N \in \overleftrightarrow{AB}$ tales que
$$\frac{|AN||MB|}{|NB||AM|} = r.$$
11.98. Sean A, B, C, D y O cinco puntos colineales tales que A, B, C y D son consecutivos. Si $a = |AO|$, $b = |AO|$, $c = |CO|$ y $d = |DO|$, encontrar un punto $X \in \overleftrightarrow{AO}$ tal que

$$|XM| = \frac{|AM|+|BM|+|CM|+|DM|}{4},$$

para todo punto $M \in \overleftrightarrow{AO} - \{X\}$.

11.99. Sean l una recta y $O \notin l$. Dados un punto $M \in l$ y un número positivo r encontrar un punto $M' \in l$ tal que

$$\frac{|OM'|}{|OM|} = r$$

11.100[l-279]. Sean AC un segmento y $B \in AC$ un punto que divide al segmento AC áureamente (es decir $|AB|$ es la media geométrica de $|AC|$ y $|BC|$). Probar las siguientes identidades:

1. $(|AB| + \frac{|AC|}{2})^2 = 5(\frac{|AC|}{2})^2$.
2. $(|BC| + \frac{|AB|}{2})^2 = 5(\frac{|AB|}{2})^2$.
3. $|AC|^2 + |BC|^2 = 3|AB|^2$.

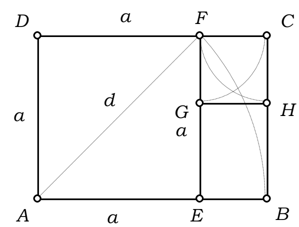
11.101. Probar que para todo número natural $k > 1$, se cumple la identidad $H(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k-1}) = \frac{1}{k}$.

11.102[a-48]. Sean $\square ABCD$ un rectángulo, y M y N los puntos medios de AB y CD, respectivamente. Pongamos $a = |AB|$ y $b = |BC|$.

a. Probar que $\square ABCD \sim \square MBCN$ si y solo si $a = \sqrt{2}\, b$.

b. Si $\square ABCD \sim \square MBCN$ y $are(\square ABCD) = 1$, hallar las longitudes de los lados del rectángulo.

11.103[a-48]. Sean $\square AEFD$ un cuadrado, $a = |AB|$ y $d = |AC|$. Trazamos el círculo $C(A,d)$, el cual corta a la semirrecta $\overrightarrow{AE}$ en el punto B. Por último trazamos la recta paralela a $\overleftrightarrow{AD}$ que pase por B y sea C su punto de intersección con la semirrecta $\overrightarrow{DF}$. Consideremos el rectángulo $\square ABCD$.



a. Si M y N son los puntos medios de AB y CD, probar que

$$\square ABCD \sim \square MBCN.$$

b. Si $G \in EF$ y $H \in BC$ son tales que $FC \cong GF \cong HC$, probar que

$$\square ABCD \sim \square EBHG.$$

11.104. Dados dos segmentos no paralelos AB y CD, construir un punto P en el plano, de tal forma que los triángulos ΔPAB y ΔPCD sean isósceles.

11.105. Dados tres puntos no colineales determinar una recta que pase por uno de estos puntos y equidiste de los otros dos.

11.106. Sean A, B y C tres puntos no colineales. Trazar una recta l que pase por A tal que $d(C,l) = 2d(B,l)$.

11.107. Dado un triángulo ΔABC, hallar un punto P en su interior tal que $d(P,AB) = 2d(P,BC)$ y $d(P,AC) = 3d(P,BC)$.

11.108. Dado un triángulo ΔABC, trazar una recta que pase por el vértice A, equidiste de los vértices B y C, y no corte al segmento BC.

11.109. Dado un triángulo, trazar una recta equidistante de los tres vértices del triángulo. ¿Cuántas de estas rectas es posible trazar?

11.110. Dados tres puntos A, B y C en el plano, encontrar un punto en el plano que sea equidistante de A y B, y que esté a una distancia dada del punto C.

11.111. Por uno de los vértices de un triángulo, trazar una recta tal que la suma de sus distancias a los otros dos vértices del mismo triángulo esté dada.

11.112. Por uno de los vértices de un triángulo, trazar una recta tal que la diferencia de sus distancias a los otros dos vértices del mismo triángulo esté dada.

11.113. Construir un segmento cuya longitud sea igual al perímetro de un triángulo dado.

11.114 [l-101]. Dados un triángulo ΔABC y un punto $D \in AB$, trazar una recta que corte a $\overleftrightarrow{BC}$ en un punto E tal que $are(\Delta ABC) = are(\Delta DEB)$.

11.115. Dividir un triángulo dado en dos regiones poligonales equivalentes, trazando una recta paralela a uno de los lados del triángulo.
11.116. Dividir un triángulo dado en dos regiones poligonales equivalentes, trazando una recta en una dirección dada.
11.117. Dividir un triángulo dado en dos regiones poligonales equivalentes, trazando una recta perpendicular a uno de los lados del triángulo.
11.118. Dividir un triángulo dado en dos regiones poligonales equivalentes, trazando una recta que pase por un punto dado del mismo triángulo.
11.119. ¿Dentro de cualquier triángulo es posible encontrar un punto tal que cualquier recta que pase por él corte al triángulo en dos regiones equivalentes?
11.120. Dividir un triángulo isósceles dado en dos regiones poligonales equivalentes, trazando una recta que pase por un punto dado en la altura correspondiente a la base del mismo triángulo (dicha recta no debe ser perpendicular a la base del triángulo).
11.121. Trazar tres rectas por uno de los vértices de un triángulo dado que lo dividan en tres regiones poligonales equivalentes.
11.122. Dividir un triángulo en tres regiones equivalentes, trazando rectas que pasen por los vértices y sean concurrentes.
11.123. Dividir un triángulo en tres regiones equivalentes, trazando rectas que pasen por dos puntos dados del mismo triángulo.
11.124. Trazar rectas que dividan a un triángulo dado en dos regiones cuyas áreas estén en una razón dada.
11.125. Dividir un lado de un triángulo, de tal forma que la diferencia de las longitudes de dichas partes sea igual a la diferencia de las longitudes de los otros dos lados del triángulo.
11.126. Dado un triángulo, trazar una recta que corte al triángulo, de tal forma que la distancia de cada uno de los vértices del triángulo a la recta estén en proporción con tres números reales positivos dados.
11.127. Sea ΔABC un triángulo tal que $b > c$. Dado un número real $c < p < b$, encontrar un punto $M \in BC$ tal que si P es el punto de intersección de la recta paralela a AC y AB, y Q es el punto de intersección de la recta paralela a AB y AC, entonces $|MP| + |MQ| = p$.
11.128. Sea ΔABC un triángulo. Dado un número real positivo p trazar una recta paralela a BC que corte a los lados AC y AB en los puntos M y N, respectivamente, de tal forma que $|BN| + |NM| + |MC| = p$.
11.129. Dado un triángulo ΔABC, encontrar una recta paralela a BC que corte a AC y AB en los puntos M y N, respectivamente, de tal forma que $|MN| = |BN| + |MC|$.
11.130. Dado un triángulo ΔABC, encontrar un punto $M \in BC$ equidistante de AB y BC.
11.131. Dado un triángulo ΔABC, encontrar puntos $E \in AB$ y $F \in AC$ tales que $BE \cong AF$ y $EF \parallel BC$.
11.132. Dado un triángulo ΔABC con $AB > AC$, encontrar un punto $D \in \overleftrightarrow{BC}$ tal que $AC < AD < AB$.
11.133. Dado un triángulo ΔABC, encontrar un punto $D \in \overleftrightarrow{BC}$ tal que $|AD| = \dfrac{|AB| + |AC|}{2}$.
11.134. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$. Encontrar un punto $D \in BC$ tal que si E es la proyección de D sobre AB se cumpla la congruencia $DE \cong DC$.
11.135. Sean ΔABC un triángulo y l una recta. Encontrar un punto $P \in l$ en el plano tal que $\angle APB \cong \angle ACB$.
11.136. Sean l y m dos rectas secantes. Encontrar puntos A, $B \in l$ y $C \in m$ tales que el triángulo ΔABC sea congruente a un triángulo dado.
11.137. Dado un triángulo, encontrar un punto en su interior desde el cual sus tres lados se vean bajo un mismo ángulo.
11.138. Dados dos puntos A y B, construir un triángulo isósceles con base AB tal que su tercer vértice esté en una recta dada.
11.139. Dado un triángulo, trazar una recta paralela a uno de sus lados que corte a las rectas que contienen los dos lados restantes, de tal manera que se forma un triángulo semejante al dado cuya área duplique a la del triángulo original.
11.140. Sea ΔABC un triángulo. Una recta paralela a BC corta a AB y a AC en los puntos D y E, respectivamente, y la recta paralela a BE corta a $\overleftrightarrow{AB}$ en el punto F.

a. Probar que $|AB|^2 = |AD||AF|$.

b. Dados dos segmentos de longitudes a y b, construir un segmento de longitud x tal que $a^2 = bx$.

11.141. Por un punto dado sobre una de las rectas que contiene a uno de los lados de un triángulo dado, trazar una recta que corte a los otros dos lados del triángulo formando dos segmentos congruentes.

11.142. Dados dos triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$, construir un triángulo ΔLMN inscrito en ΔABC, de tal forma que $L \in AB$, $M \in BC$ y $N \in AC$, y que sea semejante a $\Delta A'B'C'$.

11.143. Dado un triángulo, inscribir en él un triángulo isósceles del cual conocemos solamente la longitud de su base y una de sus alturas.

11.144. En un triángulo dado, inscribir un triángulo del cual solo conocemos las longitudes de dos de sus lados y uno de sus vértices que yace sobre uno de los lados del triángulo dado. Considerar todos los casos posibles.

11.145. En un triángulo inscribir un triángulo del cual solo conocemos las direcciones de sus lados.

11.146. En un triángulo dado, inscribir un triángulo equilátero tal que uno de sus lados sea paralelo a uno de los lados del triángulo dado.

11.147. Dado un triángulo, construir sus alturas, mediatrices, bisectrices y medianas.

11.148. Dado un triángulo ΔABC, construir su circuncentro, su incentro, su ortocentro y su centro de gravedad.

11.149. Construir un triángulo rectángulo arbitrario.

11.150. Construir un triángulo cuyos ángulos sean todos agudos.

11.151. Construir un triángulo con un ángulo obtuso.

11.152. Dado un triángulo, construir uno semejante a él que duplique su área.

11.153. Construir un triángulo semejante a un triángulo dado que tenga un perímetro dado.

11.154. Dados dos triángulos, construir un triángulo que sea semejante a uno de los dados, y que sea equivalente al otro.

11.155. Dado un triángulo, construir un triángulo semejante al dado tal que dos de sus vértices estén dados, y el tercer vértice esté sobre una recta dada.

11.156. Construir un triángulo isósceles que tenga la misma área que un triángulo dado.

11.157. Construir un triángulo equilátero cuya área sea igual al área de un triángulo dado.

11.158. Construir un triángulo equivalente a uno dado tal que solo uno de sus vértices esté sobre una recta dada.

11.159. Dado un triángulo ΔABC, construir un triángulo ΔDBC que duplique el área del triángulo dado y $m(\angle ABC) = 2m(\angle DBC)$.

11.160. Construir un triángulo equivalente a un triángulo dado, de tal manera que el nuevo triángulo tenga un ángulo congruente a uno de los ángulos del triángulo dado y uno de los lados adyacentes a dicho ángulo tenga longitud 3.

11.161. Dados dos triángulos semejantes no congruentes, construir un triángulo semejante a ellos tal que su área sea igual a la diferencia de las áreas de los dos triángulos dados.

11.162. En cada caso, construir un triángulo ΔABC que satisfaga las condiciones que se piden:

1. $a = 4$, $b = 6$ y $c = 8$. 2. $m(\angle B) = 30$, $a = 3$ y $b = 7$. 3. $m(\angle B) = 45$, $m(\angle C) = 60$ y $a = 10$.
4. $m(\angle B) = 120$, $m(\angle C) = 15$ y $c = 5$. 5. $|AB| = 12$, $|AM_a| = 15$ y $|AC| = 20$.
6. $m(\angle B) = 40$, $m(\angle C) = 60$ y $h_a = 2$.
7. ¿Es posible construir un triángulo ΔABC tal que $m(\angle B) = 30$, $c = 4$ y $b = 1$?
8. $m(\angle B) = 30$, $c = 2$ y $b = 1$, ¿cuántos de estos triángulos hay?
9. $m(\angle B) = 30$, $c = 2$ y $b = \frac{\sqrt{7}}{2}$, ¿cuántos de estos triángulos hay?
10. $m(\angle B) = 30$, $c = 2$ y $b = 4$, ¿cuántos de estos triángulos hay?
11. $m(\angle B) = 30$, $c = 2 = b$, ¿cuántos de estos triángulos hay?
12. ¿Cuántos triángulos hay con dos lados de longitudes 3 y 5 cuya área sea igual a 10?

11.163. Construir un triángulo semejante al triángulo $\Delta(4,8,10)$ tal que su lado correspondiente al lado a del triángulo dado tenga longitud 10.

11.164. Construir un triángulo ΔABC, sabiendo que $c = 6$, $m(\angle B) = 45$ y $\angle A$ es un ángulo recto, y conociendo a la recta l que contiene al lado BC.

11.165. Construir un triángulo sabiendo que $m(\angle A) = 40$, $a = 3$ y $\frac{b}{c} = \frac{3}{2}$.

11.166. Construir un triángulo semejante a un triángulo dado cuyo radio de proporción sea igual a $\frac{3}{4}$.

11.167. Construir un triángulo semejante a uno dado cuya área sea $2\frac{1}{2}$ veces más grande que el área del triángulo dado.

11.168. Construir un triángulo semejante a uno dado cuyo perímetro sea $3\frac{2}{3}$ veces más grande que el perímetro del triángulo dado.

11.169. Construir un triángulo semejante a uno dado, de tal forma que la longitud de una de sus alturas sea igual a 4.

11.170. Construir un triángulo de perímetro 40 y cuyos lados estén en proporción 2:3:4.

11.171. Construir un triángulo cuyos lados estén en proporción 3:4:5 y cuya área sea igual al área de un cuadrado de lado 4.

11.172. Sean ΔABC y $P \in int(\Delta ABC)$. Mostrar cómo trazar una recta que pase por P, de tal modo que el segmento que determina sus intersecciones con los lados AB y AC quede dividido por P en la razón 3:2.

11.173. Dividir internamente un lado de un triángulo en segmentos proporcionales a los otros dos lados del mismo triángulo.

11.174. Dividir internamente una de las medianas de un triángulo en segmentos proporcionales a los otros dos lados del mismo triángulo que incluyen a dicha mediana.

11.175. Si la longitud de un cateto de un triángulo rectángulo es la media geométrica de las longitudes del otro cateto y la hipotenusa, probar que la altura correspondiente a la hipotenusa divide a esta áureamente.

11.176. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$. Encontrar un punto $P \in BC$ tal que la suma $d(P, \overleftrightarrow{AB}) + d(P, \overleftrightarrow{AC})$ esté dada.

11.177. Sean $\angle XOY$ un ángulo recto y $\overrightarrow{OZ}$ su bisectriz. Se dan $P \in \overrightarrow{OZ}$ y un número real $p > 0$. Encontrar puntos $A \in \overrightarrow{OX}$ y $B \in \overrightarrow{OY}$ tales que $are(\Delta AOB) = p$.

11.178. Dadas dos rectas paralelas y una recta transversal a ellas, construir un triángulo equilátero de lado dado, de manera que dos de sus vértices estén sobre las rectas paralelas, y el tercer vértice sobre la recta transversal

11.179. Dado un segmento AB, encontrar un punto P en el plano tal que el área del triángulo ΔPAB sea igual a un número dado.

11.180. Construir un triángulo, conociendo las direcciones de sus lados y un punto de cada uno de ellos.

11.181. En cada caso, construir el triángulo ΔABC, conociendo las partes que se dan:

1. $\angle A$, b y $a - c$.	2. a, $b - c$ y $\angle B - \angle C$.	3. c, b_a y $\angle B - \angle C$.	4. a, h_b y h_c.
5. $\angle A$, a y $b + c$.	6. $\angle A$, a y $a + b + c$.	7. $\angle B$, a y $b + c$.	8. $\angle A$, $\angle B$ y $a + b + c$.
9. $\angle A$, a y $\frac{b}{c}$.	10. $\angle A$, $a + b + c$ y b_a.	11. a, $b + c$ y b_a.	12. a, $b + c$ y $\angle B - \angle C$.
13. $\angle A$, $a + b$ y $b - c$.	14. a, $\angle A$ y $b^2 + c^2$.	15. a, $\angle A$ y $b^2 - c^2$.	16. a, h_a y $b^2 + c^2$.
17. a, h_b y m_a.	18. $\angle A$, $\angle B$ y h_b.	19. $\angle B$, $\angle C$ y $b + c$.	20. $\angle A$, $\angle B$ y $b + c$.
21. $\angle B$, $\angle C$ y $b - c$.	22. $\angle A$, $\angle B$ y $b - c$.	23. $\angle B$, $\angle C$ y $s - a$.	24. $\angle B$, $\angle C$ y m_a.
25. $\angle B$, $\angle C$ y h_a.	26. $\angle B$, $\angle C$ y b_a.	27. $\angle B$, $\angle C$ y e_a.	28. $\angle B$, $\angle C$ y b_b.
29. $\angle B$, $\angle C$ y s.	30. $\angle A$, a y $b + c$.	31. $\angle A$, a y $b - c$.	32. h_a, h_a y h_c.
33. a, h_a y $\frac{b}{c}$.	34. $\angle A$, a y h_a.	35. $\angle A$, a y h_b.	36. $\angle A$, b y h_a.
37. $\angle A$, b y h_b.	38. $\angle A$, c y h_a.	39. $\angle A$, h_a y h_b.	40. $\angle A$, h_b y b_b.
41. $\angle A$, h_b y m_c.	42. $\angle A$, h_a y b_a.	43. $\angle A$, h_a y e_a.	44. $\angle A$, a y m_a.
45. $\angle B$, c y m_c.	46. $\angle B$, a y m_b.	47. a, b y b_c.	48. $\angle B$, c y b_a.

49. $\angle B$, c y b_b. 50. $\angle B$, h_a y m_a. 51. $\angle C$, h_c y b_c. 52. a, b y h_a.
53. a, b y h_c. 54. a, m_a y m_b. 55. a, m_b y m_c. 56. a, h_a y m_b.
57. b, c y m_b. 58. b, c y m_a. 59. b, m_b y b_b. 60. c, h_a y m_a.
61. h_a, m_a y m_b. 62. h_a, m_a y b_a. 63. h_a, m_a y e_a.
64. $\angle A$, $b + c$ y $h_b + |H_b C|$. 65. a, $\angle A$ y $|H_b C| b$. 66. $\angle B$, $c - a$ y $|H_b A| - |H_b C|$.
67. $\angle B - \angle C$, b_a y $\frac{b+c}{a}$. 68. AB_a, $|AB| - |BB_a|$ y $|AC| - |CB_a|$. 69. h_a, m_a y $\frac{a}{b}$.
70. $a = 2b$, h_a y m_a. 71. $a + b + c$ y dos ángulos. 72. b, h_a y $\angle B - \angle C$.
73. c, h_a y $\angle B - \angle C$. 74. c, b_a y $\angle B - \angle C$. 75. m_a, h_a y $\angle B - \angle C$.
76. h_a, $\angle A$ y $a + b + c$. 77. a, $\angle B$ y $are(\Delta ABC)$. 78. $\angle A$, b y el ángulos que forman h_b y b_b.
79. a, $\angle A$ y el ángulo que forman b y la recta que pasa por A y corta a a en dos segmentos tales que uno es el doble del otro.
80. a, la razón del las longitudes de los segmentos en que queda dividido el lado a por una recta que pasa por el vértice A, y los ángulos que esta recta forma con los otros dos lados b y c.
81. Conociendo la posición de sus tres bisectrices y un punto de uno de sus lados.
82. a, $\angle A$, la recta que contiene al lado a y un punto de cada una de las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{AC}$.

En las siguientes construcciones, se entenderá que se da la ubicación de los puntos que se mencionan en cada caso:

83. M_a, M_b y M_c. 84. H_a, H_b y H_c. 85. a y G.
86. M_a, la dirección del lado a, A y $\angle A$.

En las siguientes construcciones, aplicar transformaciones geométricas:

87. $\angle A$, h_a y m_a. 88. $\angle A$, h_a y m_b. 89. $\angle B$, b_a y $d(C, b_a)$.
90. h_a, h_b y el ángulo entre m_a y b. 91. m_a, m_c y el ángulo entre m_b y a.
92. h_a, a y el ángulo entre m_b y c.
93. m_a, h_a y h_b. 94. m_b, h_a y h_c. 95. h_a, m_b y m_c.
96. Las partes en las cuales una ceviana AD corta a $\angle A$ y a.

En la página de internet 'www.cut-the-knot.com/triangle/tr1.htm1' de A. Bogomolny, se encuentra una sección dedicada a las construcciones de triángulos, conociendo algunas de sus partes. El lector también puede encontrar una lista de 179 construcciones de un triángulo en el libro de A. S. Posamentier [l-266, p. 178-180], y el libro de L. Lopes [l-212] contiene 371 construcciones de triángulos descritas con todo detalle.

11.182. Dados dos puntos sobre una recta, construir un triángulo ΔABC del cual solo se conoce c, y las mínimas distancias de los vértices del triángulo a uno de los puntos dados tal que el vértice A sea el otro punto dado.

11.183. Construir el triángulo isósceles ΔABC con $AB \cong AC$, conociendo:

1. a y s. 6. a y m_a. 11. a y h_a. 16. a y h_b.
2. a y b. 7. b y s. 12. b y h_a. 17. s y h_a
3. $\angle A$ y a. 8. $\angle A$ y b. 13. $\angle A$ y h_a. 18. $\angle A$, b y h_b.
4. $\angle B$ y b. 9. $\angle B$ y a. 14. $\angle B$ y h_a. 19. $\angle B$ y h_b.
5. $\angle A$ y $b + c$. 10. $\angle A$ y $a + b + c$. 15. $\angle A$ y $h_a + b$.

11.184. Construir un triángulo equilátero, conociendo:
a. Su perímetro. b. Una altura.

11.185[a-19]. Conociendo las distancias de un punto en el interior de un triángulo equilátero a los vértices del mismo, construir el triángulo equilátero. Sugerencia: ver la demostración del Teorema 8.3.37.

11.186. Dado un punto P en el plano, construir un triángulo equilátero ΔABC, de tal forma que P pertenezca al interior de ΔABC, y que las distancias $d(P,AB)$, $d(P,BC)$ y $d(P,AC)$ estén dadas.

11.187. Construir el triángulo rectángulo ΔABC con hipotenusa a, conociendo:

1. a y $b+c$.
2. b y h_a.
3. a y G.
4. a y $b-c$.
5. b y m_a.
6. a y $\angle B-\angle C$.
7. a y h_a.
8. c y m_a.
9. b y $a+b+c$.
10. a y b_b.
11. $\angle B$ y $b+c$.
12. h_a y $a+b+c$.
13. a y b_c.
14. $\angle B$ y $b-c$.
15. h_a y m_a.

11.188. Construir un triángulo rectángulo ΔABC con hipotenusa a, conociendo:

1. r y R.
2. s, r y $b+c$.

11.189. Construir un triángulo rectángulo, conociendo:

a. Su hipotenusa y su área.
b. Su hipotenusa y su perímetro.
c. Su hipotenusa y su inradio.
d. Su perímetro y su inradio.
e. Su perímetro y $\frac{b}{c}$ (considerar todos los casos posibles).

11.190. Construir un triángulo rectángulo isósceles conociendo:

a. La hipotenusa.
b. Un cateto.
c. Una altura.
d. El perímetro.

11.191. Construir un triángulo ΔABC, conociendo:

1. $a+b+c$, h_a y r.
2. a, r_b y r_c.
3. $a+b$, r_a y r_b.
4. a, b y R.
5. $\angle A, b$ y R.
6. $\angle A$, h_a y R.
7. a, r y r_a.
8. $\angle A, r$ y R.
9. $\angle A$, h_a y r_a.
10. a, m_a y R.
11. $\angle A, r$ y r_b.
12. $\angle A$, h_a y r_b.
13. a, m_b y R.
14. $\angle A, s$ y r.
15. $\angle A$, m_a y R.
16. $b+c$, r_b y r_c.
17. $\angle A, s-a$ y r_a.
18. $\angle B, \angle C$ y r.
19. $s-a, r$ y r_a.
20. $\angle A, a$ y r_a.
21. $\angle B, \angle C$ y R.
22. $\angle A, a$ y r.
23. $\angle A, a$ y r_b.
24. $\angle B, \angle C$ y r_a.
25. $\angle A, b$ y r.
26. $\angle A$, h_a y r.
27. $\angle A$, b_a y r.
28. $\angle A, r$ y $a+b+c$.
29. $\angle A, R$ y $a+b+c$.
30. h_a, m_a y R.
31. a, R y h_b.
32. $\angle B-\angle C$, r_b y r_c.
33. r, r_a y b_a.
34. r, r_a y $b-c$.
35. a, r y $b+c$.
36. a, r y $b-c$.
37. a, h_a y $a+b+c$.
38. $\angle A, R$ y $\frac{c}{b}$.
39. a, R y $are(\Delta ABC)$.

En cada una de las siguientes construcciones, se entenderá que se da la ubicación de los puntos que se mencionan:

40. I_a, I_b y I_c.
41. I, I_b y I_c.
42. O, I y I_a.
43. P_a, B, C y $\angle A$.
44. P_a^a, B, C y $\angle A$.
45. $a+b+c, r$ y $\angle A$.

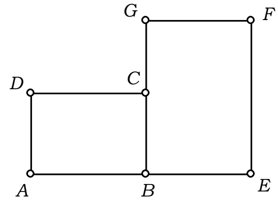
11.192. Construir el triángulo isósceles ΔABC con $AB \cong AC$, conociendo:

1. a y r.
2. a y r_a.
3. r y r_a.
4. $R, a+h_a$ y s.

11.193[Problem 306, J. Recreational Math. 9 (1976-77), 300-302]. ¿Existe un triángulo escaleno ΔABC tal que $h_b = m_c = b_a$? Una solución fue dada por R. Robinson Rowe que es el triángulo

$$\Delta(0.863887855, 0.205739432, 1.056149789).$$

11.194. Dados tres puntos no colineales, construir un triángulo tal que los puntos medios de sus lados sean precisamente los tres puntos dados.
11.195. Dados cuatro puntos A, B, C y D trazar una recta tal que sus distancias a los puntos A y B sean iguales y lo mismo para los puntos C y D.
11.196. Los siguientes problemas son de Abul Wafa según se comenta en el libro [l-315]:
a. Construir dentro de un cuadrado dado un triángulo equilátero tal que uno de sus vértices sea uno de los vértices del cuadrado dado y los otros dos vértices estén en lados opuestos del mismo cuadrado.
b. Cortar tres cuadrados congruentes, de tal forma que con las piezas obtenidas se forme un cuadrado.
c. Cortar dos cuadrados congruentes y uno más pequeño, de tal forma que con las piezas obtenidas se forme un cuadrado.
d. Cortar tres triángulos congruentes y uno más pequeño, semejante a ellos, de tal forma que con las piezas obtenidas se forme un nuevo triángulo.
En las siguientes construcciones, se entenderá que se cuenta con una regla sin graduación y con un compás con una abertura fija.
e. Construir una recta perpendicular a un segmento AB en el punto A sin prolongar dicho segmento en dirección del punto A.
f. Dividir un segmento dado en una cantidad dada de partes congruentes.
11.197. Inscribir en un triángulo dado ΔABC, un cuadrilátero tal que A y B sean dos de sus vértices, los otros dos vértices estén en los lados BC y AC, y que tres de sus lados sean congruentes entre sí.
11.198. Inscribir en un triángulo dado un rectángulo cuyo perímetro esté dado.
11.199. Inscribir en un triángulo dado un rectángulo que sea semejante a un rectángulo dado.
11.200. Inscribir en un triángulo dado un rectángulo, de tal modo que dos de sus vértices estén en la base del triángulo y cada uno de sus otros vértices esté en cada uno de los otros lados del triángulo, y además que los lados del rectángulo estén en proporción 2:3.
11.201. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$.
a. Construir un cuadrado inscrito en el triángulo ΔABC que tenga a A como un de sus vértices.
b. Construir un cuadrado inscrito en el triángulo ΔABC, de tal forma que uno de sus lados esté sobre la hipotenusa del triángulo original.
c. ¿Pueden los cuadrados construidos en los incisos a) y b) ser congruentes?
11.202. Sean ΔABC un triángulo y $\square QPCB$ un cuadrado construido exteriormente sobre el lado BC del triángulo. Sean D y E los puntos de intersección de AP y BC, y de AQ y BC, respectivamente. Por D y E trazamos rectas paralelas a PC que corten a AC y AB en los puntos G y F, respectivamente.
a. Probar que $BC \parallel FG$.
b. Probar que E, D, G y F son los vértices de un cuadrado.
c. Deducir la construcción de un cuadrado inscrito en un triángulo (para otras construcciones alternativas ver [l-153] y [a-83]).
11.203. Dados un cuadrilátero $\square ABCD$ y un punto O en el plano, trazar una recta que pase por O y corte a $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{DA}$ en los puntos M, N, P y Q, respectivamente, de tal manera que $MP \cong NQ$ (ver Problema 5.81).
11.204. Dado un cuadrado $\square ABCD$, encontrar un punto $E \in \overleftrightarrow{AB}$ tal que se cumpla la identidad $2are(\Delta CEB) = are(\square ABCD)$. Sugerencia: Ver Problemas 7.104 y 7.313.
11.205. Sea $\square ABCD$ un rectángulo.
a. Probar que $\square ABCD$ es áureo si y solo si $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{a+b}$.
b. Construir un rectángulo áureo.
c. Si dos rectángulos áureos se colocan como lo muestra la figura de la derecha, probar que los puntos A, C y F son colineales.

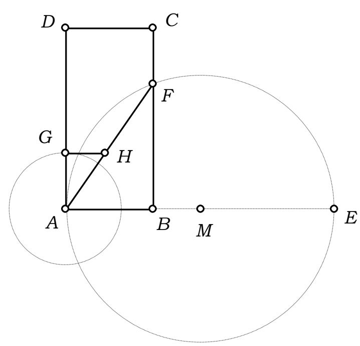


11.206. Dados dos puntos en el plano A y B, encontrar un tercer punto C tal que AB sea un lado de un cuadrado cuyas diagonales se cortan en el punto C. Probar que si orientamos los puntos A, B y C en sentido contrario a las manecillas del reloj, entonces el punto C es único.
11.207. Circunscribir un cuadrado en un triángulo equilátero dado, de tal forma que compartan un vértice.

11.208. Circunscribir un cuadrado en un cuadrilátero dado.
11.209[I-32, Problem 18]. Dados tres puntos A, B y C, construir un cuadrado con centro A que pase por los puntos B y C.
11.210. Dadas tres rectas paralelas entre sí y una recta transversal a ellas, construir un cuadrado tal que cada uno de sus vértices pertenezca a una y solo una de las rectas dadas.
11.211. Sean $\square ABCD$ un cuadrado y $P \in \overleftrightarrow{AB} - \{A, B\}$. Trazar una recta por P que corte al cuadrado en dos regiones equivalentes.
11.212. Dividir un cuadrilátero en dos regiones poligonales equivalentes por medio de una recta que pase por uno de sus vértices.
11.213. Dividir un rectángulo en tres regiones equivalentes por rectas que partan de tres de sus vértices y sean concurrentes. ¿Es posible hacer lo mismo con cualquier cuadrilátero?
11.214. Sea $\square ABCD$ un paralelogramo tal que $m(\angle A) = 60$, $|AB| = 5$ y $|AD| = 3$. Mostrar cómo dividir el paralelogramo en tres regiones equivalentes mediante el trazo de rectas paralelas a BD.
11.215. Sea $\square ABCD$ un paralelogramo. Trazar una recta que pase por un punto dado O y corte a AB, BC, CD y DA en los puntos M, N, P y Q, respectivamente, de tal forma que $MP \cong NQ$.
11.216. Dado un punto en un rectángulo construir un rombo tal que el punto dado sea uno de sus vértices y cada uno de los vértices restantes esté en una de las rectas que contenga a uno de los lados del rectángulo.
11.217. Construir un cuadrado que tenga el doble de área que un cuadrado dado.
11.218. Construir un cuadrado que triplique el área de un cuadrado dado.
11.219. Construir un cuadrado que tenga el doble de área que un rectángulo dado.
11.220. Construir un cuadrado equivalente a un triángulo dado.
11.221. Construir un cuadrado cuya área sea igual a la suma de las áreas de dos rectángulos dados.
11.222. Construir un rectángulo de perímetro dado que sea equivalente a un rectángulo dado.
11.223. Construir un rectángulo equivalente a un cuadrado dado, conociendo la diferencia de las longitudes de dos lados distintos del rectángulo.
11.224. Construir un rectángulo equivalente a un rectángulo dado, conociendo la diferencia de las longitudes de dos lados distintos del rectángulo.
11.225. Construir un trapecio isósceles que sea equivalente a un cuadrado dado.
11.226. Construir un cuadrado que sea equivalente a un paralelogramo dado.
11.227. Construir un paralelogramo equivalente a un triángulo, de tal modo que tenga un ángulo de medida 60 y la longitud de uno de sus lados sea 3.
11.228[I-230]. Dividir un rectángulo en tres piezas con las que se pueda formar un cuadrado:

Sea $\square ABCD$ un rectángulo.
1. Prolongamos el lado AB hasta un punto E tal que $BC \cong BE$.
2. Construimos el círculo de diámetro AE, siendo M su centro. Sea F el punto de intersección de este círculo y BC.
3. Trazamos el círculo $\mathrm{C}(A,|FC|)$ y sea G el punto donde este círculo corta a AD.
4. Trazamos una recta paralela a AB que corte a AF en el punto H.

Probar que los triángulos ΔFAB y ΔAHG, y la región poligonal $GHFCD$ son las piezas solicitadas.



11.229. Dados dos rectángulos semejantes, construir uno que sea semejante a dichos rectángulos y cuya área sea igual a la suma de las áreas de los dos rectángulos dados.
11.230. Construir un rectángulo equivalente a un rectángulo dado, teniendo como uno de sus lados a una de las diagonales del rectángulo dado.
11.231. Sobre una de las diagonales de un cuadrado dado, construir un triángulo isósceles equivalente al cuadrado dado.
11.232. Sobre una de las diagonales de un rectángulo dado, construir otro rectángulo equivalente al dado.

11.233. Dado un cuadrado $\square ABCD$, construir un triángulo ΔEAC sobre la diagonal AC que tenga la misma área que el cuadrado y $m(\angle ACE) = 125$.
11.234. Construir un rectángulo equivalente a un triángulo dado de tal forma que uno de los lados del rectángulo sea tres veces más grande que uno de los lados del triángulo dado.
11.235. Construir un rombo equivalente a un paralelogramo dado que tenga a uno de los lados del paralelogramo como una de sus diagonales.
11.236. Construir un rombo cuya área sea igual a la de un paralelogramo dado y uno de sus lados sea congruente a un segmento dado. ¿Es esta construcción siempre posible?
11.237. Sin ejecutar cálculos numéricos, construir un rombo de lado $\frac{5}{2}$ equivalente a un cuadrado de lado 2.
11.238. Sin ejecutar cálculo numérico alguno, construir un paralelogramo equivalente a un triángulo equilátero dado de lado 2, de tal forma que las longitudes de los lados del paralelogramo sean 45 y 1.
11.239. Sin ejecutar cálculo numérico alguno, construir un rectángulo equivalente a un cuadrado dado de área 3, de tal forma que uno de sus lados tenga longitud 4.
11.240. Construir un cuadrilátero semejante a un cuadrilátero dado cuyo radio de proporción sea igual a $\frac{2}{3}$.
11.241. Dado un rectángulo de lados 3 y 2, construir un rectángulo semejante al dado cuya área sea igual a $\frac{1}{4}$ del área del mismo.
11.242. Dados cuatro ángulos no degenerados $\angle\alpha$, $\angle\beta$, $\angle\gamma$ y $\angle\varepsilon$ tales que $m(\angle\alpha) + m(\angle\beta) + m(\angle\gamma) + m(\angle\varepsilon) = 360$, construir un cuadrilátero $\square ABCD$ tal que $\angle A \cong \angle\alpha$, $\angle B \cong \angle\beta$, $\angle C \cong \angle\gamma$ y $\angle D \cong \angle\varepsilon$.
11.243. Construir un cuadrilátero $\square ABCD$, conociendo a, b, AC, $\angle CAD$ y $are(\Delta ACD)$.
11.244. Construir un cuadrilátero, conociendo los puntos medios de tres de sus lados y la dirección y longitud del cuarto lado.
11.245. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero en el cual su diagonal AC lo divide en dos triángulos equivalentes. Construir dicho cuadrilátero si conocemos a, b, AC y $\angle DCA$.
11.246. Construir un cuadrilátero $\square ABCD$ dados los lados AB y AD, conociendo la dirección del lado AB, $|AD| = |BC|$ y teniendo la posición del punto medio del lado CD.
11.247. Construir un cuadrilátero $\square ABCD$ dados los lados AB, CD, la distancia entre los puntos medios de los otros dos lados y las diagonales.
11.248. Construir un rectángulo $\square ABCD$, conociendo:

a. $a + b$ y $a^2 + b^2$.
b. $a + b$ y el radio del círculo circunscrito.
c. ab y el radio del círculo circunscrito.
d. e y $a + 2b$.
e. $a - b$ y uno de los ángulos formado por las diagonales.
f. $a - b$ y el radio del círculo circunscrito.
g. Cuatro puntos por donde pasan cada uno de sus lados y la longitud de uno de sus lados.
h. $a + b$ y $\frac{a}{b}$.
i. Una de sus diagonales y su proyección sobre la otra diagonal.

11.249. Inscribir en un cuadrado dado otro cuadrado de lado conocido.
11.250. Inscribir un cuadrado en un paralelogramo dado.
11.251. Inscribir un cuadrado en la superficie común de dos círculos secantes congruentes.
11.252[l-315]. Usando compás solamente, inscribir un cuadrado en un círculo dado, conociendo el centro del mismo.
11.253. Construir un cuadro tal que su centro esté dado.
11.254. Dados tres vértices de un paralelogramo, construir el paralelogramo.
11.255. Construir un paralelogramo, conociendo sus lados y una de sus alturas.
11.256. Construir un paralelogramo, conociendo la longitud de dos lados adyacentes y uno de los ángulos que forman las diagonales.

