

Análisis de sistemas y señales

con cómputo avanzado

Gloria Mata Hernández
Víctor M. Sánchez Esquivel
Juan M. Gómez González



DGAPA, UNAM
PAPIME 101909

Ediciones Digitales RL100414
FACULTAD DE INGENIERÍA

Análisis de sistemas y señales con cómputo avanzado

Gloria Mata Hernández
Víctor M. Sánchez Esquivel
Juan M. Gómez González



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Dr. Enrique Graue Wiechers
Rector

Dr. Leonardo Lomelí Vanegas
Secretario General

Dr. Carlos Arámburo de la Hoz
Director General de Asuntos del Personal Académico

Dra. Claudia Cristina Mendoza Rosales
Directora de Desarrollo Académico



Dirección General de Asuntos
del Personal Académico

Programa de Ediciones Electrónicas de libros PAPIIT, PAPIME e INFOCAB

Esta edición electrónica recibió el apoyo de la DGAPA en el marco de la Convocatoria Extraordinaria 2014 para la Edición electrónica de libros PAPIIT, PAPIME e INFOCAB. Proyecto RL301414.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Análisis de sistemas y señales con cómputo avanzado

Gloria Mata Hernández
Víctor M. Sánchez Esquivel
Juan M. Gómez González

DGAPA-PAPIME.
UNAM

Edición electrónica: 2017 versión 1.0
Desarrollo: Diego Herrera Pastrana / Córima Books S.A. de C.V.
Diseño de portada: Diego Herrera Pastrana

Córima Books S.A. de C.V.
Guanajuato 194-5, Colonia Roma, México, D.F.

D.R. © UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
Ciudad Universitaria. Delegación Coyoacán
C.P. 04510, México, Distrito Federal

Hecho en México
©2017

ISBN Edición Electrónica: 978-607-02-8978-1

Esta edición electrónica fue auspiciada por la Dirección General de Asuntos del Personal Académico, mediante el programa de ediciones electrónicas de libros.

Esta publicación no puede ser reproducida, en su totalidad ni en partes, ni registrada o transmitida por un sistema de recuperación de información, o por ningún otro medio, sea mecánico, fotoquímico, electrónico, magnético, electro-óptico, impresión o fotocopia sin el permiso previo, por escrito, del autor.

Para la óptima visualización de este libro electrónico, se recomienda leer en un dispositivo mayor a 7".

Recomendamos los siguientes programas según la plataforma:

- iBooks para iPad, iPod, iPhone y Mac (iOS/OSX)
- Calibre para ordenador (Windows/Linux)

Nota sobre los lectores de libros electrónicos: Esta publicación empleó lenguaje Math ML para su programación, una tecnología parcialmente adaptada para libros electrónicos, por lo que puede presentar diferencias mínimas de visualización dependiendo del lector y la plataforma que se emplee. En caso de encontrar problemas para visualizar correctamente una ecuación, se sugiere agrandar el tamaño de letra de manera que los símbolos faltantes se carguen correctamente.

Prólogo

Múltiples áreas de la ingeniería y de otras áreas del conocimiento como la electrónica, las telecomunicaciones, la computación, la ingeniería eléctrica, el control, el procesamiento de imágenes, la medicina y hasta el entretenimiento, entre otras, requieren obligatoriamente del estudio formal de las señales y los sistemas. Aun cuando la naturaleza física de las señales y sistemas que surgen en las diversas disciplinas puede ser diferente, todas tienen características básicas comunes, de ahí la importancia fundamental de esta asignatura en las carreras de Ingeniería y su indiscutible impacto en el ámbito profesional.

Es por ello que para las carreras de Ingeniería se tiene una asignatura dedicada a estudiar los fundamentos del Análisis de Sistemas y Señales, ya que constituye la columna vertebral para el conocimiento de diversos conceptos y metodologías pues relaciona contenidos de las ciencias básicas, las ciencias de la ingeniería y los de ingeniería aplicada.

El análisis y procesamiento de señales y sistemas involucran técnicas y procedimientos tanto en el dominio de tiempo continuo y discreto, como en el dominio de la frecuencia. Estos temas abordados en la forma tradicional, suelen ser densos, abrumadores, tediosos y laboriosos para el alumno, dado que están basados en una fuerte dosis de conceptos de análisis matemático y de física, ambiente que prevalece en un curso convencional y que no favorece a que el estudiante atienda con efectividad la continuidad en los temas y por tanto pierda su interés en la asignatura.

Este libro de texto enfocado a la asignatura de Señales y Sistemas es una segunda edición. La primera se realizó en formato impreso, con el apoyo de la Dirección General de Asuntos del Personal Académico a través del Proyecto PAPIME 191066. Esta nueva edición se ha realizado con la misma estructura de la primera, aunque ahora en un formato electrónico, el cual tiene la posibilidad de estudiarse en dispositivos móviles y en los diversos exploradores de la Web.

En este libro se estudian y analizan modelos matemáticos sencillos que el estudiante puede comprender e interpretar como una aproximación al comportamiento de los sistemas y señales reales presentes en su entorno cotidiano.

El enfoque que hemos dado en este libro de texto es el de vincular de forma estratégica la teoría y la simulación a través del uso del programa de cómputo `MATLAB`, de manera que el alumno pueda ejercitar eficazmente la teoría a través de simulaciones permitiéndole lograr un aprendizaje efectivo y de calidad, no sólo en los conocimientos de la propia asignatura, sino en las habilidades y capacidades adquiridas a través del manejo de esta herramienta de gran potencia para la simulación, el cálculo, procesamiento y visualización gráfica.

La herramienta de software matemático utilizada, `MATLAB` (abreviatura de `MAT`rix `LAB`oratory), ofrece un en-

torno de desarrollo integrado con lenguaje de programación propio para el manejo matemático y de visualización gráfica, siendo además una aplicación de uso muy difundido, muy poderosa y de fácil programación, de manera que este texto está diseñado para que los estudiantes puedan entender de manera gradual su empleo en la medida que van avanzando en el estudio de los temas que se estudian.

La experiencia de los participantes de este proyecto en el uso de herramientas de cómputo avanzado, ha demostrado que se logra en los alumnos un mejor desempeño, aprovechamiento y entendimiento de los temas de la asignatura cuando se incorpora esta herramienta, sin descuidar los aspectos formales de la teoría.

Este libro pretende proporcionar a profesores y estudiantes los elementos fundamentales del Análisis de Sistemas y Señales, mediante un enfoque formal de la teoría y su aplicación en la solución de problemas para alcanzar dominio en el manejo de sus contenidos temáticos. Su formato, tiene como objetivo, facilitar que los estudiantes desarrollen habilidades que les permitan razonar, comprender y entender las relaciones entre la nueva información que adquieren y el conocimiento previo que poseen.

Esta nueva versión se ha actualizado y se han considerado los comentarios y sugerencias de estudiantes y profesores. Se han incluido en Apéndices archivos *.m que incluyen funciones de MATLAB, demostraciones relevantes, problemas adicionales, así como las respuestas a los mismos.

Por otro lado, la forma en que está estructurado este libro es iniciando con los conceptos fundamentales de los sistemas y las señales, su clasificación, propiedades y su manipulación, tanto en el tiempo continuo como discreto, lo que se presenta en los capítulos 1 y 2. En el capítulo 3 se estudian los métodos de análisis para determinar las respuestas de los sistemas continuos, tales como la respuesta al impulso, la respuesta de estado cero, la respuesta de entrada cero, etc., incluyendo también la integral de convolución.

En el capítulo 4 se aborda el análisis de sistemas continuos, lineales e invariantes en el tiempo mediante la Transformada de Laplace. Los sistemas discretos se estudian con detenimiento en el dominio del tiempo en el capítulo 5 y en el 6 se analizan con la transformada Z. En los capítulos 7, 8 y 9 se da espacio al análisis de Fourier para sistemas continuos y discretos, donde se analiza la serie y la transformada de Fourier.

En el último capítulo 10 se presentan los fundamentos del teorema del muestreo que es un tema importante en el análisis matemático y en el uso de tecnologías digitales, solo por mencionar algunos aspectos.

Los autores pretendemos que esta asignatura motive al estudiante de Ingeniería, que le quede claro la importancia de su estudio, que pueda comprenderla, asimilarla y que estimule su creatividad en el desarrollo de aplicaciones con los temas que se abordan.

Estamos convencidos de que la realización de los ejemplos, ejercicios y problemas que se presentan será de gran ayuda para que el estudiante se involucre en la asignatura, ya que al tener una dinámica más activa, interactiva y de investigación, le permitirá tener una formación más completa en su carrera; y sin duda percibirá la gran importancia que tienen los sistemas y señales en las diversas disciplinas de la ingeniería.

Finalmente, cabe mencionar que este libro se ha desarrollado en la División de Ingeniería Eléctrica de la Facultad de Ingeniería, dentro del marco del Programa de Ediciones Electrónicas de Libros PAPIIT, PAPIME e INFOCAB de la Dirección General de Asuntos del Personal Académico.

Los autores

Agradecimientos

En esta segunda edición electrónica se han tomado en cuenta las sugerencias y comentarios que hemos recibido de estudiantes y profesores, a quienes agradecemos profundamente que se hayan acercado a los autores con fines de mejorar el contenido.

De manera especial, agradecemos a los estudiantes Fernando Rivera Pérez, Juan Carlos Rivera Pastelín y Laura Gabriela Ramírez Sánchez, quienes han proporcionado un invaluable apoyo en la formación y revisión de la documentación electrónica.

Finalmente, esta edición electrónica con la clave RL100416 se ha podido realizar gracias al apoyo del Programa de Ediciones Electrónicas de Libros PAPIIT, PAPIME e INFOCAB de la Dirección General de Asuntos del Personal Académico. Los autores agradecemos ampliamente el apoyo recibido para la realización de este libro de texto.

Índice general

1. Sistemas	8
1.1. Introducción	9
1.2. Clasificación de sistemas	10
1.2.1. Sistemas causales y no causales	10
1.2.2. Sistemas con memoria y sin memoria	11
1.2.3. Sistemas de parámetros concentrados y parámetros distribuidos	12
1.2.4. Sistemas lineales y no lineales	13
1.2.5. Sistemas variantes e invariantes en el tiempo	16
1.3. Sistemas continuos, sistemas discretos y sistemas cuantizados	19
1.3.1. Sistemas continuos	19
1.3.2. Sistemas discretos	19
1.3.3. Sistemas cuantizados	19
Resumen	21
Problemas	22
2. Señales	25
2.1. Introducción	26
2.2. Clasificación de Señales	27
2.2.1. Señales en tiempo continuo (TC) y en tiempo discreto (TD)	27
2.2.2. Señales par e impar	32
2.2.3. Señales periódicas y no periódicas	35
2.2.4. Señales determinísticas y aleatorias	37
2.2.5. Señales de energía y de potencia	38
2.3. Transformaciones de señales en TC y en TD	42
2.3.1. Transformación de la señal en amplitud	42
2.3.2. Transformación de la variable independiente t y n	42
2.3.3. Reflexión o inversión en el tiempo	43
2.3.4. Desplazamiento en el tiempo	46
2.3.5. Escalamiento de la variable independiente t y n	48
2.4. Señal exponencial compleja y sinusoidal en TC	54
2.4.1. Señal exponencial real	54
2.4.2. Señal exponencial compleja	55
2.4.3. Periodicidad de la exponencial compleja en TC	58
2.4.4. Señal Sinusoidal	58

2.5. Señal exponencial compleja y sinusoidal en TD	60
2.5.1. Señal exponencial real	60
2.5.2. Señal exponencial compleja	62
2.5.3. Señal Sinusoidal	64
2.5.4. Diferencias fundamentales de las señales exponenciales complejas en TC y TD	66
2.6. Funciones singulares en tiempo continuo	69
2.6.1. Función Impulso unitario	69
2.6.2. Escalón Unitario	71
2.6.3. Rampa	72
2.6.4. Señal Sinc	74
2.6.5. Pulso unitario	78
2.6.6. Triángulo unitario	79
2.7. Propiedades del impulso unitario	80
2.8. Aproximaciones a la función impulso	83
2.9. Funciones Singulares en tiempo discreto	86
2.9.1. Muestra unitaria o Impulso unitario	86
2.9.2. Secuencia escalón unitario	87
2.9.3. Secuencia rampa	87
Resumen	90
Problemas	91
3. Representación de Sistemas en Tiempo Continuo	98
3.1. Introducción	99
3.2. Representación general de un sistema	100
3.3. Respuesta de entrada cero, de estado cero y respuesta total	102
3.4. Respuesta transitoria y respuesta permanente	106
3.5. Respuesta de estado cero y respuesta al impulso	107
3.6. Respuesta de un sistema mediante la integral de convolución	127
3.7. Estabilidad	140
Resumen	142
Problemas	143
4. Análisis de sistemas mediante la Transformada de Laplace	145
4.1. Introducción	146
4.2. Transformada de Laplace	147
4.3. Propiedades de la Transformada de Laplace	148
4.4. Función de transferencia	150
4.5. Construcción directa de la función de transferencia	152
4.6. Patrón de polos y ceros	154
4.7. Respuesta de un sistema mediante la función de transferencia	158
4.8. Estabilidad	162
Resumen	167
Problemas	168
5. Representación de Sistemas en Tiempo discreto	170
5.1. Introducción	171
5.2. Ecuaciones en Diferencias	172
5.3. La función unitaria y la secuencia unitaria	176
5.4. La respuesta al impulso o función unitaria	180

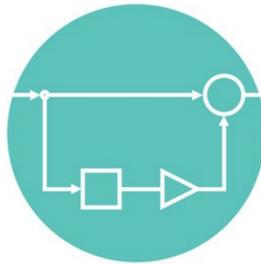
5.5. Ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes	188
5.6. Estabilidad	204
Resumen	206
Problemas	207
6. La Transformada Z	215
6.1. Introducción	216
6.2. Propiedades de la transformada z	219
6.3. Transformada z inversa	229
6.4. Ecuaciones en diferencias	236
Resumen	247
Problemas	248
7. La Serie y la Transformada de Fourier en Tiempo Continuo	256
7.1. Introducción	257
7.2. Función propia del sistema	259
7.3. Serie de Fourier de señales periódicas continuas	266
7.4. Propiedades de la Serie de Fourier	270
7.5. Transformada de Fourier	284
7.6. Propiedades de la Transformada de Fourier	287
7.7. Transformada de Fourier aplicada a Sistemas Lineales e Invariantes en el Tiempo	300
Resumen	306
Problemas	307
8. La Serie y la Transformada de Fourier en Tiempo Discreto	310
8.1. Introducción	311
8.2. Representación de señales discretas periódicas	312
8.3. Propiedades de la serie discreta de Fourier	320
8.4. Transformada de Fourier en tiempo discreto	321
8.5. Propiedades de la transformada de Fourier en tiempo discreto	323
8.6. La Transformada Discreta de Fourier DFT	324
Resumen	329
Problemas	330
9. La transformada rápida de Fourier	332
9.1. Introducción	333
9.2. Transformada Discreta de Fourier (TDF)	334
9.3. La transformada discreta de Fourier inversa (TDFI)	343
9.4. Aplicaciones	346
9.5. Respuesta en frecuencia	352
Resumen	356
Problemas	357
10. Muestreo	360
10.1. Introducción	361
10.2. Teorema de Muestreo	362
Resumen	373
Apéndices	374

Apéndice A Funciones *.m	375
Soluciones a los problemas	378
Soluciones Capítulo 1	378
Soluciones Capítulo 2	379
Soluciones Capítulo 3	391
Soluciones Capítulo 4	393
Soluciones Capítulo 5	411
Soluciones Capítulo 6	413
Soluciones Capítulo 7	415
Soluciones Capítulo 8	418
Deducción de la respuesta impulso unitario para sistemas en tiempo continuo	427

Bibliografía **429**

1

Sistemas



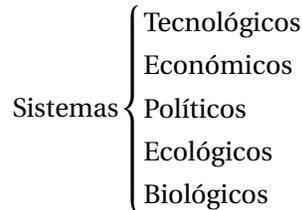
1.1

Introducción

Es imposible llevar a cabo el estudio, análisis y síntesis de los sistemas sin el conocimiento de las características y propiedades de las señales y viceversa. Un sistema requiere de las señales como entradas y se encuentran como salidas del mismo, es por esto que un sistema puede considerarse como una relación de transformación de señales.

La necesidad del ser humano por conocer su medio ambiente, lo ha llevado primeramente a tratar de estudiarlo y entenderlo. Es así que para explicar muchos de sus fenómenos, ha visto la conveniencia de definir a los sistemas, ordenarlos, seleccionarlos y clasificarlos. En términos generales, se puede definir un sistema como *un conjunto de elementos que interactúan entre sí*, en el que se observan acciones o transformaciones particulares.

De acuerdo con lo anterior, se puede separar a los sistemas en naturales y los hechos por el hombre, lo que permite entender la relaciones que tienen los elementos que los componen ya sean éstas lógicas o matemáticas. No obstante, es necesario contar con una clasificación detallada, agruparlos por su naturaleza y así establecer una primera agrupación general de sistemas. Entre otros, se tienen:



Sistemas Tecnológicos. Son aquellos sistemas que el hombre ha creado para adaptarse y transformar al medio ambiente en el que vive como pueden ser automóviles, maquinarias, refinerías, etc.

Sistemas Económicos. Son los instrumentos y mecanismos que el hombre usa para mantener relaciones de intercambio basados en papel moneda y precios; como ejemplos podemos mencionar las economías de los países, la cotización del petróleo, tipos de cambio, etc.

Sistemas Políticos. Es la forma en que se organizan y regulan los temas públicos y la gestión del estado; para ello se tienen los poderes ejecutivo, legislativo y judicial, así como las leyes que los rigen.

Sistemas Ecológicos. Son aquellos sistemas en los que se relacionan los seres vivos con el medio ambiente en el que viven; podemos mencionar como ejemplos las relaciones que se establecen en torno de ríos, al mar o el desierto.

Sistemas Biológicos. Estos sistemas están conformados por órganos vivos que realizan determinadas funciones, como son los sistemas respiratorio y digestivo, entre otros.

El listado anterior puede ser enriquecido por una cantidad mucho más grande de sistemas, sin embargo, no es nuestra finalidad tener un listado extenso de los distintos tipos de sistemas considerando su naturaleza. Particularmente, nos interesa estudiar aquellos creados por el ser humano, conocidos como *sistemas físicos*.

1.2

Clasificación de sistemas

En la vida cotidiana se tiene relación con múltiples sistemas, la ingeniería en particular ha desarrollado una gran cantidad de técnicas que le han permitido interactuar con sistemas de muy diversos orígenes, haciéndola cada día más multidisciplinaria. Los *sistemas físicos* pueden clasificarse de muy diversas formas y criterios. Un primer criterio es su naturaleza, así, tenemos sistemas térmicos, mecánicos, eléctricos, etc. Sin embargo, para estudiarlos es mejor clasificarlos de acuerdo con las características de sus comportamientos, o mejor dicho, con los modelos matemáticos que los representan, y de esta forma, sistemas muy diversos pueden ser agrupados y analizados.

Desde el punto de vista de la ingeniería, se puede considerar a un sistema como todo proceso que lleva a cabo una transformación de las señales. En este orden de ideas, es posible afirmar que la humanidad ha creado un mundo de señales y sistemas, desde los aparatos domésticos hasta los sistemas de comunicación y de satélite, por mencionar algunos.



Figura 1.1: Representación de un sistema, con una entrada y una salida.

Un esquema general, muy usado para representar a un sistema se muestra en la figura 1.1, en la que se observa un sistema que tiene una entrada y una salida. Las entradas y salidas son señales que pueden ser continuas ($x(t), y(t)$) o discretas ($x[n], y[n]$).

En las siguientes secciones se presenta la clasificación de los sistemas.

1.2.1

Sistemas causales y no causales

Los **sistemas causales** se conocen también como *no anticipativos* o *no predictivos*. Son aquellos en los que su respuesta o salida es causa o efecto de la entrada que se aplica. Un sistema es causal si cumple con que debe cambiar primero su entrada para observar cambios en la salida, o bien, si la salida del sistema en un instante t_0 depende sólo de los valores de la entrada para $t < t_0$ entonces se dice que el sistema es causal. El sistema representado por la Ec. (1.1) es causal, dado que la salida en un cierto tiempo, es función de la entrada en un tiempo anterior.

$$y(t) = x(t - 1) \tag{1.1}$$

Si dos entradas a un sistema causal son idénticas hasta un instante t_1 , las correspondientes salidas deben ser también iguales hasta ese mismo instante, dado que el sistema no puede predecir si las entradas serán diferentes después de t_1 , es decir, si

$$x_1(t) = x_2(t) \quad \text{para } t < t_1 \quad (1.2)$$

entonces, si el sistema es causal

$$y_1(t) = y_2(t) \quad \text{para } t < t_1 \quad (1.3)$$

Los sistemas no causales o anticipativos son aquellos en los que su respuesta puede adelantarse a la entrada o anticiparse al responder, aún antes de que la entrada esté presente. La Ec. (1.4) representa a un sistema no causal.

$$y(t) = x(t + 1) \quad (1.4)$$

En muchas ocasiones interesa saber la respuesta del sistema anticipadamente por ejemplo en α segundos adelante, es decir, $y(t + \alpha)$ y para esto es necesario predecir la entrada $x(t + \alpha)$; como ejemplo se pueden mencionar los sistemas de información meteorológicos, que intentan conocer con anticipación cómo se comportará el clima, lo que ayudaría en su caso a implementar acciones de protección civil.

1.2.2

Sistemas con memoria y sin memoria

Los sistemas con memoria son aquellos cuya salida en un tiempo t_0 depende de los valores de la entrada en ese mismo tiempo y en tiempos anteriores. Se les conoce como *sistemas dinámicos*. Un ejemplo de un sistema con memoria es un capacitor, en el que la corriente eléctrica que circula a través de él es la entrada y la salida es el voltaje, la relación matemática que lo representa es

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau \quad (1.5)$$

En el modelo de la Ec. (1.5) se puede observar que el valor del voltaje en el tiempo t , depende de la capacitancia C y del comportamiento de la corriente eléctrica en el tiempo pasado hasta el tiempo t . Los sistemas sin memoria son los que su salida sólo depende de la entrada en el tiempo en el que se analizan. Se denominan *sistemas algebraicos o amnésicos*. Un ejemplo de estos sistemas es una resistencia eléctrica, si se toma como salida el voltaje que se presenta en sus extremos al aplicarle una corriente eléctrica, esto es

$$v(t) = Ri(t) \quad (1.6)$$

La Ec. (1.6) muestra que un resistor es un sistema sin memoria, puesto que el valor del voltaje de salida en el tiempo t , sólo depende de los valores de la resistencia y de la corriente en ese mismo tiempo.

1.2.3

Sistemas de parámetros concentrados y parámetros distribuidos

Los *sistemas de parámetros concentrados* son aquellos en los que sus parámetros se pueden localizar, en regiones o puntos específicos del mismo. Un circuito eléctrico, como el que se muestra en la figura 1.2, es un ejemplo de este tipo de sistemas. Dicho circuito consta de seis resistencias en serie por las que fluye una misma corriente eléctrica, i_{Total} . El voltaje de cada resistencia se puede medir en puntos específicos o regiones en el entorno de cada una de ellas. Los sistemas de este tipo se representan o modelan mediante ecuaciones diferenciales ordinarias.

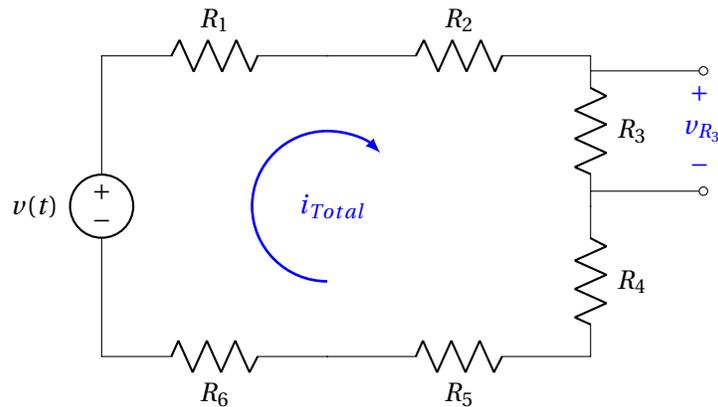


Figura 1.2: Dado que la corriente del circuito serie, es la misma en cada punto en que se mida, y los voltajes en cada resistencia se miden en puntos específicos el sistema es de parámetros concentrados.

Por el contrario, los *sistemas de parámetros distribuidos*, son aquellos en que los efectos de una entrada son diferentes en los elementos del sistema de acuerdo con su distribución espacial, es decir, que un parámetro varía en cada punto del sistema, teniendo esta variación una estrecha relación con las dimensiones físicas del sistema estudiado. El tubo de distribución de agua, que se presenta en la figura 1.3 es un ejemplo de un sistema de parámetros distribuidos. Si la tubería tiene una longitud de varias decenas de kilómetros, la presión p_1 medida a la salida de la bomba será mayor que las respectivas p_2 , p_3 y p_4 donde se cumple que

$$p_1 > p_2 > p_3 > p_4 \quad (1.7)$$

Las propiedades de la tubería tales como la rugosidad, el diámetro y distancia l , así como la instalación en el terreno hacen que cada Δl afecte al fluido disminuyendo la presión. La presión en un punto cualquiera dl estará dado por la Ec. (1.8).

$$p = p + \frac{\partial p}{\partial l} dl \quad (1.8)$$

Como se puede observar una pequeña muestra de la tubería tendrá un modelo en función de derivadas parciales siendo ésta la característica de este tipo de sistemas.

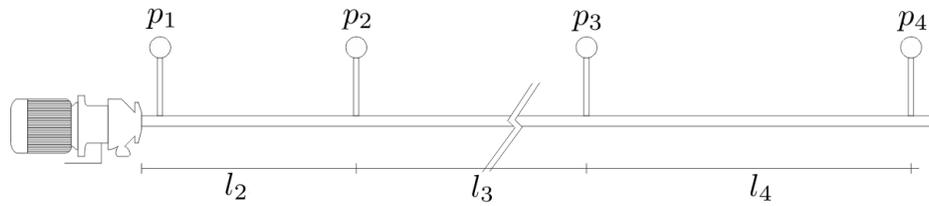


Figura 1.3: La tubería de distribución de agua es un sistema de parámetros distribuidos, ya que en cada Δl se modifica la presión del fluido.

1.2.4

Sistemas lineales y no lineales

Los sistemas lineales son aquellos que satisfacen *el principio de superposición (homogeneidad y aditividad)*. La superposición establece que la respuesta de un sistema a una suma de señales es igual a la suma de las respuestas de cada una de las señales, es decir

$$\begin{aligned}
 y_1(t) &= H\{\alpha x_a(t)\} = \alpha H\{x_a(t)\} \\
 y_2(t) &= H\{\beta x_b(t)\} = \beta H\{x_b(t)\} \\
 y_{total}(t) &= H\{\alpha x_a(t) + \beta x_b(t)\} \\
 &= \alpha H\{x_a(t)\} + \beta H\{x_b(t)\}
 \end{aligned}$$

La figura 1.4 muestra gráficamente el principio de superposición.

Las expresiones matemáticas de las gráficas que se muestran son:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= H\{e(t)\} \\
 b(t) &= H\{a(t)\} \\
 d(t) &= H\{c(t)\} \\
 e(t) &= a(t) + c(t) \\
 f(t) &= H\{a(t)\} + H\{c(t)\}
 \end{aligned}$$

El código correspondiente de MATLAB es el siguiente:

```

% Figura 1.4
a=[zeros(1,2), 1.5*ones(1,4), zeros(1,32)];
c=[zeros(1,20), -0.5*ones(1,4), zeros(1,14)];
e1=a+c;
coef=0.35;

b(1)=0;
for k=2 : 38; b(k)=a(k)-coef*b(k-1); end

```

```

d(1)=0;
for k=2 : 38; d(k)=c(k)-coef*d(k-1); end

f(1)=0;
for k=2 : 38; f(k)=e1(k)-coef*f(k-1); end

yt(1)=0;
for k=1 : 38; yt(k)=b(k)+d(k); end

subplot(3,2,1); plot(a); axis([0 40 -1 2]);
subplot(3,2,2); plot(b); axis([0 40 -1 2]);
subplot(3,2,3); plot(c); axis([0 40 -1 2]);
subplot(3,2,4); plot(d); axis([0 40 -1 2]);
subplot(3,2,5); plot(e1); axis([0 40 -1 2]);
subplot(3,2,6); plot(f); axis([0 40 -1 2]);

text(-50,6.7,'(a)')
text(3.0,6.7,'(b)')
text(-50,2.5,'(c)')
text(3.0,2.5,'(d)')
text(-50,-1.6,'(e)')
text(3.0,-1.6,'(f)')

```

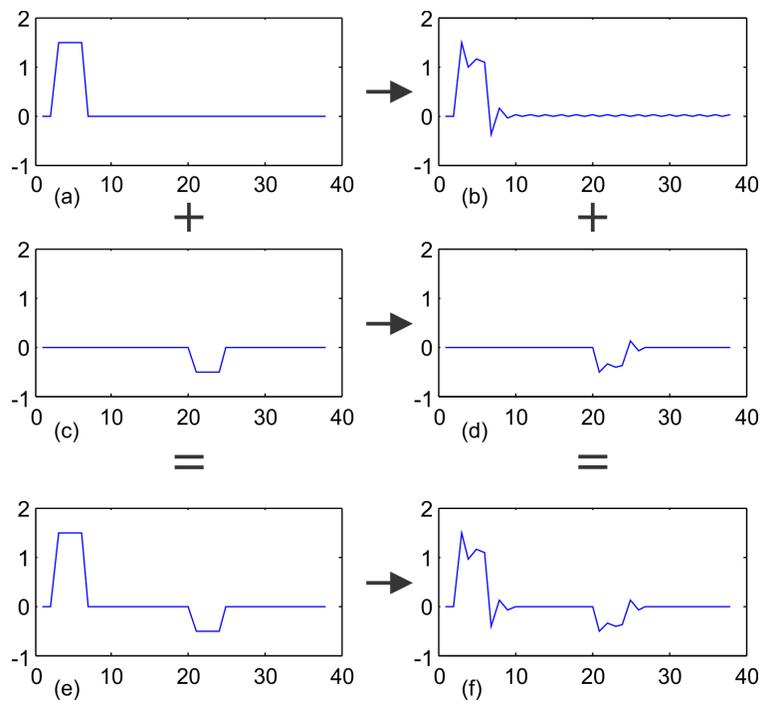


Figura 1.4: Principio de Superposición. Las señales que se muestran en las gráficas (b) y (d) son las respectivas salidas del sistema a las componentes mostradas en (a) y (c). Las señales mostradas en (e) y (f) son los respectivos resultados de $a + c$ y $b + d$.

Ejemplo 1.1

Sea el sistema eléctrico mostrado en la figura 1.5. Encuentre la ecuación que permita determinar el voltaje v_o .

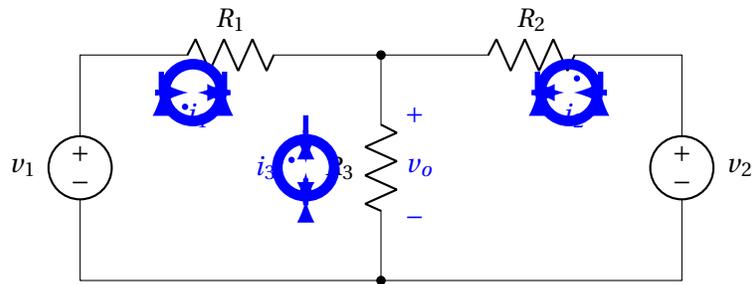


Figura 1.5: El voltaje de salida v_o es función de las fuentes independientes de voltaje v_1 y v_2 .

A partir de las leyes de Kirchhoff, se deduce la siguiente expresión que permite conocer el valor de v_o

$$v_o = \frac{R_2 R_3 v_1 + R_1 R_3 v_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \quad (1.9)$$

Aplicando el principio de superposición, el circuito eléctrico se puede “descomponer” en dos secciones, como se muestra en la figura 1.6. Se observa que en cada una de ellas se ha eliminado (poniéndola en corto circuito) una de las fuentes independientes. Cada circuito se analiza de forma tal que permita encontrar el voltaje de salida en la resistencia R_3 .

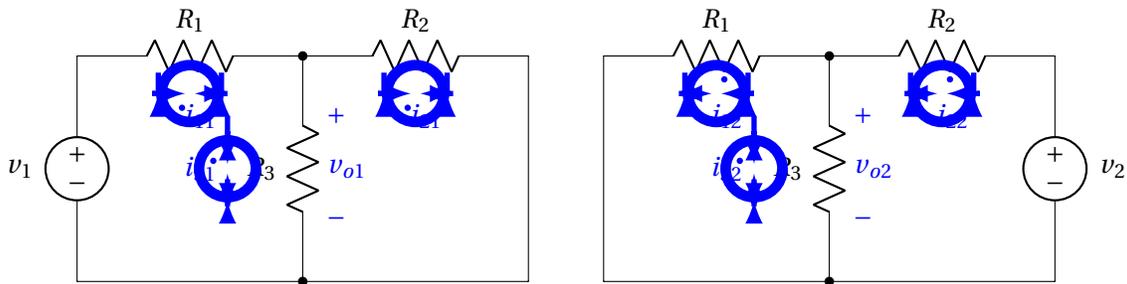


Figura 1.6: El voltaje de salida v_o se puede calcular sumando los voltajes en la resistencia R_3 debidos a cada una de las fuentes independientes de voltaje v_1 y v_2 actuando por separado.

La ecuación para calcular el voltaje de salida producido por la fuente independiente v_1 es:

$$v_{o1} = \frac{R_2 R_3 v_1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \quad (1.10)$$

Mientras que la ecuación con la que se calcula el voltaje de salida, producido por la fuente v_2 es

$$v_{o2} = \frac{R_1 R_3 v_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \quad (1.11)$$

finalmente

$$v_o = v_{o1} + v_{o2} \quad (1.12)$$

Los sistemas no lineales no satisfacen el principio de superposición. Retomando el ejemplo anterior, si se considera que el valor de la resistencia R_3 es función del voltaje en la resistencia R_1 , o sea que $R_3 = f(v_{R_1})$, el principio de superposición no se cumplirá, dado que el sistema sería no lineal.

1.2.5

Sistemas variantes e invariantes en el tiempo

Un sistema se dice que es *invariante en el tiempo*, si cuando se desplaza en el tiempo la señal de entrada, este desplazamiento ocasiona en la señal de la salida del sistema un desplazamiento idéntico en el tiempo. Esto es, si la entrada y la salida de un sistema invariante en el tiempo son $x(t)$ y $y(t)$ respectivamente; al desplazar la entrada, $x(t \pm t_0)$, la salida correspondiente es $y(t \pm t_0)$. La salida de un sistema invariante en el tiempo, no depende del tiempo en que se aplica la entrada; en tanto que para un sistema *variante en el tiempo* sí hay una dependencia del tiempo en el que se aplica la señal de entrada.

Ejemplo 1.2

Considere el circuito eléctrico de la figura 1.7. Consta de una fuente independiente de voltaje que suministra energía a una lámpara incandescente de resistencia R . Si $v_i(t) = \sin(2\pi t)$ [V], se desea calcular la corriente eléctrica a través de la lámpara, para los valores de la resistencia siguientes:

- $R = 10 \Omega$; lo que representaría que la lámpara nunca modifica sus parámetros.
- $R = 10(1 - 0.85e^{-0.15t}) \Omega$; lo que implica que el desgaste del filamento sigue tal regla.

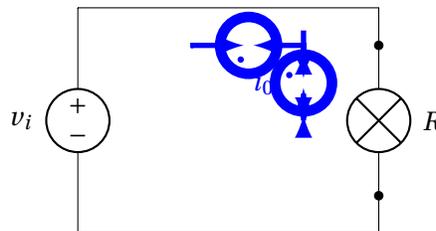


Figura 1.7: El circuito eléctrico, se considera un sistema invariante en el tiempo si sus componentes tienen un valor constante. Si sus parámetros dependen del tiempo el sistema es variante en el tiempo.

A partir de la ley de Ohm, se determina la corriente eléctrica que circula alrededor de la malla, así

$$i_0 = \frac{v_i}{R} \quad (1.13)$$

Para el primer caso, R constante, el valor de la corriente eléctrica es el mostrado en la figura 1.8, en la que se puede observar que la corriente tiene la misma forma de onda si la entrada es desplazada en el tiempo. En el segundo caso, R variable, se observa en la figura 1.9 que el valor de la corriente eléctrica depende del desplazamiento que se aplica a la entrada.

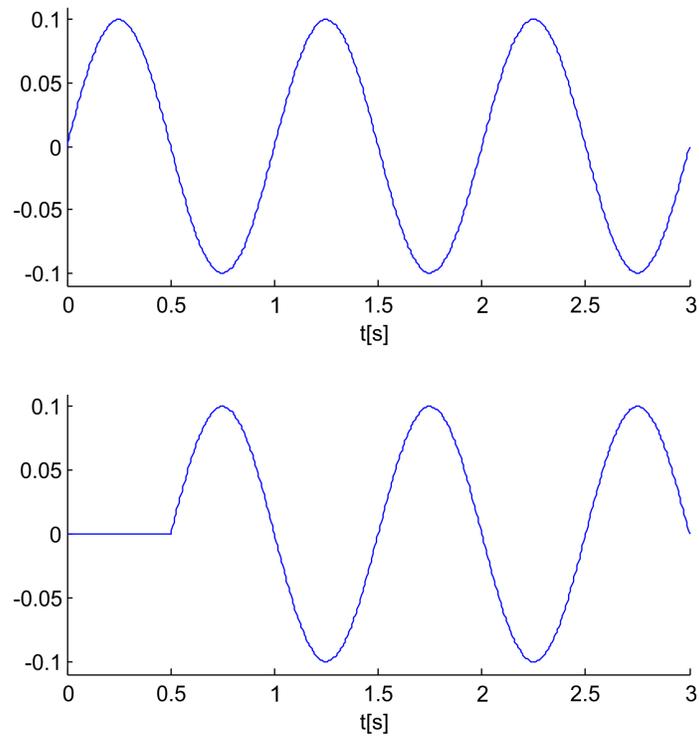


Figura 1.8: La corriente eléctrica a través de la lámpara es la misma si el voltaje aplicado v_i se desplaza 0.5 segundos. Por consiguiente, el sistema eléctrico se considera invariante en el tiempo.

```

% Figura 1.8 Sistema invariante en el tiempo
clear;
t=[0:0.005:3];
x=sin(2*pi*t);
r=10;

% funcion invariante en el tiempo
y1=x/r;
A=figure(1);
set(A,'position',[21 238 490 500]);
subplot(2,1,1);
axis([0 3 -0.11 0.11]);
hold;
plot(t,y1);
xlabel('t[s]');
text(0.7,10.6,'sistema invariante en el tiempo');
%%% calculando la funcion desplazada
x=[zeros(1,100) sin(2*pi*[0:0.005:2.5])];
y2=x/r;
subplot(2,1,2);
axis([0 3 -0.11 0.11]);
hold;
plot(t,y2);
xlabel('t[s]');

```

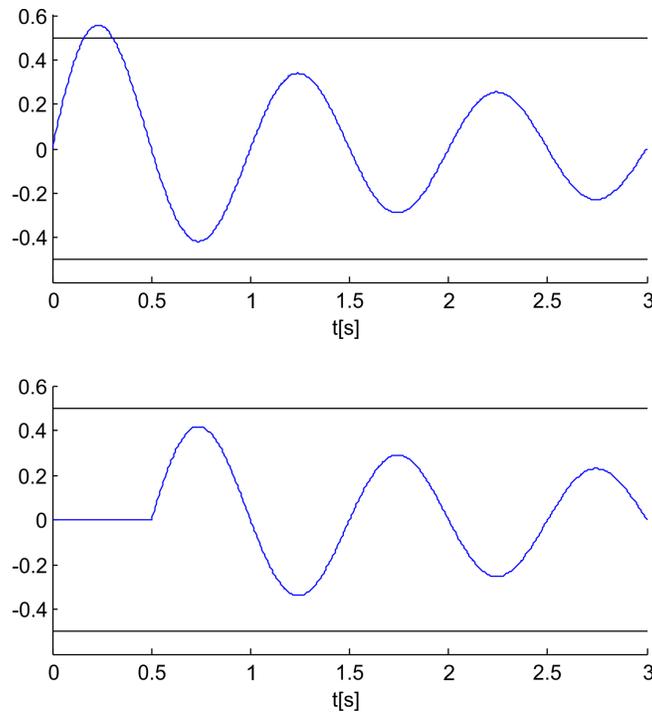


Figura 1.9: La corriente que pasa por la lámpara no es igual a la que resulta cuando el voltaje aplicado v_i se desplaza 0.5 segundos. Por consiguiente, el sistema eléctrico se considera variante en el tiempo.

```

% Figura 1.9 Funcion variante en el tiempo

t=[0:0.005:3];
x=sin(2*pi*t);
r=10*(1-0.85*exp(-t*0.15));
y3=x./r;

C=figure(3);
set(C,'position',[518 238 490 500]);
subplot(2,1,1);
axis([0 3 -0.61 0.61]);
m=line; set(m,'Xdata',[0 3],'Ydata',[0.5 0.5]);
m=line; set(m,'Xdata',[0 3],'Ydata',[-0.5 -0.5]);
hold;
plot(t,y3);
xlabel('t[s]');
text(0.7,5,'sistema variante en el tiempo');

% demostrando la varianza en el tiempo t=t-1

x=[zeros(1,100) sin(2*pi*[0:0.005:2.5])];
y4=x./r;
subplot(2,1,2);
axis([0 3 -0.61 0.61]);
m=line; set(m,'Xdata',[0 3],'Ydata',[0.5 0.5]);
m=line; set(m,'Xdata',[0 3],'Ydata',[-0.5 -0.5]);
hold;
plot(t,y4);
xlabel('t[s]');

```

1.3

Sistemas continuos, sistemas discretos y sistemas cuantizados

1.3.1

Sistemas continuos

Son aquellos sistemas en los que las señales de entrada y las de salida son continuas, es decir, tienen un valor en amplitud para todo tiempo, donde el tiempo es una variable real, como se muestra en la figura 1.10a. También se dice que este tipo de sistemas no están acotados en la amplitud y en el tiempo. Frecuentemente, son referidos como *sistemas analógicos*.

1.3.2

Sistemas discretos

Los sistemas discretos son aquellos en los que las señales de entrada y de salida, pueden tomar cualquier valor de amplitud en ciertos instantes de tiempo, es decir que no están acotados en amplitud pero sí en el tiempo, como se muestra en la figura 1.10b. Ejemplos de estos sistemas son los índices poblacionales y demográficos, la forma en que varían los precios en la bolsa de valores. Hoy en día, hay una gran cantidad de aplicaciones que basan su funcionamiento en los sistemas discretos. Vale la pena enfatizar que las matemáticas discretas permiten las soluciones en computadora de problemas en el mundo real.

1.3.3

Sistemas cuantizados

Se caracterizan por cambiar su amplitud en valores determinados en ciertos instantes de tiempo. Este tipo de sistemas se observan en los sistemas electrónicos digitales, que basan su operación en el sistema de numeración binario, dándoles un gran potencial en cuanto a las posibles aplicaciones, como ejemplos podemos mencionar a las computadoras, los relojes electrónicos, etc.

Una gráfica que muestra el tipo de señales para estos sistemas se observa en la figura 1.11.

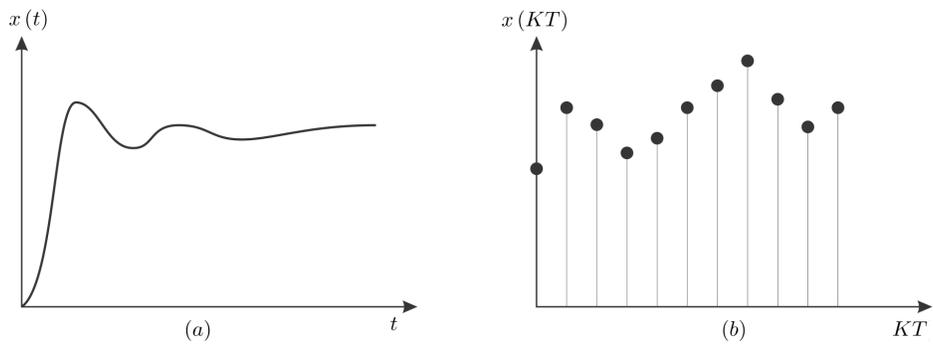


Figura 1.10: (a) Respuesta de un sistema continuo (b) Respuesta de un sistema discreto

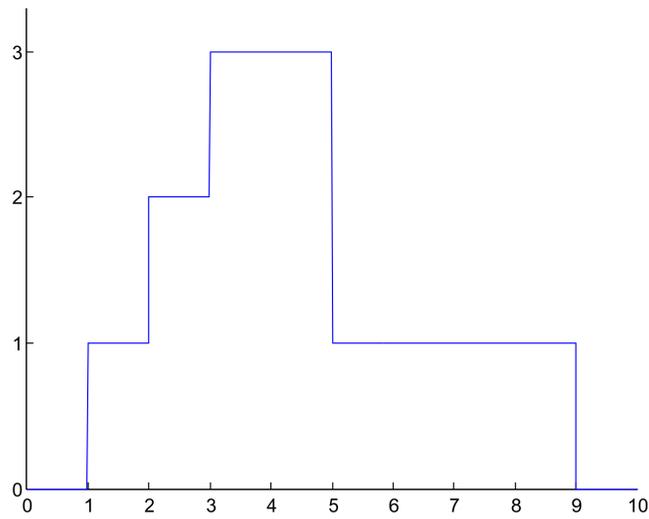


Figura 1.11: Un sistema cuantizado sólo puede procesar señales que toman amplitudes determinadas en tiempos determinados.

Resumen

En este capítulo se ha estudiado la clasificación de los sistemas físicos y en particular se ha detallado la clasificación que la ingeniería eléctrica establece para su estudio. Hay que subrayar, que la generalidad de los sistemas son no lineales y variantes en el tiempo, sin embargo, en muchas ocasiones pueden ser estudiados como sistemas lineales e invariantes en el tiempo si se toman las consideraciones pertinentes, obteniendo modelos que representan con gran aproximación al sistema analizado. El hecho de simplificar los modelos matemáticos hace que la representación del sistema correspondiente sea efectiva sólo en un intervalo de operación definido, limitando también las diversas soluciones, lo que se buscará en un gran número de aplicaciones.

En la medida que se necesite ampliar las características del modelo, también se deberán tomar en cuenta las características establecidas en cada una de las clasificaciones de los sistemas y por tanto el modelo se vuelve más complejo. Un ejemplo muy ilustrativo de esto es la resistencia eléctrica, cuyo modelo lineal es una constante que representa la oposición al paso de la corriente eléctrica. El modelo anterior, es válido en el estudio de circuitos eléctricos y electrónicos, pero no es funcional cuando en un material cerámico con las características de un superconductor, se quiere estudiar la conductividad con respecto a la temperatura del mismo; el modelo matemático de la resistencia que se opone al paso de la corriente debe contar con parámetros tales como la temperatura, haciendo al modelo no lineal.

Problemas

1.1 Aplique $x_1(t)$ y $x_2(t)$ como entrada a los sistemas representados por los modelos siguientes, determine sus respuestas y diga cuales son sistemas variantes o invariantes en el tiempo, justifique su respuesta usando MATLAB.

$$x_1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \quad x_2(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 2\pi & t \geq 0 \end{cases}$$

a) $y(t) = \sin(2\pi x(t))$

b) $y(t) = t \sin(2\pi x(t))$

c) $y(t) = 2^{x(t)}$

1.2 Diga si los sistemas representados por las siguientes expresiones son lineales o no lineales, encuentre las respuestas tomando como entrada $x_1(t)$ del problema 1.1. Use MATLAB para justificar su respuesta.

a) $y(t) = 5e^{-3x_1(t)} - 5e^{-5x_1(t)}$

b) $y(t) = 2 \sin(x_1(t)) + \cos(x_1(t))$

c) $y(t) = -5t^2 e^{-5x_1(t)}$

1.3 La figura 1.12 muestra las respuestas de tres sistemas diferentes a los que se les aplicó la misma entrada en $t = 0$ y $t = 12.5$. Indique cuales sistemas son variantes y cuales son invariantes en el tiempo.

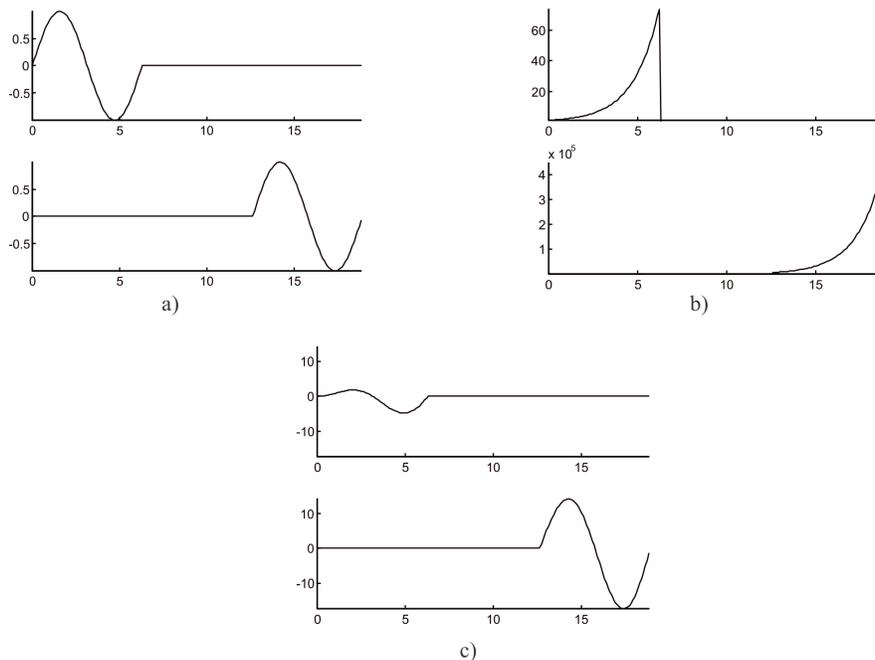


Figura 1.12: Señales de salida del problema 1.3.

1.4 Se tienen tres sistemas a los que se les ha aplicado como entrada las componentes 1 y 2 (figuras 1.13, 1.14 y 1.15). Se ha obtenido la suma de las salidas (Suma Comp. 1 + Comp. 2) y la respuesta total del sistema; a partir de las gráficas obtenidas diga si cada uno de los sistemas es lineal o no lineal.

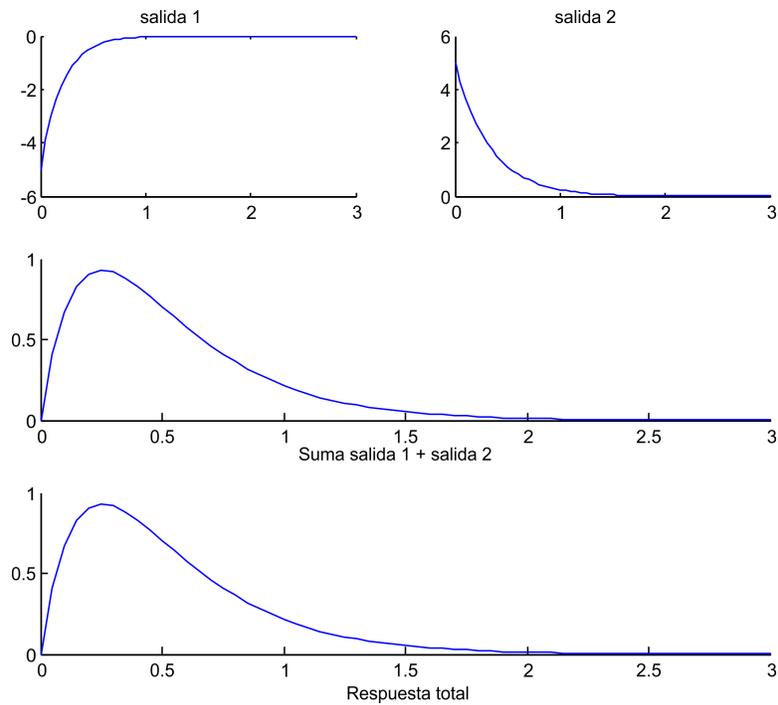


Figura 1.13: Señales del problema 1.4.

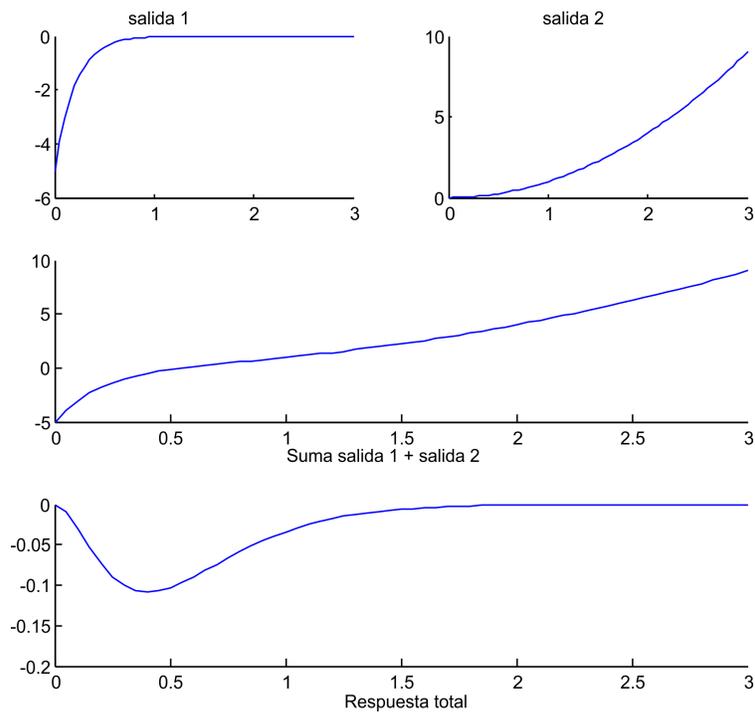


Figura 1.14: Señales del problema 1.4.