11.257. Construir un paralelogramo tal que $m(\angle A) = 45$, $|AB| = 2$ y $|BC| = 2$.
11.258. Dados dos números reales positivos, describir un método para construir varios paralelogramos, de tal forma que las longitudes de sus lados permanezcan constantes.
11.259. Construir un rombo dadas sus diagonales.
11.260. Construir un rombo dado uno de sus lados y la suma de las longitudes de sus diagonales.
11.261. Construir un rombo $\square ABCD$ conociendo los puntos medios de sus lados DA, AB y BC.
11.262. Construir un rombo dada la longitud de uno de sus lados y el radio del círculo inscrito.
11.263. Construir un rombo sabiendo que dos de sus lados están sobre dos rectas paralelas dadas y que los otros dos lados pasen por dos puntos dados.
11.264. Construir un rombo conociendo el radio del círculo que pasa por los puntos extremos de la diagonal mayor y uno de los puntos extremos de la diagonal menor, y el radio del círculo que pasa por los puntos extremos de la diagonal menor y un punto extremo de la diagonal mayor.
11.265. Inscribir un rombo en un cuadrilátero cíclico.
11.266. Construir un trapecio dadas las longitudes de sus lados.
11.267. Construir un trapecio isósceles, conociendo la longitud de uno de sus lados paralelos y la longitud de la altura correspondiente.
11.268. Construir un trapecio $\square ABCD$ tal que $AB \parallel DC$, $DC \perp BC$, $AB \perp BC$, $|AB| + |DC| = 2|BC|$ y $2(||AB| - |DC||) = |AD|$.
11.269. Construir un trapecio dadas las longitudes de sus lados no paralelos y el radio del círculo inscrito.
11.270. Construir un trapecio, conociendo el radio del círculo circunscrito, la longitud de uno de sus lados no paralelos y la altura correspondiente.
11.271. Circunscribir a un círculo un trapecio isósceles de perímetro dado.
11.272. Inscribir en un círculo dado un trapecio cuyas diagonales formen un ángulo congruente a un ángulo dado y una de ellas tenga longitud dada.
11.273. Sea $\square ABCD$ un trapecio tal que $AB \parallel CD$, $m(\angle A) = 40$, $m(\angle B) = 55$, $|AB| = 12$ y $|BC| = 6$. Construir el trapecio y calcular las longitudes de los lados AD y DC.
11.274. Sea $\square ABCD$ un trapecio tal que $AB \parallel CD$, $m(\angle A) = 40$, $m(\angle B) = 60$, $|AB| = 10$ y $|CD| = 5$. Construir el trapecio.
11.275. Sea $\square ABCD$ un trapecio isósceles tal que $AB \parallel CD$, $AC \cong AB$, $|AB| = 10$ y $AD \cong DC \cong BC$. Calcular el área y el perímetro del trapecio.
11.276[a-19]. Conociendo las distancias de un punto a tres vértices de un cuadrado, construir el cuadrado (ver Problema 8.214).
11.277. Construir un cuadrado conociendo el radio del círculo circunscrito.
11.278. Construir un cuadrado conociendo el radio del círculo inscrito.
11.279. Construir un cuadrado $\square ABCD$ conociendo:
a. $a + e$.
b. $a - e$.
11.280. Construir un cuadrilátero circunscrito $\square ABCD$ dados AD, CD, $\angle A$ y AC.
11.281[l-148]. Una de las diagonales de un cuadrilátero cíclico lo divide en un triángulo equilátero de lado dado y en un triángulo de perímetro conocido, construir el cuadrilátero.
11.282. Dados una distancia fija d y un número entero positivo $k > 2$, construir k puntos $P_1, \dots, P_k$ tales que

$$d(P_1, P_2) = d(P_2, P_3) = \dots = d(P_{k-1}, P_k) = d.$$

11.283. Dados dos círculos concéntricos, construir un rectángulo tal que uno de sus lados sea la cuerda de uno de los círculos dados y su lado opuesto sea la cuerda del otro círculo dado, y con la condición adicional de que el rectángulo sea equivalente a un cuadrado dado.
11.284. Por dos puntos dados sobre un mismo lado de un triángulo dado, trazar rectas paralelas tal que el trapecio que se forme sea equivalente a un cuadrado dado.
11.285. Por dos puntos dados de un círculo dado, trazar cuerdas paralelas que sean los lados paralelos de un trapecio inscrito en el círculo dado que sea equivalente a un cuadrado dado.
11.286. Trazar una recta tangente a un círculo dado que forme con otra recta dada un ángulo congruente a un ángulo dado.

11.287. Trazar una recta que sea tangente a un círculo dado y corte a un segundo círculo dado en una cuerda de longitud dada.
11.288. Trazar una recta tangente a cada uno de dos círculos dados, de tal manera que la bisectriz de uno de los ángulos que estas dos rectas forman esté sobre una recta dada.
11.289. Trazar una recta tangente a un círculo dado tal que el producto de sus distancias a dos puntos dados del círculo dado esté dada.
11.290. Construir un círculo cuya área sea igual a la suma de las áreas de dos círculos dados.
11.291. Construir un círculo que pase por un punto dado y sea tangente a dos rectas dadas.
11.292. Construir un círculo que sea tangente a tres rectas dadas.
11.293. Construir un círculo que pase por un punto dado, que sea tangente a un círculo dado y que tenga su centro en una recta dada.
11.294. Construir un círculo que pase por un punto dado y sea tangente a un círculo dado en un punto dado del mismo.
11.295. Construir un círculo tangente a un círculo dado que pase por dos puntos dados.
11.296. Construir un círculo que sea tangente a un círculo dado y a una recta dada en un punto dado de esta.
11.297. Construir un círculo que pase por un punto dado que sea tangente a un círculo dado y a una recta dada.
11.298. Construir un círculo que sea tangente a un círculo dado en un punto dado de este y sea tangente a una recta dada.
11.299. Construir un círculo que sea tangente a un círculo dado y a dos rectas dadas.
11.300. Construir un círculo que sea tangente a dos círculos dados, de tal manera que uno de los puntos de tangencia esté dado.
11.301. Construir un círculo que sea tangente a dos círculos dados y pase por un punto dado.
11.302. Construir un círculo que sea tangente a dos círculos dados y a una recta dada.
11.303. Construir un círculo que sea tangente a tres círculos dados.
11.304. Construir un círculo de radio dado con centro sobre una recta dada y que pase por un punto dado fuera de la recta dada.
11.305. Construir un círculo de radio dado que pase por un punto dado y sea tangente a una recta dada.
11.306. Construir un círculo de radio dado que pase por un punto dado y sea tangente a un círculo dado.
11.307. Construir un círculo de radio dado que sea tangente a dos rectas dadas.
11.308. Construir un círculo de radio dado que sea tangente a una recta y a un círculo dado.
11.309. Construir un círculo de radio dado que sea tangente a dos círculos dados.
11.310. Construir un círculo de radio dado que sea tangente a una recta dada en un punto dado de la misma.
11.311. Construir un círculo de radio dado que sea tangente a un círculo dado y que sea equidistante de dos puntos dados.
11.312. Construir un círculo de centro dado tal que tenga un segmento tangente común con un círculo dado de longitud dada.
11.313. Hallar un punto en un círculo dado, cuyas distancias a dos puntos dados del mismo círculo estén en una razón dada.
11.314. Tenemos dos rectas que se cortan en un punto inaccesible y un punto dado. Hallar un punto en cada una de las rectas tales que junto con el punto dado determinen un círculo cuyo centro sea el punto inaccesible.
11.315. Sean $\mathsf{C}(O,r)$, $\mathsf{C}(O',r')$ y $\mathsf{C}(O'',r'')$ tres círculos, ¿es siempre posible encontrar un punto en el círculo $\mathsf{C}(O'',r'')$ desde el cual sea posible trazar segmentos congruentes y tangentes a los otros dos círculos?
11.316. Dados tres círculos externamente tangentes entre sí, trazar una recta equidistante de los tres círculos.
11.317. Sean l y m dos rectas paralelas cuya distancia entre ellas es igual a 4. Si $A \in l$ y $B \in l$ satisfacen que $|AB| = 10$, determinar el radio del círculo que pasa por los puntos A, B y es tangente a la recta l.
11.318. Dados tres puntos A, B y C en el plano y una recta l que pase por A, trazar un círculo que pase por los puntos A y B, y que interseque a la recta en un punto D, de tal manera que CD sea tangente al círculo en el punto D.
11.319. Sean l una recta y $O \in l$. Sobre la perpendicular a l que pasa por O fijamos un punto A y un punto $B \in l - \{O\}$. Trazar el círculo que pasa por el punto A y es tangente a l en el punto B.
11.320. Dados una recta y un punto fuera de ella, construir un ángulo congruente a un ángulo dado tal que uno de sus lados esté sobre la recta dada y el segundo lado pase por el punto dado.

11.321. Dados un ángulo no degenerado y un círculo tangente a los lados del ángulo, usando regla y compás, encontrar el centro del círculo.
11.322. Trazar una recta en una dirección dada que corte a dos rectas dadas, formando un segmento congruente al segmento determinado por uno de los puntos de intersección de la recta con una de las rectas dadas y uno de los puntos de intersección de la misma recta con un círculo dado.
11.323. Dados dos círculos, encontrar un punto tal que las rectas tangentes trazadas desde dicho punto a los círculos formen dos pares de ángulos congruentes a dos ángulos dados.
11.324[I-32, Problem 72]. Dados tres puntos no colineales A, B y C, construir un círculo de centro C tal que las rectas tangentes al círculo que pasan por los puntos A y B sean paralelas.
11.325. Dado un círculo de radio 1, construir un círculo de radio 2 que sea tangente a una recta que pasa por el centro del círculo dado y sea también tangente a este círculo dado.
11.326. Construir un círculo de radio 1 que sea tangente a un círculo de radio 2 y a un diámetro dado de este.
11.327. Sea $\mathsf{C}(O,r)$ un círculo. Determinar un punto P tal que si PA y PB son tangentes a $\mathsf{C}(O,r)$ en los puntos A y B, y si Q es el punto de intersección de AB y OM, entonces $\dfrac{|OQ|}{|QM|}$ es igual a un número positivo dado.
11.328. Dados un círculo y un ángulo no degenerado, encontrar un punto en el exterior del círculo, de tal forma que las rectas tangentes al círculo desde este punto formen un ángulo congruente al ángulo dado.
11.329. Dados un punto, una recta y un círculo, encontrar un punto sobre la recta que sea equidistante del punto dado y del círculo.
11.330. Dados un círculo y una recta, encontrar un punto que esté a distancias dadas del círculo y de la recta.
11.331. Dados dos círculos, encontrar un punto que esté a distancias dadas de cada uno de los círculos.
11.332. Dados un círculo y dos rectas, encontrar un punto sobre una de las rectas que equidiste del círculo y de la otra recta.
11.333. Trazar una recta paralela a una recta dada que corte a un círculo dado, formando una cuerda de longitud dada.
11.334. Por un punto dado, trazar una recta que corte a un círculo dado, formando una cuerda congruente a uno de los lados del triángulo equilátero inscrito en el círculo dado.
11.335. Por un punto dado, trazar una recta que corte a un círculo dado, formando una cuerda por donde pasan los lados de un ángulo inscrito del círculo dado que sea congruente a un ángulo dado.
11.336. Trazar una recta que diste de un punto dado una distancia dada y corte a un círculo dado en una cuerda de longitud dada.
11.337. Por un punto dado, trazar una recta que corte a un círculo en dos puntos, de tal forma que estos con el punto dado, formen dos segmentos congruentes.
11.338. Dados un círculo $\mathsf{C}(O,r)$ y dos de sus puntos A y B, desde un punto dado en el exterior del círculo, trazar una recta secante al círculo tal que la recta que pasa por uno de los puntos de intersección y A, y la recta que pasa por el otro punto de intersección y B forman un ángulo congruente a un ángulo dado.
11.339. Trazar una recta por un punto dado que corte a un círculo dado de tal manera que forme con la recta tangente al círculo dado en uno de los puntos de intersección un ángulo congruente a un ángulo dado.
11.340. Trazar una recta por un punto dado que corte a un círculo dado en dos puntos tales que la suma de sus distancias a la recta que pasa por el punto dado y el centro del círculo dado esté dada.
11.341. Dadas dos cuerdas paralelas de un círculo dado, trazar una cuerda del círculo dado tal que corte a ambas cuerdas formando un segmento de longitud dada. ¿es posible trazar dicha cuerda si de antemano se da la longitud de la misma?
11.342. Por un punto dado de un círculo dado, trazar una cuerda de este que corte a una cuerda dada en dos segmentos cuyas longitudes tengan una razón dada.
11.343. Trazar una recta por un punto dado que corte a un círculo en un punto tal que el segmento determinado por dicho punto, y que el dado sea congruente con el segmento determinado por el punto de intersección de la recta y una recta dada y el punto dado.
11.344. Trazar una recta secante a un círculo dado que forme con este una cuerda de longitud dada y también corte a dos rectas paralelas formando un segmento de longitud dada.
11.345. Por un punto dado, trazar una recta que equidiste de dos círculos dados.
11.346. Dados un círculo, un punto y dos números reales positivos a y b, encontrar un punto tal que su distancia al círculo sea igual a a y su distancia al punto dado sea igual a b.

11.347. Sean $\angle\alpha$ ángulo no degenerado con vértice O. Supongamos que dos círculos cortan los lados de $\angle\alpha$ en los puntos A, B y C y D, respectivamente,

a. Probar que AD y BC se cortan en la bisectriz de $\angle\alpha$.

b. Deducir un método para la construcción de la bisectriz de un ángulo no degenerado.

11.348. Sea l una recta que corte a un segmento dado AB. Encontrar un punto $P \in l$, de tal forma que el ángulo $\angle APB$ sea congruente a un ángulo dado.

11.349. Dados un segmento AB y un recta l paralela a $\overleftrightarrow{AB}$, encontrar un punto $P \in l$ tal que el ángulo $\angle AOB$ sea congruente a un ángulo no degenerado dado.

11.350. Dado un ángulo no degenerado, encontrar un punto cuya distancia al vértice del ángulo esté dada y las distancias de dicho punto a los lados del ángulo estén en una proporción dada.

11.351. Encontrar un punto desde el cual se vean tres segmentos colineales dados bajo un mismo ángulo dado.

11.352. Encontrar un punto desde el cual se vean dos círculos dados bajo ángulos dados.

11.353. Encontrar un punto desde el cual se vean tres círculos dados bajo un mismo ángulo dado.

11.354(Problema de la Carta Náutica). Dados tres puntos A, B y C en el plano y dos ángulos $\angle\alpha$ y $\angle\beta$, encontrar un punto P tal que $\angle APB \cong \angle\alpha$ y $\angle BPC \cong \angle\beta$. Este problema se utiliza en la navegación para fijar puntos sobre la carta náutica de un barco conociendo los ángulos que se forman desde sus visuales a tres puntos fijos sobre una costa.

11.355. Dados dos círculos y dos números reales positivos a y b, encontrar un punto tal que las longitudes de los segmentos tangentes de este punto a los círculos tengan longitudes a y b.

11.356. Dados tres círculos, encontrar un punto en el plano desde el cual las tangentes a los círculos dados tengan la misma longitud.

11.357. Dadas tres rectas, trazar un círculo cuyo centro esté en una de las rectas dadas y que esté a distancias dadas de las dos restantes. Dichas distancias pueden ser diferentes.

11.358. Dadas tres rectas, construir un círculo que corte a cada una de las rectas dadas, formando tres cuerdas congruentes del mismo círculo.

11.359. Construir una cuerda de longitud 6 de un círculo dado de radio 4 que pase por un punto dado cuya distancia al centro del círculo es igual a 2.

11.360. Construir una cuerda de un círculo dado que sea bisecada por un punto dado dentro del círculo dado.

11.361. Sobre la recta que contiene a un diámetro dado de un círculo dado, encontrar un punto tal que el segmento tangente al círculo desde dicho punto tenga longitud igual al diámetro del círculo dado.

11.362. Inscribir en un círculo un ángulo que sea el doble de un ángulo dado.

11.363. Dado un segmento construir un círculo que contenga al segmento dado como una cuerda, de tal forma que el círculo contenga un punto que sea el vértice de un ángulo inscrito del círculo con medida 40 y cuyos lados pasen por los puntos extremos del segmento dado.

11.364. Dados un círculo $\mathsf{C}(O,3)$ y un punto P tal que $d(P,O) = 2$, construir una cuerda AB del círculo que pase por P, de tal forma que si M es el punto medio de la cuerda AB, entonces se cumpla la igualdad $d(P,M) = 1$.

11.365. Dados un círculo $\mathsf{C}(O,r)$, un punto P en su interior y AB una cuerda del mismo, ubicados en lados opuestos con respecto a O. Determinar cuándo es posible trazar una cuerda del círculo que pase por P y sea bisecada por AB, y dar una construcción de dicha cuerda.

11.366. En un círculo se dan uno de sus diámetros y una de sus cuerdas perpendiculares al diámetro dado. Construir un círculo que sea tangente al círculo dado, al diámetro dado y a la cuerda dada.

11.367. Construir una cuerda de longitud 6 de un círculo dado de radio 4 que pase por un punto dado cuya distancia al centro del círculo sea igual a 2.

11.368. Sean $\mathsf{C}(O,r)$ un círculo y $A \in \mathsf{C}(O,r)$. Encontrar un punto $P \in \overleftrightarrow{OA}$ tal que si trazamos la recta tangente a $\mathsf{C}(O,r)$ desde este punto corte a $\mathsf{C}(O,r)$ en el punto B y si C es la proyección de B sobre la recta $\overleftrightarrow{OA}$, se tenga entonces que $|CA|$ sea igual a un número positivo dado.

11.369. Dados un círculo $\mathsf{C}(O,r)$ y dos puntos A y B en su exterior, hallar un punto $P \in \mathsf{C}(O,r)$ tal que las rectas $\overleftrightarrow{PA}$ y $\overleftrightarrow{PB}$ intersequen al círculo $\mathsf{C}(O,r)$, formando una cuerda que sea paralela a la recta $\overleftrightarrow{AB}$.

11.370. Dado un arco de un círculo, encontrar en él un punto tal que la suma de las distancias de este punto a los puntos extremos del arco sea igual a un número dado.

11.371. Dados un círculo, uno de sus diámetros y una de sus cuerdas, hallar sobre el círculo un punto tal que las rectas que pasan por dicho punto y por los puntos extremos de la cuerda determinan sobre el diámetro un segmento cuyo punto medio es el centro del círculo dado.
11.372. Sean $\mathsf{C}(O,r)$ y $\mathsf{C}(O',r')$ dos círculos que se cortan en los puntos A y B. Una recta variable que pasa por el punto A corta a los círculos $\mathsf{C}(O,r)$ y $\mathsf{C}(O',r')$ en los puntos C y D, respectivamente.
a. Construir el segmento CD, de tal forma que tenga una longitud dada.
b. Construir el segmento CD, de tal forma que A sea su punto medio.
c. Sean M y N los puntos medios de AC y AD, y L el punto medio de MN. Probar que la recta que pasa por L y es perpendicular a CD pasa por un punto fijo.
11.373. Dados dos círculos secantes, trazar por uno de los puntos comunes una recta que corte a los dos círculos, formando cuerdas tales que la diferencia de sus longitudes esté dada.
11.374. Por uno de los dos puntos de intersección de dos círculos secantes dados, trazar una recta que forme con dichos círculos dos cuerdas tales que el producto de sus longitudes esté dada.
11.375. Dados dos círculos que no se cortan, trazar una recta que los corte, de tal manera que se formen dos cuerdas tales que la suma de sus longitudes esté dada.
11.376. Trazar una recta paralela a una recta dada que corte a dos círculos dados, formando cuerdas tal que la suma de sus longitudes esté dada.
11.377. Dados dos círculos secantes, trazar por uno de los puntos comunes una recta que corte a los dos círculos dados, formando un segmento cuya longitud sea igual al diámetro del círculo mayor.
11.378. Dados dos círculos y una recta, trazar una recta perpendicular a la recta dada que corte a los dos círculos dados, de tal forma que con un punto de intersección de cada uno de los círculos se forme un segmento que sea bisecado por la recta dada.
11.379. Construir un círculo de radio dado que diste de otro círculo dado una distancia dada y que pase por un punto dado.
11.380. Construir un círculo que pase por dos puntos dados y diste de un punto dado una distancia dada.
11.381. Construir un círculo de radio dado que pase a igual distancia de tres puntos dados no colineales.
11.382. Construir un círculo que pase a una distancia dada de tres puntos colineales.
11.383. Construir un círculo que equidiste de cuatro puntos dados.
11.384. Inscribir un círculo en un sector circular dado.
11.385. Construir un círculo que corte a dos círculos dados, formando dos cuerdas congruentes.
11.386. Construir un círculo de radio dado que corte a dos círculos dados de tal manera que las cuerdas comunes tengan longitudes dadas.
11.387. Construir un círculo de radio dado que pase por uno de dos puntos dados y que el segmento tangente a este círculo desde el otro punto tenga una longitud dada.
11.388. Construir un círculo de radio dado cuyo centro sea uno de dos puntos dados y que el segmento tangente a este círculo desde el otro punto tenga una longitud dada.
11.389. Construir un círculo de radio dado tal que los segmentos tangentes a él desde dos puntos dados tengan longitud dada.
11.390. Construir un círculo de radio dado tal que los segmentos tangentes a él desde tres puntos dados tengan longitud dada.
11.391. Construir un círculo de radio dado tal que pase por un punto dado y corte a un círculo dado, formando un ángulo congruente a uno dado.
11.392. Construir un círculo que sea visto desde dos puntos dados bajo un mismo ángulo y que desde el centro del mismo los dos puntos sean vistos bajo un ángulo dado.
11.393. Construir un círculo que pase por dos puntos dados y corte a un círculo dado tal que la cuerda común tenga longitud dada.
11.394[I-32, Problem 167]. Dados dos puntos y un círculo, trazar un círculo que pase por los puntos dados y corte al círculo dado en dos puntos que sean los puntos extremos de uno de los diámetros del círculo dado.
11.395. Construir un círculo cuyo centro esté dado y corte a dos lados del un triángulo dado de tal manera que la cuerda que determinan los puntos de intersección sea paralela al tercer lado.
11.396. Construir un círculo de radio dado que tenga su centro en una recta dada y determine sobre otra recta dada una cuerda de longitud dada.

11.397. Construir un círculo cuyo centro esté dado que corte a dos rectas dadas determinando cuerdas cuyas longitudes tengan suma dada.
11.398. Construir un círculo que pase por dos puntos dados y que corte a un círculo dado de tal manera que la cuerda común sea paralela a un diámetro dado del círculo dado.
11.399. Construir un círculo cuyo centro esté dado que corte a dos círculos concéntricos dados de tal manera que la recta determinada por los puntos de intersección pase por el centro de los círculos concéntricos dados.
11.400. Trazar por un punto dado una recta secante a dos círculos concéntricos dados de tal manera que entre esta recta y los dos círculos dados formen un segmento de longitud dada.
11.401. Construir un círculo ortogonal a dos círculos dados.
11.402. Construir un círculo que pase por un punto dado, tenga su centro en una recta dada y corte ortogonalmente a un círculo dado.
11.403. Trazar dos círculos congruentes cuyos centros sean dos puntos dados y formen entre ellos un ángulo congruente a uno dado.
11.404. Sean A, B, C y D cuatro puntos consecutivos. Encontrar un punto P en el plano tal que $|AP||PC| = |BP||PD|$.
11.405. Sea ΔABC un triángulo con $AB > AC$.

a. Encontrar un punto $P \in \overleftrightarrow{BC}$ tal que $|PA|^2 = |PB||PC|$.

b. Encontrar un punto $Q \in BC$ tal que $|QA|^2 = |QB||QC|$.

11.406. Dado un triángulo, describir un semicírculo que sea tangente al lado BC en un punto que diste de B una distancia dada y que los puntos extremos del diámetro de dicho semicírculo estén en los otros dos lados del triángulo.
11.407. Dado un triángulo, trazar un semicírculo de tal forma que sea tangente a dos de los lados del triángulo y su diámetro esté en el tercer lado.
11.408. Dado un triángulo $\Delta(a,b,c)$, construir tres círculos congruentes tales que uno de ellos sea tangente a los lados b y c, un segundo círculo sea tangente a los lados a y c, y el tercero sea tangente a los dos círculos anteriores y al lado c.
11.409. Dado un triángulo $\Delta(a,b,c)$, construir dos círculos congruentes que sean tangentes entre sí, uno de ellos sea tangente a los lados a y c, y el segundo a los lados b y c.
11.410. Por cada uno de los vértices de un triángulo dado trazar un círculo, de tal forma que los tres círculos que así se obtengan sean externamente tangentes entre sí.
11.411. Dado un triángulo ΔABC, construir un círculo que pase por los vértices B y C, y corte a $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{AC}$ en dos cuerdas congruentes.
11.412. Construir un círculo tal que corte a cada uno de los lados del triángulo $\Delta(5,7,8)$ en una cuerda de longitud 1.
11.413. Dado un triángulo, encontrar un punto sobre el que biseque su perímetro desde uno de sus vértices.
11.414. Dados tres puntos no colineales, trazar tres círculos cuyos centros sean los puntos dados y que sean tangentes entre sí.
11.415. Dados tres puntos no colineales, trazar tres círculos cuyos centros sean los puntos dados y que sean ortogonales entre sí.
11.416. Dado un triángulo ΔABC, construir un círculo que tenga su centro en el lado a y que sus distancias a los lados b y c estén en una proporción dada.
11.417. Dado un triángulo ΔABC, construir un círculo cuyo centro sea uno de los vértices del triángulo y las rectas tangentes a él desde los otros dos vértices formen un ángulo congruente a un ángulo dado.
11.418. De un triángulo ΔABC solo conocemos el lado BC, el ángulo $\angle A$ y el punto P de BC tal que AP está contenido en un diámetro del circuncírculo del triángulo. Construir el triángulo.
11.419. Tenemos una recta l y un punto P fuera de ella. Sea P' el punto simétrico de P con respecto a l.

a. Probar que todo círculo que pasa por P y tiene su centro en l pasa también por P'.

b. Dar una construcción del punto P'.

11.420. Sean l y m dos rectas que se cortan en el punto O y forman un ángulo congruente al ángulo agudo $\angle\alpha$.

a. Dado un punto P fuera de l y m, construir su punto simétrico P' con respecto a l y el punto simétrico P'' de P' con respecto a m.

b. Comparar las medidas de los ángulos $\angle\alpha$ y $\angle POP''$.

11.421. Sean l y m dos rectas que se cortan en el punto O, $A \in l$ y $B \in m$.

a. Probar que la recta simétrica de l con respecto al punto medio de AB pasa por B.

b. Dado un punto P fuera de l y m, encontrar puntos $A \in l$ y $B \in m$ tales que P es el punto medio de AB.

11.422. Sean l y m dos rectas perpendiculares que se cortan en el punto O.

a. Dado un punto P en el plano, construir su punto simétrico P' con respecto a l y el punto simétrico P'' de P' con respecto a m.

b. ¿Qué se puede afirmar con respecto a los tres puntos O, P y P''?

11.423. Construir un círculo concéntrico a uno dado de tal forma que el área del aro que se forma sea la media geométrica de las áreas de ambos círculos.

11.424. Dado un semicírculo de radio r, determinar en su interior un arbelo de área 9.

11.425. Construir un círculo cuya área sea igual a la suma de las áreas de dos círculos dados.

11.426. Construir un círculo cuya área sea igual a la diferencia de las áreas de dos círculos dados.

11.427. Construir un círculo que tenga la misma área que un semicírculo dado.

11.428. Construir una espiral de dos centros.

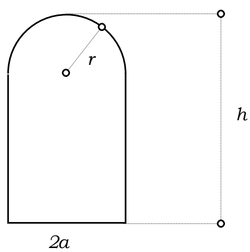
11.429. Construir una espiral de cuatro centros.

11.430. Enlazar una recta dada con un arco que ha de pasar por un punto dado.

11.431. Por medio de un arco, enlazar dos segmentos no paralelos que no se cortan.

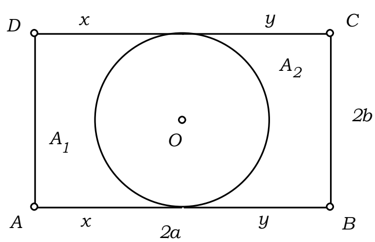
11.432. Enlazar dos segmentos paralelos dados con dos arcos que estén también enlazados.

11.433.



Dibujar una puerta, como lo muestra la figura: de radio r y ancho $2a$, de tal forma que r sea la media aritmética de a su altura h.

11.434. En la figura:



$\square ABCD$ es un rectángulo cuyos lados tienen longitudes $2a$ y $2b$. Determinar x y y, de tal forma que el área del círculo $\mathrm{C}(O,b)$ sea la media geométrica de las áreas de las regiones A_1 y A_2.

11.435. Sean l una recta y A y B dos puntos fuera de l. Encontrar un punto $M \in l$ tal que el número $||AM| - |BM||$ sea el más grande posible al moverse M sobre la recta l.

11.436. Dados una recta l y un segmento AB que no corta a la recta, encontrar un punto $P \in l$ de tal forma que la diferencia $|PB| - |PA|$ sea máxima.

11.437. Sean A y B dos puntos sobre una recta l.

a. Encontrar un punto $P \in l$ tal que la suma $|PA|^2 + 2|PB|^2$ sea mínima y probar que $|PA| = \frac{2}{3}|AB|$.

b. Encontrar un punto $P \in l$ tal que la suma $|PA|^2 + |PB|^2$ sea mínima y probar que $|PA| = \frac{1}{2}|AB|$. ¿Es P el punto medio de AB?

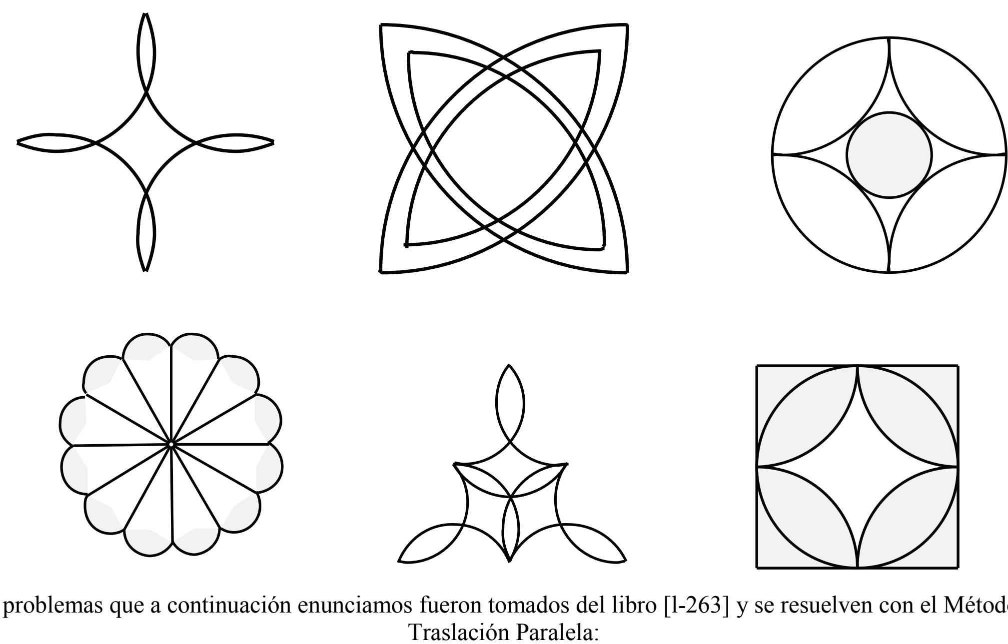
11.438. Sean l una recta y A y B dos puntos en un mismo semiplano determinado por l. Hallar un punto P, para el cual la suma $|PA|^2 + |PB|^2$ sea mínima.

11.439. Dados dos puntos A y B y dos rectas paralelas m y n ubicadas entre los dos puntos dados, encontrar dos puntos $M \in m$ y $N \in n$ tales que MN sea paralela a otra recta dada y $|AM| + |MN| + |NB|$ sea mínimo.
11.440[a-149] Sean l y m dos rectas y A y B dos puntos fuera de ellas. Encontrar dos puntos $O \in l$ y $P \in m$, tales que la suma $d(A,O) + d(O,P) + d(P,B)$ sea mínima.
11.441. Sean $\angle\alpha$ un ángulo agudo no degenerado y A, $B \in int(\angle\alpha)$. Buscar puntos P y Q en cada uno de los lados del ángulo dado, de tal manera que la suma $|AP| + |PQ| + |QB|$ sea mínima.
11.442. Dado un número real positivo a, encontrar el triángulo isósceles de máxima área cuyos lados congruentes tengan longitud a.
11.443. Dado un ángulo no degenerado, buscar entre todos los triángulos que tengan al ángulo dado como uno de sus ángulos y los lados comprendidos estén sobre los lados del ángulo dado, al triángulo que tenga el menor perímetro y que su tercer lado pase por un punto fijo del interior del ángulo dado.
11.444. Inscribir un rectángulo que tenga área máxima entre todos aquellos que se puedan inscribir en un triángulo dado.
11.445. Entre todos los triángulos que puedan inscribirse en un círculo dado, ¿cuál es el de menor área?
11.446. Dado un cuadrilátero, encontrar un punto en el plano tal que la suma de sus distancias a los vértices del cuadrilátero sea mínima.
11.447. Entre todos los cuadrados que puedan inscribirse en un cuadrado dado, de tal manera que cada lado del cuadrado dado contenga un vértice del nuevo cuadrado, ¿cuál es el de menor área?
11.448. Construir el paralelogramo más grande en área cuyas diagonales tengan longitudes 5 y 7.
11.449. Dados dos rectas y un círculo, encontrar sobre el círculo un punto cuya suma de sus distancias a ambas rectas sea mínima.
11.450. Sean $\mathsf{C}(O,r)$ un círculo y A, $B \in \mathsf{C}(O,r)$.

a. Encontrar la posición de un punto P para el cual la suma $|PA|^2 + |PB|^2$ sea máxima.

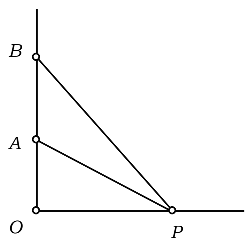
b. Encontrar la posición de un punto P para el cual la suma $|PA|^2 + |PB|^2$ sea mínima.

11.451[l-240]. Sean $\mathsf{C}(O,r)$ un círculo, AB una de sus cuerdas y $C \in \mathsf{C}(O,r)$. Trazamos una recta perpendicular a AB que pase por C y corte a OB en el punto D. Suponiendo que $OC \cong DC$, encontrar el área máxima que puede alcanzar el triángulo ΔOAB.
11.452. Con regla y compás, construir cada una de las siguientes figuras:



Los problemas que a continuación enunciamos fueron tomados del libro [l-263] y se resuelven con el Método de Traslación Paralela:

11.453. Encontrar un punto equidistante de tres rectas dadas.
11.454. Sobre una recta dada, encontrar un punto que sea equidistante de dos puntos dados.
11.455. Dadas tres rectas, encontrar un punto tal que sus distancias a las tres rectas estén en proporción dada.
11.456. Dados dos puntos, trazar una recta cuyas distancias a los puntos dados estén en una proporción dada.
11.457. Dados dos puntos, trazar una recta, de tal forma que las distancias de los puntos dados a la recta tengan suma dada.
11.458. Por un punto dado, trazar una recta de tal forma que una de las distancias a otros tres puntos dados sea igual a la suma de las otras dos.
11.459. Desde un punto dado, trazar una recta que pase por un punto que no se conoce, el cual es el punto de intersección de dos rectas dadas.
11.460. Dados una recta l, $P \in l$ y $Q \notin l$, encontrar puntos A y B equidistantes del punto P tales que $\angle AQB$ sea congruente a un ángulo dado.
11.461. Dados una recta y dos puntos fuera de ella, trazar un ángulo cuyo vértice esté sobre la recta dada, sus lados pasen por los puntos dados y sea congruente a un ángulo dado.
11.462. En la figura:



tenemos que $\angle POB$ es un ángulo recto.
a. Dados A y B, encontrar un punto P tal que
$$2m(\angle APB) = m(\angle ABP).$$
b. ¿Es siempre posible encontrar el punto P del primer inciso?
c. Dados A y B, encontrar un punto P tal que
$$m(\angle APB) = 2m(\angle ABP).$$

11.463. Construir un triángulo semejante a uno dado que tenga uno de sus lados sobre una recta dada y el vértice opuesto sobre una segunda recta dada.
11.464. Inscribir en un círculo dado un triángulo semejante a un triángulo dado.
11.465. En un círculo dado, inscribir un triángulo del cual solo se conoce un lado, la mediana correspondiente a dicho lado y un punto por el cual pasa dicha mediana.
11.466. En un círculo dado, inscribir un triángulo del cual solo se conoce un lado, la mediana correspondiente a otro de sus lados y el diámetro del círculo dado en donde yace su centro de gravedad.
11.467. En un círculo dado, inscribir un triángulo semejante a uno dado y que uno de los lados del triángulo pase por un punto dado en el interior del círculo.
11.468. Construir un triángulo que tenga como uno de sus lados a un segmento dado y las longitudes de los otros dos lados estén en una proporción dada.
11.469. Dado un triángulo, encontrar un punto en el plano tal que los ángulos cuyo vértice es dicho punto y sus lados pasan por los vértices del triángulo sean congruentes (en otras palabras, desde el punto que se desea se ven los tres lados del triángulo bajo el mismo ángulo).
11.470. Dados un círculo y un punto sobre él, inscribir en el círculo dado un triángulo rectángulo tal que uno de sus catetos pase por el punto dado y uno de sus ángulos sea congruente con un ángulo dado.
11.471. Dado un triángulo rectángulo, encontrar un punto sobre uno de sus catetos de tal forma que se pueda trazar un círculo cuyo centro es dicho punto, pase por el vértice opuesto a la hipotenusa y sea tangente a la hipotenusa.
11.472. En un círculo inscribir un triángulo rectángulo del cual solo conocemos un punto de cada cateto.
11.473. En un círculo inscribir un triángulo rectángulo del cual solo conocemos la medida de uno de sus ángulos agudos y un punto en uno de sus catetos.
11.474. Construir el triángulo rectángulo, conociendo la altura correspondiente a la hipotenusa, dos puntos de la hipotenusa y un punto en cada uno de los catetos.
11.475. Construir un triángulo tal que dos de sus vértices estén a una misma distancia dada del incírculo del triángulo cuyo radio esta dado.
11.476. Dados un triángulo y un punto en el plano, trazar una recta que pase por el punto dado y corte a dos lados del triángulo dado en dos puntos que sean concíclicos con los puntos extremos del tercer lado.