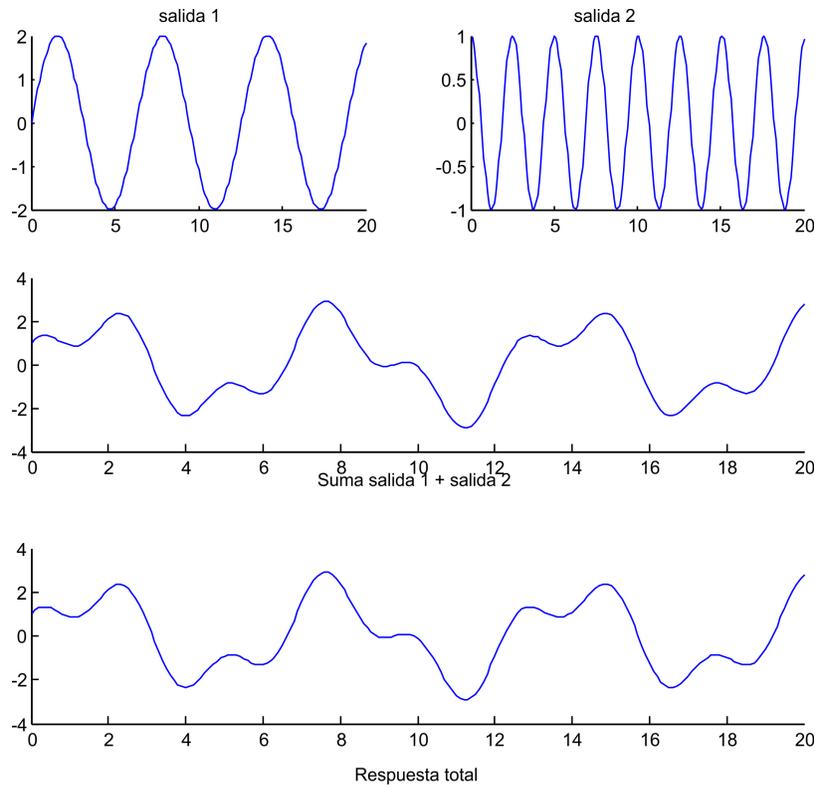


Figura 1.15: Señales del problema 1.4.

1.5 Determine si los sistemas especificados por las expresiones que relacionan la entrada con la salida, son lineales e invariantes en el tiempo.

a) $y(t) = \sin(x(t))$

b) $y(t) = x(t+1) + x(-t-1)$

c) $y(t) = x\left(\frac{1}{3}t - 1\right)$

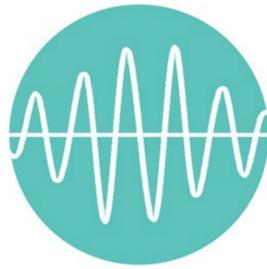
d) $y[n] = \frac{1}{7} \sum_{k=n-3}^{n+3} x[k]$

e) $y[n] = x[3n]$

f) $y[n] = x[n]x[n-2]$

2

Señales



2.1

Introducción

Las señales son manifestaciones de la amplia diversidad de fenómenos físicos que están presentes en nuestro entorno, en la naturaleza, en el planeta. Las señales también se producen de procesos y actividades realizados por el ser humano, en cualquier caso, contienen información y de ahí su importancia, cuanto más se conozca de una señal más se conocerá acerca del comportamiento y características del propio fenómeno físico o proceso en cuestión.

El análisis de señales es de gran importancia ya que de manera directa o indirecta estamos en contacto con ellas, permitiendo la comunicación e interacción no sólo entre personas sino también entre máquinas. Se presentan en una gran variedad de disciplinas, tales como comunicaciones, aeronáutica, circuitos eléctricos, acústica, control de procesos químicos, procesamiento de voz, etc. por mencionar sólo algunas. Aunque la naturaleza física de las señales en estas áreas son muy diferentes entre sí, tienen en común características básicas.

Las señales se encuentran en todos los ámbitos tanto cotidianos como profesionales y de investigación, ya que el mundo actual vive y depende de ellas. Por mencionar algunos ejemplos sencillos de señales, se tiene la corriente y voltaje eléctricos, la voz, la temperatura ambiental, la presión atmosférica, las de radio frecuencia, los datos obtenidos de censos poblacionales, las cifras generadas de variaciones del mercado bursátil, la salida de un codificador incremental, las biomédicas, las imágenes, etc.

Cuando las señales tienen un comportamiento que sigue un patrón o alguna tendencia, es posible representarlas a través de modelos matemáticos, los cuales son sólo aproximaciones a la tendencia de la señal. Sin embargo, proporcionan mucha información que permite ir teniendo un mayor conocimiento sobre ella.

En el estudio de la señales, la variable de interés es la propia señal, como la temperatura, el voltaje, la intensidad luminosa, etc. y por lo general la variable independiente es el tiempo, aunque dependiendo del tipo de señal puede no ser el tiempo, sino otra variable como el desplazamiento, el ángulo, la posición, etc. Todas ellas proporcionan información acerca del fenómeno físico que las genera. En este texto se adopta la variable independiente como el tiempo.

2.2

Clasificación de Señales

Las señales describen una gran diversidad de fenómenos físicos y su representación también es variada, ya sea en forma de datos, en forma gráfica o mediante una representación matemáticamente en función de una o más variables independientes. En cualquier caso, una clasificación general de señales es la siguiente:

- En Tiempo continuo y en Tiempo discreto
- Par e Impar
- Periódicas y No Periódicas
- Determinísticas y Aleatorias
- De Energía y de Potencia

2.2.1

Señales en tiempo continuo (TC) y en tiempo discreto (TD)

Una *señal es en tiempo continuo* si está definida para una sucesión continua de valores de la variable independiente, en donde se asume que ésta es continua. Ejemplos de estas señales se muestran en la figura 2.1. La amplitud de las señales en tiempo continuo pueden adquirir valores continuos con el tiempo y tienen una notación de la forma $x(t)$. Ejemplos de estas señales son las manifestaciones de fenómenos físicos o variables físicas como la radiación solar, la humedad en el ambiente, la velocidad del viento, las cuales pueden ser adquiridas a través de sensores y transductores.

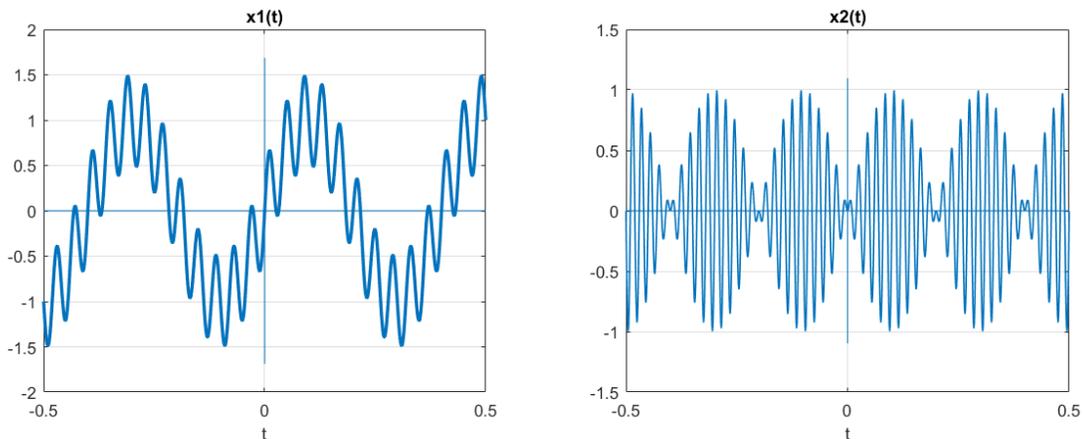


Figura 2.1: Ejemplo de señales en tiempo continuo

```

%Figura 2.1 Ejemplo de Senales en tiempo continuo
t=-.5:.001:.5;
w1=5; w2=10; w3=50;w4=100;
x1=sin(w1*pi*t);
x2=.5*sin(w3*pi*t);
x11=x1+x2;
subplot(121),plot(t,x11,'LineWidth',2); grid;
title('x1(t)'); xlabel('t');
line([0 0],[min(x11)-.2 max(x11)+.2] );
line([min(t) max(t)], [0 0]);
x1=sin(w1*pi*t);
x2=sin(w4*pi*t);
x12=x1.*x2;
subplot(122),plot(t,x12,'LineWidth',1); grid
title('x2(t)'); xlabel('t');
line([0 0],[min(x12)-.1 max(x12)+.1] );
line([min(t) max(t)], [0 0]);

```

Por otra parte, en las *señales en tiempo discreto* la variable independiente toma únicamente valores discretos, por lo que son continuas en amplitud y discretas en tiempo. Las señales en TD surgen de procesos propiciados por el ser humano, por ejemplo, la tendencia del crecimiento anual en una población, el comportamiento de una divisa en el mercado bursátil, aunque también es común obtener una señal discreta mediante el muestreo de una señal continua.

Las señales en tiempo discreto se denotan como $x[n]$ y de manera más específica como $x[nT_s]$, en donde T_s corresponde a un intervalo o periodo de muestreo y n representa la variable independiente de valor entero.

Las figuras 2.2a a la 2.2d, muestran diferentes señales discretas obtenidas al tomar muestras de una señal $x(t)$ seleccionando $T_s = .01s$, $T_s = .02s$, $T_s = .04s$ y $T_s = .08s$, respectivamente. Se observa que entre mayor es el periodo de muestreo T_s se va perdiendo la característica de la señal original.

Es común representar las señales de tiempo discreto con la variable independiente normalizada, esto es, se divide nT/T para tener la variable independiente en forma discreta haciendo que n sea entero y adimensional. Esto se muestra en las gráficas de la figura 2.2c y 2.2d. Así mismo, se observa que la amplitud de cada muestra puede tomar cualquier valor. Por esta razón, a las señales de tiempo discreto también se les hace referencia como secuencias de tiempo discreto, dado que están definidas sólo para valores enteros de la variable independiente.

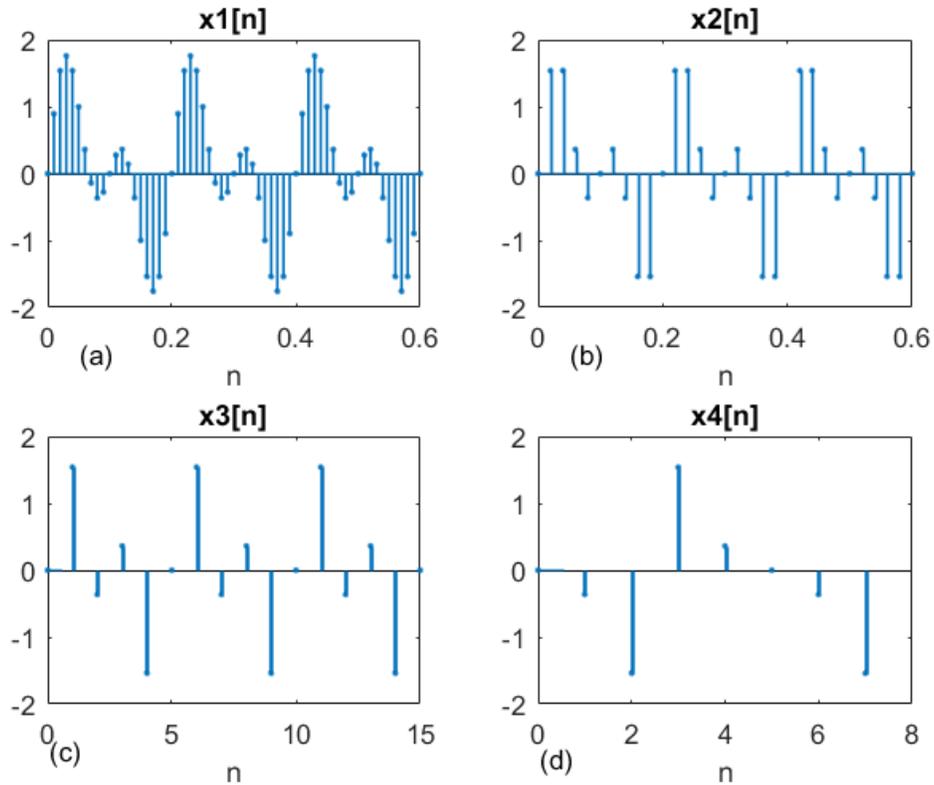


Figura 2.2: Señales en tiempo discreto con tiempos de muestreo, (a) $T_s = .01s$, (b) $T_s = .02s$, (c) $T_s = .04s$, (d) $T_s = .08s$

```

%Figura 2.2 Senales en tiempo discreto
n1=0:.01:.6;
n2=0:.02:.6;
n3=0:.04:.6;
n4=0:.08:.6;
x11=sin(10*pi*n1);
x12=sin(10*pi*n2);
x13=sin(10*pi*n3);
x14=sin(10*pi*n4);
x21=sin(20*pi*n1);
x22=sin(20*pi*n2);
x23=sin(20*pi*n3);
x24=sin(20*pi*n4);
subplot(221),stem(n1,x11+x21,'.','LineWidth',1)
hold on
line([min(n1) max(n1)], [0 0]);
xlabel('n');title('x1[n]')
text(.05,-2.7,'(a)')

subplot(222),stem(n2,x12+x22,'.','LineWidth',1)
hold on
line([min(n2) max(n2)], [0 0]);
xlabel('n');title('x2[n]')
text(.05,-2.7,'(b)')

```

```

subplot(223),stem(n3/.04,x13+x23,'.','LineWidth',1.5)
hold on
line([min(n3) max(n3)], [0 0]);
xlabel('n');title('x3[n]')
text(.05,-2.7,'(c)')

subplot(224),stem(n4/.08,x14+x24,'.','LineWidth',1.5)
hold on
line([min(n4) max(n4)], [0 0]);
xlabel('n');title('x4[n]')
text(.05,-2.8,'(d)')

```

Otro tipo de señales en tiempo continuo que mantienen su valor en intervalos regulares, son las señales cuantizadas como la mostrada en la figura 2.3a. Este tipo de señales es la base de la conversión analógica a digital, en donde cuanto menor es el intervalo de muestreo, valor en el que se mantiene la amplitud, más tiende a la señal analógica.

Por otro lado, las *señales digitales* son cuantizadas, discretas en amplitud y continuas en tiempo, ya que su magnitud sólo toma valores discretos. Un ejemplo es el que se muestra en la figura 2.3b siendo el tipo de señales que se utilizan en todos los sistemas de cómputo y procesamiento de señales digitales.

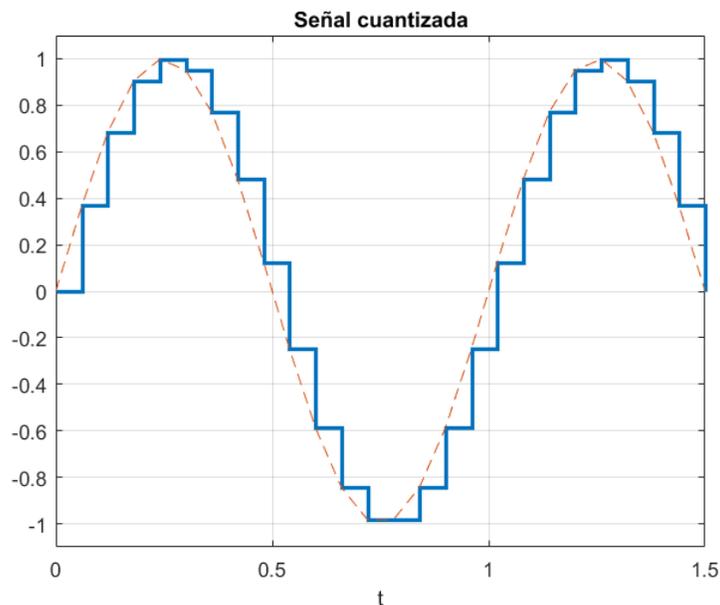


Figura 2.3: a) Representación de una señal cuantizada. Mantiene un valor en intervalos de tiempo regulares

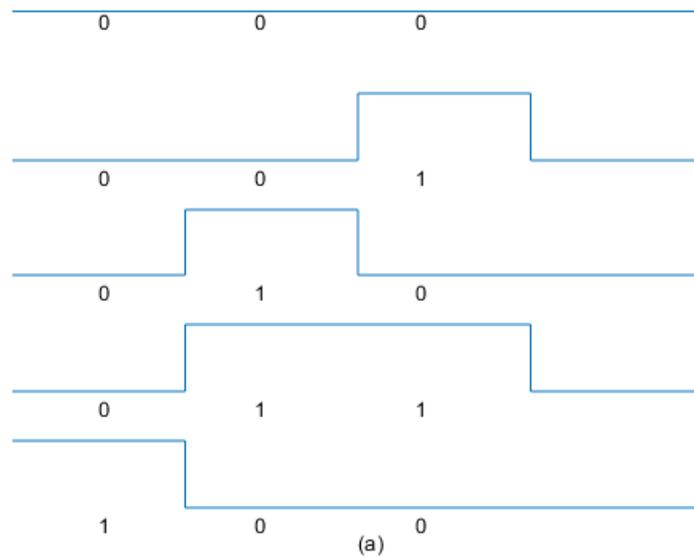


Figura 2.3: b) Señales digitales

```

%Figura 2.3a Senal cuantizada
t=0:.06:1.5;
x = sin(2*pi*t);
figure
stairs(t,x, 'LineWidth',2); grid
hold on
plot(t,x,'--'); title('Senal cuantizada')
xlabel('t')
axis([0 1.5 -1.1 1.1])

%Figura 2.3b Senal digital
n=0:4;
x1=[0 0 1 0 0];
x2=[0 1 0 0 0];
x3=[0 1 1 0 0];
x4=[1 0 0 0 0];
subplot(511); plot(n,zeros(1,length(n)))
text(.5,-.25,'0 0 0')
axis off
subplot(512); stairs(n,x1); axis off
text(.5,-.25,'0 0 1')
subplot(513); stairs(n,x2); axis off
text(.5,-.25,'0 1 0')
subplot(514); stairs(n,x3); axis off
text(.5,-.25,'0 1 1')
subplot(515); stairs(n,x4); axis off
text(.5,-.25,'1 0 0')
text(2,-.5,'(a)')

```

2.2.2

Señales par e impar

Una señal $x(t)$ o $x[n]$ es *Par* si, para toda t o para toda n es idéntica a su reflexión, inversión o transposición en el tiempo, es decir, es idéntica con respecto al eje de las ordenadas. En tiempo continuo es:

$$x(t) = x(-t) \quad (2.1)$$

En tiempo discreto debe satisfacer la condición

$$x[n] = x[-n] \quad (2.2)$$

Por otro lado, una señal es *Impar* si cumple con

$$x(t) = -x(-t) \quad (2.3)$$

en tiempo discreto corresponde a

$$x[n] = -x[-n] \quad (2.4)$$

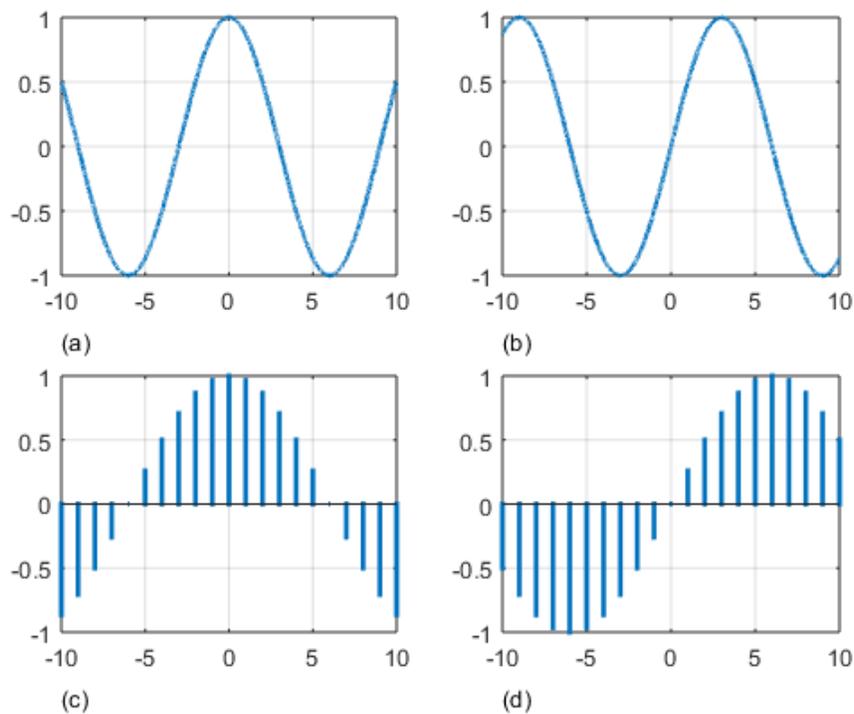


Figura 2.4: Señales Par e Impar en TC y en TD

```

%Figura 2.4 Ejemplo de senal par e impar
t=-10:.001:10;
x1=cos(pi*t./6);
x2=sin(pi*t./6);
n=-10:1:10;
x3=cos(pi*n./12);
x4=sin(pi*n./12);
subplot(221), plot(t,x1,'LineWidth',2);grid
text(-10,-1.5,'(a)')
subplot(222), plot(t,x2,'LineWidth',2);grid
text(-10,-1.5,'(b)')
subplot(223), stem(n./1,x3,'.','LineWidth',2);grid
text(-10,-1.5,'(c)')
subplot(224), stem(n./1,x4,'.','LineWidth',2);grid
text(-10,-1.5,'(d)')

```

Las señales impar por lo general cumplen con ser 0 en $t = 0$ o $n = 0$, aunque existen algunas señales impar que son discontinuas en cero. Las señales coseno y seno corresponden a señales par e impar respectivamente, mismas que se muestran en las figuras 2.4a y 2.4b para TC y en las figuras 2.4c y 2.4d para TD. Una señal es par si es simétrica con respecto al eje vertical en $t = 0$, mientras que una señal es impar si su contraparte invertida en el tiempo es idéntica e invertida en amplitud.

Cualquier señal en tiempo continuo o discreto se puede descomponer o separar en dos señales, una par y una impar, las cuales están representadas por las Ecs. (2.5) y (2.6) respectivamente. Para señales en TC.

$$Par\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)] \quad (2.5)$$

$$Impar\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)] \quad (2.6)$$

y para señales en TD como

$$Par\{x[n]\} = \frac{1}{2}[x[n] + x[-n]] \quad (2.7)$$

$$Impar\{x[n]\} = \frac{1}{2}[x[n] - x[-n]] \quad (2.8)$$

en donde la suma de ambas señales proporciona la señal original $x(t)$ o $x[n]$.

$$x(t) = x_{par}(t) + x_{impar}(t)$$

$$x[n] = x_{par}[n] + x_{impar}[n]$$

La representación de las señales en TD par, impar y su suma se muestra en la figura 2.5.

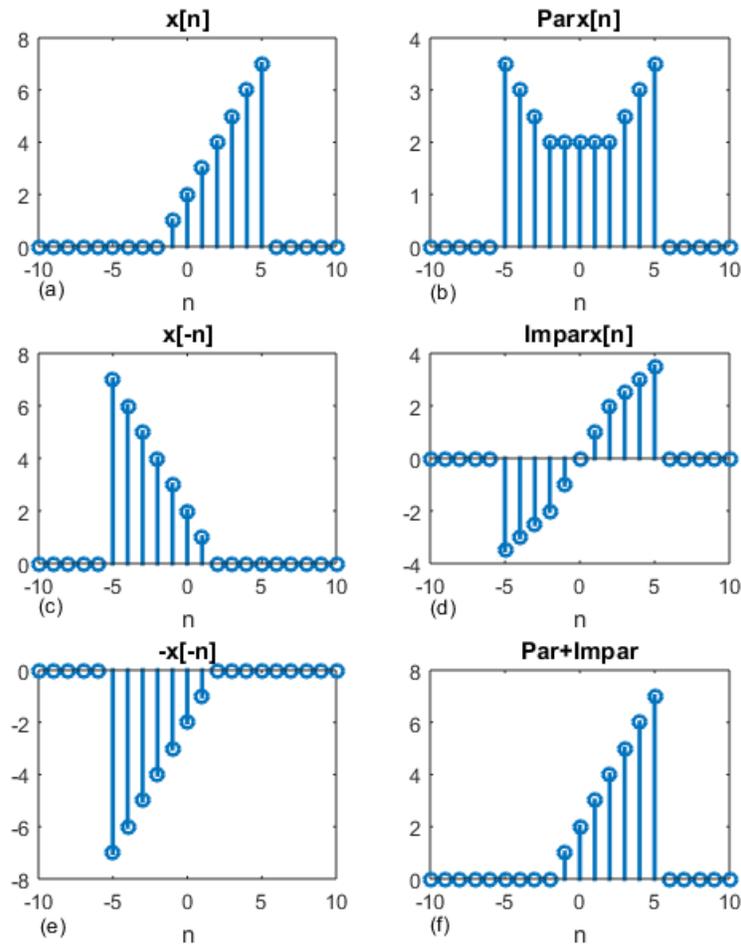


Figura 2.5: Señales en TD, Par, Impar y la suma de ambas genera la original

```

%Figura 2.5 Ejemplo de señal Par e impar en TC y la suma proporciona la original %Señal par
n=-10:10;
x=[zeros(1,8) n(11:18) zeros(1,5)];
xi=fliplr(x); %Señal invertida
Par=.5*(x+xi);
Impar=.5*(x-xi);
subplot(321), stem(n,x,'LineWidth',2)
xlabel('n'); title('x[n]'); text(-10,-1.5,'(a)')
subplot(322), stem(n,Par,'LineWidth',2)
xlabel('n'); title('Par{x[n]}'); text(-10,-1,'(b)')
subplot(323), stem(n,xi,'LineWidth',2)
xlabel('n'); title('x[-n]'); text(-10,-1.5,'(c)')
subplot(324), stem(n,Impar,'LineWidth',2)
xlabel('n'); title('Impar{x[n]}','LineWidth',2); text(-10,-5,'(d)')
subplot(325), stem(n,-xi,'LineWidth',2)
xlabel('n'); title('-x[-n]'); text(-10,-10,'(e)')
subplot(326), stem(n,Par+Impar,'LineWidth',2)
xlabel('n'); title('Par+Impar'); text(-10,-1.5,'(f)')

```

2.2.3

Señales periódicas y no periódicas

Una señal en TC es periódica si cumple, para toda t , con la condición

$$x(t) = x(t + mT) \quad (2.9)$$

donde T es un número positivo y corresponde al periodo de la señal y m es un número entero positivo o negativo. Cuando $m = 1$, T es el valor del periodo fundamental de $x(t)$ el cual define la duración, en segundos, de un ciclo completo de la señal. El recíproco del periodo es la frecuencia fundamental f y define que tan frecuentemente se repite la señal, su unidad es el hertz [Hz] o ciclos por segundo.

$$f = \frac{1}{T} \quad (2.10)$$

misma que está relacionada con la frecuencia angular ω medida en radianes por segundo mediante

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (2.11)$$

Para el caso de señales en TD, se dice que una señal $x[n]$ es periódica si para todo N entero positivo se cumple la condición

$$x[n] = x[n + mN] \quad (2.12)$$

donde N es el periodo de la señal y m es cualquier número entero positivo o negativo; de manera que cuando $m = 1$, N corresponde al periodo fundamental de $x[n]$. El cual define la duración de un ciclo completo de la señal.