11.477. De un triángulo ΔABC solo se conoce su circuncírculo, el círcuncentro, el lado AB, su ángulo $\angle A$ y el punto de intersección de $\overleftrightarrow{AB}$ y el diámetro del círcuncírculo que pasa por el vértice C. Construir el triángulo.
11.478. Dado un triángulo ΔABC, encontrar puntos $P \in AB$ y $Q \in BC$ tales que la suma de las longitudes de los segmentos AP y QC esté dada.
11.479. Sea ΔABC un triángulo. Encontrar puntos $P \in AB$ y $Q \in BC$, de tal manera que el segmento PQ tenga longitud dada.
11.480. En un triángulo dado, trazar una recta paralela a uno de sus lados que corte a los lados restantes en un segmento de longitud dada.
11.481. Construir un triángulo conociendo m_a, el ángulo que forman m_b y m_c, y el área del triángulo.
11.482. Construir un triángulo conociendo las longitudes de dos medianas y el ángulo que forman la tercer mediana con el lado correspondiente.
11.483. Dado un círculo, encontrar un punto desde el cual las rectas tangentes al círculo dado tengan longitud dada.
11.484. Dado un círculo y una recta, construir una recta tangente al círculo dado, de tal forma que el punto de contacto esté a una distancia dada de la recta dada.
11.485. Sea $\mathsf{C}(O,r)$ un círculo. Supongamos que las rectas m y n son paralelas y tangentes al círculo $\mathsf{C}(O,r)$ en los puntos A y B, respectivamente. Encontrar puntos $C \in m$ y $D \in n$, de tal forma que el área del trapecio $\square ABCD$ sea igual a un número positivo dado.
11.486. Sea $\mathsf{C}(O,r)$ un círculo. Supongamos que las rectas m y n son paralelas y tangentes al círculo $\mathsf{C}(O,r)$. Trazar una recta tangente a $\mathsf{C}(O,r)$ que corte a m y n en los puntos A y B, respectivamente, de tal forma que la recta $\overleftrightarrow{AB}$ sea paralela a una recta dada.
11.487. Construir un círculo de radio dado que tenga un segmento tangente de longitud dada cuyos puntos extremos estén sobre dos círculos concéntricos dados.
11.488. Desde un punto dado trazar una recta tal que interseque a dos círculos concéntricos dados, de modo que se obtengan dos segmentos con la propiedad de que los puntos extremos de uno de ellos junto con el centro de los dos círculos dados formen un ángulo congruente a uno dado, siendo el centro el vértice de este ángulo.
11.489. Dados dos círculos, encontrar un punto desde el cual las rectas tangentes a ambos círculos formen un ángulo congruente a uno dado y uno de los segmentos tangentes comunes tenga longitud dada.
11.490. Desde un punto dado, trazar una recta que corte a un círculo dado en una cuerda de longitud dada.
11.491. En un círculo dado, trazar una cuerda de longitud dada de tal manera que un diámetro dado del círculo dado la divida en una proporción dada.
11.492. En un círculo dado, trazar una cuerda de longitud dada que tenga una dirección dada.
11.493. Construir dos círculos tangentes cuyos radios están dados de tal manera que cada uno de ellos corte a una de dos rectas dadas en una cuerda de longitud dada y la recta tangente común tenga una dirección dada.
11.494. Trazar una recta que corte a una recta dada en el punto A y a un círculo dado en los puntos B y C, de tal forma que los segmentos AB y BC tengan longitud dada.
11.495. En un círculo dado, inscribir un triángulo del cual solo se conoce la dirección, la longitud de uno de sus lados y un punto de la bisectriz del ángulo opuesto al lado conocido.
11.496. Trazar una recta tangente a un círculo dado cuyas distancias a dos puntos dados tengan suma dada.
11.497. Trazar una recta tangente a un círculo dado tal que la diferencia de las distancias de esta a dos puntos dados esté dada.
11.498. Construir un círculo que pase por dos puntos dados e interseque a un círculo dado en una cuerda de longitud dada.
11.499. Construir un círculo que pase por dos puntos dados y corte a un círculo dado en una cuerda que esté contenida en una recta que sea tangente a un segundo círculo dado.
11.500. Construir un círculo que pase por dos puntos dados y corte a un círculo dado en una cuerda que esté contenida en una recta cuyas distancias a otros dos puntos dados estén en una proporción dada.
11.501. Construir un triángulo congruente a uno dado de tal forma que dos de sus lados pasen por dos puntos dados y la bisectriz del ángulo comprendido entre dichos lados sea tangente a un círculo dado.
11.502. Dados un círculo, una recta y un punto sobre esta recta, construir un círculo ortogonal al círculo dado y que sea tangente a la recta dada en el punto dado.

11.503. Sea AB una cuerda de un círculo $\mathsf{C}(O,r)$.

a. Encontrar un punto $C \in \mathsf{C}(O,r)$ tal que el triángulo ΔABC tenga área dada.

b. Encontrar un punto $C \in \mathsf{C}(O,r)$ tal que el cociente $\dfrac{|AC|}{|AB|}$ esté dado.

11.504. Dados tres puntos, por uno de ellos trazar una recta tal que el producto de sus distancias a los dos puntos restantes esté dado.

11.505. Construir un triángulo cuyos exradios sean 6, 10 y 15.

11.506. Construir un cuadrado del cual solo se conoce un punto de cada uno de sus lados.

11.507. Trazar una recta que sea equidistante de los vértices de un cuadrilátero dado.

11.508. Construir un cuadrilátero que sea semejante a uno dado, de tal forma que cada uno de sus lados pase por uno de los cuatro puntos dados.

11.509. Dado un ángulo, encontrar un punto que esté a una distancia dada del vértice del ángulo dado y la razón entre las distancias del punto a los lados del ángulo dado esté dada.

11.510. Dado un cuadrilátero, encontrar un punto en el plano, de tal forma que sus distancias a dos lados opuestos del cuadrilátero dado tengan su suma dada, y las distancias del punto a los otros dos lados opuestos del mismo cuadrilátero estén en una proporción dada.

11.511. Dado un punto O, construir un cuadrado tal que las longitudes de sus lados esté dada y O sea el punto de intersección de sus diagonales.

11.512. Construir un rombo conociendo la longitud de uno de sus lados y la longitud de una de sus diagonales.

11.513. Construir un cuadrilátero $\square ABCD$ conociendo las partes que se dan en cada caso:

a. AB, BC, AC, BD y $\angle D$.

b. AB, BC, BD, $\angle A$ y $\angle B$.

c. AB, AC, $\angle A$, $\angle C$ y $\angle D$.

d. AB, CD, AC, $\angle BAC$ y $\angle ABD$.

e. AB, CD, AC, $\angle ABD$ y $\angle BDC$.

f. $\angle BCA$, $\angle CAD$, las longitudes de sus diagonales y uno de los ángulos que ellas forman.

g. Dos ángulos opuestos, las longitudes de sus diagonales y uno de los ángulos que ellas forman.

h. AB, CD, $\angle BAC$, $\angle ACD$ y $\angle BDA$.

i. AC, BD, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ y $\angle D$.

j. Las longitudes de sus cuatro lados y el ángulo formado por dos lados opuestos.

11.514. Dentro de un círculo dado, inscribir un cuadrilátero del cual solo se conocen las longitudes de sus diagonales y uno de los ángulos que ellas forman.

11.515. Construir un cuadrilátero cíclico $\square ABCD$, conociendo las partes que se dan en cada caso:

a. Las longitudes de sus cuatro lados.

b. Las longitudes de sus diagonales, uno de los ángulos que ellas forman y el ángulo que forman una diagonal y uno de los lados del cuadrilátero.

c. $\angle A$, $\angle ABD$, AC y BD.

d. AC, $\angle CAB$, $\angle ACD$, CD y DB.

e. El radio R del círculo que contiene a sus vértices, AC, BD y $|AB| + |BC|$.

f. El radio R del círculo que contiene a sus vértices, AC, BD y $|AB| - |BC|$.

g. AC, BC, CD y $|CD| + |DA|$.

h. AC, BC, CD y $|CD| - |DA|$.

i. $|AB| + |BC|$, DA, BD y $\angle A$.

j. $|AB| - |BC|$, DA, BD y $\angle A$.

k. AC, BD, $\angle A$ y $\angle ACB$.

l. AB, BC, AC y uno de los ángulos formados por las diagonales.

m. Una de sus diagonales y las distancias de los puntos extremos de esta a la otra diagonal.

11.516. Construir un cuadrilátero cíclico $\square ABCD$, sabiendo que AC es un diámetro del círculo que contiene sus vértices y conociendo la otra diagonal BD y la proyección del lado BC sobre esta.

11.517. Construir un paralelogramo $\square ABCD$ conociendo AB, AC y AD.

11.518. Construir un trapecio dadas sus diagonales uno de sus lados paralelos y uno de sus ángulos.

11.519. Construir un trapecio dadas las longitudes de sus diagonales y las medidas de sus ángulos.

11.520. Construir un trapecio, conociendo las longitudes de sus diagonales, la longitud del segmento que une los puntos medios de sus lados no paralelos y la medida de uno de sus ángulos.
11.521. Dado un paralelogramo $\square ABCD$, encontrar un punto $X \in DC$ tal que $|AX| = |AB| + |XD|$.
11.522. Sean e y f dos números reales positivos, y l y m dos rectas secantes. Encontrar una condición necesaria y suficiente para que se pueda construir una paralelogramo cuyos lados sean paralelos a l y m, y sus diagonales tengan longitudes e y f.
11.523. En la Configuración 11.8.13, decir cuándo el vértice C cae sobre una de las diagonales del paralelogramo $\square BFED$.
11.524. Construir un cuadrilátero conociendo las longitudes de sus diagonales, el ángulo que forman sus diagonales y dos ángulos opuestos.
11.525. Construir un trapecio conociendo las longitudes de sus diagonales, uno de los ángulos que forman sus diagonales y la suma de las longitudes de dos lados adyacentes.
11.526. Construir un trapecio conociendo las longitudes de sus diagonales, uno de los ángulos que forman sus diagonales y la diferencia de las longitudes de dos lados adyacentes.
11.527. Construir un cuadrilátero conociendo dos de sus ángulos opuestos, su área y las longitudes de los segmentos que unen los puntos medios de dos lados opuestos.
11.528. Construir un cuadrilátero conociendo las longitudes de dos lados opuestos y sus cuatro ángulos.
11.529. Construir un trapecio conociendo las longitudes de sus diagonales, el ángulo que forman sus diagonales y la longitud de uno de sus lados.
11.530. Construir un cuadrilátero conociendo las longitudes de tres de sus lados y la medida de los ángulos adyacentes al cuarto lado.
11.531. Construir un trapecio conociendo las longitudes de sus lados no paralelos y las longitudes de sus diagonales.
11.532. Construir un paralelogramo conociendo las longitudes de sus diagonales y su área.
11.533. Construir un paralelogramo conociendo las longitudes de sus lados y una diagonal.
11.534. Construir un trapecio cíclico del cual solo conocemos su altura con respecto a los lados paralelos y la diferencia de las longitudes de sus lados paralelos.
11.535. Construir un trapecio cíclico del cual solo conocemos su altura con respecto a sus lados paralelos y la suma de las longitudes de sus lados paralelos.
11.536. Construir un cuadrilátero conociendo las longitudes de sus diagonales, las longitudes de dos de sus lados opuestos y el ángulo que dichos lados forman.
11.537. Construir un trapecio conociendo las longitudes de sus diagonales, la longitud del segmento que une los puntos medios de las diagonales y las longitudes de uno de los segmentos que unen los puntos medios de dos de sus lados opuestos.

Los problemas que a continuación enunciamos aparecen en el libro [l-263] y se resuelven con el Método de Reemplazamiento:

11.538. Dados un triángulo y un ángulo no degenerado, construir un paralelogramo cuya área sea la mitad del área del triángulo dado y uno de sus ángulos sea congruente con el ángulo dado.
11.539. Dados una recta y un punto sobre ella, trazar un círculo de radio dado que pase por el punto dado y forme con la recta dada un ángulo congruente a uno dado.
11.540. Trazar un círculo que sea tangente a un círculo dado en un punto dado e interseque a un segundo círculo dado de tal manera que se forme un ángulo congruente a uno dado.
11.541. Dado un círculo, construir un triángulo cuyo incírculo sea el círculo dado.
11.542. Dados un círculo y tres semirrectas cuyo vértice es el centro del círculo, construir un triángulo que tenga al círculo como incírculo y que cada uno de sus vértices esté en cada una de las semirrectas dadas (ver Problema 9.638).

CAPÍTULO 12

LUGARES GEOMÉTRICOS

12.1. Locus

La palabra *locus* proviene del latín y significa *lugar*. El plural de esta palabra en latín es *loci*. En la mayoría de libros de texto de Geometría, usan la palabra locus por brevedad para referirse a un lugar geométrico. Adoptaremos también dicha palabra en este capítulo.

12.1.1. Definición. Un *lugar geométrico* (*locus*) es un conjunto de puntos en el plano que satisfacen una misma propiedad geométrica.

Desde el principio de este libro. se han venido considerando conjuntos de puntos en el plano que poseen una misma propiedad geométrica. Por ejemplo, los círculos se pueden describir como aquel lugar geométrico de los puntos en el plano cuyas distancias a un punto fijo es constante. Este es quizá el ejemplo más común de un lugar geométrico que todo mundo conoce. Otros loci que hemos visto son la mediatriz de un segmento, la bisectriz de un ángulo no degenerado y dos rectas paralelas. Para describir un locus, es necesario llevar a cabo dos tareas fundamentales:

I. *La búsqueda de algunos puntos del locus*. Es decir, ubicar algunos puntos que cumplan las condiciones geométricas dadas. Esto nos dará idea de las propiedades geométricas del locus.

II. *La determinación del locus*. Ya entendida la propiedad geométrica que describe al locus, procedemos a sugerir el conjunto de puntos del plano que satisfacen la propiedad geométrica dada.

12.2. Loci básicos

Presentaremos en esta sección los teoremas básicos sobre loci.

12.2.1. Teorema. El locus de los puntos que están a una distancia constante de un punto fijo dado es un círculo que tiene como centro al punto dado y como radio a la distancia dada.

Prueba: Sea r un número real positivo y fijemos un punto O en el plano. Si A satisface que $d(A,O) = r$, entonces $A \in \mathsf{C}(O,r)$. Esto prueba que todo punto del locus pertenece al círculo $\mathsf{C}(O,r)$. Inversamente, si $A \in \mathsf{C}(O,r)$, entonces, por definición, el punto A está a distancia r del punto fijo O. Es decir, el punto A pertenece al locus. Por lo tanto, el locus es un círculo con centro O y radio r. ♣

12.2.2. Teorema. El locus de los puntos que están a una distancia fija de una recta fija es un par de rectas paralelas a la recta fija tales que cada una de ellas está en uno de los semiplanos, determinado por la recta fija y cuyas distancias a esta es igual a la distancia fija.

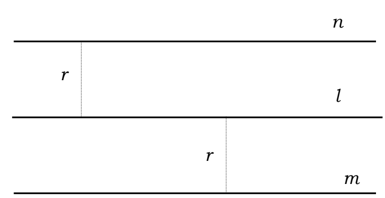


Figura 12.1

Prueba: Sean l una recta y $r > 0$ un número real. Por el Teorema 4.7.14, sabemos que existen dos únicas rectas m y n paralelas a l tales que $d(l,m) = d(l,n) = r$. Claramente, cualquier punto de m y n pertenece al locus solicitado. Sea P un punto en el plano tal que $d(P,l) = r$. Aplicando el mismo argumento para la demostración de la unicidad de las rectas en el Teorema 4.7.14, concluimos a que

$$P \in m \cup n. \text{ ♣}$$

12.2.3. Teorema. La mediatriz de un segmento es el locus de los puntos que equidistan de los dos puntos extremos del mismo segmento.

Prueba: Sean AB un segmento y m su mediatriz. Según el Teorema 4.7.8, sabemos que $P \in m$ si y solo si $d(P,A) = d(P,B)$. Esto establece el teorema. ♣

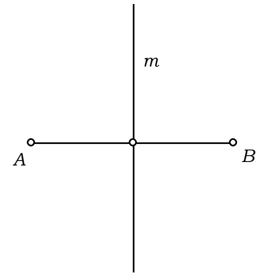


Figura 12.2

12.2.4. Teorema. El locus de los puntos que están a una distancia constante de dos rectas paralelas fijas es una recta paralela a las rectas fijas que se encuentra entre dichas rectas a una misma distancia de ambas.

Prueba: Sean m y n dos rectas paralelas. Fijemos un punto P tal que $d(P,m) = d(P,n)$. De acuerdo con el Teorema 4.7.11, el punto P está entre las rectas m y n. Sea l la recta paralela a m que pasa por el punto P. En virtud del Teorema 3.4.3, sabemos que $l \parallel n$. Trazamos (11.1.4) una recta perpendicular a l en el punto P que corte a m y n en los puntos A y B, respectivamente. Observemos que P es el punto medio de AB. Tomemos un punto $Q \in l$. Trazamos (11.1.4) la recta perpendicular a l en Q que corte a las rectas m y n en los puntos A' y B', respectivamente. Por el Teorema 3.7.1, hallamos que $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{A'B'}$.

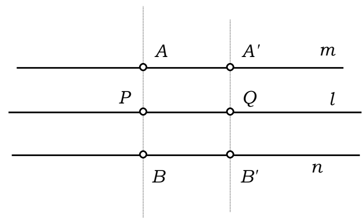


Figura 12.3

Como $\overleftrightarrow{AB} \perp l$ y $\overleftrightarrow{A'B'} \perp l$, se tiene entonces que $\square ABB'A'$ es un rectángulo. Ya que P es el punto medio de AB, $l \parallel m$ y $m \parallel n$, de done se sigue que Q es el punto medio de $A'B'$ (Teorema 6.1.10). Por consiguiente, $d(Q,m) = |QA'| = |QB'| = d(Q,n)$. Lo cual significa que el punto Q pertenece al locus.

Supongamos ahora que Q es un punto del plano tal que $d(Q,m) = d(Q,n)$. Según el Teorema 4.7.11, tenemos que Q está entre las rectas m y n. Trazamos (11.1.6) la recta perpendicular a m que pasa por el punto Q. Sean A' y B' los puntos de intersección de esta recta perpendicular con las rectas m y n, respectivamente. Por definición, sabemos que $d(Q,m) = |QA'|$ y $d(Q,n) = |QB'|$. De nuestra suposición deducimos que Q es el punto medio del segmento $A'B'$. Ya que $\overleftrightarrow{AB} \perp l$ y $\overleftrightarrow{A'B'} \perp l$, por el Teorema 3.7.1, encontramos que $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{A'B'}$ y como $m \parallel n$, se tiene entonces que $\square ABB'A'$ es un rectángulo. De aquí deducimos que $AP \cong A'Q$ y $PQ \cong AA'$. De acuerdo con el Teorema 3.4.10, vemos que $\overleftrightarrow{PQ} \parallel m$. Lo cual implica, por el Axioma AP, que $\overleftrightarrow{PQ} = l$. Por lo tanto, $Q \in l$. ♣

12.2.5. Teorema. La bisectriz de un ángulo no degenerado es el locus de los puntos que equidistan de los lados del ángulo.

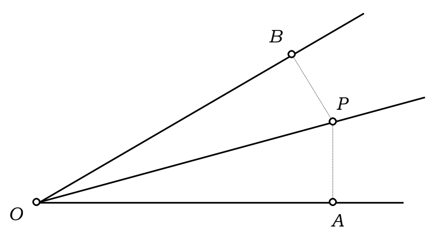


Figura 12.4

Prueba: Es consecuencia inmediata del Teorema de la Bisectriz (4.7.9). ♣

12.2.6. Teorema. El locus de los puntos que equidistan de dos rectas secantes son dos rectas perpendiculares.

Prueba: Sean l y m dos rectas que se cortan en el punto O. Fijemos puntos $A, B \in l$ y C, $D \in m$, como muestra la figura 12.5. Sea L el conjunto de puntos que equidistan de las rectas l y m. Claramente, $O \in \mathsf{L}$. Por el Teorema 4.7.9, sabemos que las bisectrices de los cuatro ángulos que forman las rectas l y m pertenecen al conjunto L. Fijemos un punto $P \in \mathsf{L} - \{O\}$. Evidentemente, $P \notin l \cup m$. Así que P está en el interior de alguno de los cuatro ángulos formados por las rectas l y m y, por el Teorema 4.7.9, el punto P yace en la bisectriz de dicho ángulo. Por lo cual, el locus L consiste de las cuatro bisectrices de los cuatro ángulos formados por l y m. Según el Corolario 2.12.6, dichas bisectrices forman dos rectas perpendiculares. ♣

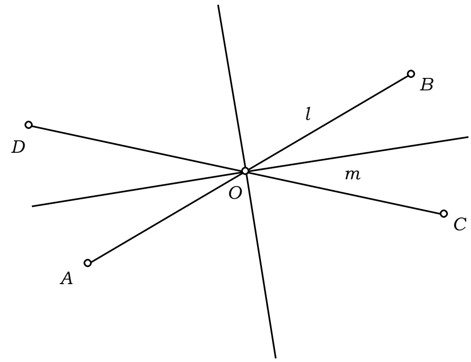


Figura 12.5

12.2.7. Teorema. El locus del punto desde el cual las rectas trazadas a los puntos extremos de un segmento fijo forman un ángulo congruente a un ángulo fijo son dos arcos de dos círculos del mismo radio, teniendo al segmento como una cuerda común que sustenta a ambos arcos.

Prueba: Sean AB un segmento y $\angle\alpha$ un ángulo no degenerado. Ubicamos (11.3,16) dos puntos P y P' en el plano, de tal forma que $\angle APB \cong \angle\alpha \cong \angle AP'B$ y P y P' pertenezcan a diferentes semiplanos determinados por la recta $\overleftrightarrow{AB}$. Trazamos (11.3.3) los círculos $\mathsf{C}(O,r)$ y $\mathsf{C}(O',r')$ que pasan por los puntos P, A y B, y P', A y B, respectivamente. Sea $\mathcal{A}$ el conjunto formado por el arco de $\mathsf{C}(O,r)$ sustentado por AB que contiene a P y el arco de $\mathsf{C}(O,r)$ sustentado por AB que contiene a P'. Fijemos un punto $Q \in \mathcal{A}$. Sin perder generalidad, supongamos que $Q \in \mathsf{C}(O,r)$. De acuerdo con el Corolario 9.5.7, $\angle APB \cong \angle AQB$ y, por consiguiente, $\angle AQB \cong \angle\alpha$. Esto prueba que Q es un punto del locus. Por lo tanto, los puntos del conjunto $\mathcal{A}$ pertenecen al locus. Recíprocamente, tomemos un punto R en el plano tal que $\angle ARB \cong \angle\alpha$. Si R y P están en un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{AB}$, por el Teorema 9.5.11, se tiene que $R \in \mathsf{C}(O,r)$. Como una consecuencia, vemos que R pertenece al arco de $\mathsf{C}(O,r)$ sustentado por AB que contiene al punto P. Del mismo modo, si R y P' están en un mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{AB}$, entonces R pertenece al arco de $\mathsf{C}(O,r)$ sustentado por AB que contiene a P'. Con esto demostramos que $\mathcal{A}$ es el locus buscado. Se deduce del Teorema 9.5.6 que

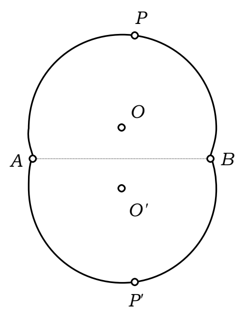


Figura 12.6

$$\begin{aligned} 2m(\angle AOB) &= 2m(\angle AO'B) \\ m(\angle AOB) &= m(\angle AO'B) \\ \angle AOB &\cong \angle AO'B. \end{aligned}$$

Aplicando el Problema 3.7, encontramos que $\Delta AOB \cong \Delta AO'B$. Esta congruencia nos conduce a la igualdad $r = r'$, puesto que $r = |AO|$ y $r' = |AO'|$. ♣

12.3. Loci sobre triángulos

12.3.1. Teorema. El locus del vértice opuesto a la base de un triángulo isósceles cuya base es fija es la mediatriz de la base menos el punto medio de la misma.

Prueba: Sean BC un segmento, M su punto medio y m su mediatriz. Supongamos que ΔABC es un triángulo isósceles con $AB \cong AC$. De acuerdo con el Teorema 4.2.2, sabemos que A está en la mediatriz m del segmento BC. Inversamente, si A pertenece a la mediatriz m de BC, por el mismo Teorema 4.2.2, entonces $AB \cong AC$. Lo cual quiere decir que ΔABC es un triángulo isósceles. Así, el locus resulta ser $m - \{M\}$. ♣

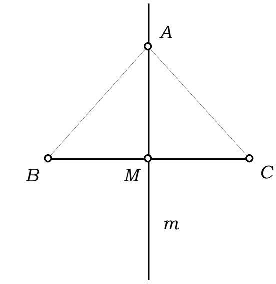


Figura 12.7

12.3.2. Teorema. El locus del vértice opuesto a la base de un triángulo cuya base es fija y la longitud h de la altura correspondiente es constante, son dos rectas paralelas a la base que están a una distancia h de la misma.

Prueba: Sean BC un segmento y h un número real positivo. Trazamos (11.1.5) dos rectas l y m paralelas a $\overleftrightarrow{BC}$ tales que $d(l, \overleftrightarrow{BC}) = d(m, \overleftrightarrow{BC}) = h$. El Teorema 4.7.14 nos asegura que estas dos rectas l y m son únicas. Supongamos que ΔABC es un triángulo tal que $h_a = h$. Por la unicidad de las rectas l y m, hallamos que $A \in l \cup m$, de otra forma existiría una recta diferente a l y m y paralela a $\overleftrightarrow{BC}$ que diste de esta última una distancia h. Si $A \in l$, por definición, tenemos entonces que

$$d(l, \overleftrightarrow{BC}) = d(A, H_a) = h_a = h.$$

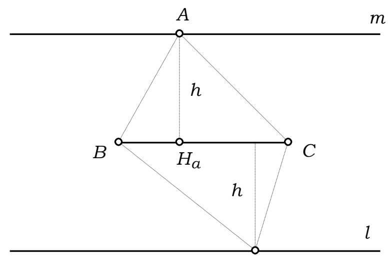


Figura 12.8

Es decir, A pertenece al locus. Con el mismo argumento, demostramos que todo punto de m también pertenece al locus. Por lo tanto, el locus solicitado es $l \cup m$. ♣

12.4. Loci sobre círculos

12.4.1. Teorema. El locus del centro de un círculo de radio fijo que es tangente a una recta fija son dos rectas paralelas a la recta fija cuyas distancias a esta son iguales al radio fijo.

Prueba: Sean l un recta y $r < 0$ un número real. Trazamos (11.1.5) dos rectas m y n que sean paralelas a l tales que

$$d(l,m) = d(l,n) = r.$$

Denotemos por L al locus solicitado. Tomemos un punto $P \in \mathsf{L}$. Es evidente que el círculo $\mathsf{C}(P,r)$ es tangente a l en un punto que denotamos P'. El Teorema 9.3.6 nos asegura que $PP' \perp l$. De aquí vemos que la distancia entre la recta l y la recta paralela a l que pasa por el punto P es igual a $|PP'| = r$. Así, con base en el Teorema 4.7.14, hallamos que $P \in m \cup n$. Esto muestra que $\mathsf{L} \subseteq m \cup n$. Inversamente, sea $P \in m \cup n$.

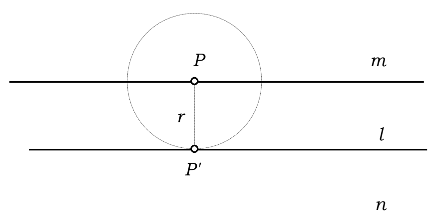


Figura 12.9

Sin perder generalidad, supongamos que $P \in m$. Sea P' la proyección de P sobre la recta l. Entonces, tenemos que $d(P,l) = |PP'| = d(m,l) = r$. De aquí encontramos que $P' \in \mathsf{C}(P,r)$ y como $PP' \perp l$, por el Teorema 9.3.6, l resulta ser tangente al círculo $\mathsf{C}(P,r)$ en el punto P'. Por consiguiente, $P \in \mathsf{L}$. Así hemos demostrado la contención $m \cup n \subseteq \mathsf{L}$. Por lo tanto, $\mathsf{L} = m \cup n$. ♣

12.4.2. Teorema. El locus del vértice de un ángulo recto de un triángulo rectángulo con hipotenusa fija es un círculo cuyo diámetro es la hipotenusa sin los puntos extremos de ésta.

Prueba: Sean BC un segmento fijo y M su punto medio. Supongamos que ΔABC es un triángulo rectángulo en $\angle A$. De acuerdo con el Teorema 8.3.19, $|AM| = |BM| = |CM|$. Es decir, A pertenece al círculo de diámetro BC. Inversamente, sea $A \in \mathsf{C}(M,|BM|)$. Entonces, por el Teorema 9.5.2, sabemos que el ángulo $\angle BAC$ es recto. Es decir, ΔABC es un triángulo rectángulo en $\angle A$. ♣

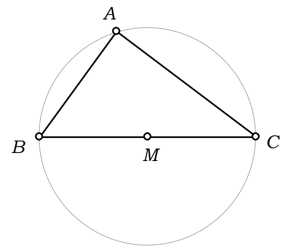


Figura 12.10

12.4.3. Teorema. El locus del punto tal que los segmentos tangentes desde este punto a un círculo fijo forman un ángulo fijo es un círculo concéntrico con el círculo fijo.

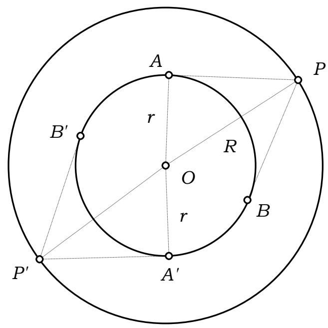


Figura 12.11

Prueba: Sean $\mathsf{C}(O,r)$ un círculo y $\angle\alpha$ un ángulo no degenerado. Fijamos un punto $P \in ext(\mathsf{C}(O,r))$ y dos puntos A y $B \in \mathsf{C}(O,r)$ tales que los segmentos PA y PB son tangentes a $\mathsf{C}(O,r)$ y $\angle APB \cong \angle\alpha$. Pongamos $R = |PO|$. Sea P' otro punto de nuestro locus. Supongamos que A' y $B' \in \mathsf{C}(O,r)$ satisfacen que $P'A'$ y $P'B'$ son tangentes a $\mathsf{C}(O,r)$ y que $\angle A'P'B' \cong \angle\alpha$. Consideremos los triángulos ΔOPA y $\Delta OP'A'$. Por el Teorema 9.3.6, sabemos que los triángulos ΔOPA y $\Delta OP'A'$ son rectángulos en $\angle A$ y $\angle A'$, respectivamente. Según el Teorema 9.3.11, $\overrightarrow{PO}$ y $\overrightarrow{P'O}$ son las bisectrices de los ángulos $\angle APB$ y $\angle A'P'B'$, respectivamente. Por ello,

$$m(\angle APO) = \frac{m(\angle APB)}{2} = \frac{m(\angle A'P'B')}{2} = m(\angle A'P'O').$$

Según el criterio 3.6.2, hallamos que $\Delta OPA \cong \Delta OP'A'$. En consecuencia, $|P'O'| = |PO| = R$. En otras palabras, $P' \in \mathsf{C}(O,r)$. Inversamente, sea $P' \in \mathsf{C}(O,R)$. Como $r < R$, $P' \in ext(\mathsf{C}(O,r))$. Sean A', $B' \in \mathsf{C}(O,r)$ tales que $P'A'$ y $P'B'$ son tangentes a $\mathsf{C}(O,r)$. Tenemos que ΔOPA y $\Delta OP'A'$ son triángulos rectángulos en $\angle A$ y $\angle A'$, respectivamente, tales que $|OA| = |OA'| = r$. Como $|OP| = |OP'| = R$., por el criterio 3.6.5, vemos que $\Delta OPA \cong \Delta OP'A'$. De aquí se sigue que $\angle APO \cong \angle A'P'O$. Por consiguiente, basándonos en el Teorema 9.3.11,

$$m(\angle APO) = \frac{m(\angle APB)}{2} = \frac{m(\angle A'P'B')}{2} = m(\angle A'P'O').$$

$$\frac{m(\angle APB)}{2} = \frac{m(\angle A'P'B')}{2}$$

$$m(\angle APB) = m(\angle A'P'B')$$

$$\angle APB \cong \angle A'P'B'.$$

Por lo tanto, $\angle A'P'B' \cong \angle\alpha$. Esto prueba que P' pertenece al locus. Así, $\mathsf{C}(O,R)$ es el locus deseado. ♣

12.4.4. Teorema. El locus del punto medio de una cuerda con un punto extremo fijo sobre un círculo fijo es un círculo cuyo diámetro es el radio del círculo fijo sin el punto extremo fijo.

Prueba: Sean $\mathsf{C}(O,r)$ un círculo, $A \in \mathsf{C}(O,r)$ y AB el diámetro de $\mathsf{C}(O,r)$ que pasa por A. Evidentemente, el centro O del círculo $\mathsf{C}(O,r)$ pertenece al locus. Tomemos un punto $C \in \mathsf{C}(O,r) - \{A, B\}$ y sea M el punto medio de la cuerda AC. Los triángulos ΔABC y ΔAOM comparten el ángulo $\angle BAC$ y como $\dfrac{|AB|}{|OA|} = \dfrac{|AC|}{|AM|} = 2$, por el criterio de semejanza 6.2.10, hallamos que $\Delta ABC \sim \Delta AOM$. Como AB es un diámetro de $\mathsf{C}(O,r)$, por el Teorema 9.5.2, $\angle ACB$ es un ángulo recto, y como también se cumple que $\angle ACB \cong \angle AMO$, $\angle AMO$ resulta ser un ángulo recto. De acuerdo con el Teorema 9.5.12, el punto M pertenece al círculo de diámetro OA. Inversamente, sea $M \in \mathsf{C}(O', \frac{r}{2})$, en donde O' es el punto medio de OA. Por el Teorema 9.5.2, $\angle AMO$ y $\angle ACB$ son ángulos rectos. En consecuencia, ΔABC y ΔAOM son triángulos rectángulos. Puesto que $\angle BAC$ es un ángulo común de los triángulos ΔABC y ΔAOM, con base en el criterio de semejanza 6.2.6, obtenemos que $\Delta ABC \sim \Delta AOM$. Por ello, $\dfrac{|AB|}{|OA|} = \dfrac{|AC|}{|AM|}$. Pero como O es el punto medio de AB, $\dfrac{|AC|}{|AM|} = 2$ y, por lo tanto, M es el punto medio de AC. Esto prueba que nuestro locus es $\mathsf{C}(O', \frac{r}{2}) - \{A\}$. ♣

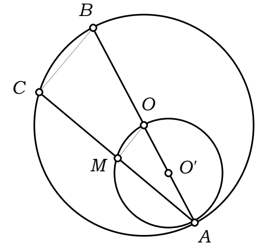


Figura 12.12

12.4.5. Teorema. El locus del punto medio de una cuerda de longitud constante de un círculo fijo es un círculo concéntrico con el círculo fijo.

Prueba: Sean $\mathsf{C}(O,r)$ un círculo y $s < 2r$. Supongamos que AB es una cuerda de $\mathsf{C}(O,r)$ tal que $|AB| = s$. Por la fórmula del Teorema 9.2.11, sabemos que $d(O,AB) = \dfrac{\sqrt{4r^2 - s^2}}{2}$. De aquí vemos que si M es el punto medio de AB, entonces

$$|OM| = d(O,AB) = \frac{\sqrt{4r^2 - s^2}}{2}.$$

Lo cual prueba que $M \in \mathsf{C}(O, \frac{\sqrt{4r^2 - s^2}}{2})$. Tomemos un punto M en el círculo $\mathsf{C}(O, \frac{\sqrt{4r^2 - s^2}}{2})$. Trazamos (11.1.4) la cuerda AB perpendicular al radio OM. Como ΔOAB es un triángulo isósceles que tiene a OM como la altura correspondiente a su lado AB, por el Teorema 8.3.23, M es el punto medio de AB. Según el Teorema de Pitágoras (8.5.1), hallamos que

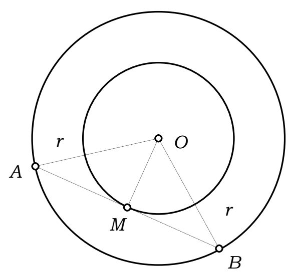


Figura 12.13

$$|OM|^2 + |AM|^2 = r^2$$

$$|AM|^2 = r^2 - |OM|^2 = r^2 - \left(\frac{\sqrt{4r^2 - s^2}}{2}\right)^2 = r^2 - \frac{4r^2 - s^2}{4} = \frac{s^2}{4}$$

$$|AM|^2 = \frac{s^2}{4}$$

$$|AM| = \frac{s}{2}.$$

De donde se sigue que $|AB| = 2|AM| = s$. Por lo tanto, M es el punto medio de una cuerda de longitud s del círculo $\mathsf{C}(O,r)$. ♣

12.4.6. Teorema. El locus del centro de un círculo de radio constante que es tangente internamente a un círculo fijo es un círculo concéntrico con el círculo fijo.

Prueba: Sean $\mathsf{C}(O,r)$ un círculo y $s > 0$ tal que $s < r$. Sea $\mathsf{C}(P,s)$ un círculo internamente tangente al círculo $\mathsf{C}(O,r)$ en el punto A. De acuerdo con el Teorema 9.3.16, los puntos O, P y A son colineales. De donde obtenemos la identidad $|OP| = |OA| - |PA| = r - s$. Lo cual significa que $P \in \mathsf{C}(O,r - s)$. Inversamente, tomemos un punto $P \in \mathsf{C}(O,r - s)$. Sea AO el radio del círculo $\mathsf{C}(O,r)$ que contiene al punto P. Entonces, tenemos que

$$r = |OA| = |OP| + |PA| = r = r - s + |PA|.$$

Lo cual muestra que $A \in \mathsf{C}(P,s)$. Así que A es un punto común de $\mathsf{C}(O,r)$ y $\mathsf{C}(P,s)$. Sea $B \in \mathsf{C}(P,s) - \{A\}$. Tenemos entonces que

$$|OB| < |OP| + |PB| = |OP| + |PA| = |OA| = r.$$

Esto prueba que $B \in int(\mathsf{C}(O,r))$. Por lo tanto, $\mathsf{C}(P,s) - \{A\} \subseteq int(\mathsf{C}(O,r))$. Así hemos probado que P es el centro de un círculo de radio s tangente interiormente a $\mathsf{C}(O,r)$. Con esto mostramos que $\mathsf{C}(O,r - s)$ es el locus requerido. ♣

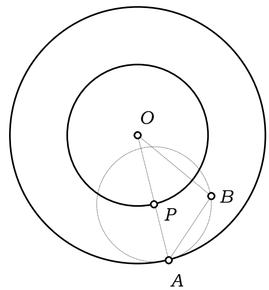


Figura 12.14

12.4.7. Teorema. Sean l y m dos recta perpendiculares y $d > 0$ un número real. El locus del punto medio de un segmento AB tal que $A \in l$, $B \in m$ y $|AB| = d$, es un círculo con centro el punto de intersección de l y m, y radio igual a $\frac{d}{2}$.

Prueba: Sea O el punto de intersección de las rectas l y m. Sean AB un segmento tal que $A \in l$, $B \in m$ y $|AB| = d$, y M el punto medio de AB. Por ser ΔBAO un triángulo rectángulo con hipotenusa AB, con base en el Teorema 8.3.19, hallamos que

$$|AM| = |MB| = |MO| = \frac{d}{2}.$$

Lo cual significa que $M \in \mathsf{C}(O, \frac{d}{2})$. Inversamente, tomemos un punto arbitrario $M \in \mathsf{C}(O, \frac{d}{2})$. Sin perder generalidad, podemos suponer que $M \notin l \cup m$. Con centro en M trazamos un círculo de radio $\frac{d}{2}$ que corte a las rectas l y m en los puntos A y B, respectivamente (ver la figura 12.16). Como el ángulo $\angle BOA$ es recto, por el Teorema 9.5.2, AB resulta ser un diámetro del círculo $\mathsf{C}(M, \frac{d}{2})$. Por lo tanto, M es el punto medio de AB y $|AB| = d$. ♣

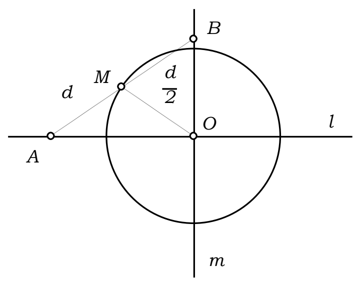


Figura 12.15

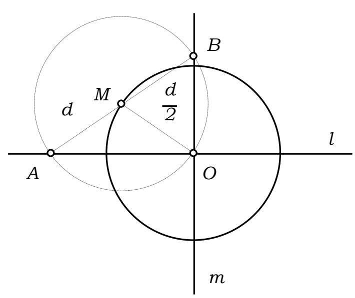


Figura 12.16

12.4.8. Teorema. Dado un círculo, el locus de los puntos cuyas potencias al círculo dado es constante es un círculo concéntrico con el dado.

Prueba: Sean C(O,r) un círculo y $s \neq 0$ un número real. Primero consideraremos el caso cuando $0 < s$. Trazamos (11.3.5) una recta t tangente a C(O,r) en un punto $A \in$ C(O,r). Sobre t ubicamos (11.7.1) un punto P tal que $|PA|^2 = s$. De acuerdo con el Teorema 9.6.1, tenemos que la potencia de P con respecto al círculo C(O,r) es igual a s. Fijemos un punto $Q \in$ C(O,$|OP|$). Sea $B \in$ C(O,r) tal que QB es tangente a C(O,r). Según el Teorema 3.6.5, sabemos que $\Delta OAP \cong \Delta OBQ$. De aquí se sigue la igualdad $|QB| = |PA|$ y, por lo cual, $|QB|^2 = s$. Así, por el Teorema 9.6.1, la potencia de Q con respecto al círculo C(O,r) es igual a s. Ahora supongamos que Q es un punto tal que su potencia con respecto al círculo C(O,r) es igual a s. Sea $B \in$ C(O,r) tal que el segmento QB es tangente a C(O,r). Según el Teorema 9.6.1, la potencia de Q con respecto a C(O,r) esta dada por $|QB|^2 = s$. De aquí y del Teorema 1.8.1 se deduce que $PA \cong QB$. El criterio 3.6.4 asegura que $\Delta OAP \cong \Delta OBQ$. De donde hallamos que $OP \cong OQ$. Es decir, $Q \in$ C(O,$|OP|$).

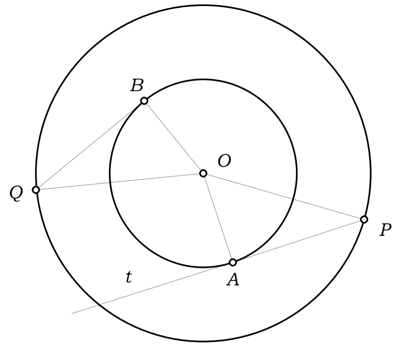


Figura 12.17

Analicemos el caso cuando $s < 0$. Fijemos un punto P en el locus. Tenemos entonces que $P \in int$(C(O,r)). Consideremos el círculo C(O,$|OP|$). Tomemos (11.3.5) un punto $T \in$C(O,r) tal que TP sea tangente a C(O,$|OP|$). De acuerdo con el Teorema 9.6.1, la potencia del punto P al círculo C(O,r) es igual a $|PT|^2 = |s|$. Como en el caso anterior, se puede demostrar que C(O,$|OP|$) es el locus solicitado. Veamos que nuestro locus, en este caso, es no vacío. Efectivamente, por el Problema 9.349, sabemos que $|s| < r$. Construimos (11.2.12) el triángulo rectángulo ΔOPT tal que $|OT| = r$ y $|PT|^2 = |s|$. Por el Teoremas 9.6.1, la potencia del punto P con respecto al círculo C(O,r) es igual a $-|PT|^2 = -|s| = s$. Lo cual muestra que P es un punto del locus. ♣

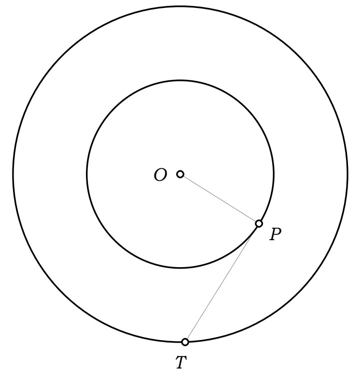


Figura 12.18

12.4.9. Teorema. El locus del punto cuyos cuadrados de sus distancias a dos puntos fijos tienen diferencia constante es una recta perpendicular a la recta que une los dos puntos fijos.

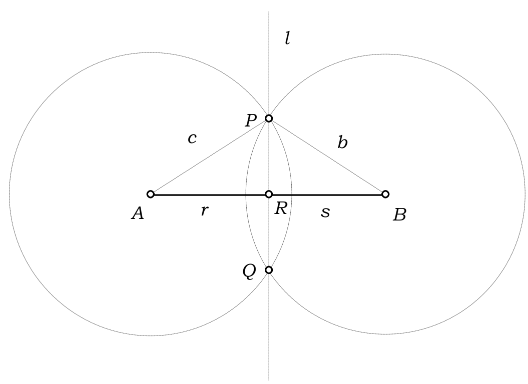


Figura 12.19

Prueba: Sean A y B dos puntos y $a > 0$ un número real. Escojamos dos números reales positivos b y c que satisfagan la desigualdad $|AB| < b + c$ y la identidad $c^2 = a^2 + b^2$. Trazamos los círculos $\mathsf{C}(A,c)$ y $\mathsf{C}(B,b)$. Sean P y Q los puntos de intersección de estos dos círculos (sabemos que se cortan pues $|AB| < b + c$). Por el Corolario 9.3.15, encontramos que $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{PQ}$. Pongamos $l = \overleftrightarrow{PQ}$. Afirmamos que l es el locus que se pide. En efecto, sean R el punto de intersección de l con AB, $r = |AR|$ y $s = |RB|$. Por el Teorema de Pitágoras (8.5.1), hallamos que

$$c^2 = |PA|^2 = |PR|^2 + r^2 \text{ y } b^2 = |PB|^2 = |PR|^2 + s^2.$$

De donde se sigue que

$$a^2 = c^2 - b^2 = |PR|^2 + r^2 - |PR|^2 - s^2 = r^2 - s^2.$$

Es decir, R pertenece al locus. Tomemos ahora un punto arbitrario $M \in l$. Aplicando nuevamente el Teorema de Pitágoras (8.5.1), vemos que

$$|AM|^2 = |MR|^2 + r^2 \text{ y } |BM|^2 = |MR|^2 + s^2.$$

De aquí se sigue que $|AM|^2 - |BM|^2 = r^2 - s^2 = a^2$. Así queda demostrado que todo punto de l pertenece al locus. Sea N un punto en el plano tal que $|AN|^2 - |BN|^2 = a^2$. Sea T la proyección de N sobre la recta $\overleftrightarrow{AB}$. Usando una vez más el Teorema de Pitágoras (8.5.1) y restando como arriba, llegamos a que

$$|AN|^2 - |BN|^2 = |AT|^2 - |BT|^2 = a^2.$$

Del Problema 1.284, concluimos que $T = R$ y, por tanto, $N \in l$. Esto demuestra que el locus es la recta l. ♣

12.4.10. Teorema. El locus del punto, cuyos cuadrados de sus distancias a dos puntos fijos tienen suma constante, es un círculo cuyo centro es el punto medio del segmento que une los puntos fijos.

Prueba: Sean A y B dos puntos fijos, O el punto medio del segmento AB y $a > 0$ un número real. Sea P un punto en el plano tal que $a^2 = |P\underline{A}|^2 + |PB|^2$ (por el Problema 11.36, podemos encontrar al menos un punto con esta propiedad). Aplicando las formulas del Teorema 8.3.14 al triángulo ΔABP, hallamos que

$$|PO|^2 = \frac{|PA|^2}{2} + \frac{|PB|^2}{2} - \frac{|AB|^2}{4}$$

$$|PO|^2 = \frac{|PA|^2 + |PB|^2}{2} - \frac{|AB|^2}{4}$$

$$|PO|^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{|AB|^2}{4}.$$

Pongamos $r = \sqrt{\dfrac{2a^2 - |AB|^2}{4}}$. Vemos claramente que el número r no depende de la elección del punto P. Así queda probado que todo punto del locus está en el círculo $\mathsf{C}(O,r)$. Tomemos un punto $Q \in \mathsf{C}(O,r)$. Tenemos entonces que

$$|QO|^2 = r^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{|AB|^2}{4}.$$

Ahora aplicando el Teorema 8.3.14 al triángulo ΔABQ, obtenemos que

$$|QO|^2 = \frac{|QA|^2}{2} + \frac{|QB|^2}{2} - \frac{|AB|^2}{4}$$

$$|QO|^2 = \frac{|QA|^2 + |QB|^2}{2} - \frac{|AB|^2}{4} = \frac{a^2}{2} - \frac{|AB|^2}{4}$$

$$\frac{|QA|^2 + |QB|^2}{2} = \frac{a^2}{2}$$

$$a^2 = |Q\underline{A}|^2 + |QB|^2.$$

Lo cual significa que el punto Q pertenece al locus. Con esto demostramos que el locus solicitado es el círculo $\mathsf{C}(O,r)$. ♣

Problemas

12.1. Dado un segmento AB, describir el locus del punto P en el plano tal que $AP < AB$.
12.2. Dado un segmento AB, describir el locus del punto P en el plano tal que $AP \geq AB$.
12.3. Describir el locus de los puntos cuyas distancias a dos puntos fijos tengan razón constante.
12.4. Describir el locus del punto cuyas distancias a un punto fijo y a una recta fija estén en una razón constante.
12.5 (Cauchy, 1832). La recta que pasa por los puntos A y B es el lugar geométrico del punto P tal que para cualquier otro punto Q no se cumplen ambas congruencias $PA \cong QA$ y $PB \cong QB$.
12.6. Describir el locus de los puntos cuyas distancias a dos rectas secantes fijas tienen suma constante.
12.7. Describir el locus de los puntos cuyas distancias a dos rectas secantes fijas tienen diferencia constante
12.8. Describir el locus de los puntos cuyas distancias a dos rectas secantes fijas están en proporción constante.
12.9. Supongamos que se tienen dos rectas paralelas fijas. Dar una condición necesaria y suficiente para que el locus de los puntos cuyas distancias a las dos rectas fijas estén en proporción constante sea no vacío.
12.10[I-32, Problem 25]. Dadas cuatro rectas l_1, l_2, l_3 y l_4 tales que $l_1 \| l_2$ y $l_3 \| l_4$. Describir el locus del punto tal que la suma de sus distancias a las cuatro rectas es constante.
12.11. Dados una recta y un punto fuera de ella, determinar el locus de los puntos que dividen a los segmentos formados por el punto dado y un punto sobre la recta dada en una razón constante.
12.12. Describir el locus del punto para el cual sus proyecciones sobre dos rectas secantes forman un segmento de longitud constante.
12.13. Describir el locus de las proyecciones de un punto fijo sobre las rectas que pasan por otro punto fijo.
12.14. Sean l y m dos rectas que se cortan. Describir el locus del punto P tal que $\dfrac{d(P,l)}{d(P,m)}$ es constante.
12.15. Determinar el locus del punto P tal que $|PA|^2 + |PB|^2$ es constante, en donde A y B son dos puntos fijos.
12.16. Sea AB un segmento. Describir el locus del punto P tal que $\dfrac{|PA|}{|PB|}$ es una constante diferente de 1.
12.17. Probar que el locus del punto P para el cual la diferencia de los cuadrados de sus distancias a dos puntos fijos A y B es constante es una recta perpendicular a AB.
12.18. Considere dos puntos fijos A y B en el plano. Si l es una recta variable que pasa por el punto B, describir el locus del punto simétrico A' del punto A con respecto a la recta l, cuando l gira alrededor de B.
12.19. Tenemos dos puntos fijos A y B y una recta variable l que pasa por B. Sea A' el punto simétrico de A con respecto a l. Describir el locus del punto A' cuando l gira alrededor de B.
12.20. Sean A un punto y l una recta. Si $P \in l$ y M es el punto medio del segmento AP, describir el locus del punto M cuando P se mueve a través de la recta l.
12.21. Sean AB un segmento y P un punto entre A y B. Si l es una recta variable que pasa por P y los puntos H y K son las proyecciones de A y B sobre l, respectivamente, probar que $\dfrac{|AH|}{|BK|}$ es constante (es decir, no depende de la elección de l).
12.22. Describir el locus de uno de los puntos extremos de un segmento de longitud constante cuyo segundo punto extremo yace sobre una recta fija y forma con ella un ángulo congruente a un ángulo no degenerado fijo.
12.23. Describir el locus de un punto en el interior de un ángulo no degenerado que dista 2 del vértice de dicho ángulo.
12.24. Describir el locus de los puntos interiores de un ángulo no degenerado cuyas distancias a los lados del mismo ángulo sea constante.

12.25. Sean AB un segmento y l una recta perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ en el punto $P \in \overleftrightarrow{AB}$. Supongamos que C es un punto móvil sobre l; D es el punto de intersección de las rectas perpendiculares a AC y a BC en los puntos A y B, respectivamente; Q es la proyección de D sobre la recta $\overleftrightarrow{AB}$; y O es el punto medio de CD.
a. Probar que $|OA| = |OB|$.
b. Probar que $|PO| = |QO|$.
c. Probar que el punto Q permanece fijo cuando C se mueve a través de l.
d. Si H es el punto simétrico de D con respecto al punto medio de AB, probar que H es el ortocentro del triángulo ΔABC.

12.26. Sean $\angle AOB$ un ángulo no degenerado tal que $OA \cong OB$ y $P \in int(\angle AOB)$. Sean H, I y K las proyecciones de P sobre $\overrightarrow{OA}$, AB y $\overrightarrow{OB}$, respectivamente. Supongamos que $|PI|^2 = |PH||PK|$.
a. Comparar los ángulos $\angle PIH$ y $\angle PKI$.
b. Comparar los triángulos ΔPIH y ΔPKI.
c. Probar que los cuadriláteros $\square AIPH$ y $\square BKPI$ son cíclicos.
d. Comparar los ángulos $\angle PAB$, $\angle PBK$ y $\angle APB$.
e. Probar que el locus del punto P es el círculo tangente a los lados del ángulo en los puntos A y B, y que pasa por los centros del incírculo y el circuncírculo del triángulo ΔOAB.

12.27. Sea ΔABC un triángulo.
a. Describir el locus del punto P tal que los triángulos ΔPAB y ΔPAC sean equivalentes.
b. Describir el locus del punto P tal que los triángulos ΔPAB, ΔPBC y ΔPAC sean equivalentes.

12.28. Sean AB, CD y EF tres segmentos.
a. Describir el locus del punto P tal que los triángulos ΔPAB y ΔPCD sean equivalentes.
b. Describir el locus del punto P tal que los triángulos ΔPAB, ΔPCD y ΔPEF sean equivalentes.

12.29. Describir el locus del vértice de un triángulo cuya área es constante, y el lado opuesto a dicho vértice es fijo.

12.30. Sea ΔABC un triángulo tal que $\angle A$ es un ángulo agudo. Probar que la longitud del segmento $H_b H_c$ permanece constante si el ángulo $\angle A$ se mantiene agudo cuando A se mueve.

12.31. Describir el locus del punto en el interior de un triángulo equilátero fijo para el cual la suma de sus distancias a cada uno de los lados del triángulo sea igual a una constante.

12.32. Dadas dos rectas secantes l y l', sobre ellas fijamos dos segmentos AB y $A'B'$, respectivamente. Describir el locus del punto P tal que $\dfrac{are(\Delta PAB)}{are(\Delta PA'B')}$ es constante.

12.33. Sean ΔABC un triángulo y P el punto de intersección de la recta perpendicular a AB en el punto B, y la recta perpendicular a AC en el punto C. Si el vértice C se mueve y el ángulo $\angle C$ mantiene su medida, describir el locus de la trayectoria del punto P.

12.34. Dado un triángulo ΔABC, determinar el locus del punto P del interior del triángulo ΔABC para el cual $\angle BAP \cong \angle ACP$.

12.35. Sean ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$ y AD una cuerda variable de su circuncírculo $\mathcal{C}(O,R)$. Sean P la proyección de B sobre AD y Q el punto de intersección de BP y CD.
a. Compara los ángulos $\angle PDQ$ y $\angle PDB$ con los ángulos $\angle B$ y $\angle C$.
b. Probar que Q es el punto simétrico de B con respecto a la recta $\overleftrightarrow{AD}$.
c. Comparar los segmentos AB y AQ.
d. Describir el locus del punto P cuando la cuerda AD varía.

12.36 l-240]. Sea ΔABC un triángulo. Si mantenemos fijos a A y B y el punto C se mueve, de tal forma que mantiene una distancia constante de A, describir el locus del centro de gravedad del triángulo.

12.37. Describir el locus de los puntos de intersección de las diagonales de los rectángulos que se puedan inscribir en un triángulo fijo.

12.38. Describir el locus de los puntos medios de los lados de un triángulo inscrito en un círculo fijo, teniendo como base a una cuerda fija del mismo círculo.

12.39. Describir el locus de los incentros de los triángulos inscritos en un círculo fijo, teniendo como base a una cuerda fija del mismo círculo.

12.40. En un círculo fijo inscribimos triángulos con la longitud de su base constante. Describir el locus que forman los incentros de dichos triángulos.

12.41. Sean ΔABC un triángulo y O' el punto simétrico de su incentro O con respecto a la recta $\overleftrightarrow{BC}$.

a. Si fijamos los vértices B y C, y el vértice A se mueve sobre un círculo fijo de centro O que pasa por B y C, probar que el ortocentro H del triángulo ΔABC también se mueve sobre un círculo.

b. Probar que O' es el centro del círculo mencionado en el primer inciso.

c. Calcular el radio del círculo por donde se mueve H cuando A se mueve por el círculo fijo.

12.42. Sean $\mathrm{C}(O,r)$ un círculo fijo y $\angle\alpha$ un ángulo variable de medida constante con vértice $A \in \mathrm{C}(O,r)$ cuyos lados cortan al círculo $\mathrm{C}(O,r)$ en los puntos B y C. Consideremos el triángulo ΔABC y su ortocentro H. Las rectas $\overleftrightarrow{BH_b}$ y $\overleftrightarrow{CH_c}$ cortan al círculo $\mathrm{C}(O,r)$ en los puntos P y Q, respectivamente.

a. Probar que la longitud del segmento BC permanece constante cuando el vértice del ángulo $\angle\alpha$ varía sobre el círculo $\mathrm{C}(O,r)$.

b. Probar que los puntos P y Q permanecen fijos.

c. Comparar los segmentos AH, AP y AQ.

d. Describir el locus del punto H.

12.43. Sean ΔABC un triángulo y $\mathrm{C}(O,R)$ su circuncírculo. Sean D y E los puntos del círculo $\mathrm{C}(O,R)$ que son diametralmente opuestos a B y C, respectivamente.

a. Compara los segmentos AH, DC y EB.

b. Encontrar el locus de H cuando A se mueve sobre $\mathrm{C}(O,R)$.

c. Probar que los círculos que pasan por las ternas de puntos H, B y C; H, C y A; y H, A y B son congruentes al círculo $\mathrm{C}(O,R)$.

12.44. Un círculo variable pasa por los vértices B y C de un triángulo ΔABC, cortando a $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{AC}$ en los puntos P y Q, respectivamente.

a. Probar que la recta tangente al circuncírculo del triángulo ΔABC en el punto A es paralela a $\overleftrightarrow{PQ}$.

b. La recta que pasa por B y es paralela a $\overleftrightarrow{PQ}$ corta a $\overleftrightarrow{AC}$ en el punto D. Probar que el círculo que pasa por los puntos B, C y D es tangente a AB.

12.45. Sean ΔABC un triángulo isósceles con $AB \cong AC$, $\mathrm{C}(O,R)$ su circuncírculo y un punto móvil $M \in \mathrm{C}(O,R)$. Sean P la proyección de B sobre la recta $\overleftrightarrow{AM}$ y Q el punto de intersección de las rectas $\overleftrightarrow{BP}$ y $\overleftrightarrow{CM}$.

a. Comparar los ángulos $\angle QMP$ y $\angle PMB$ con los ángulos $\angle B$ y $\angle C$ del triángulo original ΔABC.

b. Probar que Q es el punto simétrico de B con respecto a la recta $\overleftrightarrow{AM}$.

c. Comparar los segmentos AQ y AB.

d. Describir el locus del punto P cuando M se mueve sobre el círculo $\mathrm{C}(O,R)$.

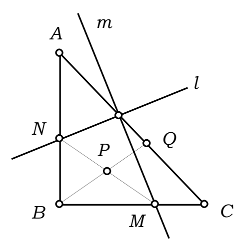
12.46. Fijamos un triángulo isósceles. Describir el locus del punto de intersección de las rectas tangentes que pasan por los vértices de la base del triángulo fijo a un círculo cuyo centro es el tercer vértice del mismo triángulo.

12.47[I-25] En la figura:

ΔABC es un triángulo rectángulo en $\angle A$. Supongamos que $l \perp m$, N y M son los puntos de intersección de l y m con AB y BC, respectivamente, P es el punto medio de MN y Q es el punto de intersección de BP y AC.

a. Probar que P es el punto medio de BQ.

b. Si las rectas l y m se mueven a lo largo de AC, determinar el locus de la trayectoria del punto P.



12.48. Sean a y b dos números reales positivos, AB una cuerda del círculo $\mathcal{C}(O,r)$ y $P \in \overset{\frown}{AB}$. Sean $A' \in \overrightarrow{PA}$ y $B' \in \overrightarrow{PB}$ tales que $|PA'| = a$ y $|PB'| = b$. Suponiendo que el punto P se mueve sobre la cuerda $\overset{\frown}{AB}$, probar las siguientes afirmaciones:

a. Los triángulos $\Delta PA'B'$ son congruentes.

b. La recta paralela a $\overleftrightarrow{A'B'}$ que pasa por el punto P pasa también por un punto fijo.

c. La recta $\overleftrightarrow{A'B'}$ es tangente a un círculo fijo.

d. La altura del triángulo $\Delta PA'B'$ correspondiente al vértice P pasa por un punto fijo.

e. La mediatriz del segmento $A'B'$ es tangente a un círculo fijo.

12.49. Describir el locus de los puntos desde donde se ven dos círculos bajo un mismo ángulo.

12.50. Tenemos un círculo $\mathcal{C}(O,r)$ y una de sus cuerdas AB. Trazamos un triángulo isósceles ΔABC con $CA \cong CB$ de tal forma que O y C estén en diferentes semiplanos determinados por $\overleftrightarrow{AB}$. Determinar el locus del punto C, si la cuerda AB se mueve alrededor del círculo manteniendo su longitud al igual que los lados CA y CB del triángulo.

12.51. Describir el locus de los centros de los círculos tangentes a dos rectas fijas.

12.52. Describir el locus del centro de un círculo de radio constante que corte a una recta fija formando una cuerda de longitud constante.

12.53. Describir el locus del centro de un círculo de radio constante que corte a un círculo fijo en cuerdas de longitud constante.

12.54. Describir el locus de los centros de los círculos ortogonales a un círculo fijo que tengan radio constante.

12.55. Describir el locus del punto para el cual la suma de los cuadrados de sus distancias a dos rectas perpendiculares fijas es igual a una constante.

12.56. Describir el locus de los puntos extremos de los segmentos tales que su segundo punto extremo esté sobre un círculo fijo, su longitud sea constante y tengan una dirección fija.

12.57. Tenemos dos círculos secantes fijos. Por uno de los puntos de intersección de estos dos círculos, trazamos una recta secante formando un segmento que es la base de un triángulo semejante a un triángulo fijo. Describir el locus del vértice de dicho triángulo opuesto a su base cuando la recta secante se mueve.

12.58. Describir el locus de los puntos medios de las cuerdas determinadas por los lados de los ángulos inscritos de un círculo fijo que son congruentes a un ángulo fijo.

12.59. Describir el locus de los puntos de tangencia de dos círculos que sean tangentes a una recta fija en dos puntos fijos de la misma.

12.60. Sean A y B dos puntos fijos. Probar que los puntos P del plano, tales que $|PA| = 3|PB|$, yacen en un círculo cuyo diámetro es igual a $\dfrac{3|AB|}{4}$.

12.61. Describir el locus de los puntos que están a una distancia constante de un círculo fijo.

12.62. Describir el locus de los puntos desde donde el segmento tangente a un círculo fijo tenga una longitud constante.

12.63. Describir el locus de los centros de los círculos de radio constante que pasan por un punto fijo.

12.64. Describir el locus de los centros de los círculos que pasan por dos puntos fijos.

12.65. Describir el locus de los centros de los círculos tangentes a dos círculos fijos.

12.66. Describir el locus de los centros de los círculos que son tangentes a los lados de un ángulo no degenerado.

12.67. Describir el locus del punto medio de un radio de un círculo fijo.

12.68. Dado un círculo, describir el locus de los puntos cuya potencia al círculo dado sea igual a una constante.

12.69. Fijamos un arco de un círculo y a la cuerda que lo sustenta. Describir el locus del punto de intersección de las rectas trazadas por los puntos extremos de la cuerda fija que son tangentes a un círculo tangente a la cuerda y cuyo centro yace en el arco fijo.

12.70. Sean AB y CD dos diámetros fijos de un círculo $\mathcal{C}(O,r)$ y $P \in \mathcal{C}(O,r)$. Sean R y S las proyecciones de P sobre AC y BD, respectivamente. Probar que la longitud de RS permanece constante cuando P se mueve sobre el círculo.

12.71. Dados un círculo y un punto, describir el locus formado por los puntos medios de las cuerdas del círculo dado que pasan por el punto dado en cada uno de los casos cuando el punto esté en el exterior del círculo, sobre el círculo y en el interior del círculo.

12.72. Sea P un punto cuya distancia al centro del círculo $\mathcal{C}(O,2)$ es igual a 3. Sea C el punto de intersección de la semirrecta $\overleftarrow{OP}$ y el círculo. Construir una recta secante al círculo que lo corte en los puntos A y B, de tal manera que el punto medio M de la cuerda AB equidiste de P y C.

12.73. Tenemos un círculo fijo y un punto fijo. Describir el locus de los puntos que dividen a los segmentos determinados por el punto fijo un punto del círculo fijo en una razón constante.

12.74. Desde un punto fijo, se trazan rectas secantes a un círculo fijo y en cada uno de los puntos de intersección de una de las rectas secantes con el círculo se trazan rectas tangentes al mismo. Describir el locus del punto de intersección de las dos rectas tangentes.

12.75. Tenemos dos puntos fijos A y B de un círculo fijo $\mathcal{C}(O,r)$. Por cada uno de estos puntos fijos, se trazan rectas paralelas que corten al círculo en los puntos C y D. Probar que el segmento CD en cualquiera de sus posiciones toca siempre a un círculo centrado en el punto O.

12.76. Sean $\mathcal{C}(O,r)$ un círculo de diámetro AB y l una recta perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ en el punto I. Fijemos un punto $P\in \mathcal{C}(O,r)$ y sean C y D los puntos de intersección de $\overleftrightarrow{PA}$ y $\overleftrightarrow{PB}$ con l, respectivamente.

a. Probar que $|IC||ID| = |IA||IB|$.

b. Sea E el punto simétrico de B con respecto a I. Comparar los triángulos ΔIAC y ΔIDE.

c. Describir el locus del centro del círculo que pasa por los puntos A, C y D cuando P se mueve sobre el círculo.

12.77. Sean $\mathcal{C}(O,r)$ y P un punto fijo en el exterior del círculo. Por P trazamos una recta l que corte al círculo en los puntos A y B y sobre l ubicamos un punto Q tal que $PA \cong QB$. Describir el locus del punto Q cuando la recta l se mueve alrededor del punto fijo P.

12.78[I-240]. Desde un punto P exterior a un círculo fijo $\mathcal{C}(O,r)$ trazamos dos segmentos PA y PB tangentes al círculo en los puntos A y B, respectivamente. Completamos el rectángulo inscrito en el círculo sobre la cuerda AB. Hallar el locus del punto P tal que dicho rectángulo tenga área máxima.

12.79. Tenemos dos círculos fijos. Describir el locus de los centros de los círculos que cortan a cada uno de los dos círculos fijos formando dos cuerdas congruentes.

12.80. Sean $\mathcal{C}(O,10)$ y $\mathcal{C}(O,20)$ dos círculos concéntricos. Describir el locus del punto P tal que $d(P,\mathcal{C}(O,10)) = d(P,\mathcal{C}(O,20))$.

12.81. Tenemos dos círculos concéntricos.

a. Por cada uno de los puntos del círculo mayor trazamos un segmento tangente al círculo menor y sobre este segmento marcamos un punto que esté a una distancia constante del punto extremo que yace sobre el círculo mayor. Describir el locus de dicho punto.

b. Describir el locus del vértice del ángulo formado por dos rectas tangentes a cada uno de los círculos que sea congruente a un ángulo fijo.

12.82. Sean $\mathcal{C}(O,r)$ y $\mathcal{C}(O',r)$ dos círculos congruentes que se cortan en los puntos A y B. Sean OC y $O'D$ radios paralelos de dichos círculos y B' y D' los puntos del círculo $\mathcal{C}(O',r)$ que son diametralmente opuestos a B y D respectivamente.

a. Probar que uno de los puntos A, B, C y D es el ortocentro del triángulo cuyos vértices son los otros tres puntos.

b. Describir el locus de los puntos de intersección de AC y BD, y de AD y BC.

c. Calcular la medida del ángulo que forman la recta $\overleftrightarrow{BB'}$ y la recta tangente a $\mathcal{C}(O,r)$ en el punto A.

12.83. Sean $\mathcal{C}(O,r)$ y $\mathcal{C}(O',r')$ dos círculos cuyos interiores no se cortan y R el punto de intersección de su eje radical y OO'. Fijamos un punto P en el eje radical de los círculos. Sean PA y PB los segmentos tangentes a $\mathcal{C}(O,r)$ y PA' y PB' los segmentos tangentes a $\mathcal{C}(O',r')$.

a. Probar que los puntos A, B, A' y B' yacen sobre un círculo de centro P. Denotemos a este círculo por $\mathcal{C}(P,r')$.

b. Expresar la potencia de R con respecto al círculo $\mathcal{C}(P,r')$ en función de r y $|OR|$.

c. Probar que el círculo $\mathcal{C}(P,r')$ pasa por dos puntos fijos E y F de $\overleftrightarrow{OO'}$.

d. Sean CC' un segmento exteriormente tangente a los dos círculos y DD' un segmento interiormente tangente a los dos círculos. Probar que $CD \perp C'D'$ y que estos dos segmentos se pueden cortar ya sea en E o en F.

12.84. Tenemos un círculo fijo $C(O,r)$, una recta fija l, un punto fijo $A \in C(O,r)$ y un punto fijo $B \in l$. Un círculo variable que pasa por A y B corta al círculo $C(O,r)$ en el punto C y a l en el punto D.

a. Comparar los ángulos $\angle ACD$ y $\angle ABD$.

b. Probar que la recta variable $\overleftrightarrow{CD}$ pasa por un punto fijo P del círculo $C(O,r)$.

c. La recta $\overleftrightarrow{AB}$ corta a $C(O,r)$ en otro punto E. Comparar las direcciones de las rectas $\overleftrightarrow{EP}$ y l.

12.85. Sean l una recta y $C(O,r)$ un círculo. Fijamos dos puntos $A \in C(O,r)$ y $B \in l$. Un círculo variable pasa por los puntos A y B, y corta a $C(O,r)$ en C y a l en D.

a. Comparar los ángulos $\angle ACD$ y $\angle ABD$.

b. Probar que el círculo variable siempre pasa por un punto fijo $P \in C(O,r)$.

c. El segmento AB corta a $C(O,r)$ en el punto E. ¿Son las rectas l y $\overleftrightarrow{EP}$ paralelas?

12.86. Fijamos un diámetro AB de un círculo $C(O,r)$. Probar que el locus del punto P en el exterior del círculo para el cual $|PA||PC|$ es constante, en donde C es el punto de intersección de PB y el circulo $C(O,r)$, es un círculo. Encontrar el centro de este círculo.

12.87[I-32, Problem 94]. Sean A y B dos puntos fijos de un círculo $C(O,r)$. Sean CD un diámetro variable de $C(O,r)$ y P el punto de intersección de AC y BD. Describir el locus del punto P cuando el diámetro varía.

12.88(Razvan-98). Sean $C(O,r)$ un círculo y AB y CD dos de sus diámetros perpendiculares. Una recta móvil que pasa por el punto C corta a AB en el punto M y a $C(O,r)$ en el punto N. Determinar el locus del punto de intersección de la recta paralela a CD que pasa por M y de la recta tangente al círculo $C(O,r)$ en el punto N.

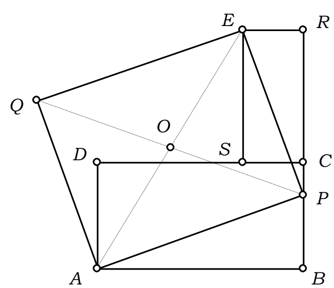
12.89. Describir el locus de los puntos de intersección de las diagonales de los cuadriláteros inscritos en un círculo fijo que tengan a una cuerda fija del mismo círculo como uno de sus lados, y el lado opuesto a esta sea de longitud constante.

12.90. Describir el locus de los centros de los paralelogramos que se puedan inscribir en un cuadrilátero fijo.

12.91. Desde uno de los vértices de un cuadrado trazamos segmentos que lo unan con cada uno de los puntos del mismo cuadrado. Describir el locus de los puntos medios de estos segmentos.

12.92. Dado un punto y dos rectas paralelas que no lo contengan, probar que el locus formado por las intersecciones de las diagonales de los trapecios cuyos lados paralelos yacen sobre las rectas paralelas dadas y sus lados no paralelos se cortan en el punto dado es una recta paralela a las rectas dadas.

12.93. En la figura:



$\square ABCD$ y $\square APEQ$ son dos rectángulos y O el punto de intersección de las diagonales de este último.

a. Probar que O es equidistante de los puntos C, P y Q.

b. Si el ángulo recto $\angle PAQ$ se mueve, describir el locus del punto O.

c. Probar que el ángulo $\angle ECA$ es recto.

d. Si el ángulo recto $\angle PAQ$ se mueve, describir el locus del punto E.

e. Comparar los segmentos DQ y CS.

f. Comparar los segmentos CR y BP.

12.94. Sean $\square ABCD$ un cuadrado y $P \in BD$. Supongamos que E y F son las proyecciones de P sobre AB y AD, respectivamente.

a. Probar que $CF \cong DE$.

b. Probar que $CF \perp DE$.

c. Si Q es el punto de intersección de CF y DE, describir el locus del punto Q cuando P se mueve sobre la diagonal BD.

d. Hacer el mismo análisis para los segmentos CE y BF.

e. Probar que $CP \cong EF$.

f. Probar que $CP \perp EF$.

g. Probar que las rectas $\overleftrightarrow{CP}$, $\overleftrightarrow{BF}$ y $\overleftrightarrow{DE}$ son concurrentes.

12.95[I-238]. Sean $\square ABCD$ un cuadrado y $P \in AB$. La recta perpendicular a DP que pasa por A corta a $\overleftrightarrow{BC}$ en el punto Q. Sea M el punto medio de PQ.

a. Probar que $MB \cong MD$.

b. Determinar el locus del punto M cuando P se mueve sobre AB.

12.96. Encontrar el locus del centro de un círculo de radio 1 que se mueve por fuera y alrededor de un rectángulo cuyos lados tienen longitudes 5 y 9.

12.97. Dos puntos A y B se desplazan sobre los lados de un ángulo recto $\angle\alpha$, de tal forma que $|AB|$ es constante.

a. Describir el locus del punto medio del segmento AB.

b. Describir el locus del vértice C del rectángulo $\square OACB$, en donde O es el vértice del ángulo $\angle\alpha$.

12.98. Dos puntos A y B se desplazan sobre los lados de un ángulo recto $\angle\alpha$, de tal forma que $|OA| + |OB|$ es constante. Completamos el rectángulo $\square OACB$, en donde O es el vértice del ángulo $\angle\alpha$.

a. Sea $\Delta A'CB'$ el triángulo simétrico de ΔACB con respecto a la bisectriz exterior del ángulo $\angle C$ del triángulo ΔACB. Probar que el locus descrito por los puntos A' y B' son dos rectas que se cortan en un punto D.

b. Probar que la altura con respecto al vértice C del triángulo ΔACB pasa por el punto medio del segmento $A'B'$ y el punto D.

12.99. Sean B y C dos puntos fijos y A un punto variable que se mueve, de tal forma que $|AB|^2 + |AC|^2$ es constante. Probar que el locus del punto A es un círculo cuyo centro es el punto medio del segmento BC.

12.100. Sea AB un segmento fijo de longitud 10. Describir el locus del punto P tal que

$$|PA|^2 + |PB|^2 = 100.$$

12.101. Sea $\square ABCD$ un rectángulo fijo. Describir el locus del punto P tal que $|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2$ es igual a una constante.

12.102. Sean A, O y B tres puntos fijos consecutivos tales que $|OA| = 2|OB|$. Describir el locus del punto P tal que se cumple la identidad

$$|PA|^2 + 2|PB|^2 = |AB|^2 .$$

12.103. Sea ΔABC un triángulo isósceles fijo con $AB \cong AC$. Describir el locus del punto P tal que

$$|PB|^2 + |PC|^2 = 2|PA|^2 .$$

12.104. Un perro se encuentra amarrado con un lazo en una esquina de un edificio de 20 m de largo por 30 de ancho. Si el lazo tiene 5 m de largo, describir el área por donde el perro puede andar.