La figura 2.6 muestra señales periódicas en TC y en TD. Las señales que no cumplen con las Ecs. (2.9) o (2.12) corresponden a señales aperiódicas. Un ejemplo de señales aperiódicas en TD y en TC se presenta en la figura 2.7, respectivamente.

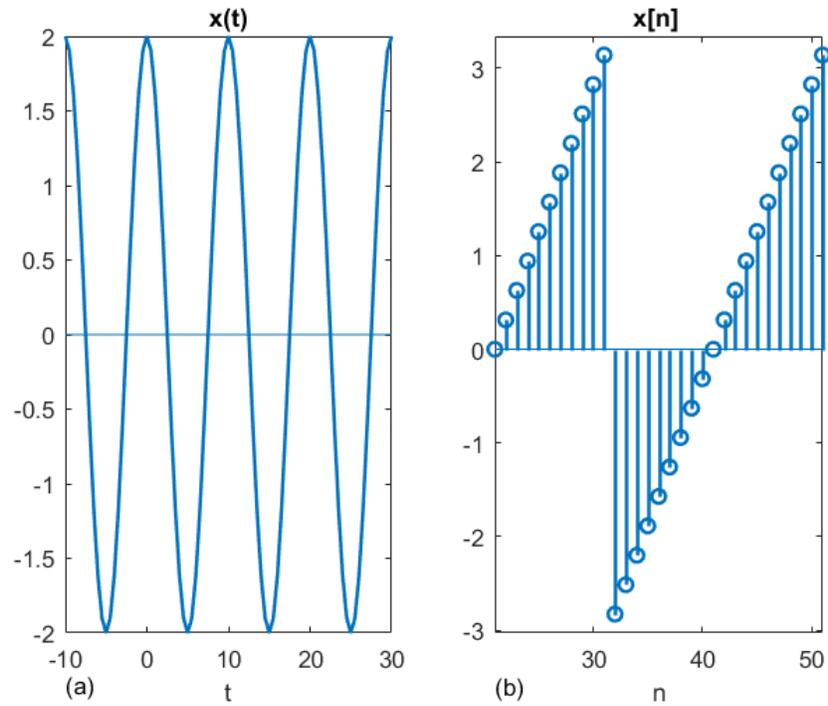


Figura 2.6: Señales periódicas en TD y en TC

```

%Figura 2.6 Ejemplo de senales periodicas en TC y TD con una exponencial
%compleja

[t,x1]=exporeal(-10:.5:30,2,1j*pi/5); %exponencial compleja
n=21:51;
x=x1;
subplot(121),plot(t,real(x),'LineWidth',1.5)
xlabel('t');title('x(t)')
hold on; line([min(t) max(t)], [0 0]); %grid;
text(-10,-2.35,'(a)')
x=angle(x1(n));
subplot(122),stem(n,x,'LineWidth',1.5)
xlabel('n');title('x[n] ')
hold on; line([min(n) max(n)], [0 0]);
axis([ min(n) max(n) min(x)-.2 max(x)+.2])
text(21,-3.6,'(b)')

```

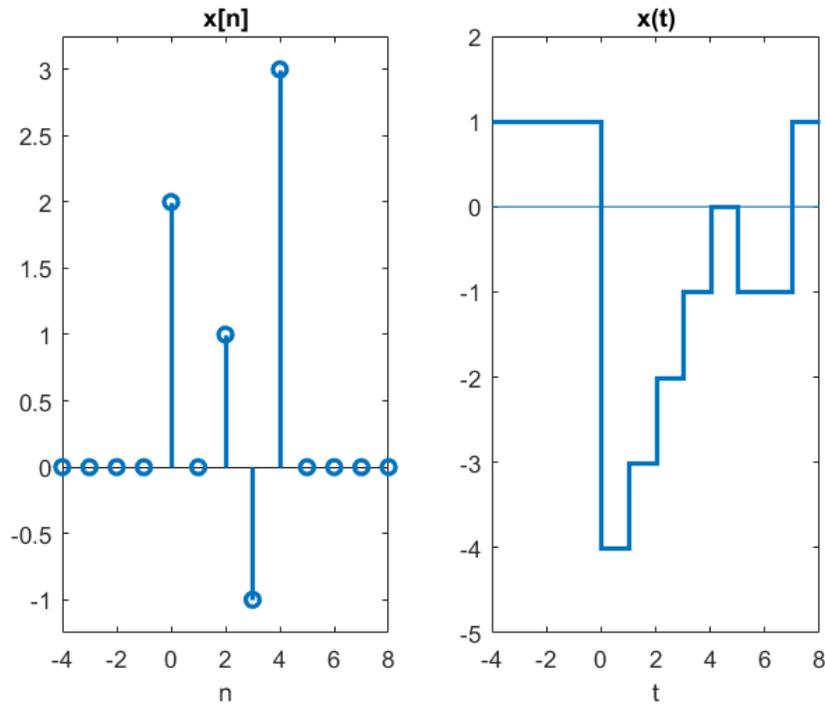


Figura 2.7: Señales aperiodicas en TC y en TD

```

%Figura 2.7 Senales aperiodicas en TC y en TD
n=-4:8;
x=[zeros(1,4) 2 0 1 -1 3 zeros(1,4)];
subplot(121),stem(n,x,'LineWidth',2)
xlabel('n'); title('x[n]');
axis([-4 8 min(x)-.25 max(x)+.25]);
%Ejemplo de senales aperiodicas en TC
t=-4:8;
x=[ones(1,4) n(1:5) -ones(1,2) ones(1,2)];
subplot(122),stairs(t,x,'LineWidth',2);
line([min(t) max(t)], [0 0] )
axis([-4 8 min(x)-1 max(x)+1]); xlabel('t'); title('x(t)')

```

2.2.4

Señales determinísticas y aleatorias

Una señal determinística es aquella en la que se conoce su valor en cualquier instante de tiempo. En este sentido, se hace referencia a señales que se modelan mediante una representación matemática en función de una o más variables independientes, o bien mediante una función conocida en términos del número de muestras para el caso en TD. Por otro lado, las señales aleatorias son aquellas en las que se desconoce el valor que presenta la señal en algún instante de tiempo. Ejemplos de estas señales son el ruido de un amplificador, las señales sísmicas, etc.

La figura 2.8a muestra un ejemplo de señal determinística especificada por $x(t) = \frac{3t}{t^2 + 3}$ y la figura 2.8b corresponde a una señal aleatoria.

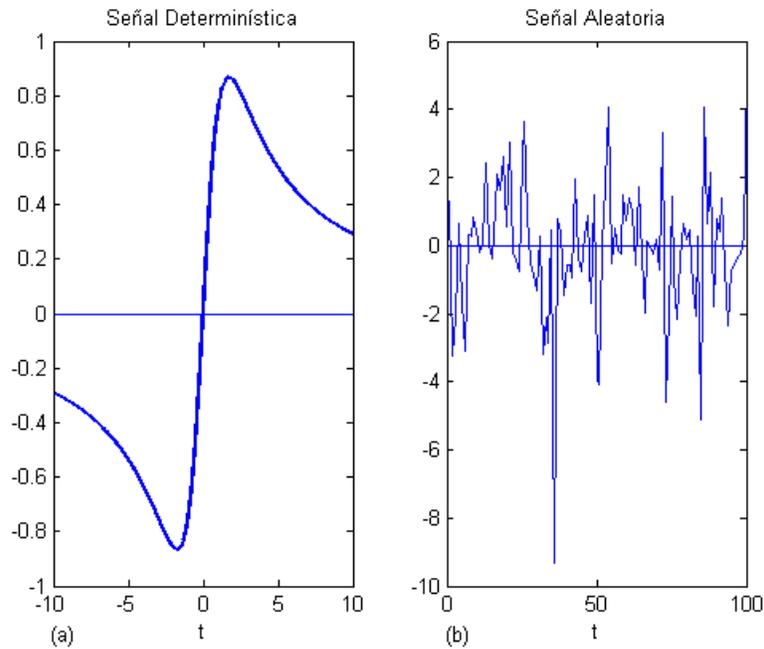


Figura 2.8: Señales a) Determinística b) Aleatoria

```
%Figura 2.8 Ejemplo de senal deterministica y aleatoria
t=-10:.01:10;
x=3*t./(t.^2+3);
subplot(1,2,1);plot(t,x,'LineWidth',2); % grid
xlabel('t'); %ylabel('x(t)')
hold on; line([min(t) max(t)], [0 0])%plot(t,zeros(1,length(t)));
title('Senal Deterministica')
text(-7.5,-1.2,'(a)');
x=random('t',3,1,100);
subplot(1,2,2);plot(x,'LineWidth',1); % grid
text(0,min(x)-2,'(b)')
xlabel('t'); %ylabel('x(t)')
t1=1:100;
hold on; plot(t1,zeros(1,length(t1)));
title('Senal Aleatoria')
```

2.2.5

Señales de energía y de potencia

Para el caso de señales en TC, la potencia instantánea $p(t)$ de una señal es proporcional a la amplitud al cuadrado de esa señal. Es decir, si $x(t)$ es el voltaje o la corriente a través de un resistor R , la potencia es proporcional

al cuadrado de la señal, $p(t) = Ri^2(t) = \frac{v^2(t)}{R}$. Por convención, la constante de proporcionalidad es la unidad, $R = 1\Omega$, de manera que la potencia instantánea para cualquier señal se define como

$$p(t) = x^2(t)$$

En cuyo caso, la potencia promedio de una señal periódica es

$$P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt \quad (2.13)$$

considerando la magnitud de $x(t)$ debido a que la señal puede ser real o compleja. Para una señal arbitraria aperiódica

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt \quad (2.14)$$

donde se observa que si $T \rightarrow \infty$, $P \rightarrow 0$, razón por la cual se dice que las señales aperiódicas tienen potencia promedio cero. Sin embargo, si se desea obtener la potencia promedio de una señal arbitraria en un intervalo de tiempo definido, $t_1 < t < t_2$, se aplica la Ec. (2.14) en el intervalo deseado.

Un valor asociado a la expresión de la potencia promedio es el valor rms (raíz media cuadrática) de $x(t)$, el cual corresponde a la raíz cuadrada de la potencia promedio. Un valor común utilizado frecuentemente en el área de circuitos eléctricos. El valor *rms* de $x(t)$ corresponde a

$$X_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt} \quad (2.15)$$

Por otro lado, la energía E de una señal está relacionada con la potencia instantánea acumulada en un intervalo de tiempo, $t_1 \leq t \leq t_2$, intervalo que puede ser el periodo de la señal, en caso de que sea periódica, esto es

$$E = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} p(t) dt$$

Para una señal $x(t)$ aperiódica el intervalo de tiempo tiende a infinito y la energía se expresa como

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad (2.16)$$

De esta ecuación se observa que una señal periódica tiene energía infinita.

Para el caso de señales en TD las integrales cambian a sumatorias, quedando la potencia instantánea como

$$p[n] = x^2[n] \quad (2.17)$$

La potencia promedio de una señal $x[n]$ periódica se obtiene mediante

$$P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 \quad (2.18)$$

para una señal arbitraria aperiódica en tiempo discreto, la potencia promedio es

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2$$

La energía está dada por:

$$E = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N/2}^{N/2} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 \quad (2.19)$$

De lo anterior se concluye que una *señal es de energía* sólo si la energía total de la señal es finita, es decir, cumple con la condición

$$0 < E < \infty \quad (2.20)$$

en cuyo caso estas señales tienen potencia promedio cero, ya que

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E}{T} \quad (2.21)$$

o bien en TD

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E}{N} \quad (2.22)$$

Una *señal es de potencia* si la potencia promedio de la señal es finita, es decir, cumple con la condición

$$0 < P < \infty \quad (2.23)$$

Por lo que si $P > 0$, necesariamente $E = \infty$.

En términos generales, las señales periódicas son señales de potencia, mientras que las señales aperiódicas son señales de energía.

Ejemplo 2.1

Determine la energía de la señal $x(t)$ indicada.

$$x(t) = e^{-2t} u(t)$$

Solución

La energía de la señal está dada por

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

$$E = \int_0^{\infty} |e^{-2t}|^2 dt = \left[-\frac{1}{4} e^{-4t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{4}$$

la energía de esta señal es finita y ya que la señal es aperiódica $T \rightarrow \infty$ y $P = 0$ por lo tanto es una señal de energía.

Ejemplo 2.2

Considere ahora la señal exponencial compleja $x(t)$ para la cual se determina la potencia.

$$x(t) = 5e^{j\pi t}$$

Solución

En este caso la señal $x(t)$ es periódica y la potencia promedio está dada por

$$P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

$$P = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 |5|^2 dt = 25$$

ya que es periódica su energía es infinita, por lo tanto $x(t)$ es una señal de potencia.

2.3

Transformaciones de señales en TC y en TD

Un aspecto fundamental del análisis y procesamiento de señales y sistemas son las transformaciones, tanto en amplitud como en la variable independiente de tiempo, por lo que es conveniente presentar las transformaciones elementales que se pueden aplicar en una señal. De manera más específica, se puede modificar la amplitud, así como realizar tres operaciones sobre la variable independiente.

2.3.1

Transformación de la señal en amplitud

Una señal $x(t)$ o $x[n]$ se puede modificar en amplitud en un valor A

Señal en tiempo continuo Señal en tiempo discreto

$$x(t) \rightarrow Ax(t) \qquad x[n] \rightarrow Ax[n]$$

en donde el valor de A puede tomar valores para amplificar, atenuar e invertir la señal. El símbolo \rightarrow se interpreta como *cambia a o se transforma en*.

Valor de A	Transformación en $x(t)$ o $x[n]$
$ A > 1$	\rightarrow Se amplifica
$0 < A < 1$	\rightarrow Se atenua
$A < 0$	\rightarrow Se invierte

2.3.2

Transformación de la variable independiente t y n

Son tres las transformaciones básicas que se llevan acabo en la variable independiente t y n .

Transformación	Cambio en (t) o en $[n]$
Reflexión o inversión en el tiempo	$(t) \rightarrow (-t)$ $[n] \rightarrow [-n]$
Desplazamiento en el tiempo	$(t) \rightarrow (t - t_0)$ $[n] \rightarrow [n - n_0]$
Escalamiento en el tiempo	$(t) \rightarrow (\alpha t)$ $[n] \rightarrow [\alpha n]$

Las tres transformaciones se pueden conjuntar originando una nueva señal modificada, para TC

$$x(t) \rightarrow x(\alpha t - t_0)$$

o bien, para TD

$$x[n] \rightarrow x[\alpha n - n_0]$$

2.3.3

Reflexión o inversión en el tiempo

La reflexión de la señal $x(t)$ es $x(-t)$, o bien la de $x[n]$ es $x[-n]$ y corresponden respectivamente a la señal original vista como en un espejo con respecto a $t = 0$ o $n = 0$.

Por ejemplo, si

$$x(t) = 10 \cos(3t)$$

entonces

$$x(-t) = 10 \cos(-3t)$$

Un ejemplo de una señal $x(t)$ y su correspondiente reflexión se muestra en la figura 2.9. Como ejemplo para el caso en TD, considere la señal $x[n]$ de la figura 2.10. Se presenta $u[n+1]$ y su representación invertida $u[-n+1]$, así como la señal $x[n]$ y la correspondiente invertida $x[-n]$.

Otro ejemplo sencillo de una señal $x(t)$ invertida en el tiempo es la frase $x(t) = \text{'anita lava la tina'}$, entonces la correspondiente señal invertida en el tiempo es $x(-t) = \text{'anit al aval atina'}$.

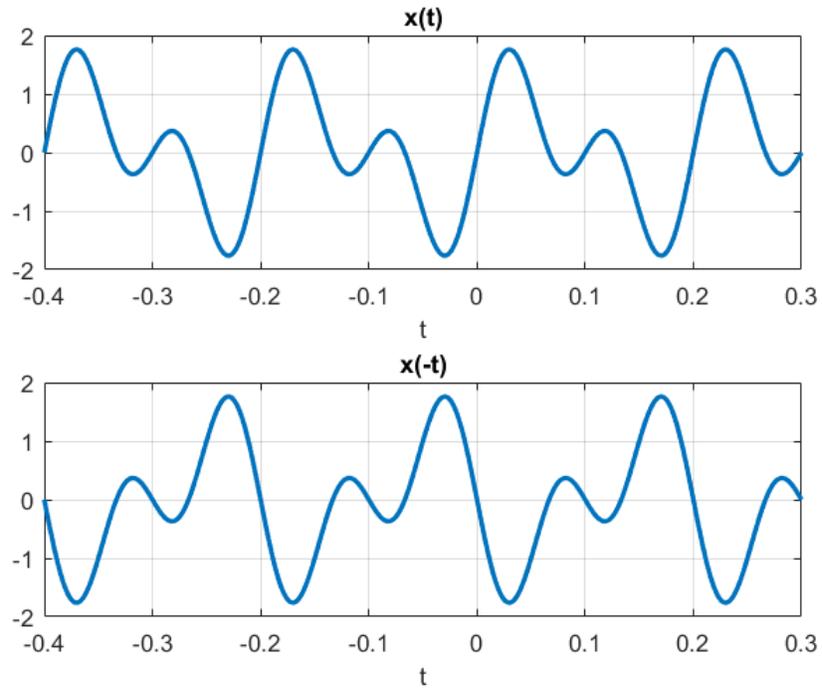


Figura 2.9: Señal $x(t)$ y su reflexión $x(-t)$

```

%Figura 2.9 Ejemplo de señal en TC invertida en el tiempo
t=-0.4:.001:0.3;
x1=sin(10*pi*t);
x2=sin(20*pi*t);
subplot(211),plot(t,x1+x2,'LineWidth',2)
xlabel('t')
title('x(t)')
grid
x1i=sin(10*pi*(-t));
x2i=sin(20*pi*(-t));
subplot(212),plot(t,x1i+x2i,'LineWidth',2)
xlabel('t')
title('x(-t)')
grid on

```

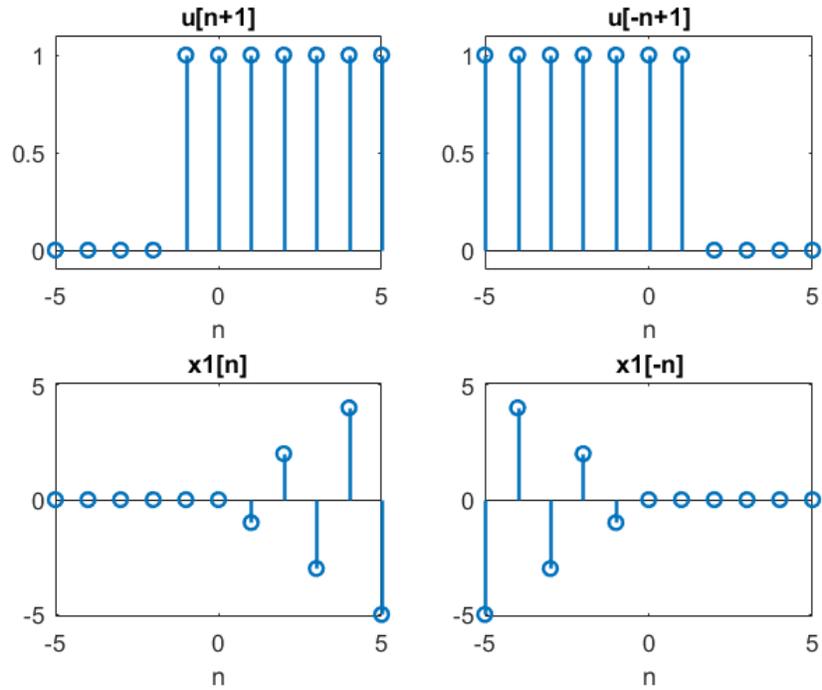


Figura 2.10: Señales en TD $x[n]$ y su reflexión $x[-n]$

```

%Figura 2.10 Senales en TD x[n] y su reflexion x[-n]
n=-5:5;
x=(-1).^n).*rd(n);
x1=(-1).^(-n)).*rd(-n);
subplot(221),stem(n,ud(n+1),'LineWidth',1.5)
title('u[n+1]');xlabel('n');axis([-5 5 -0.1 1.1])
subplot(222),stem(n,ud(-n+1),'LineWidth',1.5)
title('u[-n+1]');xlabel('n');axis([-5 5 -0.1 1.1])
subplot(223),stem(n,x,'LineWidth',1.5)
title('x1[n]');xlabel('n');axis([-5 5 -5.1 5.1])
subplot(224),stem(n,x1,'LineWidth',1.5)
title('x1[-n]');xlabel('n');axis([-5 5 -5.1 5.1])

```

2.3.4

Desplazamiento en el tiempo

Una señal desplazada en tiempo corresponde a la misma señal pero trasladada un tiempo t_0 con respecto a la original. Se denota en tiempo continuo como $x(t - t_0)$ y la correspondiente en tiempo discreto es $x[n - n_0]$. Si t_0 o n_0 son positivos entonces se dice que la señal está atrasada y por otro lado si son negativos entonces se tendrá una señal adelantada, como en el caso de $x(t + 5)$ y $x[n + 1]$. Un ejemplo típico de análisis de señales desplazadas es el efecto en el radar doppler.

Ejemplo 2.3

- a) Dadas las señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$ en TC, exprese y grafique la señal

$$x_3(t) = x_1(t) + x_2(t) \text{ y } x_3(t - 0.1) \text{ en términos de } x_1(t) \text{ y } x_2(t).$$

$$x_1(t) = \sin(10\pi t)$$

$$x_2(t) = \sin(20\pi t)$$

- b) Considere la señal $x[n]$ en TD, exprese y grafique $x[n + 2]$.

$$x[n] = e^{jn}$$

Solución

- a) La señal $x_3(t - 0.1)$ corresponde a una versión atrasada un tiempo $t_0 = 0.1$. La transformación se realiza cambiando $t \rightarrow (t - t_0)$. De manera que

$$x_3(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

y

$$x_3(t - 0.1) = x_1(t - 0.1) + x_2(t - 0.1)$$

$$x_3(t - 0.1) = \sin(10\pi(t - 0.1)) + \sin(20\pi(t - 0.1))$$

Las gráficas de las señales $x_3(t)$ y $x_3(t - 0.1)$ se muestran en la figura 2.11a.

- b) De manera similar para el caso de la señal $x[n]$ en TD, $x[n + 2]$ es

$$x[n] = e^{jn}$$

$$x[n + 2] = e^{j(n+2)}$$

En la figura 2.11b se muestran las señales $x[n]$ y $x[n + 2]$, la cual corresponde a una versión adelantada de $x[n]$ como se muestra en la figura 2.11.

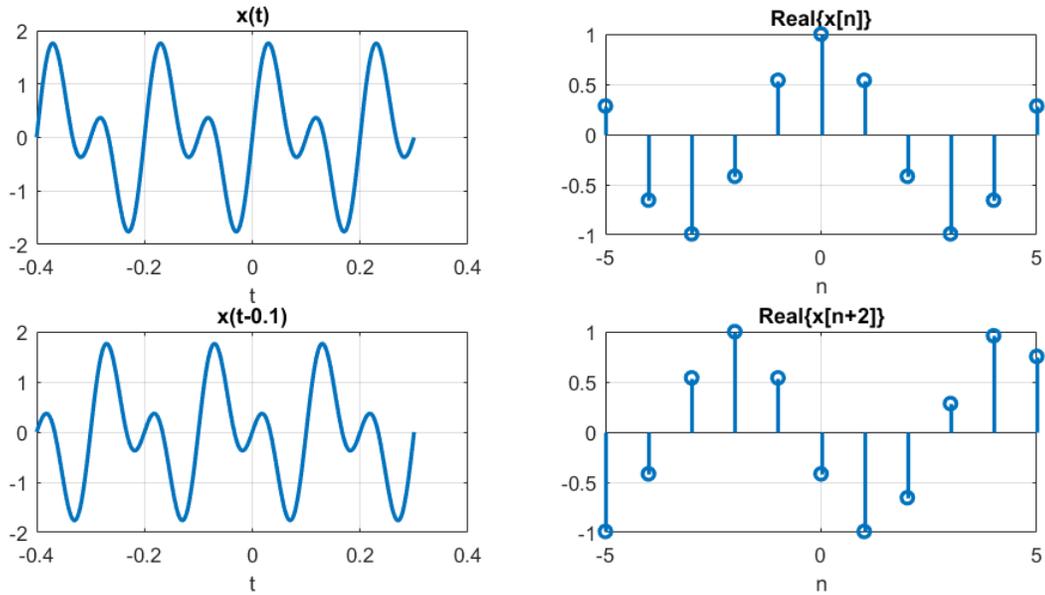


Figura 2.11: a) Señal en TC $x(t)$ y señal atrasada $x(t - 0.1)$. b) Señal en TD $x[n]$ y señal adelantada $x[n + 2]$

```

%Figura 2.11a Ejemplo de una senal desplazada o atrasada en el tiempo
t=-.4:.001:.3;
x1=sin(10*pi*t);
x2=sin(20*pi*t);
%tn=-.3+t0:.001:.3+t0; %Eje desplazado para que la senal este
%atrasada
x=x1+x2;
subplot(221),plot(t,x,'LineWidth',2)
xlabel('t'), title('x(t)'), grid
t0=.1;
x1=sin(10*pi*(t-t0));
x2=sin(20*pi*(t-t0));
x=x1+x2;
subplot(223),plot(t,x,'LineWidth',2)
xlabel('t'), title('x(t-0.1)'), grid

%Fig.111b
n=-5:5;
x1=exp(1i.*n);
subplot(222),stem(n,real(x1),'LineWidth',2)
xlabel('n'), title('Real\{x[n]\}'), grid
x2=exp(1i.*(n+2));
subplot(224),stem(n,real(x2),'LineWidth',2)
xlabel('n'), title('Real\{x[n+2]\}'), grid

```

2.3.5

Escalamiento de la variable independiente t y n

El escalamiento en tiempo de una señal corresponde a comprimir o expandir la señal en el tiempo, esto es, se escala la variable independiente mediante cambios lineales en la misma.