12.105. Viendo a través de una ventana de 80 cm de ancho, uno observa el horizonte en un ángulo de medida 40. ¿Cuál será la trayectoria si uno se mueve para cambiar de vista hacia el horizonte y manteniendo el ángulo de media 40?

12.106. Sean l una recta, $P \in l$ y r un número real positivo. Describir que el locus de los puntos $A \in l$ tal que $|PA| > r$.

12.107. Dada una recta l, describir el locus de los puntos que yacen sobre un círculo de radio 1 y con centro en un punto de la recta l.

CAPÍTULO 13

FALACIAS GEOMÉTRICAS

En matemáticas es común hacer errores en algunas demostraciones y enunciados matemáticos. Pero lo más interesante de esto es hacerlos intencionalmente para jugarle una broma a otra persona, haciéndole creer que hemos demostrado formalmente un enunciado absurdo. Según el diccionario de la lengua española, la palabra *falacia* significa *acción de engañar a otra persona mediante fraude o mentira con el objeto de causarle daño*. Obviamente con este significado el lector podría no leer este capítulo. Uno de los sinónimos de la palabra falacia es la palabra *sofisma* que significa *razón o argumento aparente con que se quiere persuadir o defender lo que es falso*. Este último significado parece ser el más aceptable para entender lo que haremos en este último capítulo del libro.

Se sabe que Euclides (330 − 275 a. de C.) escribió un libro sobre falacias geométricas llamado *Pseudaria*. Es una lástima que este libro se haya perdido y lo peor es que no se cuenta con dato alguno sobre su contenido. Las falacias geométricas han aparecido en la geometría euclidiana desde hace más de 2000 años y aún siguen apareciendo en la literatura. Aquí solo presentaremos algunas de ellas incluyendo las falacias clásicas que han fascinado a los matemáticos de muchas generaciones. En algunos casos daremos el nombre de la persona que descubrió la falacia, en los otros casos se omiten los nombres por carecer de dicha información. El libro [l-36] escrito por V. M. Bradis, A. K. Kharcheva y V. L. Minkovskii contiene una excelente colección de falacias geométricas. Empezaremos con dos falacias de dicha colección:

13.1. Falacia[l-36]. Segmentos paralelos cuyos puntos extremos pertenezcan a un mismo ángulo son congruentes.

Prueba: Sean $\angle AOB$ un ángulo, $C \in \overrightarrow{OA}$ y $D \in \overrightarrow{OB}$ tales que $AB \parallel CD$ (ver la fig. 13.1). Según el Corolario 6.2.7, vemos que $\Delta OAB \sim \Delta OCD$. De aquí deducimos que

$$\frac{|OA|}{|OC|} = \frac{|OB|}{|OD|}$$

$$|OA||OD| = |OB||OC|.$$

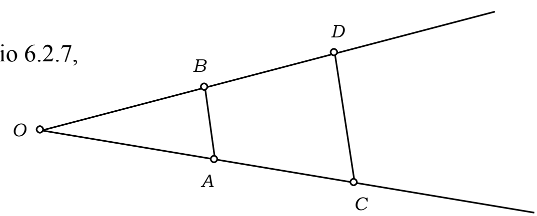


Figura 13.1

Si multiplicamos ambos lados de esta igualdad por $|AB| - |CD|$, hallamos que

$$(|AB| - |CD|)|OA||OD| = |OB||OC|(|AB| - |CD|)$$

$$|AB||OA||OD| - |CD||OA||OD| = |OB||OC||AB| - |OB||OC||CD|$$

$$|AB||OA||OD| - |OB||OC||AB| = |CD||OA||OD| - |OB||OC||CD|$$

$$|AB|(|OA||OD| - |OB||OC|) = |CD|(|OA||OD| - |OB||OC|)$$

$$|AB| = |CD|$$

$$AB \cong CD.$$

Explicación: La conclusión errónea se obtuvo al dividir por 0. En efecto, como

$$|OA||OD| = |OB||OC|,$$

tenemos entonces que

$$|OA||OD| - |OB||OC| = 0. \clubsuit$$

13.2. Falacia[l-36]. Si AB es un segmento y $C \in AB$ es diferente de A y B, entonces $AB \cong CB$.

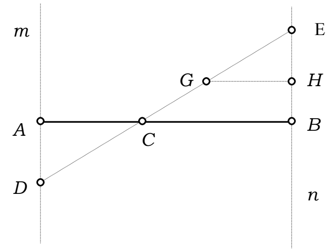


Figura 13.2

Prueba: Trazamos dos rectas m y n perpendiculares a $\overleftrightarrow{AB}$ en los puntos A y B, respectivamente. Por otra parte, trazamos una recta que pase por C, la cual corta a las rectas m y n en los puntos D y E, respectivamente. Por último, trazamos una recta paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ que corte a $\overleftrightarrow{DE}$ y n en los puntos G y H, respectivamente. De acuerdo con el criterio de semejanza 6.2.7, hallamos que

$$\Delta DCA \sim \Delta ECB \text{ y } \Delta ECB \sim \Delta EGH.$$

Por consiguiente,

$$\frac{|AD|}{|EB|} = \frac{|AC|}{|CB|} \text{ y } \frac{|AD|}{|EH|} = \frac{|AC|}{|GH|}$$

$$|AD| = \frac{|AC||EB|}{|CB|} = \frac{|AC||EH|}{|GH|}$$

$$\frac{(|AB| - |CB|)|EB|}{|CB|} = \frac{(|AB| - |CB|)|EH|}{|GH|}$$

$$|AB||EB||GH| - |CB||EB||GH| = |EH||CB||AB| - |EH||CB||CB|$$

$$|AB||EB||GH| - |EH||CB||AB| = |CB||EB||GH| - |EH||CB||CB|$$

$$|AB|(|EB||GH| - |EH||CB|) = |CB|(|EB||GH| - |EH||CB|)$$

$$|AB| = |CB|$$

$$AB \cong CB.$$

Explicación: De nueva cuenta, el error se cometió al dividir por 0, ya que

$$|EB||GH| = |EH||CB|. \clubsuit$$

En su libro *The Lewis Carroll Picture Book*, Ch. L. Dogson (alias Lewis Carroll) incluyó la siguiente falacia que se considera como una de las clásicas (ver el libro [l-31]).

13.3. Falacia. Todos los ángulos son rectos.

Prueba: Sean $\angle\alpha$ un ángulo recto y $\angle\beta$ un ángulo arbitrario. Si $\angle\beta$ es recto, entonces no hay nada que demostrar. Supongamos que $\angle\beta$ es obtuso. Construyamos un cuadrilátero $\square ABCD$, del tal manera que $\angle A \cong \angle\alpha$, $\angle B \cong \angle\beta$ y $AD \cong BC$. Como dicho cuadrilátero no puede ser un paralelogramo y, en particular, AB no puede ser paralelo a CD, de aquí deducimos que las mediatrices de AB y CD se cortan. Sea P el punto en donde dichas mediatrices se cortan.

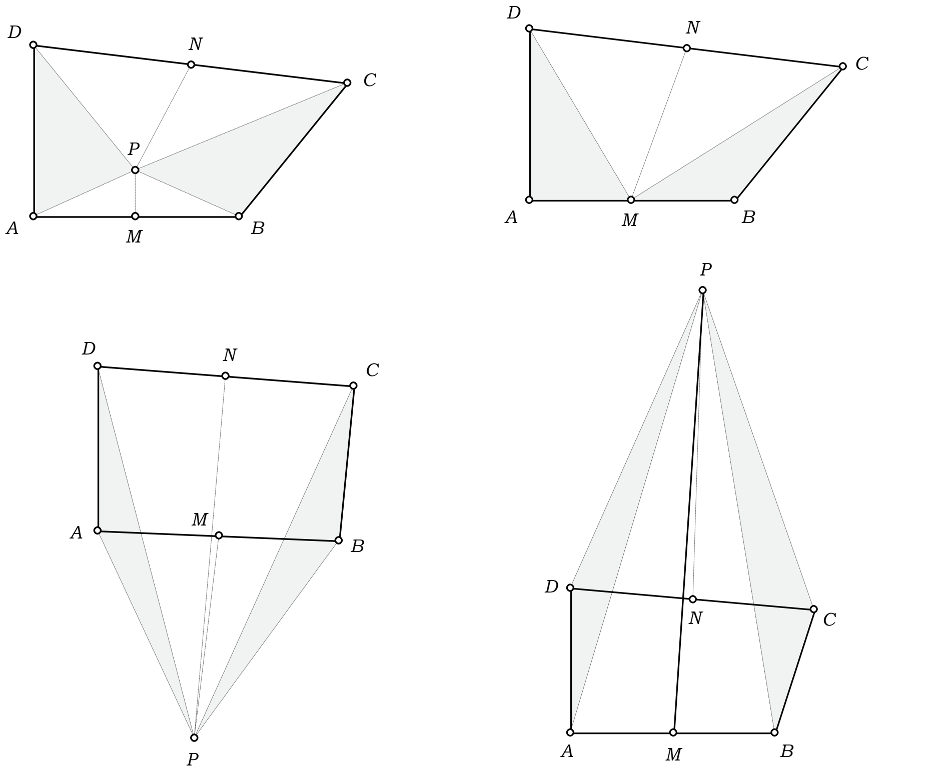


Figura 13.3

El punto P puede estar localizado en cuatro sitios diferentes, como lo muestran las cuatro figuras de 13.3. Pensamos que es suficiente con considerar el caso cuando el punto P esté en el interior del cuadrilátero. Consideremos los triángulos ΔPDA y ΔPBC. Por suposición, sabemos que $AD \cong BC$, y del Teorema de la Mediatriz (4.2.2) obtenemos que $PA \cong PB$ y $PD \cong PC$. Lo cual implica, por el criterio LLL (3.2.12), que $\Delta PDA \cong \Delta PBC$. Por el mismo criterio LLL, encontramos que

$$\Delta PAM \cong \Delta PBM.$$

Se sigue entonces que

$$\angle A = \angle MAP + \angle PAD \cong \angle PBM + \angle CBP = \angle B.$$

Si $\angle\beta$ es agudo, por lo que acabamos de demostrar, el ángulo suplementario adyacente de $\angle\beta$ es recto. De aquí y de los Teoremas 2.7.10 y 2.6.3 se sigue que $\angle\beta$ es un ángulo recto.

Explicación: Veamos en dónde se encuentra el error. Como suele suceder hasta ahora el error yace en la figura, pues los triángulos ΔPDA y ΔPBC no están colocados en el lugar correcto. Su ubicación correcta se muestra en la figura 13.4.

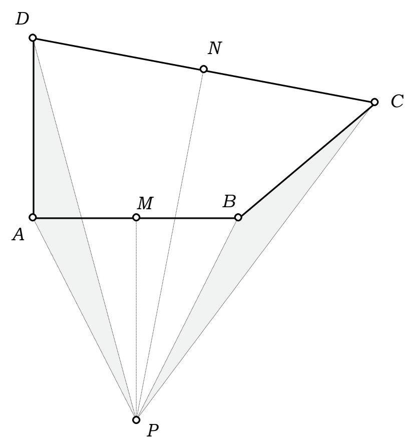


Figura 13.4

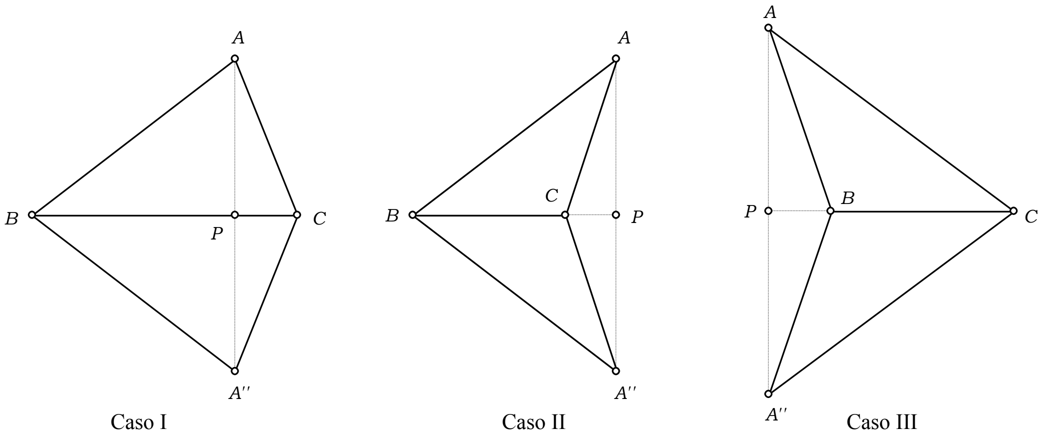
Ciertamente, tenemos que $\Delta PDA \cong \Delta PBC$ y $\Delta PAM \cong \Delta PBM$. Pero,

$$m(\angle A) = m(\angle PAD) - m(\angle PAM) \text{ y } m(\angle B) = 360 - (m(\angle MBP) + m(\angle PBC)). \clubsuit$$

A continuación, enunciamos una de las falacias clásicas más conocida acerca de los triángulos que se usa frecuentemente para que el alumno entienda los criterios de congruencia para triángulos.

13.4. Falacia. Si dos lados y un ángulo de un triángulo son respectivamente congruentes a sus correspondientes dos lados y un ángulo de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

Prueba: Si el ángulo en cuestión está entre los lados en cuestión, entonces el resultado se sigue del criterio *LAL* (3.2.6), y si los triángulos son rectángulos, entonces son congruentes por el criterio *CC* (3.6.4). Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos no rectángulos tales que $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$ y $\angle A \cong \angle A'$.



Caso I Caso II Caso III

Figura 13.5

Sea A'' un punto en el semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{BC}$ tal que $\Delta ABC \cong \Delta A''BC$ (ver la figura 13.5).Tenemos entonces que $BA \cong BA''$. Es decir, el triángulo $\Delta BA''A$ es isósceles. En consecuencia, según el Teorema 3.2.9, $\angle PA''B \cong \angle BAP$. Sea P el punto de intersección de $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{AA''}$. Por nuestra suposición, el punto P es diferente B y C.

Caso I. P está entre B y C. En este caso, obtenemos que

$$\angle A = \angle BAP + \angle PAC \cong \angle A'' = \angle CA''P + \angle PA''B$$
$$m(\angle BAP) + m(\angle PAC) = m(\angle CA''P) + m(\angle PA''B)$$
$$m(\angle PAC) = m(\angle CA''P)$$
$$\angle PAC \cong \angle CA''P.$$

Lo cual significa que el triángulo $\Delta CAA''$ es isósceles. De acuerdo con el Teorema 3.2.9, vemos que $AC' \cong A'C$. Concluimos, por el criterio *LLL* (3.2.12), que $\Delta ABC \cong \Delta A''BC$ y, por lo tanto, $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

Caso II. C precede a P. Tenemos entonces que

$$m(\angle PAB) = m(\angle PAC) + m(\angle A) \text{ y } m(\angle PA''B) = m(\angle PA''C) + m(\angle A'')$$
$$m(\angle A) = m(\angle PAC) - m(\angle PAB) = m(\angle A'') = m(\angle PA''C) - m(\angle PA''B)$$
$$m(\angle PAC) = m(\angle PA''C)$$
$$\angle PAC \cong \angle PA''C.$$

Es decir, $\Delta CAA''$ es isósceles y, por el Teorema 3.2.9, obtenemos que $AC' \cong A'C$. El criterio *LLL* (3.2.12) nos asegura que $\Delta ABC \cong \Delta A''BC$. Por lo tanto, $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

Caso III. P precede a B. Este caso es totalmente similar al anterior.

Explicación: En el ejemplo 3.2.5 y el Teorema 3.2.13, vimos que el resultado es totalmente falso. El fallo de nuestra demostración radica en que omitimos el caso cuando los segmentos AC y CA'' son colineales, solo se consideró un caso similar que fue cuando los triángulos eran rectángulos. Si AC y CA'' son colineales, entonces $C = P$ y, por tanto, no podemos aplicar ninguno de los razonamientos de los tres casos que se consideraron. En el ejemplo de la figura 13.6, se tienen dos triángulos ΔABC y $\Delta A''BC$ que no son congruentes, AC y CA'' son colineales, $AB \cong A''C$ y $\angle A \cong \angle A'$. ♣

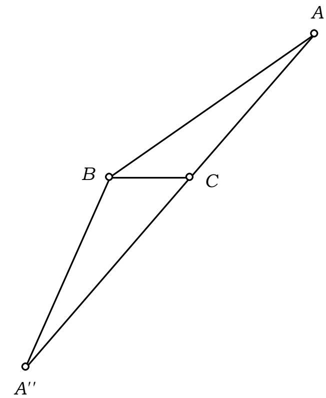


Figura 13.6

La falacia que a continuación presentamos aparece en el libro [l-31].

13.5. Falacia. Todos los triángulos son isósceles.

Prueba: Sea ΔABC un triángulo. Supongamos primero que $t_a \| b_a$. Tenemos entonces que $\angle C B_a A$ es un ángulo recto. Lo cual significa que $b_a = h_a$. De acuerdo con el Teorema 8.3.30, concluimos que ΔABC es isósceles con $AB \cong AC$. Supongamos ahora que t_a y b_a se cortan en el punto P (Fig. 13.7). Sean L y M las proyecciones del punto P sobre AB y AC, respectivamente. De acuerdo con el criterio HA (3.6.3), hallamos que $\Delta PNA \cong \Delta PLA$. Como consecuencia de esto, tenemos que $AL \cong AN$ y $PL \cong PN$. Por otra parte, por el Teorema 4.2.2, sabemos que $PB \cong PC$. Entonces, el criterio 3.6.5 nos asegura que $\Delta PLB \cong \Delta PNC$. En particular, tenemos que $LB \cong NC$. En consecuencia,

$$|AB| = |AL| + |LB| = |AN| + |NC| = |AC|$$
$$AB \cong AC.$$

Así queda demostrado que nuestro triángulo ΔABC es isósceles.

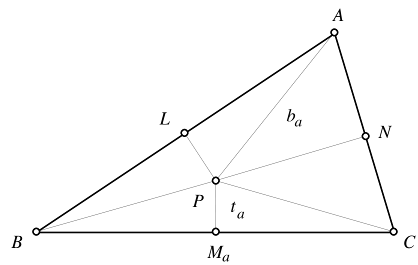


Figura 13.7

Explicación: Aquí nuestro argumento que es correcto, estuvo basado en una figura equivocada, pues si nuestro triángulo ΔABC no es isósceles, entonces una mediana y una bisectriz se cortan en un punto que yace en el exterior del triángulo. La contradicción se obtuvo por basarse en una figura mal intencionada. La figura correcta concuerda con la fig. 13.8.

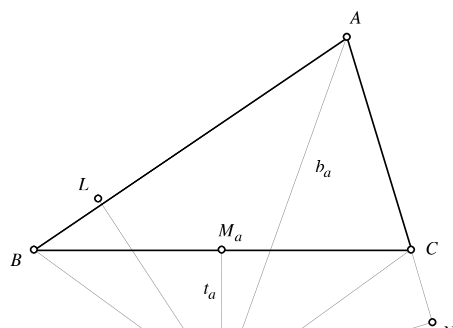


Figura 13.8

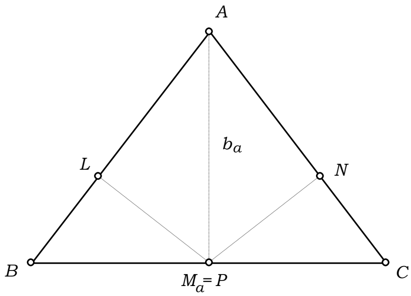


Figura 13.9

Si $P = M_a$, por el Problema 3.19, se sigue que ΔABC es un triángulo isósceles. ♣

13.6. Falacia[l-36]. Sea ΔABC un triángulo. Si $D \in int(\Delta ABC)$ satisface que $\dfrac{|DB|}{|AB|} = \dfrac{|DC|}{|AC|} = k < 1$, entonces $|AB| + |AC| < |DB| + |DC|$ (Fig. 13.10).

Prueba: Tenemos entonces que

$$|DB| = k|AB| \text{ y } |DC| = k|AC|$$
$$-|DB| = k(-|AB|) \text{ y } -|DC| = k(-|AC|)$$
$$-|DB| - |DC| = k(-|AB| - |AC|)$$
$$\frac{-|DB|-|DC|}{-|AB|-|AC|} = k$$
$$\frac{-|DB|-|DC|}{-|AB|-|AC|} = \frac{|DB|}{|AB|}.$$

Pero como $k < 1$, $\dfrac{-|DB|-|DC|}{-|AB|-|AC|} < 1$, se sigue que

$$-|DB| - |DC| < -|AB| - |AC|$$
$$|AB| + |AC| < |DB| + |DC|.$$

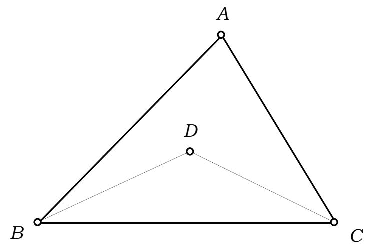


Figura 13.10

Explicación. El error radica en que multiplicamos ambos lados de una desigualdad por un número negativo, sin invertir el símbolo de desigualdad ($-|AB| - |AC|$ es un número no positivo). ♣

La siguiente falacia se incluye en la Falacia 13.5, pero a pesar de ello presentamos su discusión original.

13.7. Falacia[l-36]. Un cateto y la hipotenusa de un triángulo rectángulo son congruentes.

Prueba: Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle C$, y sea P el punto de intersección de b_a y m_a como se muestra en la figura 13.11. Sean D y E las proyecciones de P sobre AB y AC, respectivamente. De acuerdo con el criterio HA (3.6.3), $\Delta PDA \cong \Delta PEA$. En particular, tenemos que $PD \cong PE$ y $AD \cong AE$. Ya que P es la mediatriz de BC, por el Teorema 4.2.2, $PB \cong PC$. De aquí el criterio HC (3.6.5) implica que

$$\Delta PDB \cong \Delta PEC.$$

De donde se observa que $BD \cong CE$. En conclusión,

$$|AB| = |AD| + |BD| = |AE| + |CE| = |AC|$$
$$AB \cong AC.$$

Explicación. Aquí lo que está pasando es que el punto P debe estar en el exterior del triángulo tal y como lo muestra la figura 13.12. Vale la pena notar que

$$|AB| = |AD| + |BD| \text{ y } |AC| = |AE| - |CE|.$$

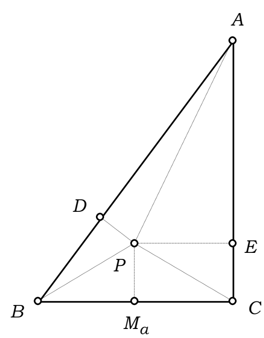


Figura 13.11

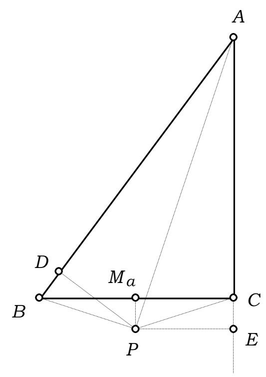


Figura 13.12

13.8. Falacia. Un ángulo interior de un triángulo puede ser congruente a uno de los ángulos exteriores del mismo triángulo no adyacente a dicho ángulo.

Prueba: Sean $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ dos ángulos suplementarios. Construimos un cuadrilátero $\square ABCD$, de tal forma que $\angle A \cong \angle\alpha$ y $\angle C \cong \angle\beta$. Tenemos entonces que los ángulos $\angle A$ y $\angle C$ son suplementarios.

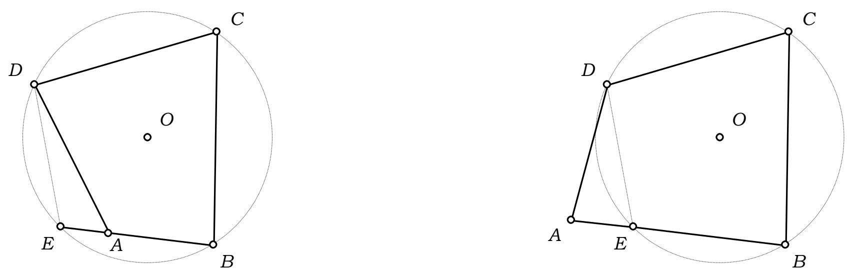


Figura 13.13

Trazamos el círculo $\mathrm{C}(O,r)$ que pasa por los puntos B, C y D. Sea E el punto donde $\mathrm{C}(O,r)$ corta a la recta $\overleftrightarrow{AB}$. De acuerdo con el Teorema 9.9.5,

$$m(\angle BED) + m(\angle C) = 180 = m(\angle A) + m(\angle C)$$
$$m(\angle BED) = m(\angle A)$$
$$\angle BED \cong \angle A$$
$$\angle AED \cong \angle BAD.$$

Esto prueba nuestra afirmación.

Explicación: Según el Teorema 9.9.5, el cuadrilátero $\square ABCD$ debe de ser cíclico. En consecuencia, A, B, C, $D \in \mathrm{C}(O,r)$ y de aquí se sigue que $A = E$. ♣

La siguiente falacia es tomada del libro [l-36].

13.9. Falacia. Todos los ángulos de un triángulo son congruentes.

Prueba: Sea ΔABC un triángulo. Extendemos los lados AB y AC del triángulo hasta unos puntos B' y C', respectivamente, como se muestra en 13.14, tales que A esté entre B y B', A esté entre C y C', $|AB'| = b$ y $|AC'| = c$. En el triángulo isósceles $\Delta C'BA$ tenemos que $\angle BC'C \cong \angle ABC' \cong \frac{\angle A}{2}$ y en el otro triángulo isósceles $\Delta B'AC$ tenemos que $\angle AB'C \cong \angle B'CA \cong \frac{\angle A}{2}$. Por la ley Extendida de los Senos (9.10.5) aplicada a los triángulos $\Delta C'BC$ y $\Delta B'BC$, sabemos que

$$\frac{b+c}{\operatorname{sen}\left(\angle B+\frac{\angle A}{2}\right)}=\frac{a}{\operatorname{sen}\frac{\angle A}{2}} \text{ y } \frac{b+c}{\operatorname{sen}\left(\angle C+\frac{\angle A}{2}\right)}=\frac{a}{\operatorname{sen}\frac{\angle A}{2}}$$

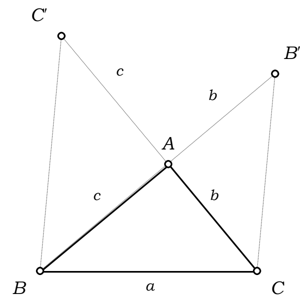


Figura 13.14

De donde se sigue que

$$\frac{b+c}{\operatorname{sen}\left(\angle B+\frac{\angle A}{2}\right)}=\frac{b+c}{\operatorname{sen}\left(\angle C+\frac{\angle A}{2}\right)}$$

$$\operatorname{sen}(\angle B+\frac{\angle A}{2})=\operatorname{sen}(\angle C+\frac{\angle A}{2})$$

$$\angle B+\frac{\angle A}{2}\cong\angle C+\frac{\angle A}{2}$$

$$\angle B\cong\angle C.$$

Con un argumento completamente similar, podemos probar la congruencia $\angle A \cong \angle C$.

Explicación: Analicemos en dónde estuvo el fallo de nuestro razonamiento. Evidentemente, el error está en deducir la congruencia $\angle B+\frac{\angle A}{2}\cong\angle C+\frac{\angle A}{2}$ de la igualdad

$$\operatorname{sen}(\angle B+\frac{\angle A}{2})=\operatorname{sen}(\angle C+\frac{\angle A}{2}).$$

Pues de acuerdo con las identidades trigonométricas del Teorema 8.2.1 y suponiendo que los ángulos $\angle B$ y $\angle C$ no son congruentes, solo podemos deducir que

$$\angle B+\frac{\angle A}{2}=\angle 180-(\angle C+\frac{\angle A}{2})$$

$$\angle B+\frac{\angle A}{2}+\angle C+\frac{\angle A}{2}=\angle 180$$

$$\angle A+\angle B+\angle C=\angle 180. \clubsuit$$

13.10. Falacia[l-36]. Todos los triángulos tienen la misma área.

Prueba: Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos arbitrarios. Sabemos que

$$are(\Delta ABC)=\frac{ah_a}{2}=\frac{bh_b}{2} \text{ y } are(\Delta A'B'C')=\frac{b'h_{b'}}{2}.$$

Fijamos un tercer triángulo $\Delta A''B''C''$ no congruente con los dados cuya área esté dado por

$$are(\Delta A''B''C'')=\frac{a''h_{a''}}{2}.$$

Tenemos entonces que

$$\frac{are(\Delta ABC)}{are(\Delta A'B'C')}=\frac{ah_a}{a'h_{a'}} \text{ y } \frac{are(\Delta ABC)}{are(\Delta A''B''C'')}=\frac{bh_b}{a''h_{a''}}.$$

$$are(\Delta A'B'C')\frac{ah_a}{a'h_{a'}} = are(\Delta A''B''C'')\frac{bh_b}{a''h_{a''}}$$

$$are(\Delta A'B'C')a\,h_a\,a''\,h_{a''} = are(\Delta A''B''C'')b\,h_b\,a'\,h_{a'}$$

$$(are(\Delta ABC) - are(\Delta A'B'C'))\,are(\Delta A'B'C')a\,h_a\,a''\,h_{a''} = (are(\Delta ABC) - are(\Delta A'B'C'))are(\Delta A''B''C'')b\,h_b\,a'\,h_{a'}$$

$$are(\Delta ABC)(are(\Delta A'B'C')a\,h_a\,a''\,h_{a''} - are(\Delta A''B''C'')b\,h_b\,a'\,h_{a'}) =$$

$$are(\Delta A'B'C')(are(\Delta A'B'C')a\,h_a\,a''\,h_{a''} - are(\Delta A''B''C'')b\,h_b\,a'\,h_{a'})$$

$$are(\Delta ABC) = are(\Delta A'B'C').$$

Explicación: Sabemos que

$$are(\Delta A'B'C')a\,h_a\,a''\,h_{a''} = \frac{a'h_{a'}}{2}a\,h_a\,a''\,h_{a''} = a'\,h_{a'}\,a\,h_a\,\frac{a''h_{a''}}{2} = are(\Delta A''B''C'')b\,h_b\,a'\,h_{a'}$$

$$are(\Delta A'B'C')a\,h_a\,a''\,h_{a''} - are(\Delta A''B''C'')b\,h_b\,a'\,h_{a'} = 0.$$

Esto nos muestra que el error fue dividir por 0. ♣

La siguiente falacia se le atribuye a H. D. Dudeney [l-125].

13.11. Falacia. La suma de las longitudes de dos lados de un triángulo es igual a la longitud del tercer lado.

Prueba: Sea ΔABC un triángulo. Para cada número entero positivo $k > 1$, dividimos cada uno de los lados del triángulo en k segmentos congruentes entre sí. Consideremos los puntos $A_1,..., A_{k-1}$ que dividen a AC en los k segmentos congruentes entre sí, también consideremos algunos de los puntos $B_1,..., B_{k-1}$ que se obtienen al intersectar las rectas paralelas a BC que pasan por cada una de las divisiones de AC con las rectas paralelas a AB que pasan por cada una de las divisiones del lado BC (la figura 13.15 nos dice cuáles son dichos puntos) y el punto B_k de la división de BC más cercano a C. Del Teorema 3.4.10 podemos ver que

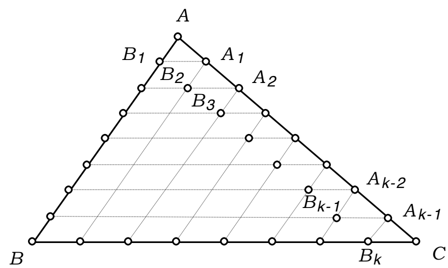


Figura 13.15

$$|AB| = |A\,B_1| + |A_1\,B_2| + |A_2\,B_3| + ... + |A_{k-1}\,B_k| \text{ y}$$

$$|BC| = |B_1\,A_1| + |B_2\,A_2| + |B_3\,A_3| + ... + |B_{k-1}\,A_{k-1}| + |B_k\,C|.$$

De aquí se sigue que

$$|AB| + |BC| = |A\,B_1| + |A_1\,B_2| + |A_2\,B_3| + ... + |A_{k-1}\,B_k| + |B_1\,A_1| + |B_2\,A_2| + |B_3\,A_3| + ... + |B_{k-1}\,A_{k-1}| + |B_k\,C|.$$

Si k tiende hacia el infinito, los puntos $B_1,\ldots, B_{k-1}$ irán acercándose a AC y el punto B_k se aproxima a C. En consecuencia, tenemos que si k tiende hacia el infinito, entonces la suma $|A\,B_1| + |B_1\,A_1|$ se aproxima a $|A\,A_1|$, $|A_i\,B_{i+1}| + |B_{i+1}\,A_{i+1}|$ se aproxima a $|A_i\,A_{i+1}|$, para cada $i = 1,\ldots, k-2$, y $|A_{k-1}\,B_k| + |B_k\,C|$ se aproxima a $|A_{k-1}\,C|$. De donde podemos concluir que $|AB| + |BC| = |AC|$.

Explicación: En esta falacia, no es difícil encontrar nuestro argumento equivocado. En efecto, la longitud de la línea quebrada formada por lo puntos A, B_1, A_1, B_2,..., A_{k-1}, B_k y C es igual a $|AB| + |BC|$, para cualquier valor de k. Lo cual prueba que nuestra afirmación es equivocada. ♣

13.12. Falacia. Un cateto de un triángulo rectángulo es mayor que la hipotenusa.

Prueba: Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle C$ (Fig. 13.16). Del Teorema de Pitágoras (8.9.9) sabemos que

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c-b)(c+b)$$
$$(c-b)(c+b) = -(c+b)(b-c)$$
$$\frac{c+b}{-(c+b)} = \frac{b-c}{c-b}.$$

Pero como, $-(c+b) < c+b$, se sigue que

$$c-b < b-c$$
$$2c < 2b$$
$$c < b.$$

Explicación: Aquí el paso equivocado fue deducir de la desigualdad $-(c+b) < c+b$ la desigualdad $c-b < b-c$. Esta afirmación solo se cumple para los números positivos. ♣

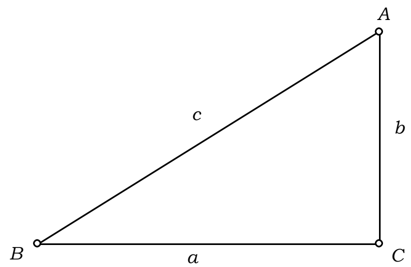


Figura 13.16

13.13. Falacia[l-36]. El área de un triángulo equilátero es igual a cero.

Prueba: Sea ΔABC un triángulo equilátero. Basaremos nuestro razonamiento en la figura 13.17. En ella tenemos que $\square AM_aCM$ es un rectángulo y AM_a se extiende hasta un punto D, de tal modo que $M_aD \cong M_aC$. Construimos un semicírculo de diámetro AD.

Sea J el punto de intersección de este semicírculo y $\overleftrightarrow{BC}$. Sobre M_aJ construimos el cuadrado $\square HM_aJN$. Del Teorema 8.1.2 obtenemos que $|M_aJ|^2 = |AM_a||M_aD|$. De aquí podemos ver que

$$are(\square HM_aJN) = |M_aJ|^2 = |AM_a||M_aD| =$$
$$|AM_a||M_aC| = are(\square AM_aCM).$$

Por otro lado, sabemos que $\Delta AM_aC \cong \Delta CMA$. Por lo cual,

$$are(\square AM_aCM) = are(\Delta AM_aC) + are(\Delta CMA).$$

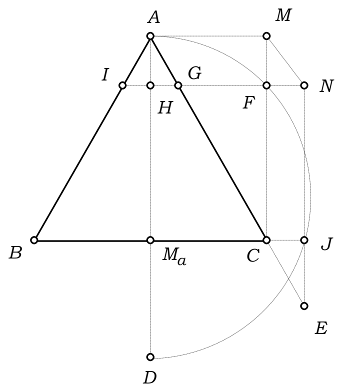


Figura 13.17

Ahora, deslizamos el triángulo ΔCMA a lo largo de AC hasta que AM caiga sobre HN, obteniendo así el triángulo ΔENG, el cual es congruente con ΔCMA (ver la figura 13.17). Tenemos entonces que

$$are(\square HM_aJN) = are(\square AM_aCM) = are(\Delta AM_aC) + are(\Delta CMA) = are(\Delta AM_aC) + are(\Delta ENG)$$
$$are(\square HM_aCG) + are(\square NGCJ) = are(\Delta AM_aC) + are(\Delta ENG) =$$
$$are(\square HM_aCG) + are(\Delta AHG) + are(\square NGCJ) + are(\Delta EJC)$$
$$are(\Delta AHG) + are(\Delta EJC) = 0$$

De donde se sigue que $are(\Delta AHG) = 0$, pero como el triángulo ΔAHG es semejante al triángulo ΔAM_aC, se obtiene que $are(\Delta ABC) = 2are(\Delta AM_aC) = 0$.

Explicación: Sabemos que

$$|FN| = |CJ| = |M_aJ| - |M_aC| = \sqrt{|AM_a||M_aD|} - |M_aC| = \sqrt{\frac{a}{2}\sqrt{3}\,\frac{a}{2}} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt[4]{3} - 1),$$

$$|AH| = |AM_a| - |HM_a| = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{a\sqrt[4]{3}}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{3} - \sqrt[4]{3}).$$

De la semejanza de ΔAHG y ΔAM_aC se sigue que

$$|HG| = \frac{|AH||M_aC|}{|AM_a|} = \frac{\frac{a(\sqrt{3}-\sqrt[4]{3})}{2}\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{a(\sqrt{3}-\sqrt[4]{3})}{2\sqrt{3}} = \frac{a}{2\sqrt{3}}|AH|$$

Finalmente, llegamos a que

$$|FN| = |CJ| = \frac{a}{2}(\sqrt[4]{3} - 1) \neq \frac{a\sqrt[4]{3}(\sqrt[4]{3}-1)}{2\sqrt{3}} = \frac{a(\sqrt{3}-\sqrt[4]{3})}{2\sqrt{3}} = |HG|. ♣$$

13.14. Falacia. Sea ΔABC un triángulo. Si $D \in BC$ satisface que $\angle BAD \cong \angle C$, entonces $BC \cong BD$.

Prueba:

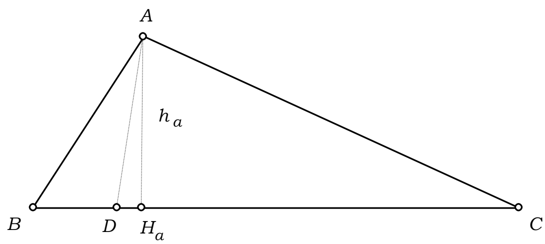


Figura 13.18

Por el primer criterio de semejanza (6.2.4), sabemos que $\Delta ABC \sim \Delta DAB$. De aquí, por el Teorema 8.9.9, obtenemos que

$$\frac{are(\Delta ABC)}{are(\Delta DAB)} = \frac{|AC|^2}{|AD|^2} = \frac{|BC|\,h_a}{|BD|\,h_a} = \frac{|BC|}{|BD|}$$

$$\frac{|AC|^2}{|BC|} = \frac{|AD|^2}{|BD|}.$$

Del Teorema 8.2.3 obtenemos que

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2|BC||BH_a| \text{ y } |AD|^2 = |AB|^2 + |BD|^2 - 2|BD||BH_a|.$$

Sustituyendo, hallamos que

$$\frac{|AB|^2 + |BC|^2 - 2|BC||BH_a|}{|BC|} = \frac{|AB|^2 + |BD|^2 - 2|BD||BH_a|}{|BD|}$$

$$\frac{|AB|^2}{|BC|} + |BC| - 2|BH_a| = \frac{|AB|^2}{|BD|} + |BD| - 2|BH_a|$$

$$\frac{|AB|^2}{|BC|} - |BD| = \frac{|AB|^2}{|BD|} - |BC|$$

$$\frac{|AB|^2 - |BD||BC|}{|BC|} = \frac{|AB|^2 - |BC||BD|}{|BD|}$$

$$\frac{1}{|BC|} = \frac{1}{|BD|}$$

$$|BC| = |BD|.$$

Como $\Delta ABC \sim \Delta DAB$, obtenemos que $\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|BD|}$ y, por consiguiente,

$$|AB|^2 = |BD||BC|.$$

Explicación: Nuestro error fue dividir por 0 para realizar una cancelación indebida. ♣

13.15. Falacia del Trapecio. Un cuadrilátero que tenga dos lados congruentes es un trapecio.

Prueba: Sea $\square ABCD$ un trapecio en el cual $AB \cong CD$. Sean M y N los puntos medio de BC y AD, respectivamente, y P el punto de intersección de las mediatrices de BC y AD: si dichas mediatrices no se cortan, entonces son paralelas y, por el Problema 3.158, $BC \parallel AD$. En la figura de abajo, se muestran todas las posibles posiciones del punto P con respecto al cuadrilátero $\square ABCD$.

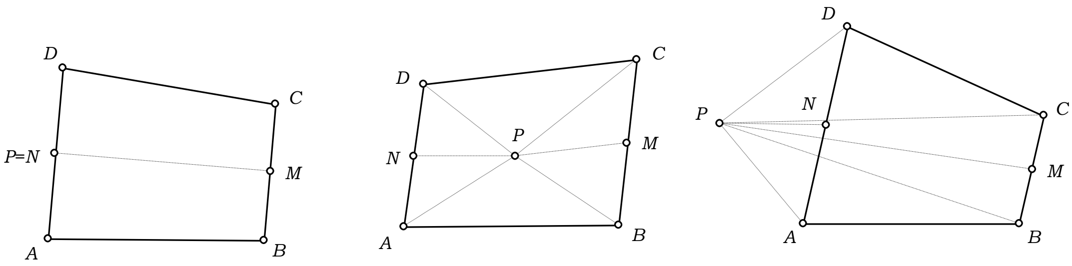


Figura 13.19

Si $P = N$, por el Teorema 3.7.1, tenemos entonces que $BC \parallel AD$. Supongamos que P no está ni en AB ni en CD. Según el Teorema de la Mediatriz 4.4.2, $PA \cong PD$ y $PB \cong PC$. De donde, basándonos en el criterio *LLL* (3.2.12), $\Delta PAB \cong \Delta PDC$. En consecuencia, $\angle BAP \cong \angle PDC$ y $\angle PBA \cong \angle DCP$. Por el Teorema 3.2.9, sabemos que $\angle PAD \cong \angle ADP$ y $\angle CBP \cong \angle PCB$. De acuerdo con el Teorema de adición (2.8.4) o de sustracción (2.8.2) de ángulos (dependiendo de la posición del punto P), hallamos que $\angle A \cong \angle D$ y $\angle B \cong \angle C$. De aquí y por el Teorema 5.1.13, tenemos que

$$m(\angle A) + m(\angle D) + m(\angle B) + m(\angle C) = 360$$
$$2m(\angle A) + 2m(\angle B) = 360$$
$$m(\angle A) + m(\angle B) = 180.$$

Lo cual significa que los ángulos $\angle A$ y $\angle B$ son suplementarios. En vista del Teorema 3.4.5, $AD \parallel BC$.

Explicación: Después de ver las explicaciones de las falacias anteriores, uno puede deducir que el problema se encuentra en nuestro argumento basado en el dibujo equivocado. La figura correcta seria la figura 13.20.

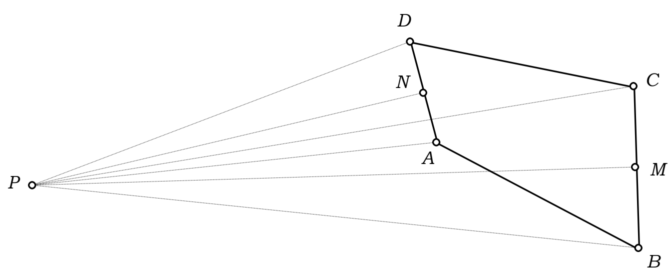


Figura 13.20

Esta nos ofrece el panorama real de la posición de los triángulos ΔPAB y ΔPDC, que en realidad son congruentes. Las congruencias $\angle BAP \cong \angle PDC$, $\angle PBA \cong \angle DCP$, $\angle PAD \cong \angle ADP$ y $\angle CBP \cong \angle PCB$ siguen siendo válidas. Pero $\angle A = \angle 360 - (\angle BAP + \angle PAD)$ y $\angle D = \angle PDC - \angle ADP$. Lo cual es un impedimento para aplicar el argumento que se usó al final de la supuesta prueba. ♣

13.16. Falacia [a-175]. Un cuadrilátero que tenga un par de ángulos opuestos congruentes y un par de lados opuestos congruentes es un paralelogramo.

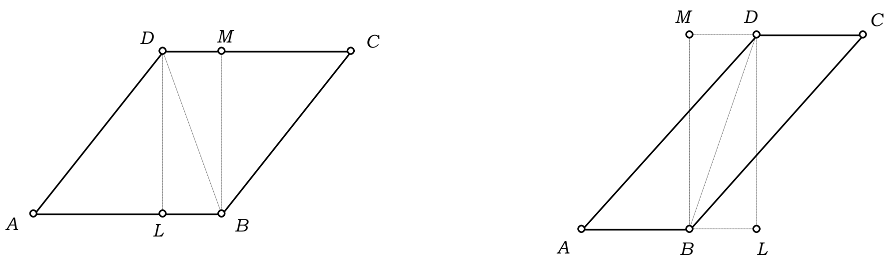


Figura 13.21

Prueba: Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero tal que $AD \cong BC$ y $\angle A \cong \angle C$. Sean L y M las proyecciones de D y B sobre las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{DC}$, respectivamente (Fig. 13.21). Por el criterio *CA* (3.6.2), los triángulos rectángulos ΔDAL y ΔBCM son congruentes. De donde podemos ver que $DL \cong BM$ y $\angle ADL \cong \angle CBM$. De acuerdo con el criterio *HC* (3.6.5), hallamos que $\Delta DLB \cong \Delta BMD$. De donde se sigue que $\angle DBL \cong \angle BDM$ y $\angle LDB \cong \angle MBD$. Según el Teorema 2.8.1, obtenemos que $\angle ADB \cong \angle CBD$. En virtud del Teorema 3.4.3, $AD \parallel BC$ y $AB \parallel DC$. Por lo tanto, $\square ABCD$ es un paralelogramo.

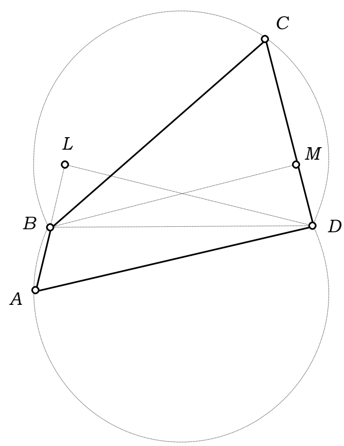


Figura 13.22

Explicación: Nuestro error radica en que elaboramos nuestro razonamiento en una figura que muestra un cuadrilátero que es un paralelogramo. Consideremos el cuadrilátero $\square ABCD$ de la figura 13.22. En él se cumple que $AD \cong BC$ y $\angle A \cong \angle C$ y claramente no es un paralelogramo, pues ningún par de sus lados opuestos es paralelo. Tenemos que los triángulos rectángulos ΔDAL y ΔBCM siguen siendo congruentes (3.6.2) y lo mismo pasa con los triángulos ΔDLB y ΔBMD (3.6.5). Pero

$$\angle BDA = \angle LDA - \angle LDB \text{ y } \angle DBC = \angle DBM + \angle MBC. \clubsuit$$

13.17. Falacia. Todo rectángulo que se puede inscribir en un cuadrado es también un cuadrado.

Prueba: Sea □*ABCD* un cuadrado. Supongamos que el rectángulo □*A'B'C'D'* está inscrito en □*ABCD*. Sean *P* y *Q* las proyecciones de *C'* y *D'* sobre los segmentos *AB* y *BC*, respectivamente, y sea *O* el punto de intersección de *A'C'* y *B'D'*. Veamos que pasa en los triángulos rectángulos Δ*C'A'P* y Δ*D'B'Q*. Tenemos que *C'P* ≅ *AB* y *D'Q* ≅ *DC* y, por consiguiente, *C'P* ≅ *D'Q*. Sabemos que *A'C'* ≅ *B'D'*. Por el criterio 3.6.5, obtenemos que Δ*C'A'P* ≅ Δ*D'B'Q*. De aquí se sigue que ∠*PA'C'* ≅ ∠*QB'D'*. Analicemos el cuadrilátero □*A'BB'O*. Como ∠*PA'C'*≅ ∠*QB'D'*, por el Teorema 2.7.6, ∠*OA'A* ≅ ∠*D'B'B* y, por tanto, ∠*PA'C'* y ∠*D'B'B* son suplementarios. De acuerdo con el Teorema 9.9.5, tenemos que los ángulos ∠*A'OB'* y ∠*B* son suplementarios. Pero como ∠*B* es un ángulo recto, se sigue que ∠*A'OB'* es un ángulo recto, esto es por el Teorema 2.7.10. Según el Teorema 5.3.1, □*A'B'C'D'* es un rombo y, por lo tanto, □*A'B'C'D'* es un cuadrado.

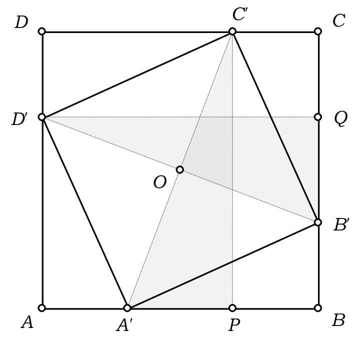


Figura 13.23

Explicación: La figura 13.24 muestra que nuestra afirmación es totalmente errónea. Lo que pasó fue que intencionalmente un cuadrado representó a nuestro rectángulo en nuestra figura inicial y en dicha figura basamos nuestra prueba. Pero si partimos de un rectángulo que no sea un cuadrado desde el principio, la situación es muy diferente como lo representa la figura 13.24. Nuestros ángulos ∠*PA'C'*y ∠*D'B'B*, en este caso, no son suplementarios sino congruentes. Vale la pena observar que la conclusión de la falacia depende de la posición de los puntos *B*, *Q* y *B'*. ♣

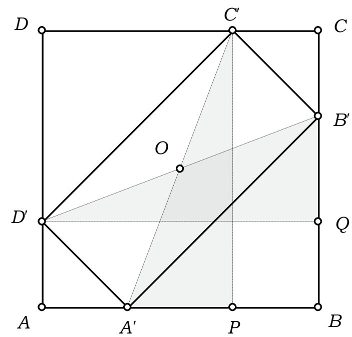
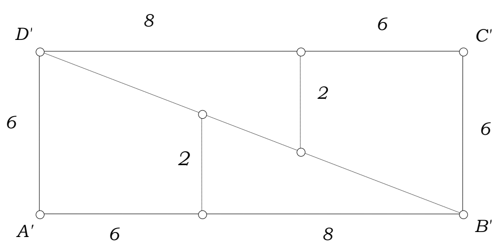


Figura 13.24

13.18. Falacia. Un cuadrado de 8 de lado tiene la misma área que un rectángulo cuyos lados tienen longitudes 6 y 14.

Prueba: Sea □*ABCD* un cuadrado de 8 de lado. Dividimos a este cuadrado en regiones triangulares, tal y como lo muestra la figura 13.25.



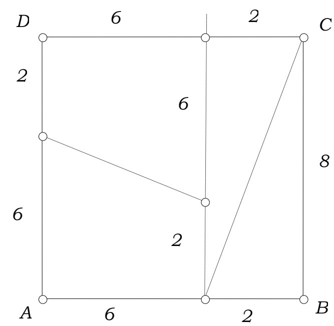


Figura 13.25

Ahora, tomamos un rectángulo □*A'B'C'D'* cuyos lados tienen longitudes 6 y 14. Procedemos a dividir este rectángulo □*A'B'C'D'* como lo muestra la figura 13.25. De ambas divisiones podemos concluir que

$$are(\square ABCD) = 64 = are(\square A'B'C'D') = 84.$$

Explicación: Lo que realmente estamos afirmando es que rearreglando las partes que dividen al cuadrado □*ABCD* se puede formar el rectángulo □*A'B'C'D'*. Pero esto es un gran error, pues las partes que dividen al rectángulo como en la figura 13.26 no corresponden a las partes que dividen al cuadrado. Si colocamos las partes del cuadrado dentro del rectángulo como lo muestra figura 13.26, entonces dichas partes no alcanzan a cubrir todo el rectángulo, faltando por cubrir un paralelogramo. ♣

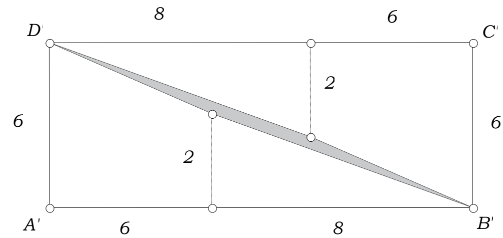


Figura 13.26

En la falacia 13.18, vimos que si dividimos un cuadrado como en la figura 13. 27 y colocamos las piezas como lo indica la figura 13.26, por lo general no alcanzamos a cubrir el rectángulo. Pero uno se podría preguntar si hay alguna posibilidad de que con dichas piezas podamos formar un rectángulo. Analicemos este problema, sea □*ABCD* un cuadrado, el cual lo dividimos como muestra la figura de la derecha. Supongamos que si rearreglamos las piezas, como lo muestra la figura 13.28, podemos formar un triángulo. En términos de áreas, tenemos que el área del cuadrado es igual a

$$A_1 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

y el área del triángulo está dada por

$$A_2 = \frac{2y(2y+x)}{2} = xy + 2y^2 .$$

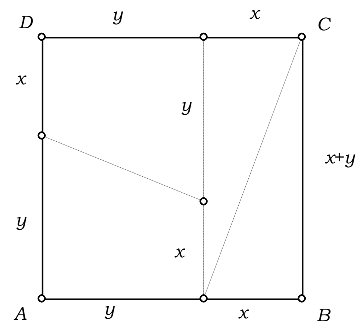


Figura 13.27

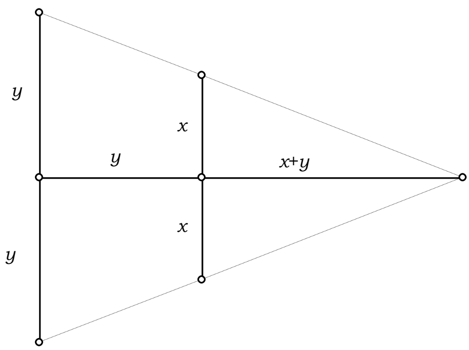


Figura 13.28

Rearreglamos de nueva cuenta las piezas y las colocamos, tal y como lo muestra la figura de abajo:

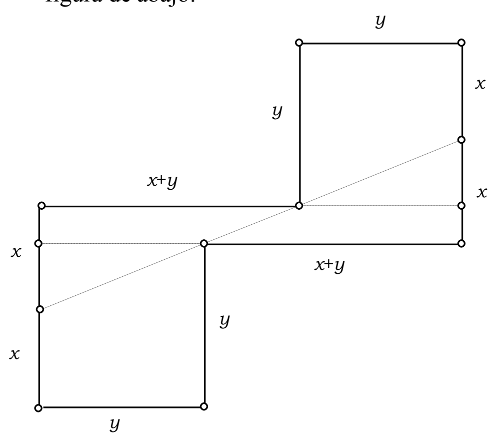


Figura 13.29

El área de la figura 13.29 es igual a

$$A_3 = 2y^2 + (2x-y)(x+2y) = 2y^2 + 2x^2 + 4xy - xy - 2y^2$$
$$= 2x^2 + 3xy.$$

Entonces tenemos que

$$A_2 - A_1 = xy + 2y^2 - x^2 - 2xy - y^2 = y^2 - x^2 - xy$$
$$A_3 - A_1 = 2x^2 + 3xy - x^2 - 2xy - y^2 = x^2 - y^2 + xy$$

Si $A_1 = A_2 = A_3$, entonces se debe cumplir la igualdad

$$y^2 - x^2 - xy = x^2 - y^2 + xy$$
$$2x^2 - 2y^2 + 2xy = 0$$
$$x^2 - y^2 + xy = 0$$
$$x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4(-y^2)}}{2} = \frac{y \pm \sqrt{5y^2}}{2} = y\phi$$
$$\frac{x}{y} = \phi.$$

Así hemos encontrado una condición necesaria y suficiente.

13.19. Falacia [l-38]. La suma de las longitudes de los lados paralelos de un trapecio es igual a 0.

Prueba: Sea □*ABCD* un trapecio con *AB* || *CD*. Extendemos los lados *AB* y *CD* hasta unos puntos *E* y *F*, respectivamente, de tal forma que |*ED*| = |*BC*| = *a* y |*CD*| = |*BE*| = *c*, ver la figura de abajo para observar la colocación de los puntos *E* y *F*. Sean *O* el punto de intersección de las diagonales *AC* y *BD* del trapecio □*ABCD*, y *P* el punto de intersección de *BD* y *EF*.

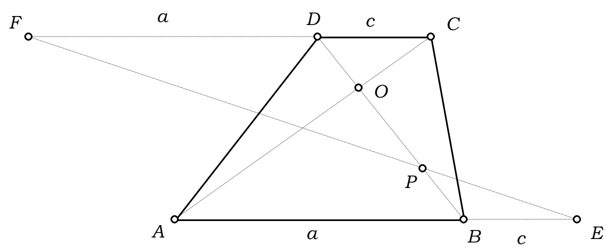


Figura 13.30

Por el Corolario 6.2.7, sabemos que Δ*OAB* ~ Δ*OCD* y Δ*DFP* ~ Δ*PBE*. De estas semejanzas, obtenemos las identidades

$$\frac{|OB|}{|OD|} = \frac{|OP|+|PB|}{|OD|} = \frac{a}{c} = \frac{|DP|}{|PB|} = \frac{|OD|+|OP|}{|PB|}$$
$$\frac{|OP|+|PB|}{|OD|} = \frac{|OP|+|PB|-|OD|-|OP|}{|OD|-|PB|}$$
$$\frac{|OP|+|PB|}{|OD|} = \frac{|PB|-|OD|}{|OD|-|PB|} = -1$$
$$\frac{a}{c} = -1$$
$$a = -c$$
$$a + c = 0.$$

Explicación: Suponiendo que |*OD*| ≠ |*PB*|, se puede pasar de la primera identidad a la segunda, pero si |*OD*| = |*PB*| no es posible hacerlo. Lo que realmente se ha establecido por reducción al absurdo en esta falacia es que |*OD*| = |*PB*|. ♣

Ahora veamos cómo contradecir el Axioma I_1.

13.20. Falacia [l-38]. Por dos puntos dados, pasa más de una recta.

Prueba: Sean A y B dos puntos. El Axioma I_1 nos dice que al menos hay una recta $\overleftrightarrow{AB}$ que contiene a A y B. Fijemos un punto P fuera de la recta $\overleftrightarrow{AB}$. Sea C el punto de intersección de los círculos cuyos diámetros son PB y PC. De acuerdo con el Teorema 9.5.2, $\angle PCA$ y $\angle BCP$ son ángulos rectos. Lo cual implica que A, C y B están sobre una misma recta. Por lo tanto, $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{AC}$ son dos rectas que unen A y B.

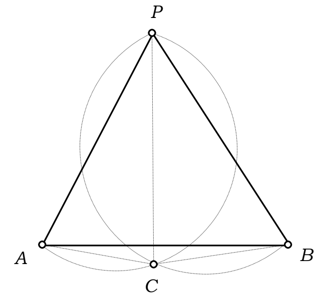


Figura 13.31

Explicación. Al suponer que $\overleftrightarrow{AB} \neq \overleftrightarrow{AC}$, claramente contradecimos el Axioma I_1 por el argumento anterior. Por lo tanto, $C \in \overleftrightarrow{AB}$. En la figura 13.31, alterando la realidad, C fue dibujado fuera de $\overleftrightarrow{AB}$. ♣

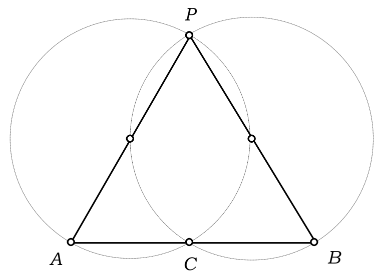


Figura 13.32

Procedamos ahora a contradecir el Teorema 3.7.3 mediante la siguiente falacia.

13.21. Falacia [l-38]. Dados una recta y un punto fuera de ella, existen al menos dos rectas que pasan por el punto dado y son perpendiculares a la recta dada.

Prueba: Sean l una recta y $P \notin l$. Fijemos dos puntos A, $B \in l$. Sean C y D los puntos de intersección de los círculos de diámetro PA y PB con el segmento AB, respectivamente. Según el Teorema 9.5.2, hallamos que los ángulos $\angle PCA$ y $\angle BDP$ son rectos. Es decir, $\overleftrightarrow{PC} \perp l$ y $\overleftrightarrow{PD} \perp l$.

Explicación. Analicemos qué fue lo que pasó. Es claro que si suponemos $\overleftrightarrow{PC} \neq \overleftrightarrow{PD}$ contradecimos el Teorema 3.7.3. Por consiguiente, los dos círculos que trazamos se cortan en un punto $C = D \in l$, tal como lo muestra la figura de la derecha.

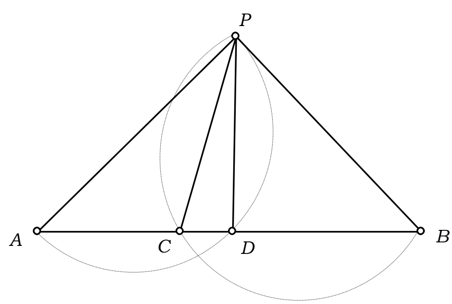
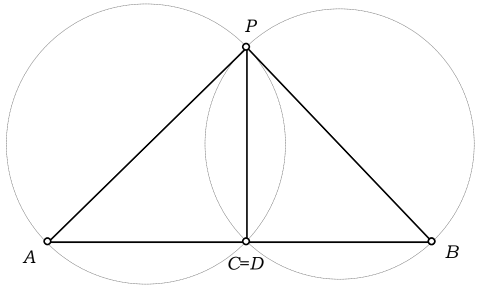


Figura 13.33



♣

Figura 13.34

13.22. Falacia [l-38]. Un círculo puede tener dos centros.

Prueba: Sea $\angle AOB$ ángulo no degenerado tal que $OA \cong OB$. Sea C es punto de intersección de las rectas perpendiculares a $\overleftrightarrow{OA}$ y $\overleftrightarrow{OB}$ en los puntos A y B, respectivamente. Como A, C y B no son colineales, entonces podemos encontrar un círculo $\mathrm{C}(P,r)$ que pase por dichos puntos, esto es posible por el Teorema 9.1.6. Sean D y E los puntos donde el círculo $\mathrm{C}(P,r)$ corta a $\overleftrightarrow{OA}$ y $\overleftrightarrow{OB}$, respectivamente.

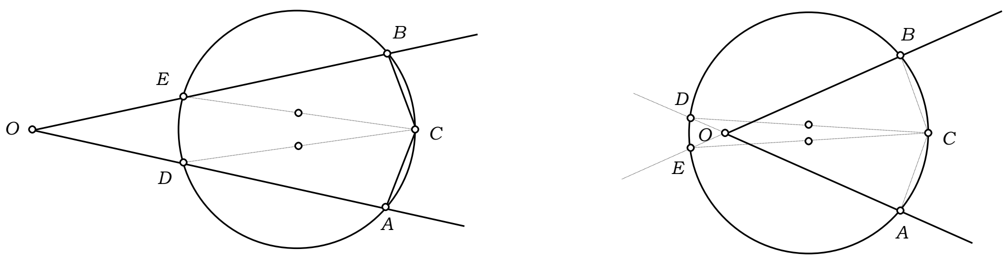


Figura 13.35

Hay dos casos posibles, que el vértice O caiga dentro o fuera del círculo $\mathrm{C}(P,r)$. En ambos casos tenemos que los ángulos $\angle CAD$ y $\angle EBC$ son rectos. Según el Teorema 9.5.2, CD y CE resultan ser diámetros del círculo $\mathrm{C}(P,r)$. Por lo tanto los puntos medios de CD y CE son centros del círculo $\mathrm{C}(P,r)$.

Explicación: El lector se dará cuenta rápidamente, que no hemos considerado todos los casos. Falta el caso en que $O \in \mathrm{C}(P,r)$. De hecho, esto es lo que se ha demostrado, porque si suponemos que $A \notin \mathrm{C}(P,r)$, con la prueba de arriba, hallamos una contradicción. Por lo tanto, $O \in \mathrm{C}(P,r)$. ♣

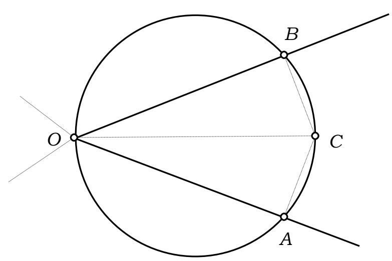


Figura 13.36

El libro de E. A. Maxwell [l-239] ofrece una colección de falacias en varias áreas de las matemáticas. Entre estas falacias, encontramos la siguiente:

13.23. Falacia. Todo punto en el interior de un círculo está sobre el mismo círculo.

Prueba: Sea P un punto en el interior de un círculo $C(O,r)$. Tomamos un punto $Q \in \overrightarrow{OP}$ tal que $|OP||OQ| = r^2$ y sean M el punto medio del segmento PQ, y AB la cuerda del círculo perpendicular a OQ en el punto M. Sabemos que

$$|OP| = |OM| - |PM| \text{ y } |OQ| = |OM| + |MQ| = |OM| + |PM|.$$

Por lo consiguiente,

$$\begin{aligned}|OP||OQ| &= (|OM| - |PM|)(|OM| + |PM|)\\ &= |OM|^2 - |PM|^2\\ &= (r^2 - |AM|^2) - (|PA|^2 - |AM|^2)\\ &= r^2 - |PA|^2 = |OP||OQ| - |PA|^2\end{aligned}$$

$$|OP||OQ| = |OP||OQ| - |PA|^2$$

$$-|PA|^2 = 0$$

$$|PA| = 0$$

$$P = A.$$

Así hemos demostrado que $P = A \in C(O,r)$.

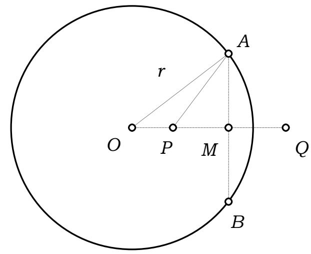


Figura 13.37

Explicación: Veamos ahora en dónde falló nuestro razonamiento. Pongamos $|OP| = p$ y $|OQ| = \frac{r^2}{p}$. Por hipótesis, sabemos que $(r-p)^2 > 0$. Por lo cual,

$$r^2 - 2rp + p^2 > 0$$

$$r^2 + p^2 > 2rp$$

$$\frac{r^2+p^2}{2p} = \frac{r^2}{2p} + \frac{p}{2} = \frac{|OP|}{2} + \frac{|OQ|}{2} > r$$

$$\frac{|OP|}{2} + \frac{|OQ|}{2} = \frac{|OP|}{2} + \frac{|OP|+|PQ|}{2} = |OP| + \frac{|PQ|}{2} = |OP| + |PM| = |OM| > r.$$

Por lo tanto, M no está en el interior del círculo. ♣

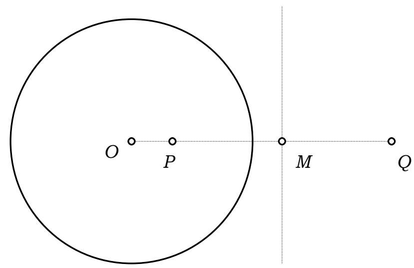


Figura 13.38

La siguiente falacia contradice el Teorema 3.7.4.

13.24. Falacia [l-38]. Por un punto de una recta dada, se pueden trazar dos rectas perpendiculares a la recta dada.

Prueba: Sean l una recta y $A \in l$. Mediante la Construcción 11.1.4, trazamos una recta m perpendicular a l en el punto A. Ahora trazamos un círculo $C(O,r)$ que pase por A y corte a l en punto B diferente de A. Sea C el punto de intersección de $\overleftrightarrow{BO}$ y $C(O,r)$. De acuerdo con el Teorema 9.5.2, obtenemos que $\angle CAB$ es un ángulo recto. Por lo tanto, m y $\overleftrightarrow{AC}$ son las rectas buscadas.

Explicación. Lo que realmente estamos probando mediante reducción al absurdo es que $m = \overleftrightarrow{AC}$. En la figura 13.39, se muestran intencionalmente las dos rectas distintas. ♣

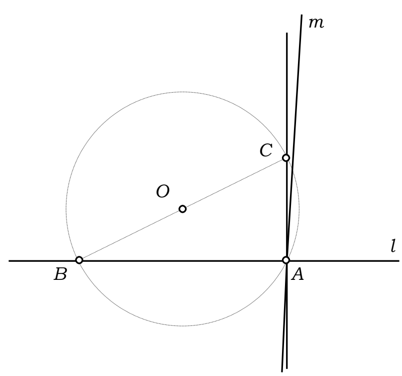


Figura 13.39

Con la siguiente falacia, podemos contradecir el Axioma de las Paralelas.

13.25. Falacia [l-38]. Por un punto dado fuera de una recta dada, se pueden trazar dos rectas paralelas a la recta dada.

Prueba: Sean l una recta y $A \notin l$. Usando la Construcción 11.1, trazamos una recta m paralela a l y que pase por el punto A. Tomemos un punto arbitrario $B \in l$. Trazamos el círculo $\mathrm{C}(O,r)$ de diámetro AB. Sea C el punto en donde la recta perpendicular a l en el punto B corta al círculo $\mathrm{C}(O,r)$. Según el Teorema 9.5.2, sabemos que $\angle ACB$ es un ángulo recto. Por el Teorema 3.7.1, $\overleftrightarrow{AC} \parallel l$. Esto prueba que $\overleftrightarrow{AC}$ y m son las rectas deseadas.

Explicación. Claramente, si $\overleftrightarrow{AC} \neq m$, entonces se contradice el Axioma de las Paralelas. Por lo tanto, $\overleftrightarrow{AC} = m$. ♣

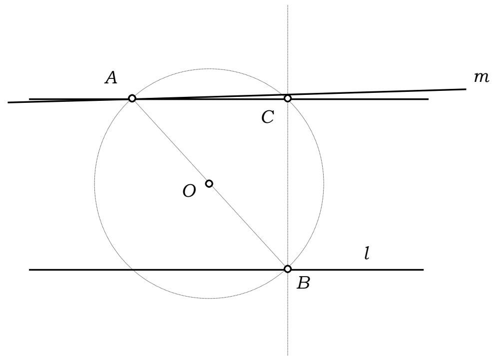


Figura 13.40

La siguiente falacia se le atribuye a Proclus (siglo V a. de C.) y contradice el enunciado del Teorema 3.4.8.

13.26. Falacia (Proclus). Sean m y n dos rectas cortadas por una recta transversal l. Si la suma de las medidas de dos ángulos internos cuyos interiores estén en un mismo semiplano determinado por la recta l es menor que 180, entonces m y n no se intersecan en dicho semiplano determinado por la recta l.

Prueba: Sean A y B los puntos donde la recta l corta a m y n, respectivamente.

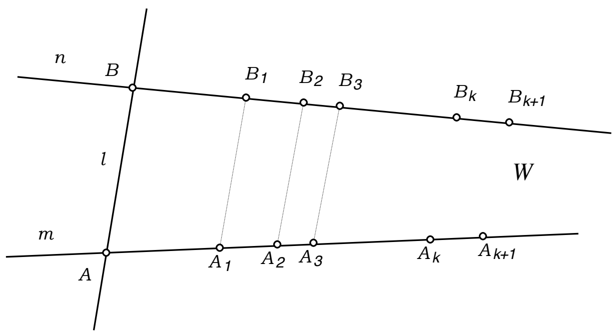


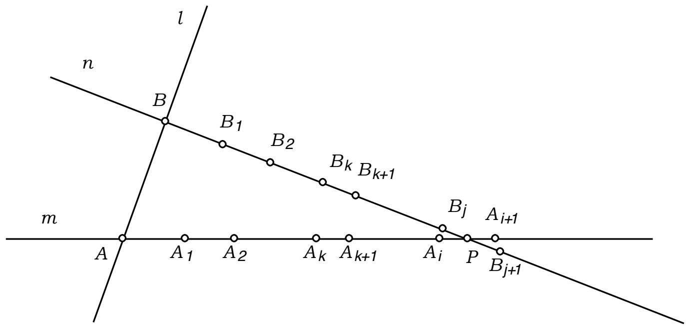
Figura 13.41

Sea W el semiplano determinado por la recta l que contiene a los interiores de los ángulos internos cuyas medias suman un número menor que 180. Tomamos puntos $A_1 \in m \cap W$ y $B_1 \in n \cap W$ tales que $|A\,A_1| = \dfrac{|AB|}{2} = |B\,B_1|$, y de manera inductiva, para cada número entero positivo k, tomamos puntos $A_{k+1} \in m \cap W$ y $B_{k+1} \in n \cap W$ tales que $|A_k\;A_{k+1}| = \dfrac{|A_kB_k|}{2} = |B_k\;B_{k+1}|$, A_k precede a A_{k+1} y B_k precede a B_{k+1}. Supongamos que existe un punto $P \in A\,A_1 \cap B\,B_1 \neq \varnothing$. Entonces, ΔPAB es un triángulo en el cual, por la Desigualdad del Triángulo (4.4.7), se cumple que

$$|AB| < |AP| + |PB| < |A\,A_1| + |B\,B_1| = |AB|,$$

pero esto es una contradicción. Por lo tanto, $A\,A_1 \cap B\,B_1 = \emptyset$. Inductivamente, con un argumento muy similar podemos demostrar que $A_k\ A_{k+1} \cap B_k\ B_{k+1} = \emptyset$, para todo número entero positivo k. Como los segmentos $A_k\ A_{k+1}$'s cubren la parte de la recta m que yace en W, concluimos que m y n no se cortan en W.

Explicación: Para ver el error de la prueba ,hay que entender lo que realmente se está probando. Lo que se estableció es que $A_k\ A_{k+1} \cap B_k\ B_{k+1} = \emptyset$, para todo número entero positivo k. Pero esto no descarta la existencia de dos números enteros positivos diferentes i y j tales que $A_i\ A_{i+1} \cap B_j\ B_{j+1} \neq \emptyset$, tal como se muestra en la siguiente figura:



♣

Figura 13.42

Veamos a continuación una falacia relacionada con el Axioma de las Paralelas. Pero antes recordemos lo que dice dicho axioma:

''Dada una recta y un punto fuera de ella, no puede haber más de una recta paralela a la recta dada que pase por el punto dado.''

La prueba del Teorema 3.4.7 no depende del Axioma de las Paralelas, pero veamos qué nos dice la siguiente falacia al respecto.

13.27. Falacia. Una demostración del Axioma de las Paralelas.

Prueba: Sean l una recta y $P \notin B$. Repitamos el procedimiento del Corolario 3.7.5. Según el Teorema 3.7.3, podemos encontrar una única recta n perpendicular a l que pase por el punto P. Ahora, el Teorema 3.7.4 nos garantiza que existe una única recta m que es perpendicular a n y que pasa por el punto P. Con base en el Teorema 3.7.1, concluimos que $l \parallel m$. La unicidad de la recta m se sigue de la unicidad de las rectas perpendiculares que fueron dadas por los Teorema 3.7.3 y 3.7.4.

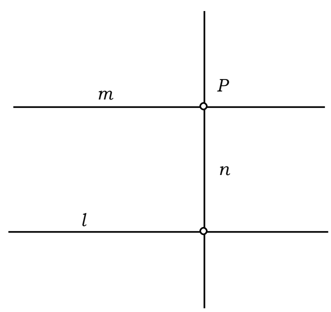


Figura 13.43

Explicación: Hemos visto que es posible encontrar una recta paralela a una recta dada que pase por un punto dado fuera de la recta dada sin ayuda del Axioma de las Paralelas. Pero analizando la prueba, podemos darnos cuenta que con el procedimiento de las rectas perpendiculares solo podemos encontrar una única recta m con las propiedades requeridas. Sin embargo, puede haber otro método diferente al que dimos para encontrar una segunda recta con las propiedades deseadas:

Fijemos un punto $Q \in l$. Consideremos la recta $\overleftrightarrow{PQ}$. Construimos (11.1.10) un ángulo $\angle SPT$ que sea congruente a uno de los ángulos, digamos que a $\angle RQP$, formados por l y $\overleftrightarrow{PQ}$. Por el Teorema 3.4.7, hallamos que $\overleftrightarrow{PS} \parallel l$.

Si no suponemos el Axioma de las Paralelas no es posible deducir que $m = \overleftrightarrow{PS}$. De hecho, en algunas geometrías no Euclidianas estas dos rectas podían ser diferentes. ♣

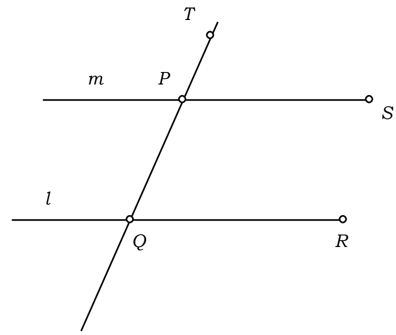


Figura 13.44

Para demostrar que la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es igual a 180 (Teorema 4.3.4). Se requirió del Axioma de las Paralelas. De hecho, sabemos que el Axioma de la Paralelas es equivalente a la existencia de un triángulo en el cual la suma de las medidas de sus ángulos es igual a 180 (ver [l-132]). Veamos la siguiente falacia que afirma lo contrario.