Un ejemplo claro y sencillo de las transformaciones es en señales de voz. Para la señal $x(t)$ correspondiente a la palabra “camino”, $x(-t)$ corresponde a “onimac”. La señal comprimida $x(\alpha t)$ se escuchará más rápido mientras que la expandida $x(t/\alpha)$ se escucharía más lenta, $\alpha > 1$ representa el factor de escalamiento.

De manera general se puede expresar la señal escalada de $x(t)$ como $x(\alpha t)$, o bien, $x[n]$ como $x[\alpha n]$ donde α es una constante que representa el factor de escalamiento.

Así, $x(\alpha t)$ y $x[\alpha n]$ son señales escaladas en tiempo de $x(t)$ y de $x[n]$, respectivamente.

Si $\alpha > 1$, corresponde a una señal comprimida y por el contrario, si $0 < \alpha < 1$, representa una señal expandida. Cuando α es negativa y diferente de 1 se obtiene una señal invertida y escalada en el tiempo.

Las tres transformaciones en $x(\alpha t)$ y $x[\alpha n]$ se sintetizan, en forma general, para señales en TC y en TD, como

$$x(\alpha t - t_0) \quad (2.24)$$

$$x[\alpha n - n_0] \quad (2.25)$$

en donde

- α es el factor de escalamiento para comprimir o expandir la señal.
- α negativo invierte la señal en el tiempo.
- t_0 representa el desplazamiento en la señal en TC.
- n_0 representa el desplazamiento en la señal en TD.

Hay diversos métodos para transformar una señal tanto en amplitud como en tiempo, ya sea escalada, desplazada o invertida, a partir de una determinada señal. Con la práctica esto se lleva a cabo de manera directa.

Se presenta a continuación el método de determinación de valores de la variable transformada y el gráfico. En ambos métodos conviene realizar primero la transformación en amplitud, para después proceder a la transformación de la variable independiente.

Método de determinación de valores de la variable transformada

En este método se determinan los valores de la variable independiente transformada, nombrándola (t_n), a partir de la variable independiente (t) mediante un despeje, esto es

$$(\alpha t_n - t_0) = t$$

$$t_n = \frac{t + t_0}{\alpha} \quad (2.26)$$

La amplitud que adquiere la señal transformada $x(\alpha t_n - t_0)$ corresponde con la amplitud de la señal original $x(t)$.

Para señales en tiempo discreto el procedimiento de escalamiento es similar al de tiempo continuo, es decir, se identifica la variable independiente modificada, nombrándola (n_n) , se iguala el argumento de la señal transformada con la variable independiente n y se realiza el despeje de (n_n)

$$[\alpha n_n - n_0] = n$$

quedando la variable independiente transformada como

$$n_n = \frac{n + n_0}{\alpha} \quad (2.27)$$

Al igual que en TC, deben corresponder las amplitudes en las señales original y transformada.

Cabe destacar que la señal en TD, como se sabe, es discreta en tiempo, de manera que cuando se expande la señal, $0 < \alpha < 1$, es posible insertar ceros entre muestra y muestra; y cuando se comprime la señal $\alpha > 1$, se pierden muestras de la señal original.

Método gráfico

Con este método se realiza gráficamente una a una las transformaciones de la señal tanto en amplitud como en tiempo. Por ejemplo, si se considera $x(t)$ y se desea encontrar la transformación en $5x(2t - 1)$, entonces las transformaciones que se tienen que realizar, una a una, son

$$x(t) \xrightarrow{A=5} 5x(t) \xrightarrow{t \rightarrow t-1} 5x(t-1) \xrightarrow{t \rightarrow 2t} 5x(2t-1)$$

Considerando ahora una señal de tiempo discreto $x[n]$, la cual se desea modificar en $-2x\left[\frac{n+1}{2}\right]$, las transformaciones que se llevan a cabo son

$$x[n] \xrightarrow{A=-2} -2x[n] \xrightarrow{n \rightarrow n/2} -2x\left[\frac{n}{2}\right] \xrightarrow{n \rightarrow n+1} -2x\left[\frac{n+1}{2}\right]$$

Ejemplo 2.4

Considere la señal $x(t)$ definida por intervalos como

$$x(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq 3 \\ 0 & \text{otro valor} \end{cases}$$

Mediante la determinación de valores de la variable transformada, obtenga la expresión y grafique la señal modificada $x_1(t)$ que corresponde a la señal $x(t)$ adelantada una unidad, en donde

$$x_1(t) = x(t + 1) \quad (2.28)$$

Solución

La señal $x(t)$ se muestra en la figura 2.12a. Aplicando la transformación, Ec. (2.26), a la señal de la Ec. (2.28) se obtiene

$$(t_n + 1) = t$$

se despeja t_n

$$t_n = t - 1$$

A partir de valores de t y $x(t)$, se determinan los valores de t_n y $x_1(t)$. Los valores de amplitud se mantienen en los tiempos original y transformado, debido a que $x(t)$ no tiene una transformación en amplitud. Estos cálculos se presentan en la Tabla 2.1. Se observa en la gráfica que el eje de tiempo t sigue siendo el mismo, lo que cambia son las coordenadas de t_n . Se facilita el procedimiento al tabular los valores de las variables dependiente e independiente.

t	$x(t)$	t_n	$x_1(t) = x(t_n + 1)$
0	0	-1	0
1	1	0	1
2	2	1	2
3	3	2	3
4	0	3	0

Tabla 2.1: Transformación de la variable t

Las dos primeras columnas corresponden a los valores de la señal original, en la tercera columna están tabulados los valores de la variable independiente transformada y en la cuarta columna están los valores de amplitud de la señal modificada que corresponden con los de la original.

En la figura 2.12b, se presenta la gráfica de la señal transformada.

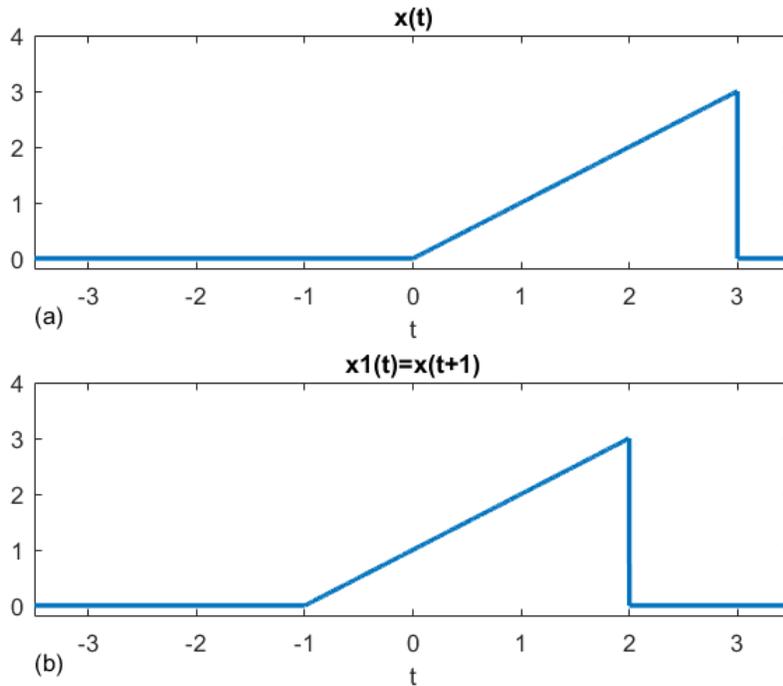


Figura 2.12: Transformación de $x(t) \rightarrow x(t+1)$

```

%Figura 2.12
t=-3.5:.001:6.5;
x=t.*(us(t)-us(t-3));
x1=(t+1).*(us(t+1)-us((t+1)-3));
subplot(211),plot(t,x,'LineWidth',2);line(0,0:.2:4);axis([-3.5 3.5 -.2 4])
text(-3.5, -1, '(a)',title('x(t)'); xlabel('t')
subplot(212),plot(t,x1,'LineWidth',2);line(0,0:.2:4);axis([-3.5 3.5 -.2 4])
text(-3.5, -1, '(b)',title('x1(t)=x(t+1)');xlabel('t')

```

Una forma alterna y sencilla es obtener la gráfica de la señal transformada al cambiar t con $t+1$, esto es

$$x(t+1) = \begin{cases} t+1 & 0 \leq t+1 \leq 3 \\ 0 & \text{otro valor} \end{cases} = \begin{cases} t+1 & -1 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{otro valor} \end{cases}$$

Ejemplo 2.5

Considerando $x(t)$ del Ejemplo 2.4, obtener las transformaciones de las señales listadas a partir de $x(t)$ para diferentes valores de amplitud, escalamiento y desplazamiento. Las transformaciones se realizan y grafican directamente en MATLAB.

1. $x_2(t) = x(-t)$
2. $x_3(t) = x(-t-1)$

3. $x_4(t) = x(t-3)$
4. $x_5(t) = x(-t+1)$
5. $x_6(t) = x(-2t+2)$

Solución

Las gráficas de las señales transformadas se presentan en la figura 2.13.

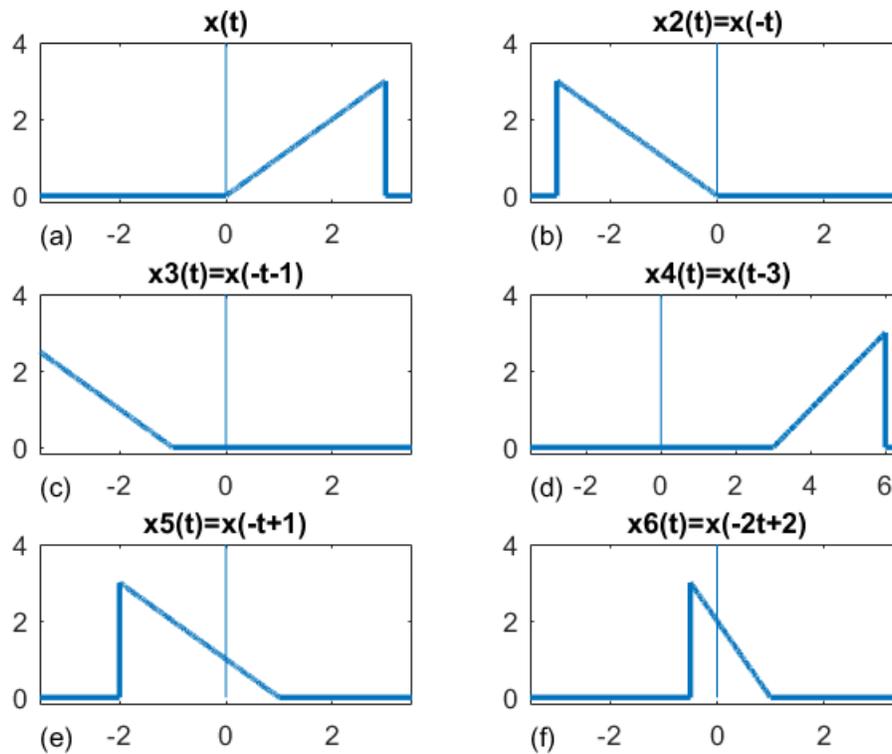


Figura 2.13: Transformación de $x(t) \rightarrow x(\alpha t + t_0)$

Ejemplo 2.6

La señal en TD $x[n]$ está definida en el intervalo de $-2 \leq n \leq 4$ como se indica, y tiene valor cero fuera del intervalo

$$x[n] = [1234321] \quad -2 \leq n \leq 4$$

Utilizando en método de transformaciones gráficas, obtenga la señal transformada $x_1[n]$

$$x_1[n] = -2x\left[\frac{n}{2} + 1\right]$$

Solución

A partir de la señal $x[n]$ se desea llegar a la transformación $x_1[n] = -2x\left[\frac{n}{2} + 1\right]$. La secuencia de las transformaciones que se tienen que realizar corresponde a

$$x[n] \xrightarrow{A=-2} -2x[n] \xrightarrow{n \rightarrow n+1} -2x[n+1] \xrightarrow{n \rightarrow n/2} -2x\left[\frac{n}{2} + 1\right]$$

En la figura 2.14 se muestran $x[n]$ y las respectivas transformaciones. Las transformaciones se han realizado y graficado directamente en MATLAB.

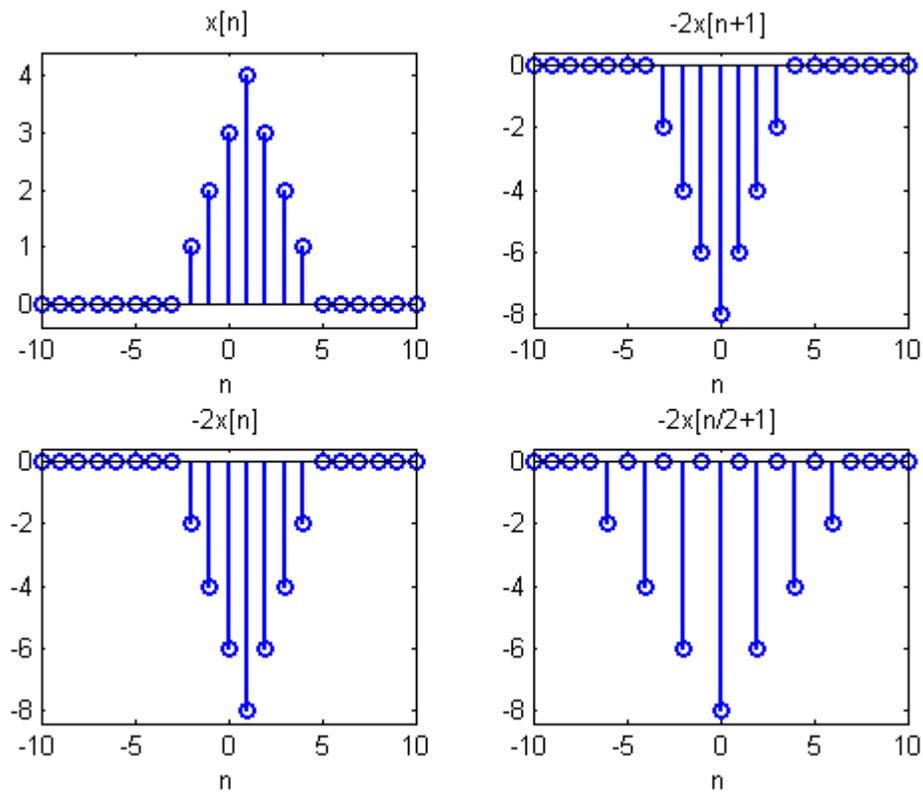


Figura 2.14: Transformación de la variable independiente para diferentes valores de α y n_0

```
%Figura 2.14
n=-10:10;
x=-2*x14(n/2 + 1);
subplot(221),stem(n,x14(n), 'LineWidth', 1.5);
title('x[n]');xlabel('n');axis([min(n) max(n) min(x14(n))-0.4 max(x14(n))+0.4])
x=-2*x14(n);
subplot(223),stem(n,x, 'LineWidth', 1.5)
title('-2x[n]');xlabel('n');axis([min(n) max(n) min(x)-0.4 max(x)+0.4])
x=-2*x14(n+1);
subplot(222),stem(n,x, 'LineWidth', 1.5)
title('-2x[n+1]');xlabel('n');axis([min(n) max(n) min(x)-0.4 max(x)+0.4])
x=-2*x14(n/2+1);
subplot(224),stem(n,x, 'LineWidth', 1.5)
title('-2x[n/2+1]');xlabel('n');axis([min(n) max(n) min(x)-0.4 max(x)+0.4])
```

2.4

Señal exponencial compleja y sinusoidal en TC

Dentro de la clasificación de señales se incluyen señales básicas con las cuales se pueden construir otras, las cuales se obtienen a partir de una función generalizada de tipo exponencial, que para señales en tiempo continuo, tiene la forma

$$x(t) = Ce^{at} \quad (2.29)$$

donde C y a pueden ser números reales o complejos, que dependiendo de su valor generan diferentes señales bien definidas y son la base de la respuesta de muchos sistemas.

2.4.1

Señal exponencial real

Se obtiene una señal exponencial real cuando C y a son reales, en cuyo caso se tiene una exponencial creciente cuando $a > 0$ y una exponencial decreciente cuando $a < 0$, mientras que $x(t)$ es constante cuando $a = 0$. La figura 2.15 muestra las diferentes versiones de $x(t)$.

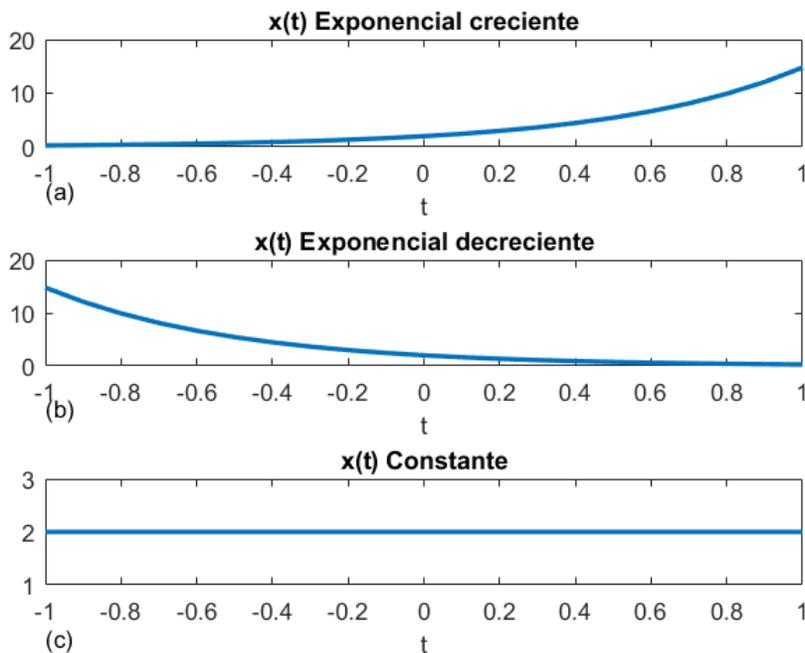


Figura 2.15: Señal $x(t) = Ce^{at}$. C es constante y a) $a > 0$, b) $a < 0$, c) $a = 0$

```

%Figura 2.15 Ejemplo de exponencial creciente(a>1), decreciente (a<1) y
%constante (a=1)
[t,x1]=exporeal(-1:.1:1,2,2); %exponencial creciente
[t,x2]=exporeal(-1:.1:1,2,-2); %exponencial decreciente
[t,x3]=exporeal(-1:.1:1,2,0); %constante

subplot(311),plot(t,x1,'LineWidth',2);line(0,0:.1:20)
xlabel('t');title('x(t) Exponencial creciente')
text(-1,-8,'(a)');%grid
subplot(312),plot(t,x2,'LineWidth',2);line(0,0:.1:20)
xlabel('t');title('x(t) Exponencial decreciente')
text(-1,-8,'(b)');%grid
subplot(313),plot(t,x3,'LineWidth',2);line(0,1:.05:3)
xlabel('t');title('x(t) Constante')
text(-1,0,'(c)');%grid

```

2.4.2

Señal exponencial compleja

Para generar una exponencial compleja, de nuevo se parte de la Ec. (2.29) al considerar C constante y $a = j\omega$ imaginaria, en cuyo caso $x(t)$ adquiere la forma

$$x(t) = Ce^{at}$$

$$x(t) = Ce^{j\omega t} \quad (2.30)$$

la cual, mediante la identidad de Euler se expresa también como

$$x(t) = C \cos(\omega t) + jC \sin(\omega t)$$

misma que corresponde a una señal compleja que también se puede expresar como

$$x(t) = \operatorname{Re}\{Ce^{j(\omega t)}\} + \operatorname{Im}\{Ce^{j(\omega t)}\}$$

Cabe enfatizar que todas las exponenciales complejas en TC de la forma de la Ec. (2.30) son periódicas, situación que no siempre se presenta en las señales en TD como se verá más adelante.

Cambiando ahora C y a complejos se obtienen las exponenciales complejas creciente o decreciente, esto es, tomando los valores de $C = C_1 e^{j\theta}$ y $a = r + j\omega$ y sustituyendo en la Ec. (2.29), entonces

$$x(t) = C_1 e^{j\theta} e^{(r+j\omega)t} = C_1 e^{rt} e^{j(\omega t + \theta)}$$

la cual, mediante la identidad de Euler se expresa también como

$$x(t) = |C|e^{rt} \cos(\omega t + \theta) + j|C|e^{rt} \sin(\omega t + \theta)$$

en donde si $r = 0$ se tiene que la parte real y la parte imaginaria de $x(t)$ son de tipo sinusoidal la cual corresponde a la señal de la Ec. (2.30). Se representan gráficamente mediante la parte real e imaginaria de $x(t)$ o bien, de forma alternativa con la magnitud y el ángulo de $x(t)$, ambas representaciones se muestran en la figura 2.16.

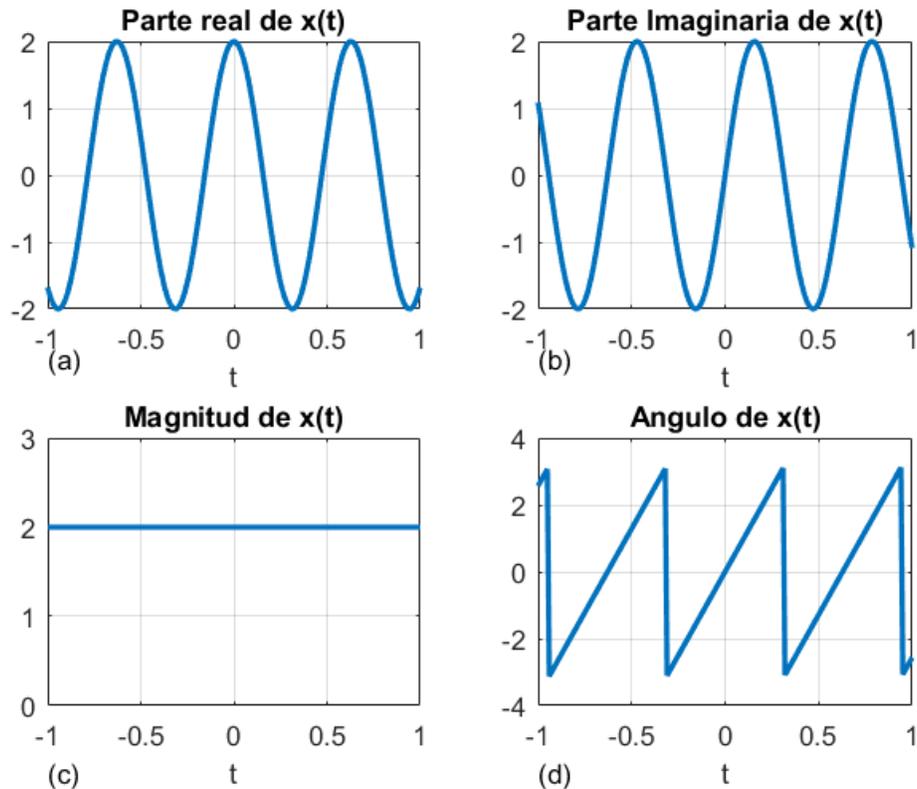


Figura 2.16: Señal $x(t) = Ce^{at}$, $C = 2$ y $a = j10$

```
%Figura 2.16 Ejemplo de exponencial compleja c es constante y alfa es imaginaria
[t,x1]=exporeal(-1:.01:1,2,j*10); %exponencial compleja

subplot(221),plot(t,real(x1),'LineWidth',2)
xlabel('t');title('Parte real de x(t)')
text(-1,-2.75,'(a)');grid
subplot(222),plot(t,imag(x1),'LineWidth',2)
xlabel('t');title('Parte Imaginaria de x(t)')
text(-1,-2.75,'(b)');grid
subplot(223),plot(t,abs(x1),'LineWidth',2)
xlabel('t');title('Magnitud de x(t)')
text(-1,-.75,'(c)');grid
axis([-1 1 0 3])
subplot(224),plot(t,angle(x1),'LineWidth',2)
xlabel('t');title('Angulo de x(t)')
text(-1,-6,'(d)');grid
```

Si ahora $r > 0$ se forma una sinusoidal multiplicada por una exponencial creciente, y con $r < 0$ se genera una sinusoidal multiplicada por una exponencial decreciente. Este último tipo de sinusoidales se les llama sinusoidales amortiguadas. Las representaciones gráficas se presentan en la figura 2.17.

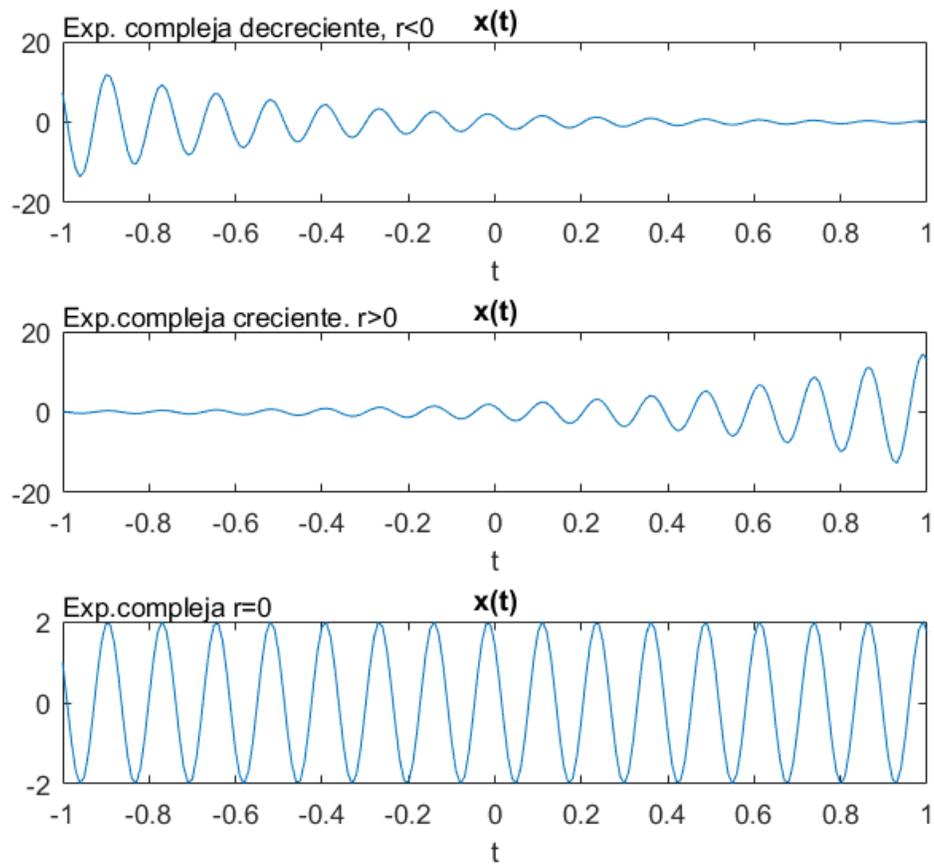


Figura 2.17: Señal $x(t) = C e^{at}$, con C y a complejos

```
%Figura 2.17. Ejemplo de exponencial compleja c y alfa son complejas
[t,x1]=exporeal(-1:.01:1,2*exp(j*pi/4),-2+j*50); %exp.compleja decreciente, r<0
[t,x2]=exporeal(-1:.01:1,2*exp(j*pi/4),2+j*50); %exp.compleja creciente, r>0
[t,x3]=exporeal(-1:.01:1,2*exp(j*pi/4),+j*50); %exp.compleja ,r=0

subplot(311),plot(t,real(x1))
xlabel('t');title('x(t)')
text(-1,24,'Exp. compleja decreciente, r<0');%grid
subplot(312),plot(t,real(x2))
xlabel('t');title('x(t)')
text(-1,24,'Exp.compleja creciente. r>0');%grid
subplot(313),plot(t,real(x3))
xlabel('t');title('x(t)')
text(-1,2.4,'Exp.compleja r=0');%grid
```

2.4.3

Periodicidad de la exponencial compleja en TC

La Ec. (2.30) tiene la propiedad de ser periódica, es decir satisface la Ec. (2.9), ya que al desplazar la señal en el tiempo en un valor de T se obtiene la misma señal.

$$x(t) = Ce^{j\omega(t+T)} = Ce^{j\omega t} e^{j\omega T}$$

cumpléndose que $e^{j\omega T} = 1$, siendo $T = 2\pi/\omega$ el periodo de la señal y ω la frecuencia angular en radianes por segundo. Dado que es una señal compleja, la representación gráfica puede presentarse en dos formas, mediante la parte real y la parte imaginaria, o bien mediante el módulo y el ángulo.