13.28. Falacia. La suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es igual a 180.

Prueba: No usaremos el Axioma de las Paralelas. Sea ΔABC y fijemos un punto $P \in BC$. Consideremos los triángulos ΔABP y ΔAPC. Sea z la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo. Tenemos entonces que

$$m(\angle BAP) + m(\angle B) + m(\angle APB) = z = m(\angle PAC) + m(\angle CPA) + m(\angle C).$$

Por consiguiente,

$$m(\angle BAP) + m(\angle B) + m(\angle APB) + m(\angle PAC) + m(\angle CPA) + m(\angle C) = 2z.$$

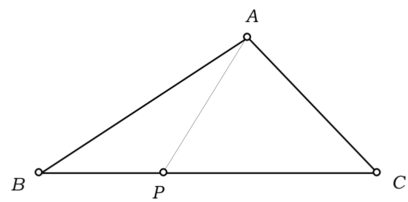


Figura 13.45

$$m(\angle BAP) + m(\angle B) + 180 + m(\angle PAC) + m(\angle C) = 2z.$$

$$m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) + 180 = 2z$$

$$z + 180 = 2z$$

$$z = 180,$$

tal como se deseaba.

Explicación: Aquí hemos aceptado que la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo arbitrario es igual a una constante (en nuestro caso es z). Pero si no se supone el Axioma de las Paralelas, no hay forma alguna de garantizar que las sumas de las medidas de los ángulos de cualesquiera dos triángulos sean iguales. ♣

La siguiente falacia fue ideada por H. D. Dudeney [l-129].

13.29. Falacia. Con las piezas del tangram (figura 13.46), se pueden formar dos figuras humanas diferentes, como se muestra en la figura 13.47. El lector puede ver que la figura humana de la izquierda, vista de frente, constituye un subconjunto de la figura humana de la derecha.

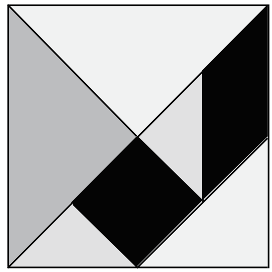


Figura 13.46

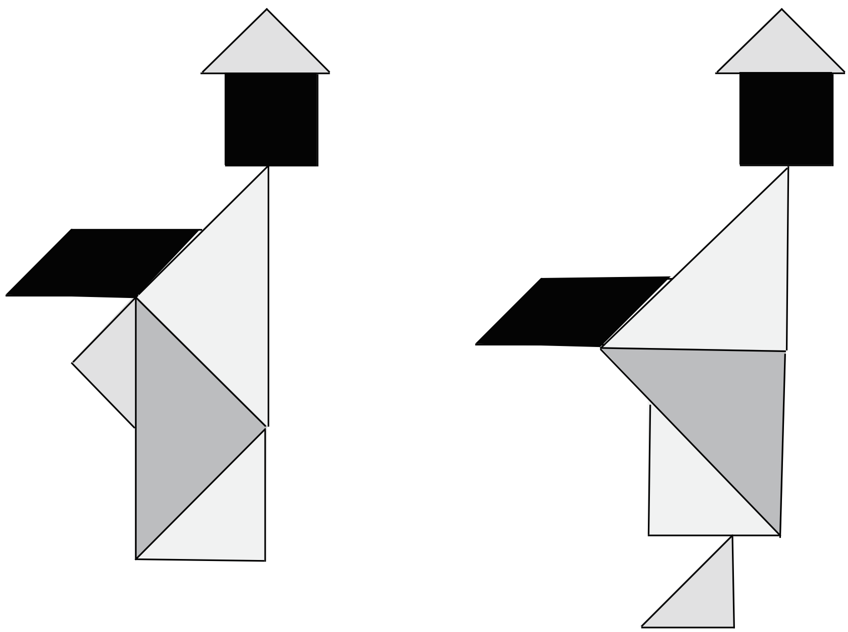


Figura 13.47

Explicación: A primera vista, uno cree en lo que la falacia afirma, pero es claro que ambas figuras tienen la misma área. Lo que no se percibe de inmediato es que el área del pie de la figura de la derecha está incluida en el área del cuerpo de la figura de la izquierda que es más grande que el de la derecha. ♣

13.30. Falacia. En la siguiente figura, un triángulo rectángulo se divide en cuatro regiones triangulares. En la figura 13.49, vemos que estas cuatro regiones se pueden colocar en posiciones diferentes a la original, de tal forma que se cubra el triángulo original salvo un cuadrado.

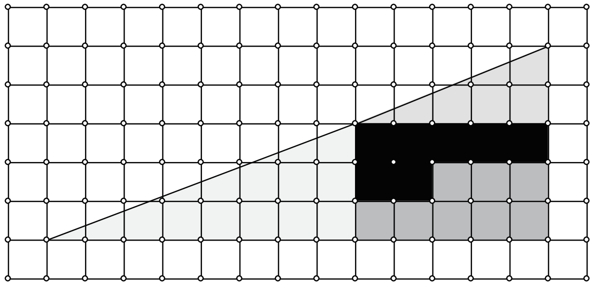


Figura 13.48

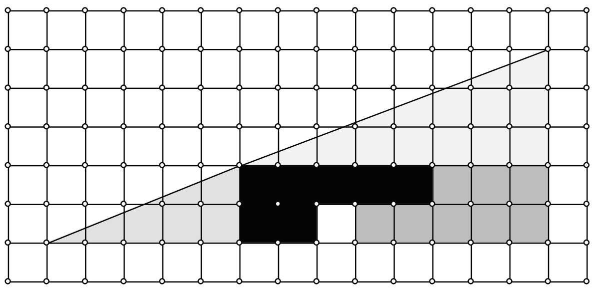


Figura 13.49

Explicación. Los catetos de triángulo rectángulo pequeño tienen longitudes 2 y 5, y las longitudes de los catetos del triángulo rectángulo grande son 3 y 8. Por lo tanto, ambos triángulos rectángulos no pueden ser semejantes. Así que el problema en esta falacia es que en la figura 13.48 no se obtiene un triángulo rectángulo, pues lo que aparentemente es la hipotenusa resulta ser una línea ligeramente curveada hacia adentro, y en la figura 13.49 la aparente hipotenusa es una línea curveada ligeramente hacia afuera. Aquí es donde yace el área del cuadrado pequeño. ♣

13.31 Falacia del Triángulo de Curry. En la figura de bajo, tenemos un triángulo isósceles dividido en seis partes. Este mismo triángulo isósceles casi se puede cubrir con las mismas piezas, colocadas en diferente posición a la original, salvo dos cuadrados, como lo muestra la figura de la derecha.

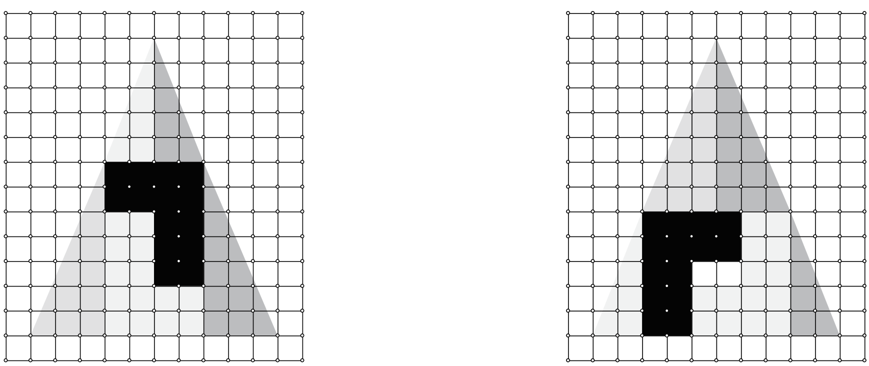


Figura 13.50

Explicación: En esta falacia no es fácil encontrar el error, pues se encuentra en la figura inicial. Lo primero que hay que observar, es que las longitudes de los catetos de los triángulos rectángulos pequeños son 5 y 2, y las longitudes de los catetos de los triángulos rectángulos grandes son 7 y 3. Por lo cual, dichos triángulos rectángulos no pueden ser semejantes y, por consiguiente, las seis piezas de la figura inicial no forman un triángulo isósceles, las hipotenusas de los triángulos rectángulos, el grande y el pequeño, no están alineadas. ♣

Por último, damos una demostración trigonométrica de una falsa identidad.

13.32. Falacia. $2^2 = 4^2$.

Prueba [I-38]: Por las fórmulas del Teorema 8.2.1, sabemos que

$$(\operatorname{sen}\angle\alpha)^2 + (\cos\angle\alpha)^2 = 1$$
$$(\cos\angle\alpha)^2 = 1 - (\operatorname{sen}\angle\alpha)^2$$
$$((\cos\angle\alpha)^2)^{\frac{3}{2}} = (1 - (\operatorname{sen}\angle\alpha)^2)^{\frac{3}{2}}$$
$$(\cos\angle\alpha)^3 = (1 - (\operatorname{sen}\angle\alpha)^2)^{\frac{3}{2}}$$
$$(\cos\angle\alpha)^3 + 3 = (1 - (\operatorname{sen}\angle\alpha)^2)^{\frac{3}{2}} + 3$$
$$((\cos\angle\alpha)^3 + 3)^2 = ((1 - (\operatorname{sen}\angle\alpha)^2)^{\frac{3}{2}} + 3)^2,$$

para cualquier ángulo $\angle\alpha$. Sustituyendo $\angle\alpha$ por $\angle 180$ en la última identidad, hallamos que

$$((\cos\angle 180)^3 + 3)^2 = ((1 - (\operatorname{sen}\angle 180)^2)^{\frac{3}{2}} + 3)^2$$
$$((-1)^3 + 3)^2 = ((1 - (0)^2)^{\frac{3}{2}} + 3)^2$$
$$(-1 + 3)^2 = (1 + 3)^2$$
$$2^2 = 4^2.$$

Explicación: El error yace entre la tercera y cuarta identidad, pues $(s^2)^{\frac{3}{2}} = |s|$ y no es igual a s como lo supusimos. Por ejemplo,

$$((\cos\angle 180)^2)^{\frac{3}{2}} = 1 \neq (\cos\angle 180)^3 = -1. \clubsuit$$

REFERENCIAS

Libros

[l-1] *Cours de Trigonométrie*, *Par une réunion de professeurs*, Alfred Mame et Fils, 1931.

[l-2] *Eléments de Géométrie: Theorique & Pratique*, Procedure des Frères de l'Instruction Chrétienne, 1942.

[l-3] *Geometry, Part I*, School Mathematics Study Group, Yale University, 1960.

[l-4] *Geometry*, *Part II*, School Mathematics Study Group, Yale University, 1960.

[l-5] *Geometría Informal*, National Council of Teachers of Mathematics, Trillas, 1986.

[l-6] *Plane Geometry I*, United States Armed Forces Institute, World Book Company, 1944.

[l-7] *The High School Geometry Tutor*, Research & Education Association, 1998.

[l-8] *The Geometry Problem Solver*, Research & Education Association, 1987.

[l-9] Actuarial Society of America and American Institute of Actuaries, Joint Associateship Examination, 1928.

[l-10] Actuarial Society of America and American Institute of Actuaries, Joint Associateship Examination, 1929.

[l-11] Actuarial Society of America and American Institute of Actuaries, Joint Associateship Examination, 1930.

[l-12] Actuarial Society of America and American Institute of Actuaries, Joint Associateship Examination, 1931.

[l-13] Actuarial Society of America and American Institute of Actuaries, Joint Associateship Examination, 1932.

[l-14] Actuarial Society of America and American Institute of Actuaries, Joint Associateship Examination, 1933.

[l-15] Actuarial Society of America and American Institute of Actuaries, Joint Associateship Examination, 1934.

[l-16] *501 Geometry Questions*, Learning Express, 2002.

[l-17] S. H. Kaplan, *Graduate Home-Study in Mathematics*, Part 2A, 1980.

[l-18] P. Abbott, *Geometry*, English Universities Press, 1970.

[l-19] B. M. Abrego Lerma, *Problemas Combinatorios Sobre Conjuntos Finitos de Puntos*, Aportaciones Matemáticas vol. 19, Sociedad Matemática Mexicana, 1997.

[l-20] J. B. Adkins y A. W. Weeks, *A Course in Geometry: Plane and Solid, Ginn and Company,* 1961.

[l-21] R. R. G. Aguilar, *Problemas de Álgebra, Geometría y Trigonometría*, IPN, 1997.

[l-22] E. de Alencar Filho, *Exercícios de Geometria Plana*, Nobel, 1984.

[l-23] I. Alexandroff, *Problèmes de Géométrie Elémentaire*, Libraire Scientifique A. Hermann, 1899.

[l-24] N. Altshiller Court, *College Geometry*, Barnes & Noble, 1959.

[l-25] R. Ardré, *Mathématiques II, Géométrie*, Bordas, 1964.

[l-26] M. N. Aref y W. Wernick, *Problems and Solutions in Euclidian Geometry*, Dover, 1968.

[l-27] E. E. Arnold y F. Durell, *New Plane Geometry*, Charles E. Merrill Company, 1931.

[l-28] R. A. Avery, *Plane Geometry*, Allyn and Bacon, 1931.

[l-29] Baifang, *Chinese Brain Twisters*, John Wiley & Sons, 1994.

[l-30] J. A. Baldor, *Geometría Plana y del Espacio: con una introducción a la Trigonometría*, Publicaciones Cultural, 1984.

[l-31] W. W. R. Ball y H. S. M. Coxeter, *Mathematical Recreations and Essays*, Dover, 1987.

[l-32] E. J. Barbeau; M. S. Klamkin y W. O. J. Moser, *Five Hundred Mathematical Challenges*, The Mathematical Association of America, 1995.

[l-33] M. Barbosa, *Descobrindo Padrões Pitagóricos*, Atual, 1993.

[l-34] G. C. Bartoo y J. Osborn, *Plane Geometry*, Webster Publishing Company, 1954.

[l-35] L. M. Blumental, *Geometría Axiomática*, Aguilar, 1965.

[l-36] V. M. Bradis; A. K. Kharcheva y V. L. Minkovskii, *Lapses in Mathematical Reasoning*, Pergamon Press, 1963.

[l-37] R. Beatley y G. D. Birkhoff, *Basic Geometry*, Chelsea Publishing Company, 1959.

[l-38] M. Benedito Rodrigues y A. Zimmermann Aranha, *Exercícios de Matemática: Progressões Aritméticas e Geométricas*, vol. 3, Editora Policarpo, 1994.

[l-39] M. Benedito Rodrigues y A. Zimmermann Aranha, *Exercícios de Matemática: Geometria Plana*, vol. 6, Editora Policarpo, 1997.

[l-40] M. Berrondo-Agrell, *100 Enigmas de Geometría*, Ediciones CEAC, 2006.

[l-41] C. Bertrán i Infante y J. García Arenas, *Geometría y Experiencias*, Alhambra, 1995.

[l-42] J. Bertrand, *Tratado de Álgebra vol. I*, Biblioteca Hispania, 1904.

[l-43] S. F. Bibb y C. I. Palmer, *Matemáticas Elementales*, Segunda Parte: Geometría, Reverté, 1949.

[l-44] C. Birtwistle, *Mathematical Puzzles and Perplexities*, Geroge Allen & Unwin, 1971.

[l-45] D. Blatner, *The joy of p*, Penguin books, 1997.

[l-46] B. Bolt, *Actividades Matemáticas*, Labor, 1988.

[l-47] B. Bolt, *Divertimentos Matemáticos*, Labor, 1988.

[l-48] B. Bolt, *Más Actividades Matemáticas*, Labor, 1988.

[l-49] B. Bolt, *Aún Más Actividades Matemáticas*, Labor, 1989.

[l-50] R. L. Bolt, *Examples in Trigonometry*, J. M. Dent & Sons, 1971.

[l-51] M. L. Bontorim de Queiroz y E. Q. Frota Rezende, *Geometria Euclidiana Plana*, Editora da UNICAMP e Imprensa Oficial SP, 2000.

[l-52] K. Borsuk y W. Szmielew, *Foundations of Geometry*, North-Holland, 1960.

[l-53] H. Bos y A. Rebiére, *Eléments de Géométrie*, Librairie Hachette et C., 1913.

[l-54] O. Bottema; R. Z. Djordjević; R. R. Janić; D. S. Mitrinović y P. M. Vasić, *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff, 1968.

[l-55] G. Bouligand, *L'accès aux Principes de la Géométrie Euclidienne*, Librairie Vuibert, 1951.

[l-56] C. Bourlet, *Precís d'Álgàbre 3 B., 2 ET, 1 C. D.*, Librairie Hachette, 1921.

[l-57] J. Bouthenet y R. Oriol, *Géométrie, Classes de 3°*, DUNOD, 1958.

[l-58] J. Bouthenet y R. Oriol, *Géométrie, Classes de 4°*, DUNOD, 1958.

[l-59] J. Bouthenet y R. Oriol, *Géométrie, Classes de 2°*, DUNOD, 1963.

[l-60] E. Bovio, *Geometria: Nuovi Orientamenti, vol. 1*, S. Lattes and C., 1975.

[l-61] E. Bovio, *Geometria: Nuovi Orientamenti, vol. 2*, S. Lattes and C., 1974.

[l-62] F. Brachet ; J. Dumarqué y R. Rostolland, *Géométrie*, Librairie Delagrave, 1955.

[l-63] Ch. J. Bradley, *Challenges in Geometry*, Oxford, 2005.

[l-64] W. E. Breckenridge y F. M. Morgan, *Plane Geometry*, Houghton Mifflin Company, 1951

[l-65] Ch. Briot, *Eléments de Géométrie*, Librairie Hachette et C., 1860.

[l-66] R. G. Brown; R. C. Jurgensen y A. M. King, *Geometry*, Houghton Mifflin Company, 1983.

[l-67] R. G. Brown; J. W. Jurgensen y R. C. Jurgensen, *Geometry*, Houghton Mifflin Company, 1992.

[l-68] G. M. Bruño, *Curso Elemental de Trigonometría Rectilínea*, Enseñanza, 1909.

[I-69] G. M. Bruño, *Elementos de Geometría*, Librería de la viuda de Ch. Bouret, 1909.

[I-70] G. M. Bruño, *Ejercicios y Problemas de Trigonometría*, Procuraduría General, 1916.

[I-71] G. M. Bruño, *Geometría: Curso Superior*, Bruño, 1978.

[I-72] S. J. Bryant; G. E. Graham y K. G. Wiley, *Nonroutine Problems*, McGraw Hill, 1965.

[I-73] C. J. Boyd; G. F. Burril; J. J. Cummins; T. D. Kanold; C. Malloy y L. E. Yunker, *Geometría*, McGraw Hill, 2000.

[I-74] A. Bullas, *Devenez Formidables en Math*, Oliven, 1960.

[I-75] R. Bulajich Manfrino y J. A. Gómez Ortega, *Geometría*, *Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas*, Instituto de Matemáticas, UNAM, 2004.

[I-76] R. Bulajich Manfrino y J. A. Gómez Ortega, *Geometría*: *Ejercicios y Problemas, Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas*, Instituto de Matemáticas, UNAM, 2005.

[I-77] L. N. H. Bunt, *Geometría Plana*, Fondo de Cultura Económica, 1963.

[I-78] J. C. Burkill y H. M. Cundy, *Mathematical Scholarship Problems*, Cambridge University Press, 1962.

[I-79] D. M. Burton, *Elementary Number Theory*, Wm. C. Brown Publishers, 1988.

[I-80] P. Cafaggi y M. Lugo, *abc Para Resolver Problemas con Ecuaciones de Primer Grado*, 1973.

[I-81] A.G. J. Camacho, *A New School Geometry with Trigonometry*, Collins, London and Glasgow, 1964.

[I-82] M. Capó Dolz, *100 Problemas de Ingenio 1*, El Rompecabezas, 2005.

[I-83] M. Capó Dolz, *100 Problemas de Ingenio 2*, El Rompecabezas, 2005.

[I-84] G. S. Carr, *Formulas and Theorems in Pure Mathematics*, Chelsea, 1970.

[I-85] E. Castelnuovo, *Geometría Intuitiva*, Labor, 1963.

[I-86] H. A. Castillo, *Geometría Plana y del Espacio*, Centro de Impresión Digital, 1997.

[I-87] B. Castrucci, *Fundamentos da Geometria*, Livros Técnicos e Científicos, 1978.

[I-88] E. Chailan, *Géométrie*, Ancienne Librairie Poussielgue, 1910.

[I-89] R. Chalavoux, *Nombre d'or, Nature et œuvre Humaine*, Chalagam, 2001.

[I-90] G. Choquet, *Geometry in a Modern Setting*, Houghton Mifflin Company, 1969.

[I-91] M. Cintra Goulart, *Matemática no ensimo médio: Resolução de Exercícios, vol. 1*, Scipione, 1999.

[I-92] J. R. Clark; R. Schorling y R. R. Smith, *Modern School Geometry*, World Book Company, 1938.

[I-83] C. H. Clemens y M. A. Clemens, *Geometry for the Classroom*, Springer-Verlag, 1991.

[I-94] S. R. Clemens; T. J. Cooney y Ph. G. O'Daffer, *Geometría: Con Aplicaciones y Soluciones de Problemas*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1989.

[I-95] D. O. Coblentz; Ch. R. Hirsh; M. N. Norton; A. J. Samide y H. L. Schoen, *Geometry*, Scott, Foresman and Company, 1990.

[I-96] D. O. Coblentz; Ch. R. Hirsh; M. A. Roberts; A. J. Samide y H. L. Schoen, *Geometry*, Scott, Foresman and Company, 1981.

[I-97] J. Cofman, *What to solve*, Clarendon Press, 1990.

[I-98] E. Colerus, *Desde el Punto de Vista de la Cuarta Dimensión*, Labor, 1962.

[I-99] Ch. de Comberousse, *Geometría Elemental Plana y del Espacio II*, Librería de la viuda de Ch. Bouret, México, 1913.

[I-100] Ch. de Comberousse y E. Rouché, *Traité de Géométrie*, Gauthier-Villars et Fils, 1891.

[I-101] L. L. Conant, *Original Exercises in Plane and Solid Geometry*, American Book Company, 19605.

[I-102] S. R. Conrad y D. Flegler, *Math Contests: Grades 4, 5 & 6, vol. 1*, Math League Press, 1997.

[I-103] S. R. Conrad y D. Flegler, *Math Contests: Grades 4, 5 & 6, vol. 2*, Math League Press, 1997.

[I-104] S. R. Conrad y D. Flegler, *Math Contests: Grades 4, 5 & 6, vol. 3*, Math League Press, 1996.

[I-105] S. R. Conrad y D. Flegler, *Math Contests: Grades 7 & 8, vol. 1*, Math League Press, 1997.

[I-106] S. R. Conrad y D. Flegler, *MathContests: Grades 7 & 8, vol. 2*, Math League Press, 1994.

[I-107] S. R. Conrad y D. Flegler, *Math Contests: Grades 7 & 8, vol. 3*, Math League Press, 1996.

[I-108] S. R. Conrad y D. Flegler, *Math Contests: High School, vol. 1*, Math League Press, 1992.

[I-109] S. R. Conrad y D. Flegler, *Math Contests: High School, vol. 2*, Math League Press, 1995.
[I-110] S. R. Conrad y D. Flegler, *Math Contests: High School, vol. 3*, Math League Press, 1996.
[I-111] T. A. Cook, *The Curves of Life*, Dover, 1979.
[I-112] H. S. M. Coxeter, *Fundamentos de Geometría*, Limusa, 1971.
[I-113] Ch. Davison y C. H. Richards, *Plane Geometry: for Secondary Schools*, Cambridge University Press, 1907.
[I-114] H. Debrunner y H. Hadwiger, *Combinatorial Geometry in the Plane*, Holt, Rinehart and Winston,1964.
[I-115] A. Delachet, *La Géométrie Elémentaire*, Presses Universitaires de France, 1966.
[I-116] J. Deulofeu, *Una Recreación Matemática: Historias, Juegos y Problemas*, Planeta, 2001.
[I-117] M. Dil, *Geometría Constructiva*, Librería de la viuda de Ch. Bouret, 1919.
[I-118] M. A. DiSpezio, *Critical Thinking Puzzles*, Sterling, 1996.
[I-119] M. A. DiSpezio, *Challenging Critical Thinking Puzzles*, Sterling, 1998.
[I-120] M. P. Dolciani; A. J. Donnelly y R. C. Jurgensen, *Modern Geometry*, Houghton Mifflin, 1963.
[I-121] E. C. Douglas; F. E. Seymour y P. J. Smith, *Geometry for High Schools*, Macmillan Company, 1959.
[I-122] F. L. Downs y E. E. Moise, *Geometría Moderna*, Fondo Educativo Interamericano, 1970.
[I-123] I. Dressler, *Geometry Review Guide*, AMSCO School Publications, 1973.
[I-124] Y. S. Dubnov, *Errores de las Demostraciones Geométricas*, Limusa, 1973.
[I-125] H. E. Dudeney, *The Canterbury Puzzles*, London, 1919.
[I-126] H. E. Dudeney, *Amusements in Mathematics*, Dover, 1958 [Hay una selección de acertijos de este libro publicada en *"Los gatos del Hechicero y Nuevas Diversiones Matemáticas"*, Colección de Mente no. 19, Zugarto, 1995].
[I-127] N. V. Efímov, *Geometría Superior*, MIR, 1984.
[I-128] J. Estalella, *Ciencia Recreativa*, Gustavo Gili, 1960.
[I-129] H. Eves, *Estudio de las Geometrías, vols. I y II*, UTEHA, 1969.
[I-130] L. T. Fagan y D. P. Smith Jr., *Mathematics Review Exercises*, Ginn and Company,1940.
[I-131] D. Fomin; S. Genkin e I. Itenberg, *Mathematical Circles* (Russian Experience), American Mathematical Society, 1996.
[I-132] M. Fernández Reyes; F. Padilla Díaz; A. Santos Hernández y F. Velázquez, *Circulando por el círculo*, SINTESIS, 1991.
[I-133] H. B. Fesquet; M. E. Linskens y C. H. Repetto, *Matemática Moderna: Geometría*, *Primer Curso*, Kapelusz & CIA, 1966.
[I-134] H. B. Fesquet; M. E. Linskens y C. H. Repetto, *Matemática Moderna: Geometría*, *Segundo Curso*, Kapelusz & CIA, 1967.
[I-135] H. B. Fesquet; M. E. Linskens y C. H. Repetto, *Matemática Moderna: Geometría*, *Tercer Curso*, Kapelusz & CIA, 1968.
[I-136] E. Filloy Yagüe, *Didáctica e Historia de la Geometría Euclidiana*, Grupo Editorial Iberoamérica, 1998.
[I-137] E. Fourrey, *Curiosités Géométriques*, Librairie Vuibert, 2001.
[I-138] J. France y F. Harang, *Eléments de Trigonométrie*, Tome 1, Dunod, 1963.
[I-139] H. Freudenthal, *Las Matemáticas en la Vida Cotidiana*, McGraw-Hill, 1967.
[I-140] M. Froumenty y P. Philippe, *Cours de Géométrie, Tome I*, H. Dunod et E. Pinat, 1910.
[I-141] M. Froumenty y P. Philippe, *Cours de Géométrie, Tome II*, H. Dunod et E. Pinat, 1910.
[I-142] F. Gabriel-Marie, *Cours de Géométrie Elémentaire*, Alfred Mame et Fils, 1899.
[I-143] F. Gabriel-Marie, *Exercices de Géométrie*, Alfred Mame et Fils, 1912.
[I-144] F. Gabriel-Marie, *Questions de Géométrie*, Alfred Mame et Fils, 1918.
[I-145] F. Gabriel-Marie, *Manuel de Géométrie*, Alfred Mame et Fils, 1919.
[I-146] F. Gabriel-Marie, *Manuel de Trigonométrie*, Alfred Mame et Fils, 1919.

[I-147] D. Gans, *An Introduction to Non-Euclidean Geometry*, Academic Press Inc., 1973.
[I-148] M. García Ardura, *Problemas Gráficos y Numéricos de Geometría*, Tipografía Artística, 1960.
[I-149] D. García Bacca, Euclides*: Elementos de Geometría I-II*, UNAM, 1992.
[I-150] D. García Bacca, Euclides*: Elementos de Geometría III-V*, UNAM, 1992.
[I-151] M. Gardner, *The Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions*, Simon and Schuster, 1959.
[I-152] M. Gardner, *Ruedas, Vida y otras Diversiones Matemáticas*, Labor, 1988.
[I-153] M. Gardner, *A Gardner's Work: Training the Mind and Entertaining the Spirit*, A. K. Peters, 2001.
[I-154] P. B. Geltner y D. J. Peterson, *Geometría*, International Thomson Editores,1998.
[I-155] M. C. Gemignani, *Axiomatic Geometry*, Addison-Wesley, 1971.
[I-156] L. Gérard y B. Niewenglowski, *Cours de Géométrie Elémentaire*, G. Carré et C. Naud, 1898.
[I-157] R. Girard y P. Louquet, Géométrie*, Classe de Seconde Á, C, M y M*, Librairie Armand Colin, 1963.
[I-158] M. F. Girod, *Solutions Raisonnées des Problèmes de Géométrie*, André-Guédon, 1940.
[I-159] J. de Gigord, *Cours de Géométrie: Par une Reunión de Professeurs*, A. Mame et Fils Editeurs, 1931.
[I-160] C. Godfrey y A. W. Siddons, *A Shorter Geometry*, Cambridge University Press, 1938.
[I-161] M. O. González, *Complementos de Geometría*, Minerva Books, 1965.
[I-162] P. M. González Urbaneja, *Pitágoras "el filósofo del número"*, Serie las matemáticas y sus personajes N. 9, Nivola, 2001.
[I-163] A. Grignon, *Corrigé des Exercices et Problémes d'Álgébre*, J. De Gigord ed., 1935.
[I-164] V. Gúsiev; V. Litvinenko y A. Mordkóvich, *Prácticas para Resolver Problemas Matemáticos*, Mir, 1989.
[I-165] Ch. Hakenholz, *Nombre d'or et Mathématique*, Chalagam, 2001.
[I-166] H. S. Hall y F. H. Stevens, *A School Geometry, Prts I-IV*, Macmillan Company, 1956.
[I-167] G. B. Halsted, *Metrical Geometry*, Ginn, Heath & Co., 1881.
[I-168] G. B. Halsted, *Rational Geometry*, J. Wiley & Sons, 1904.
[I-169] W. W. Hart y W. Wells, *Modern Plane Geometry*, D. C. Heath Company, 1926.
[I-170] T. L. Heath, *The Works of Archimedes*, Dover, 1953.
[I-171] T. L. Heath, *Euclid, The Thirteen books of the Elements (Books I and II), vol. I*, Dover, 1956.
[I-172] T. L. Heath, *Euclid, The Thirteen books of the Elements (Books III-IX), vol. II*, Dover, 1956.
[I-173] T. L. Heath, *Euclid, The Thirteen books of the Elements (Books X-XIII), vol. III*, Dover, 1956.
[I-174] C. Hémery y C. Lebossé, *Géométrie Plane*, Librairie Fernand Nathan, 1947.
[I-175] C. Hémery y C. Lebossé, *Géométrie, Classe de Seconde A', C, M et M'*, Librairie Fernand Nathan, 1961.
[I-176] E. M. Hemmerling, *Geometría Elemental*, Limusa, 1990.
[I-177] J. Hernández Gómez, *Concursos de Matemáticas de la MAA: Geometría*, *La Tortuga de Aquiles* No. 8, Euler, 1996.
[I-178] R. Herz-Fischler, *A Mathematical History of the Golden Number*, Dover, 1998.
[I-179] G. Hessenberg, *Trigonometría Plana y Esférica*, Labor, 1926.
[I-180] D. Hilbert, *Foundations of Geometry*, traducción de E. J. Townsend, 2ª ed., Open Court, 1910.
[I-181] E.W. Hobson, *A Treatise on Plane and Advance Trigonometry*, Dover, 7th Edition, 1928.
[I-182] R. Honsberger, *Mathematical Morsels*, The Mathematical Association of America, 1978.
[I-183] R. Honsberger, *Mathematical Gems III*, The Mathematical Association of America, 1985.
[I-184] I. Howarth y P. Green, *Descubre los Secretos de la Mente*, Ediciones SM, 1999.
[I-185] H. E. Huntley, *The Divine Proportion*, Dover, 1970.
[I-186] G. Innocenti y F. Villanueva*, Lecciones de Trigonometría*, Limusa, 1982.
[I-187] H. R. Jacobs*, Geometry*, 2nd Edition, W. H. Freeman and Company, 1996.
[I-188] R. A. Johnson*, Modern Geometry*, Houghton Mifflin, 1929.

[I-189] D. A. Johnson; J. J. Kinsella y H. Rosenberg, *Geometry: A Dimensional Approach*, Macmillan Company, 1968.

[I-190] K. Kasahara, *Amazing Origami*, Sterling, 2002.

[I-191] L. Kasper, *There is fun in geometry*, Fortuny's Publishers, 1936.

[I-192] D. C. Kay, *College Geometry*, Holt, Rinehart y Winston, 1969.

[I-193] M. L. Keedy y Ch. W. Nelson, *Geometría: Una moderna Introducción*, C.E.C.S.A., 1968.

[I-194] L. Kelly, *Elements of Geometry*, Scott, Foresman and Company, 1972.

[I-195] R. P. Keniston y J. Tully, *Plane Geometry*, Ginn and Company, 1953.

[I-196] T. Koshy, *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, J. Wiley and Sons, 2001.

[I-197] A. N. Kostovski, *Construcciones Geométricas Mediante un Comp*ás, *Lecciones Populares de Matemáticas*, Mir, 1980.

[I-198] W. R. Krickenberger; H. R. Pearson y A. M. Welchons, *Plane Geometry*, Ginn and Company, 1961.

[I-199] A. A. Lamadrid, *Curso de Geometría Elemental*, Sociedad de Edición y de Librería Franco Americana S. A., 1924.

[I-200] F. de J. Landaverde, *Curso de Geometría*, Progreso, 1970.

[I-201] S. Lang y G. Murrow, *Geometry*, Springer-Verlag, 1997.

[I-202] J. M. Leal G., *Geometría Métrica Plana*, Universidad de los Andes, 2005.

[I-203] C. Lebossé y C. Hémery, *Arithmétique*, *Algébre et Géométrie, Classe de Quatrième des Lycées et Collèges*, Librairie Fernand Nathan, 1958.

[I-204] C. Lebossé y C. Hémery, *Algébre et Géométrie, Classe de Seconde A et B*, Librairie Fernand Nathan, 1961.

[I-205] N. J. Lennes y H. E. Slaught, *Plane Geometry with Problems and Applications*, Allyn and Bacon, 1910.

[I-206] B. Lewis, *Matemáticas Modernas: Aspectos Recreativos*, Alhambra,1983.

[I-207] H. Lewis, *Geometry: A Contemporary Course*, D. van Nostrand Company Inc., 1964.

[I-208] G. Lion, *Géométrie du Plan*, Vuibert, 2001.

[I-209] S. L. Loney, *Plane Trigonometry, Part 1*, Cambridge University Press Warehouse, 1895.

[I-210] L. H. Longley-Cook, *Work this one out*, Crest Book, Fawcett Pub., 1960.

[I-211] E. S. Loomis, *The Pythagorean Proposition*, Classics in Mathematics Education Series, National Council of Teachers of Mathematics, 1968.

[I-212] L. Lopes, *Manuel de Construction de Triangles*, QED Texte, 1996.

[I-213] V. Lucas de la Cruz, *1222 Problemas Elementales de Aritmética, Álgebra, Geometría y Trigonometría*, Anaya, 1965.

[I-214] G. Lucio; N. Martínez de la Escalera y R. San Agustín, *Un Poco de Geometría*, Vínculos Matemáticos No. 155, Facultad de Ciencias de la UNAM, 1995.

[I-215] J. P. MacCormack, *Plane Geometry*, Appleton Century Crofts Inc., 1931.

[I-216] G. Mahler, *Geometría del Plano*, Labor, 1927.

[I-217] V. S. Mallory, *New Plane Geometry*, Benj. H. Sanborn and Co., 1943.

[I-218] A. Marcé de Lépinay y Ch. Vacquant, *Eléments de Géométrie*, Masson & C. Editeurs, 1925.

[I-219] F. Mark, *Creaciones y Trucos con Palillos o Cerillas*, Altosa, 1998.

[I-220] J. L. Marques Barbosa, *Geometría Euclidiana Plana*, Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

[I-221] G. E. Martin, *The Foundations of Geometry and the Non-Euclidian Plane*, Springer, 1975.

[I-222] M. Mataix, *Cajón de Sastre Matemático*, Marcombo, Bixareu Ed., 1981.

[I-223] M. Mataix, *El Discreto Encanto de las Matemáticas*, Marcombo, Bixareu Ed., 1981.

[I-224] M. Mataix, *Divertimientos Lógicos y Matemáticos*, Marcombo, Bixareu Ed., 1982.

[I-225] M. Mataix, *Nuevos Divertimentos Matemáticos*, Marcombo, Bixareu Ed., 1982.

[I-226] M. Mataix, *Droga Matemática*, Marcombo, Bixareu Ed., 1983.

[I-227] M. Mataix, *Ocio Matemático*, Marcombo, Bixareu Ed., 1984.