Cabe señalar que para diferentes valores de ω la señal $x(t)$ en cada caso será diferente, esta característica no se presenta en las señales en tiempo discreto, como se verá más adelante.

2.4.4

Señal Sinusoidal

La señal sinusoidal está relacionada con la exponencial compleja periódica y se utiliza para describir muchos procesos físicos. Está dada por la Ec. (2.31) y se muestra en la figura 2.16, como la parte real de la exponencial compleja.

$$x(t) = C \cos(\omega t + \theta) \quad (2.31)$$

Usando la identidad de Euler, la señal exponencial compleja puede escribirse como

$$Ce^{j(\omega t + \theta)} = C \cos(\omega t + \theta) + jC \sin(\omega t + \theta)$$

y la señal coseno se puede escribir en términos de la exponencial compleja como

$$C \cos(\omega t + \theta) = \frac{C}{2} e^{j(\omega t + \theta)} + \frac{C}{2} e^{-j(\omega t + \theta)} \quad (2.32)$$

o también

$$C \cos(\omega t + \theta) = \operatorname{Re} \left\{ C e^{j(\omega t + \theta)} \right\} \quad (2.33)$$

y la señal seno se puede expresar también como

$$C \sin(\omega t + \theta) = \operatorname{Im} \left\{ C e^{j(\omega t + \theta)} \right\} \quad (2.34)$$

de forma alterna como

$$C \sin(\omega t + \theta) = \frac{C}{j2} e^{j(\omega t + \theta)} - \frac{C}{j2} e^{-j(\omega t + \theta)} \quad (2.35)$$

en donde el periodo fundamental T con unidades en segundos es inversamente proporcional a ω , es decir

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (2.36)$$

2.5

Señal exponencial compleja y sinusoidal en TD

Las correspondientes señales exponenciales en tiempo discreto surgen de la secuencia exponencial

$$x[n] = C\alpha^n \quad (2.37)$$

donde C y α adoptan valores reales y complejos.

Si se hace $\alpha = e^\beta$, pudiendo ser β real o compleja, $x[n]$ toma la forma

$$x[n] = Ce^{\beta n}$$

sin embargo, aunque esta última expresión es similar a la correspondiente en tiempo continuo, es más conveniente expresar y procesar los datos mediante la exponencial $x[n] = C\alpha^n$.

2.5.1

Señal exponencial real

Si C y α toman valores reales se obtienen varias señales con diferentes tendencias.

- Si $|\alpha| > 1$, la señal crece en forma exponencial.
- Si $|\alpha| < 1$, la señal decrece en forma exponencial.
- Si $\alpha > 0$ todos los valores de $x[n]$ son del mismo signo.
- Si $\alpha = -1$, $x[n]$ se alterna entre $+C$ y $-C$.
- Si $\alpha = 1$, $x[n]$ es constante.
- Si $\alpha < 0$, $x[n]$ alterna sus valores.

Las diferentes señales se muestran en la figura 2.18.

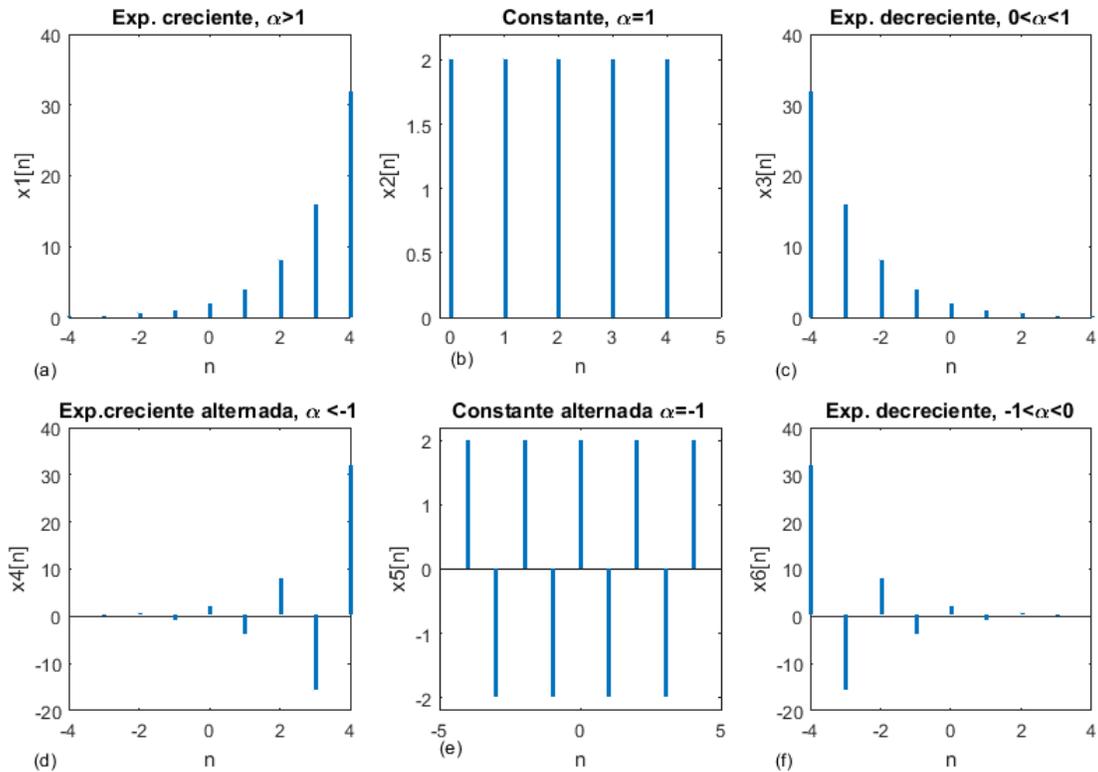


Figura 2.18: Señal $x[n] = C\alpha^n$. C es constante y a) $\alpha > 1$, b) $\alpha = 1$, c) $0 < \alpha < 1$, d) $\alpha < -1$, e) $\alpha = -1$, f) $-1 < \alpha < 0$

```

%Figura 2.18 Ejemplos de exponenciales discretas variando C y alfa

[n,x1]=expodis(-4:4,2,2); %Exponencial creciente, alfa > 1
[n,x2]=expodis(-4:4,2,1); %Constante alfa=1
[n,x3]=expodis(-4:4,2,.5); %Exponencial decreciente, alfa < 1
[n,x4]=expodis(-4:4,2,-2) %Exponencial creciente alternada, alfa > 1
[n,x5]=expodis(-4:4,2,-1); %Constante alternada alfa=-1
[n,x6]=expodis(-4:4,2,-.5); %Exponencial decreciente alternada, alfa < 1

subplot(231),stem(n,x1, '.', 'LineWidth',2);
xlabel('n');ylabel('x1[n]');
title('Exp. creciente, \alpha>1');%grid
text(-5,-7, '(a)')
subplot(232),stem(n,x2, '.', 'LineWidth',2);
xlabel('n');ylabel('x2[n]');
title('Constante, \alpha=1');axis([-2 5 0 2.2]);%grid
text(-5,-.4, '(b)')
subplot(233),stem(n,x3, '.', 'LineWidth',2);
xlabel('n');ylabel('x3[n]');
title('Exp. decreciente, 0<\alpha<1');%grid
text(-5,-7, '(c)')
subplot(234),stem(n,x4, '.', 'LineWidth',2);
xlabel('n');ylabel('x4[n]');
title('Exp.creciente alternada, \alpha <-1');%grid
text(-5,-30, '(d)')
subplot(235),stem(n,x5, '.', 'LineWidth',2);
xlabel('n');ylabel('x5[n]');

```

```

title('Constante alternada \alpha=-1');axis([-5 5 -2.2 2.2]);%grid
text(-5,-2.75,'(e)')
subplot(236),stem(n,x6,'.','LineWidth',2);
xlabel('n');ylabel('x6[n]');
title('Exp. decreciente, -1<\alpha<0');%grid
text(-5,-30,'(f)')

```

2.5.2

Señal exponencial compleja

Considerando los valores de C constante real y $\alpha = e^{j\omega}$ en la Ec. (2.37) se obtiene la exponencial compleja discreta

$$x[n] = Ce^{j\omega n} \quad (2.38)$$

en la que, si se incluye un ángulo de fase, C cambia a una constante compleja $C = C_1 e^{j\theta}$

$$x[n] = C_1 e^{j(\omega n + \theta)} \quad (2.39)$$

que al expresarla como la suma de la parte real e imaginaria de $x[n]$ se obtiene

$$x[n] = |C| \cos(\omega n + \theta) + j |C| \sin(\omega n + \theta)$$

la cual a su vez está relacionada con la sinusoidal

$$x[n] = \text{Re} \left\{ |C| e^{j(\omega n + \theta)} \right\} + \text{Im} \left\{ |C| e^{j(\omega n + \theta)} \right\} \quad (2.40)$$

donde ω y θ tienen unidades de radianes y n es adimensional.

Se destaca que a diferencia de las exponenciales complejas en TC, en las que todas son periódicas, en TD no todas las exponenciales complejas son periódicas, como se verá más adelante.

Cambiando ahora C y α complejos se obtienen las exponenciales complejas creciente o decreciente, esto es, tomando los valores de $C = C_1 e^{j\theta}$ y $\alpha = \alpha_1 e^{j\omega}$ y sustituyéndolos en la Ec. (2.37) queda

$$x[n] = |C| |\alpha|^n e^{j(\omega n + \theta)} \quad (2.41)$$

o bien, en términos de señales sinusoidales

$$x[n] = C_1 \alpha_1^n (\cos(\omega n + \theta) + j \sin(\omega n + \theta))$$

las señales que se derivan de esta Ec. (2.41) se ilustran en la figura 2.19 y son las siguientes:

$C = C_1 e^{j\theta}, \alpha = \alpha_1 e^{j\omega}$	Señal $x[n]$	Forma de onda de la Exponencial Compleja
$ \alpha = 1$	$x[n] = C e^{j(\omega n + \theta)}$	Seno y Coseno
$ \alpha < 1$	$x[n] = C \alpha ^n e^{j(\omega n + \theta)}$	Exponencial compleja decreciente
$ \alpha > 1$	$x[n] = C \alpha ^n e^{j(\omega n + \theta)}$	Exponencial compleja creciente

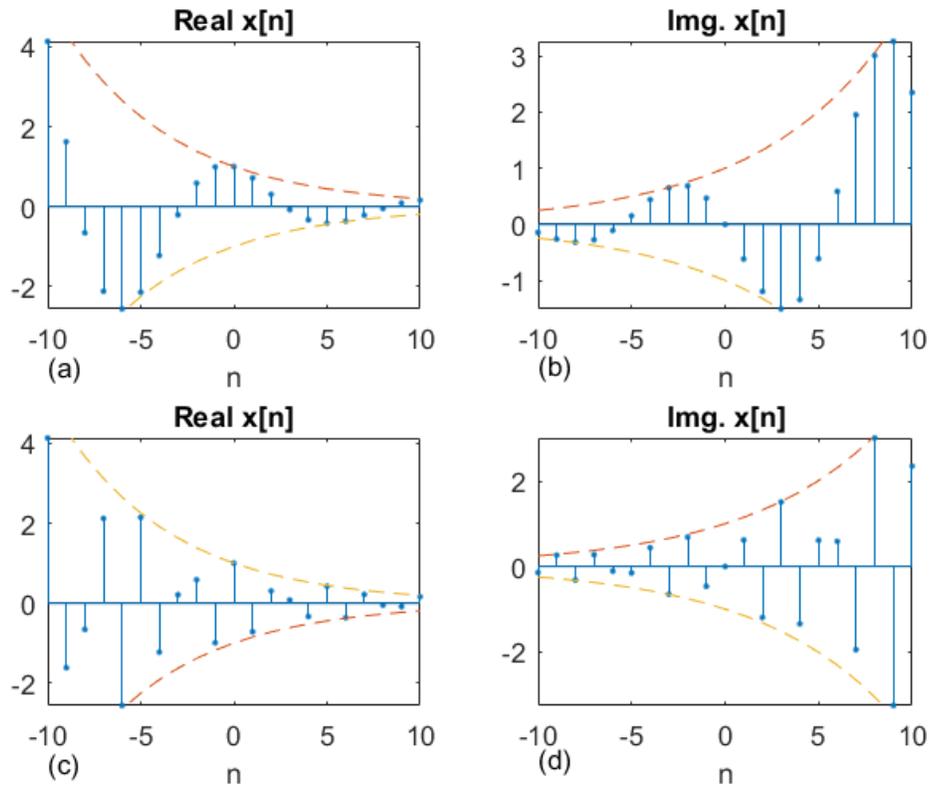


Figura 2.19: Exponencial compleja discreta $x[n] = \alpha^n e^{j\omega n}$. a) $\alpha = 0.85$, b) $\alpha = 1.15$, c) $\alpha = -0.85$, d) $\alpha = -1.15$

```

%Figura 2.19 Ejemplos de exponenciales discretas
% con C constante y diferentes valores para alfa
[n,x1]=expodis(-10:10,1,.85.*exp(1j*12)); %Exponencial compleja
subplot(221),stem(n,real(x1),'.');
hold on, plot(n,.85.^n,'--');plot(n,-.85.^n,'--');
xlabel('n');title('Real x[n]');
text(-10,-4,'(a)');axis([-10 10 min(real(x1)) max(real(x1))]);%grid
line([min(n) max(n)],[0 0]);

[n,x1]=expodis(-10:10,1,1.15.*exp(1j*12));
subplot(222),stem(n,imag(x1),'.');
hold on, plot(n,1.15.^n,'--');plot(n,-1.15.^n,'--');
xlabel('n');title('Img. x[n]');
text(-10,-2.5,'(b)');axis([-10 10 min(imag(x1)) max(imag(x1))]);%grid
line([min(n) max(n)],[0 0]);

[n,x1]=expodis(-10:10,1,-.85.*exp(1j*12));

```

```

subplot(223), stem(n, real(x1), '.'),
hold on, plot(n, -.85.^n, '--'); plot(n, .85.^n, '--');
xlabel('n'); title('Real x[n]');
text(-10, -4, '(c)'); axis([-10 10 min(real(x1)) max(real(x1))]); %grid
line([min(n) max(n)], [0 0]);

[n, x1]=expodis(-10:10, 1, -1.15.*exp(1j*12));
subplot(224), stem(n, imag(x1), '.');
hold on, plot(n, 1.15.^n, '--'); plot(n, -1.15.^n, '--');
xlabel('n'); title('Img. x[n]');
text(-10, -4.5, '(d)'); axis([-10 10 min(imag(x1)) max(imag(x1))]); %grid
line([min(n) max(n)], [0 0]);

```

En la figura 2.19 se presentan las gráficas de la señal $x[n] = \alpha^n e^{j\omega n}$. Los incisos a) y b) corresponden a señales con valores de α positivos, mientras que en los incisos c) y d) con valores de α negativos, en los cuatro casos α^n es la envolvente de la sinusoidal.

2.5.3

Señal Sinusoidal

Las señales sinusoidales en TD están relacionadas con la exponencial compleja como la parte real y la parte imaginaria de la exponencial compleja. Para el caso de la señal coseno

$$|C| \cos(\omega n + \theta) = \text{Re}\{x[n]\} = |C| \text{Re}\{e^{j(\omega n + \theta)}\} \quad (2.42)$$

la señal coseno, a su vez se puede expresar en términos de la exponencial compleja como

$$|C| \cos(\omega n + \theta) = \frac{|C|}{2} \left(e^{j(\omega n + \theta)} + e^{-j(\omega n + \theta)} \right) \quad (2.43)$$

y la señal seno queda como

$$|C| \sin(\omega n + \theta) = \text{Im}\{x[n]\} = |C| \text{Im}\{e^{j(\omega n + \theta)}\} \quad (2.44)$$

o bien

$$|C| \sin(\omega n + \theta) = \frac{|C|}{j2} \left(e^{j(\omega n + \theta)} - e^{-j(\omega n + \theta)} \right) \quad (2.45)$$

Las diferentes formas de representar gráficamente la exponencial compleja $x[n]$ corresponden a la parte real, la parte imaginaria, su magnitud o su ángulo, mismas que se presentan en las figuras 2.20a a la 2.20d.

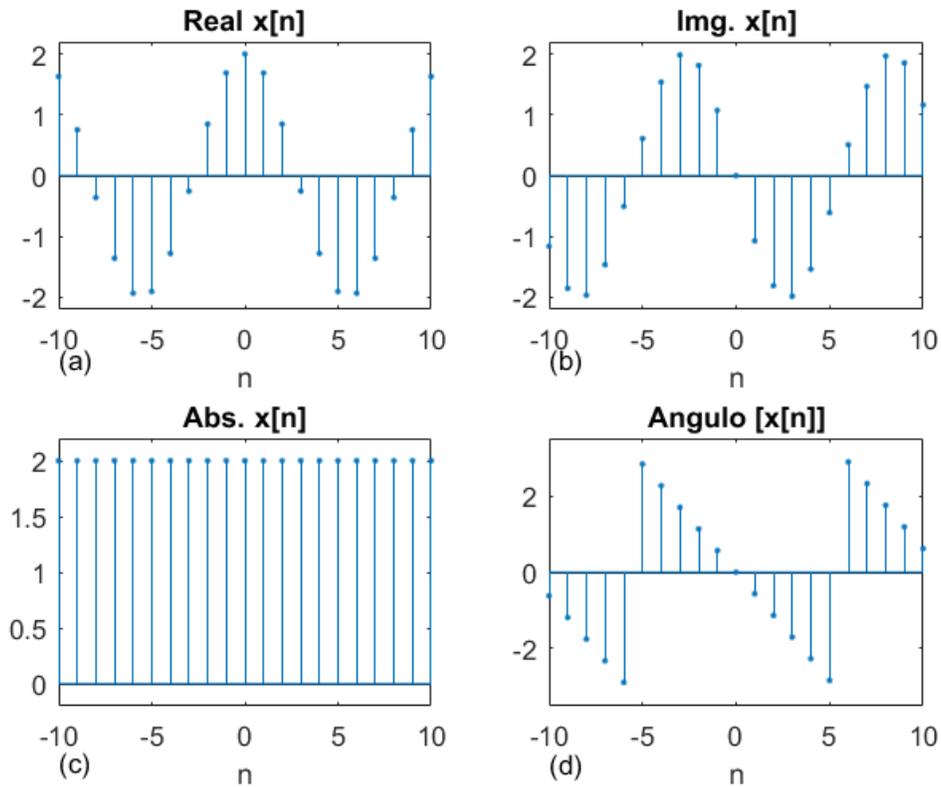


Figura 2.20: Exponencial compleja discreta y sus diferentes representaciones gráficas.

```

%Figura 2.20 Ejemplos de exponenciales discretas C y alfa constantes

[n,x1]=expodis(-10:10,2,exp(1j*12));    %Exponencial compleja
subplot(221),stem(n,real(x1), '.');
xlabel('n');title('Real {x[n]}');
text(-10,-3,'(a)');axis([-10 10 -2.2 2.2]);%grid
hold on; line([min(n) max(n)],[0 0]);%plot(n, zeros(1,length(n)))
subplot(222),stem(n,imag(x1), '.');
xlabel('n');title('Img. {x[n]}');
text(-10,-3,'(b)');%grid
axis([-10 10 -2.2 2.2]);
hold on; line([min(n) max(n)],[0 0]);
subplot(223),stem(n,abs(x1), '.');
xlabel('n');title('Abs. {x[n]}');
text(-10,-.7,'(c)');%grid
axis([-10 10 -0.2 2.2]);
hold on; line([min(n) max(n)],[0 0]);
subplot(224),stem(n,angle(x1), '.');
xlabel('n');title('Angulo {x[n]}');
text(-10,-5,'(d)');%grid
axis([-10 10 -3.5 3.5]);
hold on; line([min(n) max(n)],[0 0]);

```

2.5.4

Diferencias fundamentales de las señales exponenciales complejas en TC y TD

Las señales discretas exponenciales complejas tienen dos diferencias bien definidas con respecto a las correspondientes en tiempo continuo.

Primero, considere la señal exponencial compleja $x[n]$ la cual se modifica en su frecuencia ω en 2π .

$$x[n] = e^{j\omega n} \quad (2.46)$$

$$x[n] = e^{j(\omega+2\pi)n} = e^{j\omega n} e^{j2\pi n}$$

de donde se observa que

$$e^{j2\pi n} = 1$$

por lo que

$$x[n] = e^{j(\omega+2\pi)n} = e^{j\omega n} \quad (2.47)$$

Es decir, que la señal se repite cuando la frecuencia se modifica en 2π ; de hecho, la señal es la misma a una frecuencia en múltiplos de 2π , lo cual marca una diferencia con respecto a las señales en TC en donde para cualquier variación de frecuencia la señal es diferente. De lo anterior, las señales discretas periódicas, tienen un intervalo de frecuencia de 0 a 2π , o bien de $-\pi$ a π . La figura 2.21 muestra que dos señales exponenciales complejas en tiempo discreto con diferentes frecuencias $\omega = \pi/8$ y $\omega = 17\pi/8$ corresponden a la misma señal.

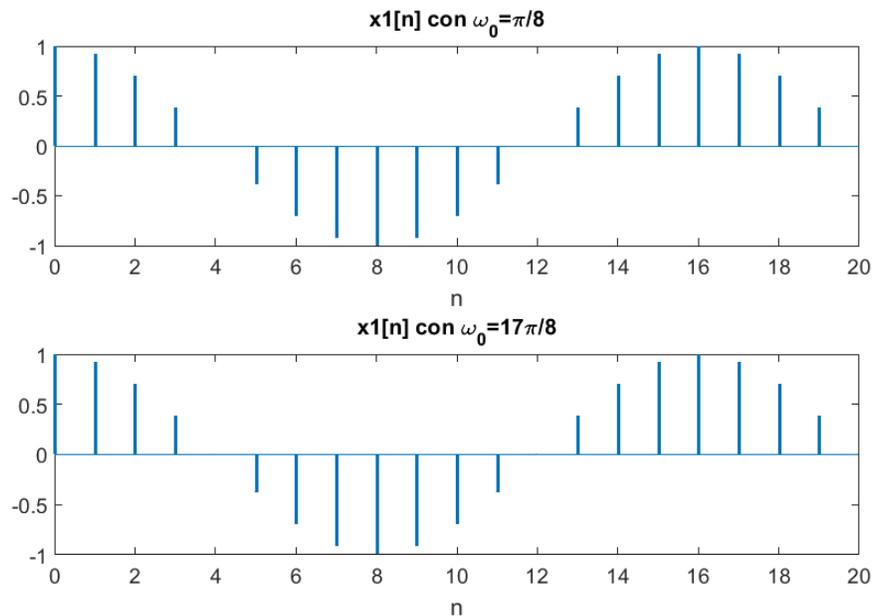


Figura 2.21: Señales exponenciales complejas idénticas con diferentes frecuencias

%Figura 2.21 Señales periódicas en TD se repiten cada 2pi

```
n=0:20;
x1=cos(pi*n/8);
x2=cos(17*pi*n/8);
subplot(211),stem(n,x1,'.','LineWidth',2)
xlabel('n'); ylabel('x1[n]')
title('x1[n] con \omega_0=\pi/8')
hold on; line([min(n) max(n)], [0 0]);
subplot(212),stem(n,x2,'.','LineWidth',2)
xlabel('n'); ylabel('x2[n]')
hold on; line([min(n) max(n)], [0 0]);
title('x1[n] con \omega_0=17\pi/8')
```

La segunda diferencia está relacionada con la periodicidad. Una señal en TD es periódica si cumple con la Ec. (2.12), la cual se vuelve a plantear

$$x[n] = x[n + N] = x[n + mN]$$

en donde N es el periodo de la señal y m es un entero positivo o negativo.

Para el caso de la exponencial compleja se debe cumplir con

$$x[n] = e^{j\omega(n+N)} = e^{j\omega n} \quad (2.48)$$

de manera que se cumple $e^{j\omega N} = 1$, condición que se satisface para los m valores múltiplos de 2π , es decir

$$\omega N = m2\pi$$

o bien,

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{m}{N}$$

debe ser una razón de números enteros, de aquí que el periodo de una señal en tiempo discreto es

$$N = \frac{2\pi}{\omega} m \quad (2.49)$$

donde m es el menor número entero que proporcione N entero. Marcando una diferencia con respecto al periodo de las exponenciales complejas en TC.

Por ejemplo, para el primer caso de la figura 2.21, la señal es $x_1[n] = \cos\left(\frac{\pi}{8}n\right)$, con $\omega = \pi/8$, por lo que el periodo es

$$N = \frac{2\pi}{\pi/8} m = 16m \quad (2.50)$$

en donde el menor valor de m entero que proporciona el valor de N entero es $m = 1$, por lo que el periodo es $N = 16$.

Para el segundo caso, en la figura 2.21, la señal es $x_2[n] = \cos\left(\frac{17\pi}{8}n\right)$, con $\omega = 17\pi/8$, por lo que el periodo es

$$N = \frac{2\pi}{17\pi/8}m = \frac{16}{17}m \quad (2.51)$$

por lo que, para $m = 17$, $N = 16$ que corresponde al mismo periodo fundamental de la señal $x_1[n]$, mostrando que dos señales con diferentes frecuencias, tienen el mismo periodo, como se observa y reafirma en la figura 2.21.

Se resume que:

- Dos o más señales exponenciales complejas en tiempo discreto, pueden tener diferente frecuencia, pero el mismo periodo, por lo tanto, serán iguales.
- Cuando no existen valores enteros para las constantes m y N se trata de una señal aperiódica.
- De lo anterior se concluye que no todas las exponenciales complejas en tiempo discreto son periódicas.

2.6

Funciones singulares en tiempo continuo

Otra clase muy importante de señales son las representadas mediante *funciones singulares* con las cuales se pueden modelar y caracterizar una gran diversidad de señales diferentes a las analizadas anteriormente. Se llaman funciones singulares debido a que tienen propiedades y características específicas, además de discontinuidades o sus derivadas son discontinuas.

2.6.1

Función Impulso unitario

La *función impulso o delta de Dirac* se denota como $\delta(t)$ o $u_0(t)$, la cual se define en términos de su área como

Función Impulso $\delta(t)$ o $u_0(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \quad (2.52)$$

o bien como

$$\int_{-\infty}^{\infty} A\delta(t) dt = \begin{cases} A & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \quad (2.53)$$

El impulso unitario tiene tres características, duración cero, amplitud infinita y área unitaria; características que lo hacen ser una función especial e ideal, (aunque en realidad corresponde a una distribución, más que una función). Sin embargo, es de gran importancia para caracterizar y determinar la respuesta de sistemas.

Una descripción intuitiva del impulso es representarlo en términos de un pulso rectangular de ancho $2|\frac{\epsilon}{2}|$ y altura $\frac{1}{\epsilon}$, de manera que el área siempre sea unitaria. Conforme ϵ se aproxima a cero, el ancho del pulso se aproxima a cero y su altura tiende a infinito, permaneciendo el área unitaria y aproximándose al impulso unitario, esto es

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} P_{\epsilon}(t)$$

En donde $P_{\epsilon}(t)$ es una función rectangular de área unitaria. Esta aproximación se muestra en la figura 2.22. La función impulso unitario también se presenta en términos de la integral de la multiplicación de una función $x(t)$ por la propia función delta

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t) dt = x(0) \quad (2.54)$$

Ya que el impulso sólo está presente en $t = 0$, entonces de acuerdo con la Ec. (2.53) corresponde a $x(t = 0) = x(0)$, si es continua en $t = 0$.

Esta expresión se puede generalizar como

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau = x(t)$$

Más adelante se presentan las propiedades del impulso y señales reales que se pueden aproximar a esta función.

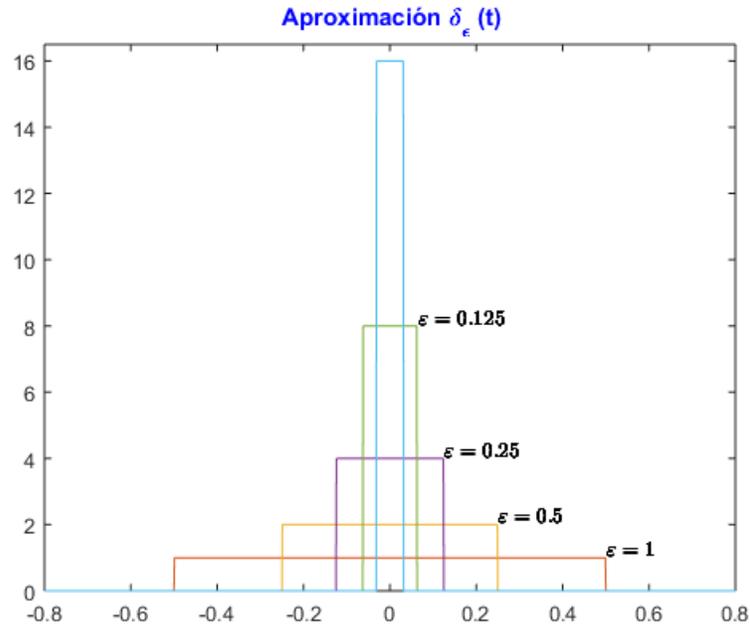


Figura 2.22: Aproximación al impulso mediante un pulso rectangular

```
%Figura 2.22 Ejemplo de Aproximacion al impulso con la funcion pulso(t)
t=-.8:.001:.8;
eps=[1 .5 .25 .125 1/16];
for i=1:5
x=pulso(1/(eps(i))*t);
plot(t, (1/eps(i)).*x)
hold on
end
title(' Aproximacion \delta_\epsilon (t)')
%title('y = \ite^{\lambda t}','Color','b')
%title('Ae^{\alphi} for A = 0.25 and \alpha = -0.0005')
axis([-0.8 .8 0 16.5]);
str = '$$ \varepsilon = 1$$';
text(.5,1.2,str,'Interpreter','latex')
str = '$$ \varepsilon = 0.5$$';
text(.25,2.2,str,'Interpreter','latex')
str = '$$ \varepsilon = 0.25$$';
text(.125,4.2,str,'Interpreter','latex')
str = '$$ \varepsilon = 0.125 $$';
text(.065,8.2,str,'Interpreter','latex')
```

2.6.2

Escalón Unitario

La *función escalón unitario* denotada como $u(t)$ o $u_{-1}(t)$ se define como

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (2.55)$$

El valor de esta función en $t = 0$ no se especifica sólo se dice que es de valor finito, dado que presenta una discontinuidad en $t = 0$.

Cabe mencionar que la definición de la Ec. (2.55) es válida también cuando se considera el argumento una función, esto es

$$u[f(t)] = \begin{cases} 1 & f(t) > 0 \\ 0 & f(t) < 0 \end{cases}$$

De manera general, se pueden modelar otras funciones singulares a través de integrar o diferenciar $u_0(t)$, el impulso unitario, siendo la forma genérica

$$u_{i-1}(t) = \int_{-\infty}^t u_i(\tau) d\tau \quad i \text{ entero} \quad (2.56)$$

o bien,

$$u_{i+1}(t) = \frac{du_i(t)}{dt} \quad i \text{ entero} \quad (2.57)$$

Por ejemplo, con $i = 0$ en la Ec. (2.56) se obtiene el escalón unitario

$$u_{-1}(t) = \int_{-\infty}^t u_0(\tau) d\tau = 1 \quad t > 0 \quad (2.58)$$

con $i = 0$ en la Ec. (2.57) se obtiene el llamado doblete $u_1(t)$

$$u_1(t) = \frac{du_0(t)}{dt} \quad (2.59)$$

y con $i = 1$ en la Ec. (2.57) se obtiene el nombrado triplete $u_2(t)$ y así sucesivamente. Estas señales, el doblete y triplete, al igual que el impulso son funciones singulares ideales que se utilizan para fines de demostraciones analíticas.

2.6.3

Rampa

La *función rampa* $r(t)$ o $u_{-2}(t)$ se obtiene al integrar la función escalón $u_{-1}(t)$ en la Ec. (2.56).

$$u_{-2}(t) = \int_{-\infty}^t u_{-1}(\tau) d\tau = \int_{0^+}^t d\tau = t \quad t \geq 0 \quad (2.60)$$

o bien,

$$r(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (2.61)$$

la cual a su vez al integrarla se obtiene la parábola $p(t)$ o $u_{-3}(t)$

$$u_{-3}(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (2.62)$$

y de manera similar se pueden generar y modelar otras funciones de cualquier orden. La figura 2.23 muestra una gráfica de estas señales.

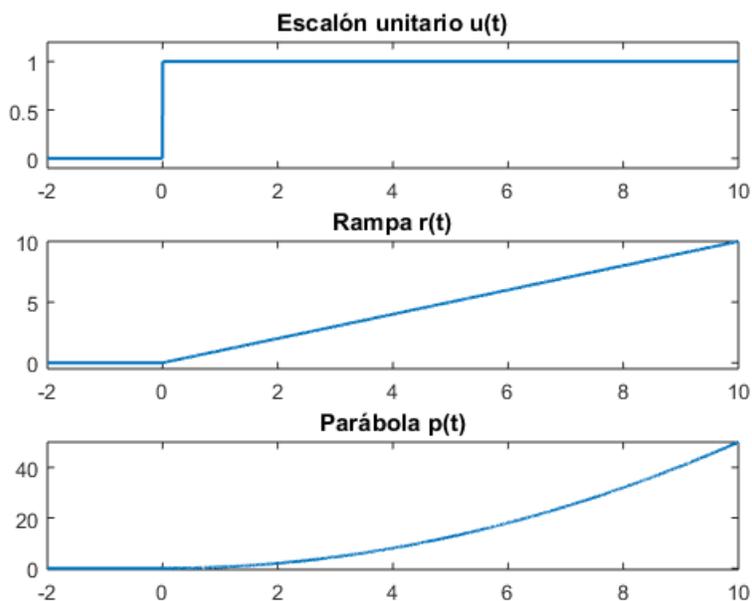


Figura 2.23: Funciones singulares en tiempo continuo

```

%Figura 2.23 Ejemplo de senales escalon, rampa, y parabola
t=-2:.001:10;
subplot(311), plot(t,us(t),'Linewidth',1.5);
title('Escalon unitario u(t)');axis([-2 10 -.1 max(us(t))+.2])
subplot(312), plot(t,rs(t),'Linewidth',1.5);
title('Rampa r(t)');axis([-2 10 -.5 max(rs(t))])
subplot(313), plot(t,ps(t),'Linewidth',1.5);
title('Parabola p(t)');axis([-2 10 -.5 max(ps(t))])

```

Ejemplo 2.7

Expresé las señales en TC mostradas en la figura 2.24 en términos de funciones singulares y gráfíquelas en MATLAB para validar su respuesta.

Solución

Las expresiones matemáticas de estas señales son las siguientes

$$x_1(t) = u(t+2) + u(t+1) + u(t) - 1.5r(t-2) + 1.5r(t-4) \quad (2.63)$$

$$x_2(t) = p(t+3) - p(t-1) - 2r(t+1) - 2u(t-1) + p(-t+3)(u(t-1) - u(t-3)) \quad (2.64)$$

su representación gráfica se muestra en la figura 2.24

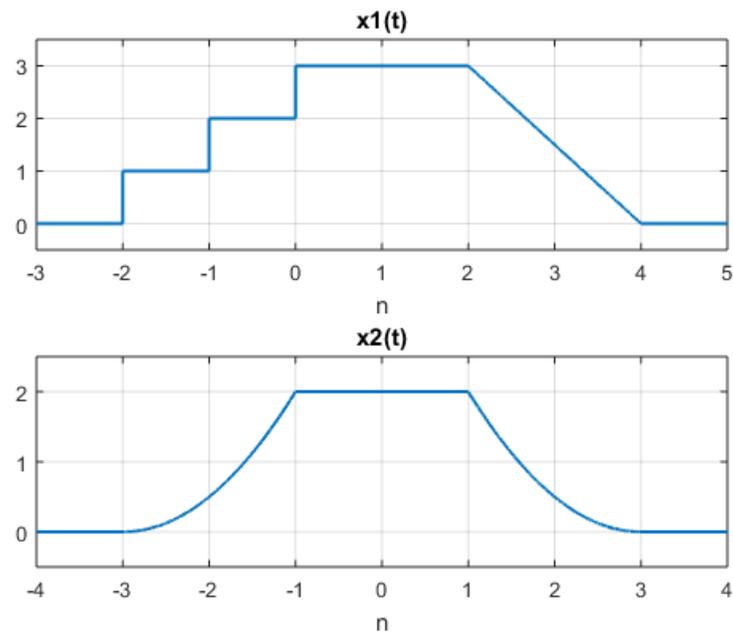


Figura 2.24: Señales arbitrarias en tiempo continuo

```

%Figura 2.24 Senales arbitrarias con funciones singulares
t=-4:.001:5;
set(gcf,'defaultlinelinerwidth',1.5)
x1=us(t+2)+us(t+1)+us(t)-1.5*rs(t-2)+1.5*rs(t-4);
x2=ps(t+3)-ps(t+1)-2*rs(t+1)-2*us(t-1)+ps(-t+3).*(us(t-1)-us(t-3));
subplot(211), plot(t,x1)
title('x1(t)')
grid
axis([-3 5 -.5 3.5])
subplot(212), plot(t,x2)
title('x2(t)')
axis([-4 4 -.5 2.5]);grid

```

2.6.4

Señal Sinc

Otra función sumamente importante en el análisis de señales, tanto en dominio del tiempo como en el de la frecuencia, es la función *seno cardinal* denotada como $sinc(t)$ dada por la Ec. (2.65). Dado que esta función en su definición, seno del argumento entre el argumento, está indeterminada para valores de $t = 0$, se aplica la regla de L'Hôpital para evaluar la función en este valor, resultando en una amplitud de $sinc(t) = 1$ en $t = 0$. El seno cardinal se representa en dos formas, la normalizada y la no normalizada.

Función $sinc(t)$ normalizada

$$sinc(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} & t \neq 0 \end{cases} \quad (2.65)$$

en cuyo caso el área es

$$\int_{-\infty}^{\infty} sinc(t) dt = 1 \quad (2.66)$$

Función seno cardinal $Sa(t)$ no normalizada

$$Sa(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ \frac{\sin(t)}{t} & t \neq 0 \end{cases} \quad (2.67)$$

siendo el área

$$\int_{-\infty}^{\infty} Sa(t) dt = \pi \quad (2.68)$$

En ambas la amplitud es 1 en $t = 0$. La gráfica de la función *sinc* de las dos representaciones se muestra en la figura 2.25. Para distinguir entre las funciones *sinc* normalizada y la no normalizada, se tomará en este texto la representación $sinc(t)$ y $Sa(t)$ respectivamente.

Se observa en la figura que $sinc(t)$ cruza en cero en múltiplos enteros de t , diferente de cero, mientras que $Sa(t)$ cruza en cero en tiempos múltiplos de π .

Cabe mencionar que la función seno cardinal se ha definido con la variable independiente t , sin embargo puede utilizarse alguna otra variable independiente.

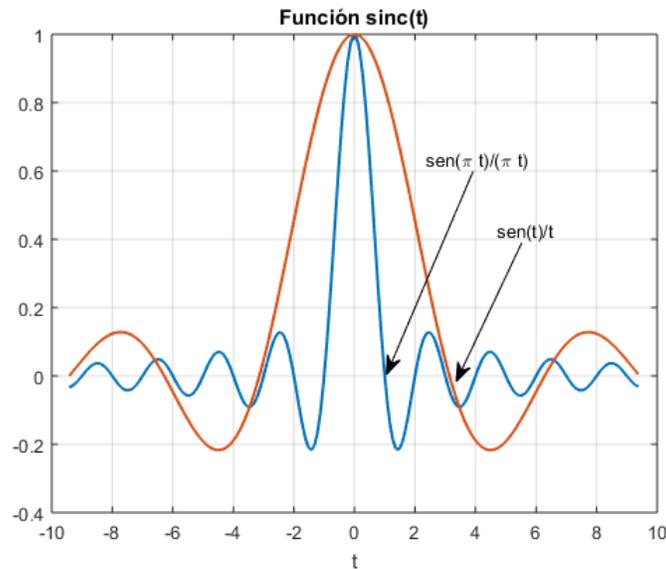


Figura 2.25: Señal $sinc(t)$

```
%Figura 2.25 Senal sinc
t=-3*pi:.1:3*pi;
x1=sinc(t); %Funcion sinc normalizada sinc(t)=sin(pi*t)/(pi*t)
x2=sinc(t/pi); %Funcion sinc NO normalizada sinc(t/pi)=sin(t)/(t)
plot(t,x1,t,x2,'Linewidth',1.5); grid
title('Funcion sinc(t)'); xlabel('t')
```

Ejemplo 2.8

Considere la función $X(\omega)$ indicada. Expresé $X(\omega)$ en términos de la función seno cardinal $sinc(\omega)$ normalizada y en la no normalizada $Sa(\omega)$ en donde

$$X(\omega) = \frac{2 \sin(\omega)}{\omega}$$

Solución

De manera directa se observa la función seno cardinal no normalizada, la Ec. (2.67)

$$X(\omega) = 2 Sa(\omega)$$

Para la función *sinc* normalizada, la Ec. (2.65), ω cambia a ω/π obteniendo

$$\text{sinc}(\omega/\pi) = \frac{\sin(\pi(\omega/\pi))}{\pi(\omega/\pi)}$$

de manera que

$$X(\omega) = 2 \text{sinc}(\omega/\pi)$$

Cuya amplitud en ambos casos es 2 en $\omega = 0$.

Ejemplo 2.9

Considere la función discreta $X(k)$ como se indica. Expresé y grafique $X(k)$ en términos de la función *sinc*() normalizada.

$$X(k) = \frac{1}{k\pi} \sin(k\pi/2) e^{-jk\pi/2} \quad k \text{ entero} \quad (2.69)$$

Solución

Aplicando la Ec. (2.65), $k\pi/2$ cambia a $k/2$ obteniendo

$$\text{sinc}(k/2) = \frac{\sin(\pi(k/2))}{\pi(k/2)} \quad (2.70)$$

o bien, reordenando términos

$$\frac{1}{2} \text{sinc}(k/2) = \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi} \quad (2.71)$$

obteniendo,

$$X(k) = \frac{1}{2} \text{sinc}(k/2) e^{-jk\pi/2}$$

En la figura 2.26 se grafica la señal discreta $X(k)$, su magnitud y su ángulo. Se muestra en línea punteada la envolvente de la señal.

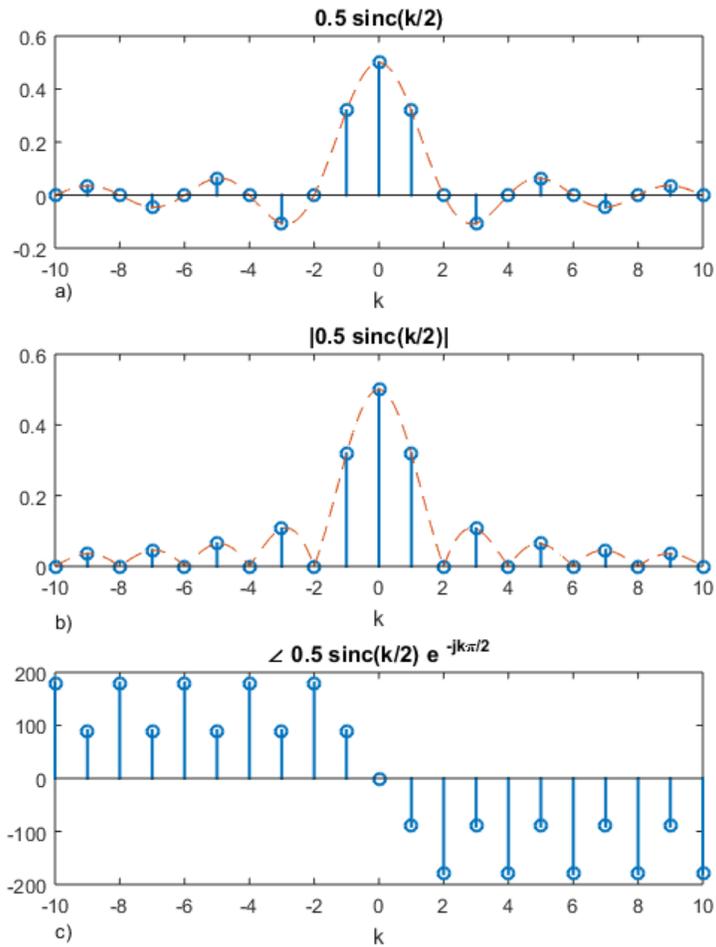


Figura 2.26: a) Señal $\frac{1}{2} \text{sinc}(k/2)$ b) Magnitud $|X(k)|$ c) Fase $\angle(X(k))$

```

%Figura 2.26 sinc discreto
k=-10:10;
x=0.5*sinc(k/2); %.*exp(-j*k*pi/2);
subplot(311),stem(k,x, 'LineWidth',1.5);
title('0.5 sinc(k/2)'); xlabel('k')
k1=-10:.1:10;
x1=0.5*sinc(k1/2); %.*exp(-j*k*pi/2);
hold on;
subplot(311),plot(k1,x1, '--')
text(-10,-.35,'a')

x=0.5*sinc(k/2) .*exp(-j*k*pi/2);
subplot(312),stem(k,abs(x), 'LineWidth',1.5);
title('|0.5 sinc(k/2)|'); xlabel('k')
k1=-10:.1:10;
x1=0.5*sinc(k1/2); %.*exp(-j*k*pi/2);
hold on;
subplot(312),plot(k1,abs(x1), '--')
text(-10,-.15,'b')

```

```

%x=0.5*sinc(k/2).*exp(-j*k*pi/2);
subplot(313),stem(k,angle(x)*180/pi,'LineWidth',1.5);
title('\angle 0.5 sinc(k/2){ e }^{-jk\pi/2}')
text(-10,-285,'c');; xlabel('k')

```

2.6.5

Pulso unitario

El *pulso unitario* $\Pi(t)$ es una función determinística, discontinua en el tiempo y aperiódica definida como Pulso unitario $\Pi(t)$ o $rect(t)$

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{1}{2} \\ 0 & |t| > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2.72)$$

también se define en términos del escalón unitario como

$$\Pi(t) = rect(t) = u(t+0.5) - u(t-0.5) \quad (2.73)$$

Cabe mencionar que el área del pulso unitario, como el nombre lo expresa, es unitaria. Esta señal se presenta en la figura 2.27.

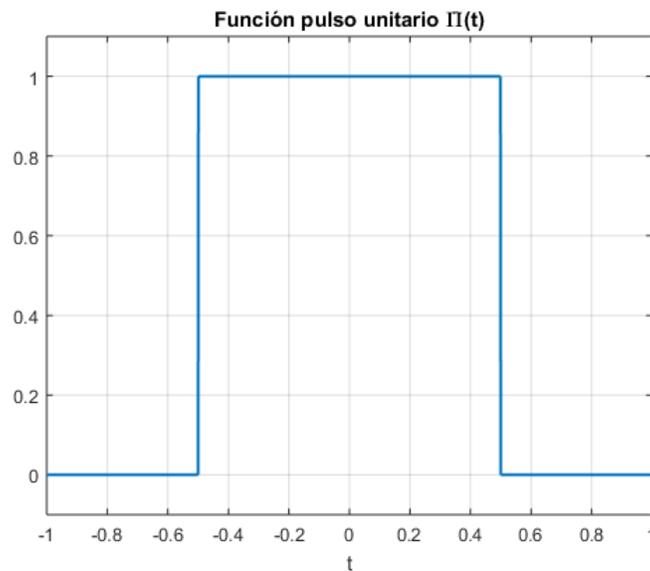


Figura 2.27: Función pulso unitario

```

%Figura 2.27 Pulso unitario
t=-1:.001:1;
plot(t,pulso(t),'Linewidth',1.5);grid
axis([-1 1 -.1 max(pulso(t)+.1)])
title('Funcion pulso unitario \Pi(t)'); xlabel('t')

```

2.6.6

Triángulo unitario

La *función triángulo unitario* $tri(t)$ es una función determinística y aperiódica, la cual también tiene área unitaria, se define como

Función Triángulo, $tri(t)$

$$tri(t) = \begin{cases} 1 - |t| & |t| < 1 \\ 0 & |t| \geq 1 \end{cases}$$

La gráfica de esta señal se presenta en la figura 2.28.

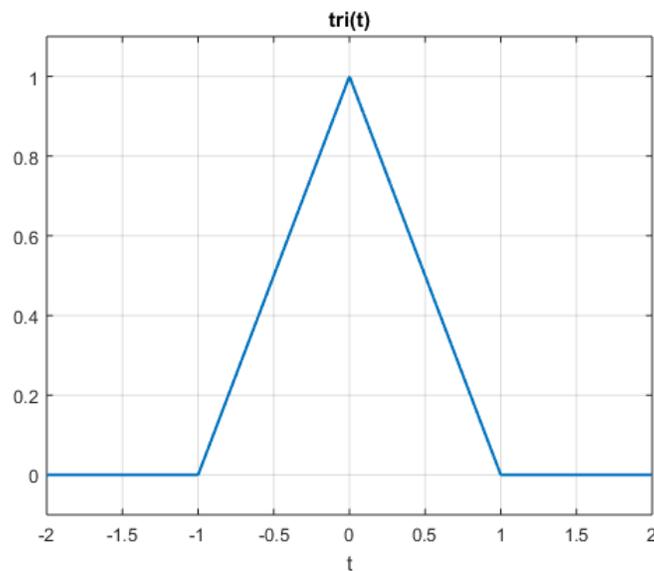


Figura 2.28: Función triángulo unitario

```

%Figura 2.28 Triangulo unitario
t=-2:.001:2;
plot(t,tri(t),'Linewidth',1.5);
title('tri(t)'), xlabel('t');grid
axis([-2 2 min(tri(t))-0.1 max(tri(t))+0.1 ])

```

2.7

Propiedades del impulso unitario

La función $\delta(t)$ no especifica un valor de la variable dependiente a partir del valor en la variable independiente, en lugar de ello se plantea mediante una integral como se expresó en la Ec. (2.53).

Una expresión más general para el impulso que surge de la Ec. (2.53) está dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t + t_0)\delta(t)dt = x(t_0) \quad (2.74)$$

donde t_0 es un tiempo arbitrario y $x(t + t_0)$ es cualquier función que es continua en $t = t_0$. A partir de esta expresión se obtienen varias propiedades de la función $\delta(t)$ que serán de gran importancia y utilidad a lo largo del texto, entre las que están

1. Propiedad de escalamiento

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t) \quad (2.75)$$

para el caso en que $a = -1$, se verifica que corresponde a la señal invertida, esto es

$$\delta(-t) = \delta(t) \quad (2.76)$$

Un escalamiento para $a > 1$ se refleja en la ponderación del impulso, por ejemplo si $a = 2$,

$$\delta(2t) = \frac{1}{|2|}\delta(t) \quad (2.77)$$

2. Propiedad de muestreo

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0)dt = x(t_0) \quad (2.78)$$

si $x(t)$ es continua en $t = t_0$.

3. Propiedad de convolución

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau = x(t) \quad (2.79)$$

4. Propiedad de multiplicación en el tiempo

$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0) \quad (2.80)$$

5. Casos especiales que involucran límites finitos en las integrales

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t) \dot{\delta}(t - t_0) dt = -\dot{x}(t_0) \quad (2.81)$$

solo si $t_1 < t_0 < t_2$.