[I-228] M. Mataix, *Fácil, Menos Fácil y Difícil*, Marcombo, Bixareu Ed., 1985.
[I-229] M. Mataix, *Historia de Matemáticas y Algunos Problemas*, Marcombo, Bixareu Ed., 1986.
[I-230] M. Mataix, *Problemas para no Dormir, Marcombo*, Bixareu Ed., 1987.
[I-231] M. Mataix, *En Busca de la Solución*, Marcombo, Bixareu Ed., 1989.
[I-232] M. Mataix, *La Manzana de la Discordia*, Marcombo, Bixareu Ed., 1990.
[I-233] M. Mataix, *Esbozos Biográficos y Pasatiempos Matemáticos*, Marcombo, Bixareu Editores, 1993.
[I-234] M. Mataix, *Dúo Matemático*, Marcombo, Bixareu Ed., 1995.
[I-235] A. Z. Matsumura, *Uma Introdução* à *História da Geometria*, Colégio Bandeirantes, 1983.
[I-236] E. A. Maxwell, *Fallacies in Mathematics*, Cambridge University Press, 1959.
[I-237] A. B. Mayne, *The Essentials of School Geometry, Parts I- III*, Macmillan Company, 1956.
[I-238] A. B. Mayne, *The Essentials of School Geometry, Parts II - V*, Macmillan Company, 1957.
[I-239] L. E. Mehlenbacher, *Fundamentos de Matemáticas Modernas*, CECSA, 1969.
[I-240] L. S. R. Mbili, *Mathematical Challenge!*, Mathematical Digest, 1978.
[I-241] G. Milauskas; R. Rhoad y R. Whipple, *Geometry for Enjoyment and Challenge*, McDougal Littell and Company, 2000.
[I-242] J. Millar y A. Walker, *A New Course in Geometry*, Longmans, 1960.
[I-243] J. A. Mira, *Geometry Through Practical Applications*, Barnes and Noble, 1942.
[I-244] D. S. Mitrinović; J. E. Pečarić y V. Volenec, *Recent Advances in Geometric Inequalities*, Kluwer Academia Publishers, 1989.
[I-245] E. E. Moise, *Geometría Elemental Desde un Punto de Vista Avanzado*, C.E.C.S.A., 1976.
[I-246] M. Monge, *Géométrie, classe de seconde Á, C, M et M*, Librairie Classique Eugéne, 1961.
[I-247] Th. Moreux, *Pour Comprendre la Géométrie Plane*, Gaston Doin et C., 1926.
[I-248] R. Müller, *Matemágicas*, Tikal, 1996.
[I-249] T. Munro y C. M. Wilson, *Plane Geometry*, Oxford Book Company, 1959.
[I-250] A. Montú, *El Pentágono*, G. Gilli, 1999.
[I-251] B. Munari, *El Triángulo*, G. Gilli, 1999.
[I-252] B. Munari, *El Cuadrado*, G. Gilli, 1999.
[I-253] R. B. Nelsen, *Proofs Without Words I: Exercises of Visual Thinking*, Mathematical Association of America, 1997.
[I-254] R. B. Nelsen, *Proofs Without Words II: Exercises of Visual Thinking*, Mathematical Association of America, 2001.
[I-255] C. V. Newsom, *Disertaciones Matemáticas: El Alma de la Ciencia Matemática*, Diana, 1964.
[I-256] E. D. Nichols*, W. F. Palmer y J. F. Schacht, Geometría Moderna*, C.E.C.S.A., 1971.
[I-257] S. Odell, *Puzzles for Supper Brains*, F. Muller Pub., 1979.
[I-258] M. M. Ohmer, *Geometría Elemental para Maestros*, Trillas, 1976.
[I-259] F. J. Par, *Eléments de Géométrie*, Maison A. Mame and Fils, 1909.
[I-260] A. Paz Sordía, *Geometría, Primera Parte*, Minerva Books, 1965.
[I-261] Y. Perelman, *Geometría Recreativa*, versión digital gratuita en Español.
[I-262] E. Perry, *Geometry: Axiomatic developments with problem solving*, Marcel Dekker, 1992.
[I-263] J. Petersen, "Methods and Theories: for the Solution of Problems of Geometrical Constructions", en *String Figures and Other Monographs*, Chelsea Publishing Company, 1960.
[I-264] A. V. Pogorélov, *Geometría Elemental*, Mir, 1974.
[I-265] G. F. Porter; W. W. Shirk y W. G. Shute, *Plane Geometry*, American Book Company, 1960.
[I-266] A. S. Posamentier, *Making Geometry Come Alive*, Corwin Press, 2000.
[I-267] A. S. Posamentier, *Advanced Euclidian Geometry*, Key College Publishing, 2002.
[I-268] A. S. Posamentier y Ch. T. Salkind, *Challenging Problems in Geometry*, Dover, 1996.

[I-269] K. Poskitt, *Más Mortíferas Mates*, Molino, 1999.

[I-270] P. Puig Adam, *Curso de Geometría Métrica, Tomo I-Fundamentos*, Biblioteca Matemática, 1947.

[I-271] B. Recamán Santos, *Challenging Brainteasers*, Sterling, 2000.

[I-272] A. Reventós i Tarrida, *Geometría Axiomática*, Institut de Estudis Catalans, 1993.

[I-273] L. D. Rhoads y W. W. Strader, *Plane Geometry: A Modern Text*, The John C. Winston Company, 1934.

[I-274] B. Rich, *Geometría*, McGraw Hill, 1991.

[I-275] L. A. Ringenberg, *College Geometry*, John Wiley and Sons, 1968.

[I-276] F. A. J. Rivett, *The Groundwork of School Geometry*, E. Arnold & Company, 1949.

[I-277] E. R. Robbins, *Robbins's New Plane Geometry*, American Book Company, 1915.

[I-278] R. Rodríguez Vidal, *Diversiones Matemáticas*, Reverté, 1996.

[I-279] E. Romaguera i Belenguer, *Matemàtiques*, Edición del autor, 1996.

[I-280] T. G. Room, *A Background (Natural, Synthetic and Algebraic) to Geometry*, Cambridge University Press, 1967.

[I-281] S. Ryan, *Mystifying Math Puzzles*, Sterling, 1996.

[I-282] A. dos Santos Machado, *Matemática*, *Temas e Metas: Areas e Volumes*, vol. 4, Atual Editora, 1991.

[I-283] Schultze y Sevenoak, *Plane and Solid Geometry*, Macmillan Company, 1923.

[I-284] P. H. Selby, *Geometría y Trigonometría*, Limusa, 1988.

[I-285] S. Selzer, *Geometría 1*, Editorial Kapelusz, 1968.

[I-286] M. Serra, *Discovering Geometry*: An Inductive Approach, Key Curriculum Press, 1997.

[I-287] F. E. Seymour y P. J. Smith, *Plane Geometry*, Macmillan Company, 1958.

[I-288] I. F. Sharygin, *Problemas de Geometría*, Ciencia Popular, Mir, 1989.

[I-289] W. H. Sherard III, *Logic Geometry Problems*, Dale Seymour Publications, 1993.

[I-290] A. W. Siddons y K. S. Snell, *A New Geometry*, Cambridge University Press, 1938.

[I-291] W. Sierpinski, *Pythagorean Triangles*, The Scripta Mathematica Studies No. 9, Yeshiva University, 1962.

[I-292] J. Slocum, *The Tangram Book*, Sterling, 2003.

[I-293] F. Smarandache, *Problemes avec et sans... Problemes!*, SOMIPRESS, 1983.

[I-294] F. Smarandache, *Problema Compilate* şi *Resolvate de Geometrie* şi *Trigonometrie*, Chişinău 1998.

[I-295] W. B. Smith, *Introductory Modern Geometry, Part I*, Macmillan Company, 1892.

[I-296] R. R. Smith y J. F. Ulrich, *Plane Geometry*, Harcourt, Brace and World Inc., 1956.

[I-297] D. E. Smith y J. Wentworth, *Geomatría Plana y del Espacio*, Porrúa, 1995.

[I-298] A. S. Smogorzhevski, *La Regla en Construcciones Geométricas*, Lecciones Populares de Matemáticas, Mir, 1988.

[I-299] M. Souza, *Matemática Divertida e Pintoresca*, Getulio Costa, 1941.

[I-300] W. G. Spencer, *Inventional Geometry*, Williams and Norgate, 1899.

[I-301] S. Stahl, *Geometry From Euclid to Knots*, Prentice Hall, 2003.

[I-302] S. K. Stein, *Mathematics: The Man-Made Universe*, W. H. Freeman and Company, 1969.

[I-303] P. Strathern, *Pitágoras y su teorema*, Siglo XXI, 1999.

[I-304] T. Sundara Row, *Geometric Exercises in Paper Folding*, Dover, 1966.

[I-305] J. E. Thompson, *Geometría*, UTEHA, 1967.

[I-306] Ch. W. Trigg, *Mathematical Quickies*, Dover, 1985.

[I-307] P. Valette, *Geometría: Curso Superior*, Enseñanza, 1967.

[I-308] C. Vázquez Rodríguez, *Geometría Plana y del Espacio*, Biblioteca Santillana de Consulta vol. 4, Santillana S. A., 1984.

[I-309] G. Velasco Sotomayor, *Tratado de Geometría*, Limusa, 1983.

[I-310] N. Vilenkin, *¿De cuantas formas?*, Mir, 1972.

[l-311] R. Vincent, *Nombre d'or et Créativité*, Chalagam, 2001.
[l-312] E. Wagner, *Construções Geométricas*, Sociedade Brasileira de Matemática, 2000.
[l-313] D. Wells, *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry*, Penguin, 1991.
[l-314] D. Wells, *The Penguin Book of Curious and Interesting Puzzles*, Penguin, 1992.
[l-315] D. Wells, *You are a Mathematician*, J. Wiley & Sons, 1995.
[l-316] J. Wentworth y D. E. Smith, *Elementos de Algebra*, Porrúa, 1972.
[l-317] M. Wiscamb Hutchinson, *Geometría: Un Enfoque Intuitivo*, Trillas, 1976.
[l-318] C. R. Wylie jr., *Fundamentos de Geometría*, Troquel, 1968.
[l-319] P. Yiu, *Notes in Euclidian Geometry*, notas disponibles en internet, 1998.

Artículos

[a-1] N. Altshiller Court, *On two intersecting spheres*, Amer. Math. Monthly 40 (1933), 265-269.
[a-1] N. Altshiller Court, *A bibliographical note*, Scripta Math. 17 (1951), 153-154.
[a-1] A. R. Amir-Moéz, *Folding a square into odd numbers of subsquares*, School Sci. Math. 68 (1968), 377-379.
[a-1] A R. Amir-Moéz y J.D. Hamilton, *Hippocrates*, J. Recreational Math. 7, No. 2 (1974), 105-107.
[a-1] M. Baker, *A collection of formulae for the area of a plane triangle*, Ann. of Math.1 (1885), 134-138.
[a-1] M. Baker, *A collection of formulae for the area of a plane triangle*, Ann. of Math.2 (1885), 11-18.
[a-1] A. Bager, *Some inequalities for the medians of a triangle*, Publications de la Faculté d'Electrotechnique de l'Université à Belgrade, série Mathématiques et Physique 338-352 (1971), 37-40.
[a-1] L. Bankoff, *Are the twin circles of Archimedes really twins?*, Math. Magazine 47 (1974), 214-218.
[a-1] L. Bankoff, *A mere coincidence*, College Math. J. 23 (1992), 106.
[a-1] J. Barnes, *Right triangle relationship*, Readers Reflections, Math. Teacher 78, January (1985), 12.
[a-1] M. Bates, *Serendipity on the area of a triangle*, Math. Teacher 72, April (1979), 273-275.
[a-1] D. Beran, *SSA and the Steiner-Lehmus theorem*, Math. Teacher 85, May (1992), 381-383.
[a-1] D. Block, *Note on Professor Gloden's triangle*, Scripta Math. 16 (1950), 213-214.
[a-1] D. Block, *Addition to Dr. Court's note*, Scripta Math. 17 (1951), 153-154.
[a-1] B. Bold, *A geometric proof of a number of trigonometric theorems*, Math. Teacher 45, January (1952), 43-44.
[a-1] M. Bona, *Coloring Space*, Math. Spectrum 20, No. 3 (1987-88), 71-73.
[a-1] O. Bottema, *Het problem van de verloren schat*, Verscheidenheden, Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, Groningen, 1978.
[a-1] J. T. F. Briggs, *Almost congruent triangles with integral sides*, Math. Teacher 70, March (1977), 253-257.
[a-1] A. Brown, *The relation between the distances of a point from three vertices of a regular polygon*, Proc. Edinburgh Math. Soc. 27 (1908-09), 70-75.
[a-1] Ch. Brumfiei, *A generalization of Vux triangles*, Math. Teacher 65, February (1972), 171-174.
[a-1] E. W. Brune, *Größtes Quadrat im Dreiecke*, J. Reine Angew. Math 15 (1836), 365-366.
[a-1] D. A. Buhl, *Kissing pennies and eating pi*, Math. Teacher 94, April (2001), 254-256.
[a-1] V. Bunge y C. Bunge, *La distancia al horizonte*, ¿Cómo ves? No. 28 (2001), 22-25.
[a-1] J. Catlow, *Solution to Problem No. 18.5*, Math. Spectrum 19, No. 1 (1986-87), 31.
[a-1] C. Celestino, *Reader Reflections*, Math. Teacher 88, January (1995), 78.
[a-1] K. Y. Chen, *Graphic solution of* = + , Math. Teacher 66, May (1973), 455-458.
[a-1] F. Cheney, *Vux triangles*, Math. Teacher 63, May (1970), 407-410.
[a-1] F. Chorlton, *A generalization of Steiner-Lehmus theorem*, Note 69.28, Math. Gazette 69, No. 449 (1985), 215-216.
[a-1] R. J. Clarke, *Some triangle identities*, Math. Gazette 70, No. 453 (1986), 211-214.
[a-1] R. J. Clarke, *Triangles, surds and Pell's equation*, Math. Gazette 83, No. 497 (1999), 221-225.

[a-1] I. Cook, *The Euclidean algorithm and Fibonacci*, Note 76.6, Math. Gazette 74 No .467 (1990), 47-48.

[a-1] S. N. Collings, *When are triangles congruent?*, Note 3261, Math. Gazette 54, No. 388 (1970), 152-153.

[a-1] H. T. Croft, *Incidence incidents*, Eureka 30 (1967), 22-26.

[a-1] N. Curwen, *The optimal flight bag revisited*, Note 80.21, Math. Gazette 80, No. 488 (1996), 375.

[a-1] G. Darvasi, *More notes on a neglected Pythagorean-like formula*, Note 85.63, Math. Gazette85, No. 504 (2001), 483-486.

[a-1] G. Darvasi, *Diameter of the incircle of a triangle: Problem 1*, April 1999 revisited, Readers Reflections, Math. Teacher 96, January (2003), 71-72.

[a-1] R. F. Davis, *On the quadrilateral circumscribed to two circles*, Proc. Edinburgh Math. Soc. 23 (1904-05), 13.

[a-1] D. DeMatties, *Buried treasure*, Readers Reflections, Math. Teacher 89, May (1996), 56.

[a-1] D. W. DeTemple y M. A. Fitting, *The cevian problem*, Math. Teacher 91, May (1998), 388-392.

[a-1] A. S. DiDomenico, *Reader Reflections*, Math. Teacher 87, Abril (1994), 299.

[a-1] A. S. DiDomenico, *Reader Reflections*, Math. Teacher 88, January (1995), 77.

[a-1] C. Dixon, *Geometry and the cosine rule*, Note 81.46, Math. Gazette 81, No. 492 (1997), 439-444.

[a-1] C. M. Dodge, *Bow-tie polygons a sequel to the equilic quadrilateral*, p, m, e Journal 7 (1979-84), 453-464.

[a-1] C. M. Dodge, *The squarilic quadrilateral*, p, m, e Journal 8 (1984-89), 8-28.

[a-1] A. Droz-Farny, Mathesis 1907, 152, art. 16.

[a-1] I. E. Ellis, *The diagonals of a cyclic quadrilateral*, Note 71.31, Math. Gazette 71, No. 457 (1987), 228-229.

[a-1] H. F. Fehr, *The role of insight in the learning of mathematics*, Math. Teacher 47, October (1954), 386-392.

[a-1] T. J. Fletcher, *Irrational rectangles*, Math. Spectrum 2, No. 2 (1969-70), 12-17.

[a-1] E. A. Franz y K. F. Meek, *The self-distributive property*, Math. Teacher 75, October (1982), 603-604.

[a-1] H. T. Freitag, *Relationships for radii of circles associated with the triangle*, Math. Teacher 45 (1952), 357-360.

[a-1] M. G. Gaba, Amer. Math. Monthly 47 (1940), 19-24.

[a-1] J. Garfunkel, *The equilic quadrilateral*, p, m, e Journal 7 (1979-84), 317-329.

[a-1] J. Garfunkel, *The quasi-isosceles quadrilateral*, p, m, e Journal 8 (1984-89), 151-159.

[a-1] E. R. Gentile, Notes, College Math. J. 20, No. 1 (1989), 58.

[a-1] L. Gillman, *Congruence of Triangles*, Amer. Math. Monthly 101 (1994), 780-783.

[a-1] P. Glaister, *The golden tan of mathematics*, Note 84.31, Math. Gazette 84, No. 500 (2000), 272.

[a-1] A. Gloden, *A curious triángle*, Scripta Math. 16 (1950), 212-213.

[a-1] M. Graham, *President Garfield and the Pythagorean Theorem*, Math. Teacher 69, December (1976), 686-687.

[a-1] B. Greenberg, *Transforming the law of cosines for computational purposes*, Math. Teacher 48, May (1955), 308-309.

[a-1] B. Greenberg, *Some insight into the convex quadrilateral*, Two Year College Math. J. 5, No. 3 (1974), 14-17.

[a-1] S. L Greitzer, *Trigonometric formulas via areas*, Math. Teacher 65, March (1972), 273-276.

[a-1] *Problem Gy 1489*, Köz. Mat. Lap. 47 (1973), 77.

[a-1] D. W. Hansen, *On the radio of inscribed and escribed circles of a right triangle*, Math. Teacher 72, September (1979), 462-464.

[a-1] D .W. Hansen, *On the inscribed and escribed circles of right triangles, circumscribed triangles, and the four-square, three-square problem*, Math. Teacher 96, May (2003), 358-364.

[a-1] L. M. Hall, *An unexpected maximum in a family of rectangles*, Math. Magazine 71 (1978), 285-291.

[a-1] J. Harries, *Area of a quadrilateral*, Mathematical Notes, No. 86.50, Math. Gazette 86, No. 506 (2002), 310-311.

[a-1] D. B. Hirschhorn, *Why is the SSA Triangle-Congruence Theorem not included in textbooks?*, Math. Teacher 83, May (1990), 358-361.

[a-1] D. B. Hirschhorn, Problem 5, December 1994, Reader Reflections, Math. Teacher 88, October (1995), 622.

[a-1] S. L. Ho, *Equal circles in a triangle*, Mathematical Notes No. 2962, Math. Gazette 45, No. 353 (1961), 221-223.

[a-1] L. Hoehn, *Some novel consequences of the midline theorem*, Math. Teacher 70, March (1977), 250-251.

[a-1] L. Hoehn, *Geometrical inequalities via bisectors*, Math. Teacher 81, February (1989), 96-99.

[a-1] L. Hoehn, *Problem posing in geometry*, Math. Teacher 84, January (1991), 10-14.

[a-1] L. Hoehn, *Pythagoras inside out*, Mathematical Notes No. 80.38, Math. Gazette 80, No. 489 (1996), 544-545.

[a-1] L. Hoehn, *Circumradius of a cyclic quadrilateral*, Note 84.02, Math. Gazette 84, No. 499 (2000), 69-70.

[a-1] L. Hoehn, *A neglected Pythagorean-like fornula*, Note 84.03, Math. Gazette 84, No. 499 (2000), 71-73.

[a-1] K. Hofstetter, *A simple construction of the golden section*, Forum Geometricorum (2002), 65-66.

[a-1] K. Hofstetter, *Another 5-step division of a segment in the golden section*, Forum Geometricorum (2004), 21-22.

[a-1] J. Hung Wei, *A further neglected mean*, Math. Teacher 70, September (1977), 487.

[a-1] N. Hungerbühler, *The triangle of medians has three fourths the area of the original triangle*, Math. Magazine 72 (1999), 142.

[a-1] S. P. Hurd, *An application of the criteria ASASA for quadrilaterals*, Math. Teacher 81, February (1988), 124-126.

[a-1] N. M. Idaikkadar, *A triangle property*, Note 3062, Math. Gazette 47, No. 360 (1963), 143-145.

[a-1] K. Iles y L. J. Wilson, *A further neglected mean*, Math. Teacher 70, January (1977), 27-28.

[a-1] P. S. Jones, *Inscribing a square in a triangle*, Mathematical Miscellanea, No. 68, Math. Teacher 46, February (1953), 107-108.

[a-1] J. A. Kalman, *Two inequalities for a triangle*, Math. Gazette 47, No. 361 (1963), 224-225.

[a-1] D. Kay y S. Yeshurun, *An improvement on SSA congruence for geometry and trigonometry*, Math. Teacher 76, May (1983), 347, 364-367.

[a-1] E. Kent, Problem 29.8, Math. Spectrum 30 (1997-98), 23.

[a-1] M. S. Klamkin, Problem 17, Readers Reflections, Math. Teacher 92, September (1999), 525.

[a-1] M. S. Klamkin, *Simultaneous triangle inequalities*, Math. Magazine 60 (1987), 236-237.

[a-1] Y. Kobayashi, *Proof without words*, Note 85.59, Math. Gazette 85, No. 504 (2001), 479.

[a-1] N. J. Kuenzi; J. O. Oman y R. W. Prielipp, *Some additional results involving congruence of triangles*, Math. Teacher 66, Abril (1973), 282-283.

[a-1] G. Lasters, *The distributive law in geometry*, Math. Spectrum 18, No. 2 (1985-86), 41.

[a-1] G. Lasters, *An algebra of points*, Math. Spectrum 21, No. 2 (1988-89), 44-45.

[a-1] H. S. Lieberman, *Solution to Problem*, No. 729, p, m, e Journal 9 (1989-92), 267-268.

[a-1] G. S. Lieske, *Right triangles II*, Readers Reflections, Math. Teacher 78, October (1985), 498-499.

[a-1] V. Linis y F. G. B. Maskell, *Problem 14*, Crux Math. 1-2 (1975-76), 7, 28.

[a-1] A. Lipp, *The angle of a star*, Math. Teacher 93, No. 6, September (2000), 512-516.

[a-1] J. H. Littlewood, *Cyclic quadrilaterals*, Math. Spectrum 25, No.1 (1992-93), 10-11.

[a-1] H. B. Litwiller y R. D. Duncan, *SSA: When does it yield triangle congruence?*, Math. Teacher 74, February (1981), 106-108.

[a-1] C. T. Long, *On the radii of the inscribed and escribed circles of right triangles- A second look*, College Math. J. 14 (1983), 382-389.

[a-1] C. T. Long, *On pigeons and problems*, Math. Teacher 81, January (1988), 28-30, 64.

[a-1] N. J. Lord, *Isosceles subdivisions of triangles*, Note 66.16, Math. Gazette 66, No. 436 (1982), 136-137.

[a-1] N. J. Lord, *Modern proofs of an ancient Egyptian approximation*, Note 74.22, Math. Gazette 74, No. 468 (1990), 156-157.

[a-1] N. J. Lord, *A striking property of the (2,3,4) triangle*, Math. Gazette 82, No. 493 (1998), 93-94.

[a-1] D. Machale, *What does "mean" mean?*, Math. Gazette 74, No. 469 (1990), 239-240.

[a-1] J. S. Mackay, *Formulae connected with the radii of the incircle and the excircles of a triangle I*, Proc. Edinburgh Math. Soc. 12 (1893-94), 86-102.

[a-1] J. S. Mackay, *Properties connected with the angular bisector of a triángle*, Proc. Edinburgh Math. Soc. 13 (1894-95), 37-103.

[a-1] J. S. Mackay, *Formulae connected with the radii of the incircle and the excircles of a triangle II*, Proc. Edinburgh Math. Soc. 13 (1894-95), 103-104.

[a-1] E. Maor, *A mathematician's repertoire of means*, Math. Teacher 70, January (1977), 20-25.

[a-1] E. Maor, *A unification of two famous theorems from classical geometry*, Math. Teacher 72, May (1979), 363-367.

[a-1] R. G. Mathew, *An area property of right-angled triangle*, Note No. 79.57, Math. Gazette 79, No. 486 (1995), 571-572.

[a-1] D. Mavlo, *Beauty is truth: geometric inequalities*, Math. Gazette 84, No.501 (2000), 423-432.

[a-1] A. J. G. May, *Pythagorean numbers*, Note 188, Math. Gazette 53, No.384 (1969), 158-159.

[a-1] McAlister, Mathesis 6 (1886), 21.

[a-1] D. M. Milošević, *Some inequalities for the triangle*, El. Math. 42 (1987), 122-132.

[a-1] R. F. Muirhead, *The dissection of any two triangles into mutually similar pairs of triangles*, Proc. Edinburgh Math. Soc. 18 (1899-2000), 5-10.

[a-1] B. Naraine, *If Pythagoras had a geoboard...*, Math. Teacher 86, February (1993), 137-139.

[a-1] N. Tan y M. S. Klamkin, Problem 14, Crux Math. 7 (1981), 307.

[a-1] W. R. S. North, *Classroom Note No. 231*, Math. Gazette 54, No.390 (1970), 377.

[a-1] J. A. Nyberg, *Escribed circles*, Math. Teacher 40 (1947), 68-70.

[a-1] H. Okumura, *A characterization of parallelograms*, Mathematical Notes, No. 72.17, Math. Gazette 72, No.460 (1988), 117-118.

[a-1] H. Okumura, *Two similar triangles*, Mathematical Notes No. 79.56, Math. Gazette 79, No. 486 (1995), 569-571.

[a-1] P. N. Oliver, *Pierre Varignon and the parallelogram theorem*, Math. Teacher 94, Abril (2001), 316-319.

[a-1] P. G. Pantelidakis, *Two geometric tidbits,* Reader Reflections, Math. Teacher 88, Abril (1995), 266.

[a-1] C. F. Parry, *Steiner-Lehmus and the automedian triángle*, Math. Gazette 75, No. 472 (1991), 151-154.

[a-1] R. G. Pawley, *5-con triangles*, Math. Teacher 60, May (1967), 438-443.

[a-1] M. Piff, *Dear Editor, Math. Spectrum 18*, No .2 (1985-86), 91.

[a-1] K. Pinter, *Proof without words: The area of a right triangle*, Math. Magazine 71, No. 4 (1998), 314.

[a-1] H. E. Price, *The three-chord lemma*, Reader Reflections, Math. Teacher 87, December (1994), 743.

[a-1] R. W. Prielipp, *Are triangles that have the same area and the same perimeter congruent?*, Math. Teacher 67, February (1974), 157-159.

[a-1] M. Puppi, *Una costruzione geometrica e la sua algebra*, Archimede 3 (2002), 150-159.

[a-1] E. R. Ranucci, *Aspects of combinatorial geometry*, School Sci. Math. 70 (1970), 338-344.

[a-1] E. R. Ranucci, *Isosceles*, Math. Teacher 69, April (1976), 289-294.

[a-1] D. R. Rao, Problem No. 3275, School Sci. Math.70 (1970), 850.

[a-1] L. Raphael, *The shoemaker's knife*, Math. Teacher 66, Abril (1973), 319-323.

[a-1] B. Reid, *Nearly nice right triangles*, Math. Teacher 82, April (1989), 296-298.

[a-1] J. F. Rigby, *Equilateral triangles and the golden ratio*, Math. Gazette 72, No. 459 (1988), 27-30.

[a-1] D. Roaf, *Lines and points*, Math. Spectrum 19, No.2 (1986-87), 52-54.

[a-1] J. V. Roberti, *More related geometric theorems*, Math. Teacher 75, October (1982), 564-566.

[a-1] J. V. Roberti, *Nice angle formulas*, Reader Reflections, Math. Teacher 78, October (1985), 500.

[a-1] J. Roshental, *The converse of the Pythagorean theorem*, Math. Teacher 87, September (1994), 692-693.

[a-1] A. Rothbart y B. Paulsell, *Pythagorean triples: A new, easy-to-derive formula with some geometric applications*, Math. Teacher 67, March (1974), 215-218.

[a-1] P. N. Ruane, *The curious rectangles of Rollett and Rees*, Math. Gazette 85, No. 503 (2001), 208-225.

[a-1] A. J. Samide y A. M. Warfield, *A mean solution to an old circle standard*, Math. Teacher 89, May (1996), 411-413.

[a-1] K. R. S. Sastry, *Self-median triangles*, Math. Spectrum 22, No. 2 (1989-90), 58-60.

[a-1] K. R. S. Sastry, *Self-altitude or golden triangles*, Math. Spectrum 22, No. 3 (1989-90), 88-90.

[a-1] A. Schild, *Geometry of the means*, Math. Teacher 67, March (1974), 262-263.

[a-1] A. Seidenberg, *Did Euclid's Elements, Book I, develop geometry axiomatically?*, Arch. History Exact Sciences 14 (1975), 263-295.

[a-1] I. F. Sharygin, *The ins and outs of circles*, Quantum, November-December (1997), 38-40.

[a-1] J. H. Shyers, *Reflective paths to minimum-distance solutions*, Math. Teacher 79**,** March (1986), 174-177, 203.

[a-1] A. G. Sillitto, *Angle-biserctor theorems, using Sine and Cosine rule*, Math. Gazette 47, No. 359 (1963), 59-60.

[a-1] A. Skidell, *The harmonic mean: a nomograph, and some problems*, Math. Teacher 70, January (1977), 30-34.

[a-1] L. M. Smiley, *Geometry of subtraction formulas*, Math. Magazine 72 (1999), 366.

[a-1] E. P. Smith, *Some puzzlers for thinkers*, Enrichment Mathematics for Grades, 211-220.

[a-1] L. W. Smith, *A dialogue on the triangles*, Math. Teacher 57, April (1964), 233-234.

[a-1] V. P. Soltan y S. I. Mejdman, *Toždestva i neravenstva v treugol'nike*, Kišinev, 1982.

[a-1] G. Spitler, *Congruence extended: A setting for activity in geometry*, Math. Teacher 69, January (1976), 18-20.

[a-1] J. Staib, *The Cardiologist's Theorem, Math*. Teacher 70, January (1977), 36-39.

[a-1] J. Staib, *The Cardiologist-rediagnosed*, Math. Teacher 70, September (1977), 487-488.

[a-1] R. Steinberg, *Three point collinearity*, Amer. Math. Monthly 51 (1944), 169-171.

[a-1] W. Stegemoller, *Investigating the trinity symbol*, Math. Teacher 93, No. 6, September (2000), 446.

[a-1] J. Stephenson, *Right triangles III*, Readers Reflections, Math. Teacher79, Abril (1986), 272-273.

[a-1] D. W. Stover, *Auxiliary lines and ratios*, Math. Teacher 60, February (1967), 109-114.

[a-1] A. Struyk, *Quasi-right triangles*, Math. Teacher 47, February (1954), 116-118.

[a-1] R. Tancrede, Reader Reflections, Math. Teacher 85, May (1992), 330, 333.

[a-1] J. Tanton, *Proof without words: Equilateral triangle*, Math. Magazine 74 (2001), 313.

[a-1] V. Thébault, *Recrational geometry, Recreational Mathematics*, Scripta Math. 18 (1952), 151-161.

[a-1] L. C. Tien, *Constant-sum figures*, Math. Intelligencer (2001), 15-16.

[a-1] Ch. Toumasis, *When is a quadrilateral a parallelogram?*, Math. Teacher 87, March (1994), 208-211.

[a-1] Ch. W. Trigg, *Five rectangles that form a square*, J. Recreational Math. 3 (1970), 56-57.

[a-1] Z. Usiskin, *Six nontrivial equivalent problems*, Math. Teacher 61, March (1968), 388-390.

[a-1] I. VanderBurgh y S. D'Alessio, *Chasing imaginary triangles*, Crux Math. with Math. Mayhem 31 (2005), 453-456.

[a-1] H. E. Vaughan, *An illustration of the use of vector methods in geometry*, Math. Teacher 58, December (1965), 696-701.

[a-1] W. M. Waters Jr., *Notes on the partial converses of a familiar theorem*, Math. Teacher 70, May (1977), 458-460.

[a-1] W. M. Waters Jr., *An other unique characteristic of the 3-4-5 right triangle*, J. Recreational Math. 14, No. 4 (1981-82), 271-273.

[a-1] R. F. Wheeler, *A fallacy from elementary geometry*, Math. Gazette 47, No. 359 (1963), 156-157.

[a-1] A. Weiner, *President Garfield's configuration*, Math. Teacher 75, October (1982), 567-570.

[a-1] J. E. Wetzel, *Rectangles in rectangles*, Math. Magazine 73 (2000), 204-211.

[a-1] J. E. Wetzel, *Squares in triangles*, Math. Gazette 86, No. 505 (2002), 28-34.

[a-1] W. W. Willson, *In defence of* senÐ + senÐ*B* + senÐ*C* = 4coscoscos, Note No. 3297, Math. Gazette 55, No. 391 (1971), 68-70.

[a-1] W. W. Willson, *A generalization of a property of the 4, 5, 6 triangle*, Note No. 60.9, Math. Gazette 60, No. 412 (1976), 130-131.

[a-1] M. Wiscamb, *A geometric introduction to mathematical induction*, Math. Teacher 63, May (1970), 402-404.

[a-1] L. G .Woodby, *How far can you see?*, Enrichment Mathematics for Grades, 269-272.

[a-1] P. Yiu, *Squares erected on the sides of a triangle*, notas en intenet www.sparknotes.com

[a-1] F. Yuefeng, Some new and short proofs, Reader Reflections, Math. Teacher 89, May (1996), 441-442.

Otros

[o-1] Calendario Matemático de la Societat de Educació Matemática de la Comunitat Valenciana “Al-Khwarizmi”, 2001-2002.

[o-2] Geometric Patterns, The Pepin Press, Agile Rabbit Editions, 2000.

Páginas de Internet

(Nota: Algunas de estas páginas pudieron haber cambiado o cerrado)

[i-1] www.eduplace.com/math/brain

[i-2] www.aimsedu.org

[i-3] www.ies.co.jp

[i-4] www.cut-the-knot.com/Generalization/points.html

[i-5] www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/parallel-postulate.html

[i-6] www.coolmath4kids.com/triangle.html

[i-7] www.math.fau.edu/yiu/Geometry.html

[i-8] forumgeom.fau.edu

[i-9] www.jimloy.com/geometry/congrue0.htm

[i-10] www.math.nmsu.edu/breakingaway/Lessons/congrutriangles1/congrutriangles1.htm1

[i-11] www.ies.co.jp/math/java/geo/rottrib/rottrib.htm1

[i-12] www.studyworksonline.com

[i-13] www.sparknotes.com

[i-14] www.math.fau.edu/yiu/Geometry.html

[i-15] www.1000problems.com

[i-16] es.geocities.com/yakovperelman4/geometriarecreativa/index.html

SIMBOLOGÍA

$\Leftrightarrow$	si y solo si
$\varnothing$	conjunto vacío
N	números naturales
R	números reales
$\cong$	congruencia
$\sim$	semejanza
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que pasa por los puntos A y B
$\overrightarrow{AB}$	semirrecta de vértice A que pasa por el punto B
$\overleftarrow{AB}$	semirrecta opuesta a la semirrecta $\overrightarrow{AB}$
AB	segmento con puntos extremos A y B
$\|AB\|$	longitud del segmento AB
$Hs(O)$	haz de semirrectas de vértice O
$\angle AOB$	ángulo de vértice O y lados $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$
$int(\angle AOB)$	interior del ángulo $\angle AOB$
$ext(\angle AOB)$	exterior del ángulo $\angle AOB$
$m(\angle AOB)$	medida del ángulo$\angle AOB$
(l,m)	ángulos formado por las rectas l y m
ΔABC	triángulo de vértices A, B y C
a, b y c	longitudes de los lados de un triángulo
$\Delta(a,b,c)$	triángulo cuyos lados tienen longitud a, b y c
$int(\Delta ABC)$	interior del triángulo ΔABC
$ext(\Delta ABC)$	exterior del triángulo ΔABC
$l \parallel m$	la recta l es paralela a la recta m
$l \perp m$	la recta l es perpendicular a la recta m
(A,l,B)	la recta l está entre los puntos A y B
$\overrightarrow{OA} \parallel \overrightarrow{OB}$	la semirrecta $\overrightarrow{OA}$ es paralela a la semirrecta $\overrightarrow{OB}$
$d(A,B)$	distancia entre los puntos A y B
$d(A,l)$	distancia entre el punto A y la recta l
$d(l,m)$	distancia entre las rectas paralelas l y m
$are(\Delta ABC)$	área del triángulo ΔABC
$per(\Delta ABC)$	perímetro del triángulo ΔABC
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C y D
a, b, c y d	longitudes de los lados de un cuadrilátero
e y f	longitudes de las diagonales de un cuadrilátero
$\square\,(a,b,c,d)$	cuadrilátero cuyos lados tienen longitud a, b, c y d
$are(\square ABCD)$	área del cuadrilátero $\square ABCD$
$per(\square ABCD)$	perímetro del cuadrilátero $\square ABCD$
$s = \dfrac{a+b+c}{2}$	perímetro del triángulo ΔABC

$$s_a = \frac{b+c-a}{2} = s - a,\ s_b = \frac{a+c-b}{2} = s - b \text{ y } s_c = \frac{a+b-c}{2} = s - b$$

M_a, M_b y M_c	puntos medios de los lados del triángulo ΔABC

H_a, H_b y H_c	pies de las alturas del triángulo ΔABC
B_a, B_b y B_c	pies de las bisectrices del triángulo ΔABC
E_a, E_b y E_c	pies de las bisectrices externas del triángulo ΔABC
t_a, t_b y t_c	mediatrices del triángulo ΔABC
m_a, m_b y m_c	medianas del triángulo ΔABC
h_a, h_b y h_c	alturas del triángulo ΔABC
b_a, b_b y b_c	bisectrices del triángulo ΔABC
e_a, e_b y e_c	bisectrices exteriores del triángulo ΔABC
O	circuncentro del triángulo ΔABC
I	incentro del triángulo ΔABC
I_a, I_b y I_c	excentros del triángulo ΔABC
H	ortocentro del triángulo ΔABC
G	centro de gravedad del triángulo ΔABC
$\overset{\frown}{AB}$	arco determinado por la cuerda AB
$m(\overset{\frown}{AB})$	medida del arco $\overset{\frown}{AB}$
$l(\overset{\frown}{AB})$	longitud del arco $\overset{\frown}{AB}$
R	círcunradio del triángulo ΔABC
r	inradio del triángulo ΔABC
r_a, r_b y r_c	exradios del triángulo ΔABC
$\mathsf{C}(O,r)$	círculo de centro O y radio r
$int(\mathsf{C}(O,r))$	interior del círculo $\mathsf{C}(O,r)$
$ext(\mathsf{C}(O,r))$	exterior del círculo $\mathsf{C}(O,r)$
$\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$	número áureo
$\phi' = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$	

ÍNDICE ANALÍTICO

AVISO LEGAL

UNA INTRODUCCIÓN
A LA GEOMETRÍA EUCLIDIANA DEL PLANO
de **Salvador García Ferreira**

fue publicado por la Escuela Nacional de Estudios Superiores, Unidad Morelia.

La edición electrónica de un ejemplar (24.2 MB)
fue preparada por el Área Editorial de la ENES, Unidad Morelia.

La coordinación editorial estuvo a cargo de Cecilia López Ridaura,
Jorge Andrés Trinidad González, Itzel Álvarez García y Raúl Casamadrid.
Formación: Carlos Villaseñor.
Diseño de portada: Coppelia Cerda.

Primera edición electrónica en formato PDF: 19 de octubre de 2018.

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS SUPERIORES, Unidad Morelia
Antigua Carretera a Pátzcuaro 8701, Col. Ex Hacienda de San José de la Huerta,
C. P. 58190, Morelia, Michoacán.

ISBN: 978-607-30-1013-9.

La presente publicación contó con dictámenes de expertos externos
de acuerdo con las normas editoriales de la ENES Morelia, UNAM.

Esta edición fue realizada gracias al apoyo del programa
UNAM-DGAPA-PAPIME PE112116

Hecho en México