En general, si existe la enésima derivada de $x(t)$ y es continua en $t = t_0$, se tiene:

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t) \delta^{(n)}(t - t_0) dt = (-1)^n x^{(n)}(t_0) \quad (2.82)$$

solo si $t_1 < t_0 < t_2$.

donde

$$x^{(n)}(t_0) = \left. \frac{d^n x(t)}{dt^n} \right|_{t=t_0}$$

y

$$\delta^{(n)}(t - t_0) = \frac{d^n \delta(t - t_0)}{dt^n}$$

6. Propiedad de derivación e integración

Las propiedades se obtienen al aplicar las Ecs. (2.56) y (2.57). Con la integración del impulso $\delta(t)$ se obtiene el escalón $u(t)$ y a partir de la derivada del escalón se obtiene el impulso.

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

o bien,

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

Ejemplo 2.10

Evalúe la siguiente integral

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} m(t) \delta(t - 2) dt$$

en donde

$$m(t) = e^{-at^2}$$

Solución

Ya que el impulso está atrasado en $t_0 = 2$, aplicando la propiedad de muestreo, la Ec. (2.78) se obtiene

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} m(t)\delta(t-2)dt = m(t_0) = e^{-a4}$$

2.8

Aproximaciones a la función impulso

Dado que es imposible tener físicamente una función con las características del impulso definidas en la Ec. (2.52), se puede intentar obtener una aproximación a ella considerando el límite de algún parámetro en una función que cumpla con las características de área unitaria, amplitud que tiende a infinito y duración que tienda a cero. El pulso unitario, triángulo, *sinc* son ejemplos de funciones que pueden cumplir con dichas características. Para ello, considere la señal pulso unitario $\Pi(t)$, la cual se escala en amplitud y en tiempo por un factor 2ε , de manera que en el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ esta función se aproxima a $\delta(t)$, esto es,

$$\delta(t) \cong \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(t) = \frac{1}{2\varepsilon} \Pi\left(\frac{t}{2\varepsilon}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} & |t| < \varepsilon \\ 0 & |t| > \varepsilon \end{cases} \quad (2.83)$$

la cual corresponde a una función similar a la de la figura 2.22.

Otros ejemplos de funciones que se aproximan a la función impulso son la función triangular, también escalada en amplitud y en tiempo, definida como

$$\delta(t) \cong \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1 - |t|}{\varepsilon} & |t| < \varepsilon \\ 0 & |t| > \varepsilon \end{cases} \quad (2.84)$$

La función *sinc* también es una función que se aproxima al impulso, en este caso se define como

$$\delta(t) \cong \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(t) = \varepsilon \left(\frac{1}{\pi t} \sin\left(\frac{\pi t}{\varepsilon}\right) \right)^2 = \frac{1}{\varepsilon} \text{sinc}^2(\theta) \quad (2.85)$$

en donde $\theta = t/\varepsilon$, cumpliendo con área unitaria.

Estas dos aproximaciones se presentan en la figura 2.29.

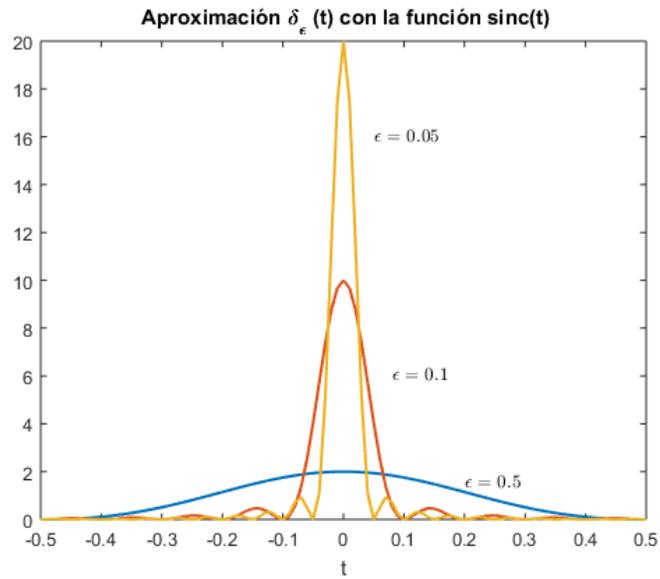


Figura 2.29: a) Aproximación $\delta_\epsilon(t)$ con una función *sinc*

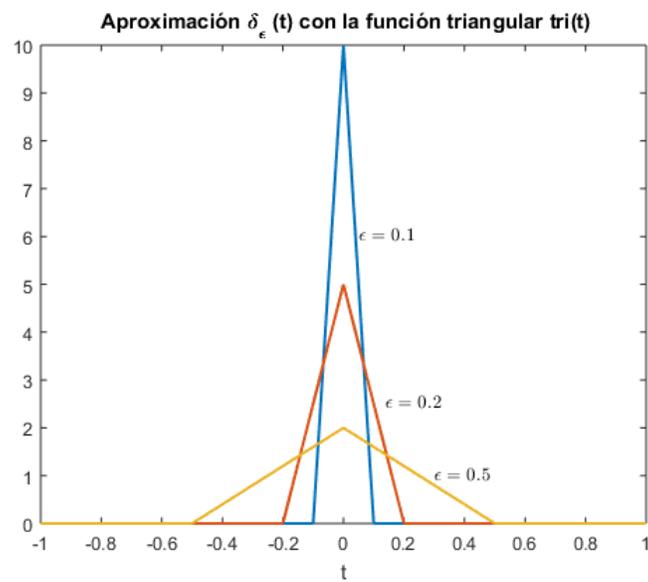


Figura 2.29: b) Aproximación $\delta_\epsilon(t)$ con una función triangular

```
%Figura 2.29 Ejemplo de aproximacion a un impulso mediante una funcion sinc
title('Aproximacion \delta_\epsilon(t)')
[t,del]=delta(-.5:.005:.5,.5);
plot(t,del,'LineWidth',1.5)
hold on
[t,del]=delta(-.5:.01:.5,.1);
plot(t,del,'LineWidth',1.5)
[t,del]=delta(-.5:.01:.5,.05);
plot(t,del,'LineWidth',1.5)
```

```

title('(1/e)*sinc(x)');
title(' Aproximacion \delta_\epsilon (t) con la funcion sinc(t)')
xlabel('t')
str = '$$ \epsilon =0.5$$';
text(0.2,1.5,str,'Interpreter','latex');
str = '$$ \epsilon =0.1$$';
text(.08,6,str,'Interpreter','latex');
str = '$$ \epsilon =0.05$$';
text(.05,16,str,'Interpreter','latex');

figure
t=-1:.001:1; eps=.1;
[t,dell]=delta1(t,eps);
plot(t,dell,'LineWidth',1.5);
hold on
eps=.2;
[t,dell]=delta1(t,eps);
plot(t,dell,'LineWidth',1.5);
hold on
eps=.5;
[t,dell]=delta1(t,eps);
plot(t,dell,'LineWidth',1.5);
hold on

title('(1/e)*sinc(x)');
title(' Aproximacion \delta_\epsilon (t) con la funcion triangular tri(t)')
xlabel('t')
str = '$$ \epsilon =0.5$$';
text(.3,1,str,'Interpreter','latex');
str = '$$ \epsilon =0.2$$';
text(.14,2.5,str,'Interpreter','latex');
str = '$$ \epsilon =0.1 $$';
text(.05,6,str,'Interpreter','latex');

```

Una función exponencial, que a pesar de no ser una señal par, que cumple con las características generales del impulso que tiende a infinito cuando el parámetro ϵ tiende a cero es

$$\delta(t) \cong \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_{\epsilon}(t) = \frac{1}{\epsilon} e^{-\frac{t}{\epsilon}} u(t) \quad (2.86)$$

que para fines prácticos es una buena aproximación al impulso. Se deja al lector graficar esta función y verificar su área unitaria.

2.9

Funciones Singulares en tiempo discreto

Las funciones que representan señales en tiempo discreto se definen de manera análoga a su contraparte en tiempo continuo.

2.9.1

Muestra unitaria o Impulso unitario

La muestra unitaria en TD es la contraparte del impulso unitario $\delta(t)$ en TC. También llamado impulso unitario o delta de Kronecker $\delta[n]$, se define como

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad (2.87)$$

o bien, la muestra unitaria desplazada es

$$\delta[n - m] = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases} \quad (2.88)$$

el papel que juega esta función es similar al comportamiento del impulso en TC. Su representación gráfica se muestra en la figura 2.30.

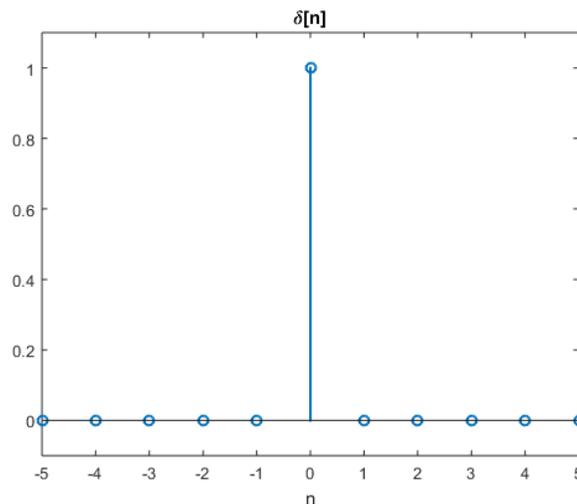


Figura 2.30: Función muestra unitaria

```
%Figura 2.30 Secuencia o muestra unitaria
```

```
n=-5:5;  
stem(n,dd(n), 'o', 'LineWidth',1.5)  
xlabel('n');  
axis([-5 5 -.1 1.1])  
title ('\delta[n]')
```

2.9.2

Secuencia escalón unitario

Esta secuencia es un caso particular de la exponencial de la Ec. (2.37), en donde $C = \alpha = 1$, definida $n \geq 0$.

$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

o bien, en forma desplazada

$$u[n-m] = \begin{cases} 1 & n \geq m \\ 0 & n < m \end{cases} \quad (2.89)$$

La muestra unitaria y la secuencia unitaria están estrechamente relacionadas, de manera que se pueden representar cada una en términos de la otra, esto es, la muestra unitaria Ec. (2.87) también se puede expresar como la diferencia de dos secuencias unitarias,

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1] \quad (2.90)$$

y el escalón unitario también se puede obtener a partir de la muestra unitaria mediante

$$u[n] = \sum_{m=0}^{\infty} \delta[n-m] \quad (2.91)$$

la cual corresponde a una suma de muestras unitarias desplazadas.

2.9.3

Secuencia rampa

La secuencia rampa se define como

$$r[n] = nu[n] = \begin{cases} n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

o bien

$$r[n-m] = \begin{cases} n-m & n \geq m \\ 0 & n < m \end{cases} \quad (2.92)$$

Las secuencias escalón unitario y rampa definidas anteriormente se muestran en la figura 2.31.

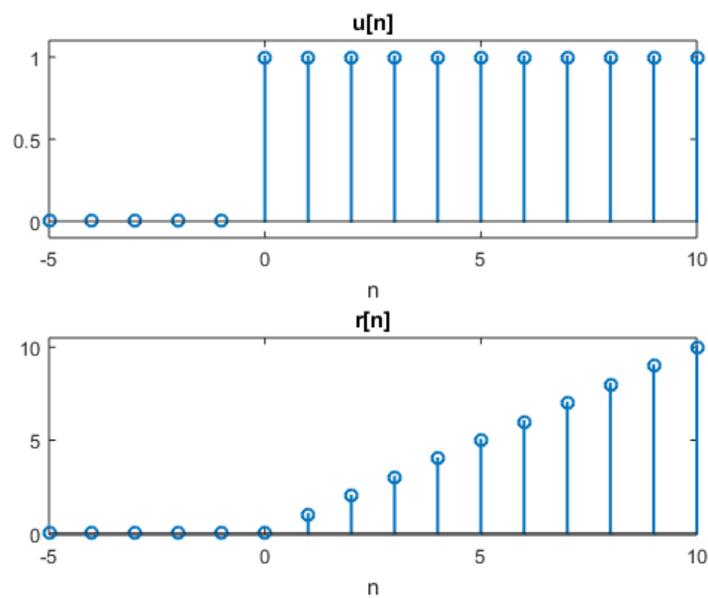


Figura 2.31: Secuencias escalón unitario y rampa

```
%Figura 2.31 Secuencias: escalon unitario y rampa
n=-5:10;
subplot(211), stem(n,ud(n), 'o', 'LineWidth',1.5)
title('u[n]'); xlabel('n');
axis([min(n) max(n) -.1 1.1])
subplot(212), stem(n,rd(n), 'o', 'LineWidth',1.5)
title('r[n]'); xlabel('n');
axis([min(n) max(n) -.1 10.5])
```

Ejemplo 2.11

Expresar las señales en TD mostradas en la figura 2.32 en términos de funciones singulares y graficarlas en MATLAB para validar su respuesta.

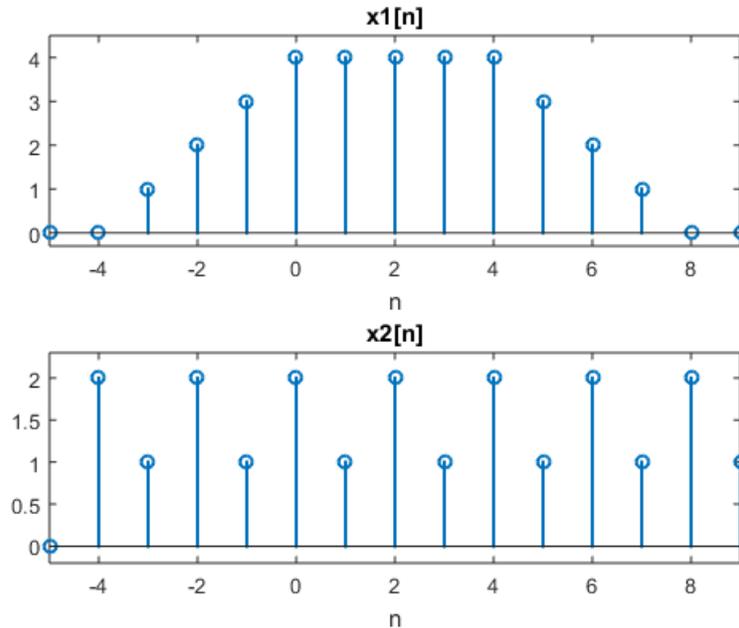


Figura 2.32: Señales arbitrarias en tiempo discreto

Solución

Las expresiones matemáticas de estas señales son las siguientes

$$x_1[n] = r[n+4] - r[n] - r[n-4] + r[n+8] \quad (2.93)$$

$$x_2[n] = u\left[\left(\frac{n+4}{2}\right)\right] + u[n+4] \quad (2.94)$$

y su representación gráfica debe coincidir con la que se muestra en la figura 2.32.

```
%Figura 2.32 Senales arbitrarias en TD
n=-5:9;
set(gcf, 'defaultlinewidth', 1.5)
x1=rd(n+4)-rd(n)-rd(n-4)+rd(n-8);
subplot(211), stem(n, x1, 'LineWidth', 1.5)
title('x1[n]'); axis([-5 9 min(x1)-.3 max(x1)+.5 ])
xlabel('n')
x2=ud((n+4)/2)+ud(n+4);
subplot(212), stem(n, x2, 'LineWidth', 1.5)
title('x2[n]'); axis([-5 9 min(x2)-.2 max(x2)+.3 ])
xlabel('n')
```

Resumen

El conocimiento de las señales, su representación matemática y las operaciones que se realizan con señales es fundamental en el análisis y procesamiento de señales.

En este capítulo se han presentado los diferentes tipos de funciones que representan las señales tanto en tiempo continuo como en tiempo discreto, incluyendo sus similitudes y sus diferencias. Se estudian las técnicas para su manipulación, tanto en amplitud como en tiempo. Se incluyen diversos ejemplos, analizados y resueltos tanto de forma analítica como haciendo uso de la herramienta de MATLAB para comprender mejor los conceptos y validar los resultados obtenidos.

Problemas

- 2.1** Defina las señales singulares escalón, rampa y parábola en tiempo continuo y en discreto, como funciones (function), en archivos *.m en MATLAB. Nómbralas respectivamente, las de en tiempo continuo como us.m, rs.m, ps.m y las de en tiempo discreto como ud.m, rd.m, pd.m. Obtenga la gráfica de cada una de ellas.
- 2.2** Con las funciones singulares definidas en el problema 2.1, obtenga y grafique las siguientes señales:
- a) $x_1(t) = u(t) - u(t - 2)$
 - b) $x_2(t) = r(t) - r(t - 2)$
 - c) $x_3(t) = u_{-3}(t) - u_{-3}(t - 2)$
 - d) $x_1[n] = u[n] - u[n - 3]$
 - e) $x_2[n] = r[n] - r[n - 3]$
 - f) $x_3[n] = u_{-3}[n] - u_{-3}[n]$
- 2.3** Para cada una de las señales mostradas en las figuras 2.33 a 2.36 en tiempo continuo y en tiempo discreto,
- a) Exprese y grafique las señales en términos de funciones singulares.
 - b) Determine y grafique la correspondiente señal Par.
 - c) Determine y grafique la correspondiente señal Impar.
 - d) Grafique las señales resultantes Par + Impar.

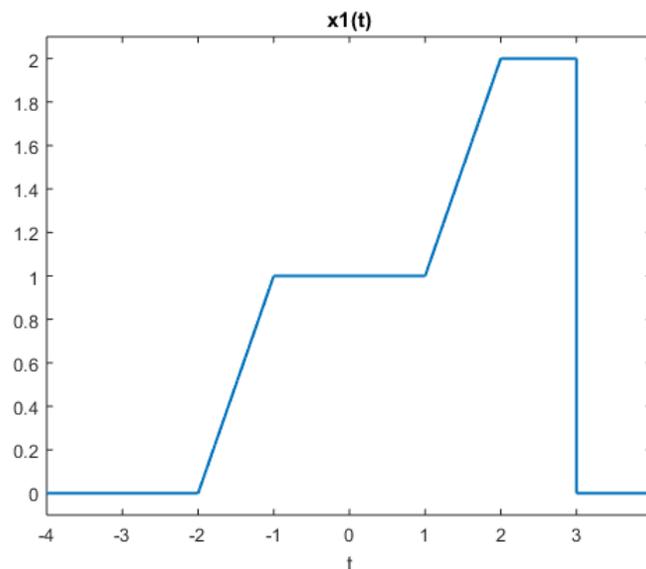


Figura 2.33: Señal arbitraria en tiempo continuo del problema 2.3

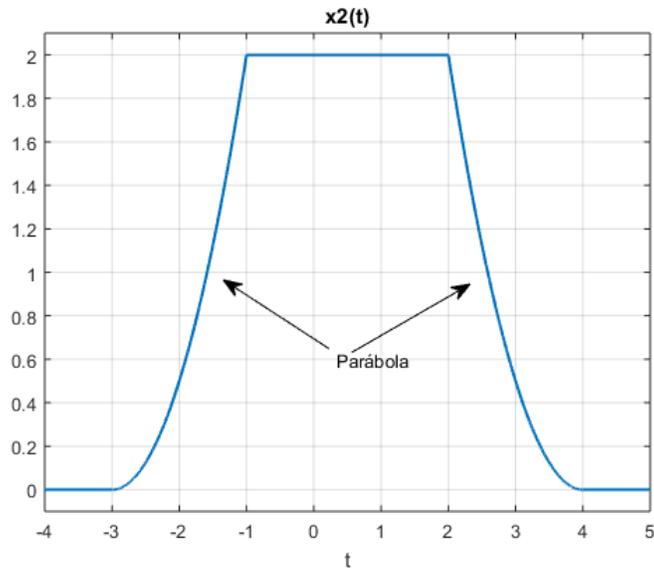


Figura 2.34: Señal arbitraria en tiempo continuo del problema 2.3

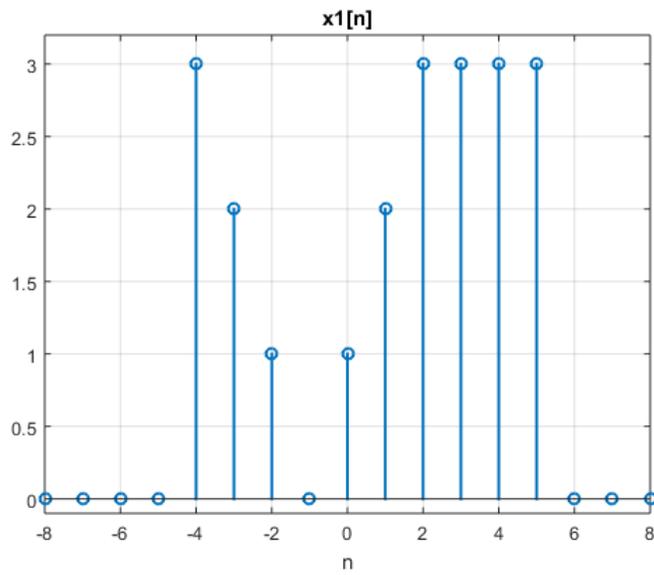


Figura 2.35: Señal arbitraria en tiempo discreto del problema 2.3

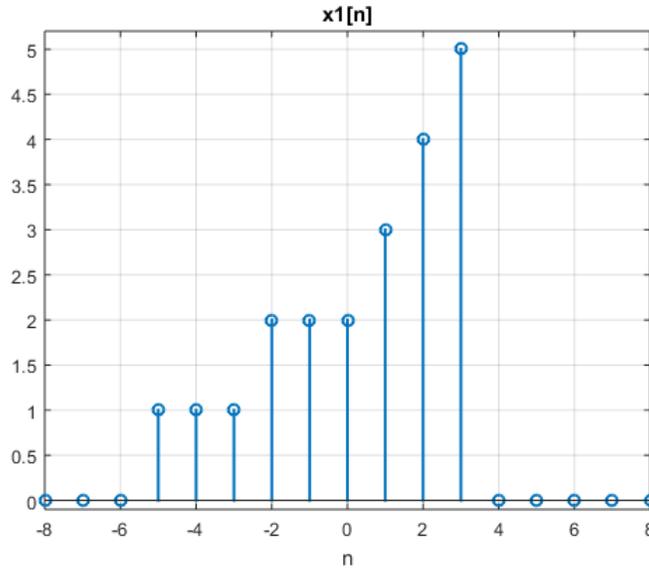


Figura 2.36: Señal arbitraria en tiempo discreto del problema 2.3

2.4 Grafique la señal y determine el periodo de cada una de las siguientes señales:

a) $x_1(t) = 5 \cos\left(\frac{2\pi}{5}t\right)$

b) $x_2(t) = 5 \cos\left(\frac{2}{5}t\right)$

c) $x_3(t) = 5 \cos\left(\frac{2\pi}{5}t + \frac{\pi}{3}\right)$

d) $x_1[n] = 5 \cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right)$

e) $x_2[n] = 5 \cos\left(\frac{2}{5}n\right)$

f) $x_3[n] = 5 \cos\left(\frac{2\pi}{5}n + \frac{\pi}{3}\right)$

2.5 Con base en los resultados del problema 2.4, responda lo siguiente. Justifique claramente su respuesta:

a) ¿Todas las señales sinusoidales en tiempo continuo son periódicas?

b) ¿Todas las señales sinusoidales en tiempo discreto son periódicas?

c) Las señales sinusoidales en tiempo continuo, para diferentes valores de ω , ¿son iguales o diferentes?

d) Las señales sinusoidales en tiempo discreto, para diferentes valores de ω , ¿son iguales o diferentes?

2.6 Las señales en tiempo continuo $x_1(t)$ y en tiempo discreto $x_1[n]$ están definidas como sigue:

$$x_1(t) = x(-2t + 3)$$

$$x_1[n] = x[-n + 2]$$

las cuales se muestran en las figuras 2.37 y 2.38 respectivamente. A partir de ellas, determine

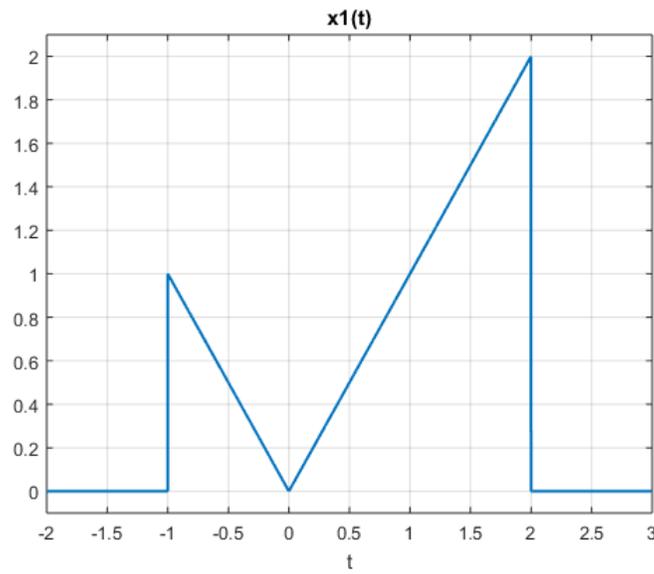


Figura 2.37: Señal arbitraria en tiempo continuo del problema 2.6

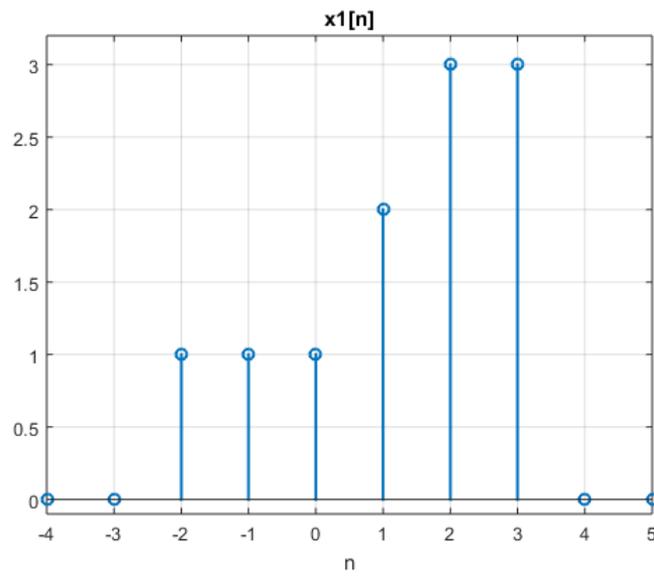


Figura 2.38: Señal arbitraria en tiempo discreto del problema 2.6

- a) $x(t)$
- b) $x(-t)$
- c) $x(t-2)$
- d) $x\left(\frac{t}{2}+2\right)$

e) $x\left(-\frac{t}{2}-3\right)$

f) $x(2t-2)$

g) $x[n]$

h) $x[-n+2]$

i) $x\left[\frac{n}{3}\right]$

j) $x[3n]$

k) $x\left[\frac{n}{2}\right]$

l) $x[2n]$

2.7 Si $x\left(\frac{t}{3}+2\right)$ es una señal escalada y desplazada en tiempo continuo, la cual se muestra en la figura 2.39, determine y grafique $x(t)$.

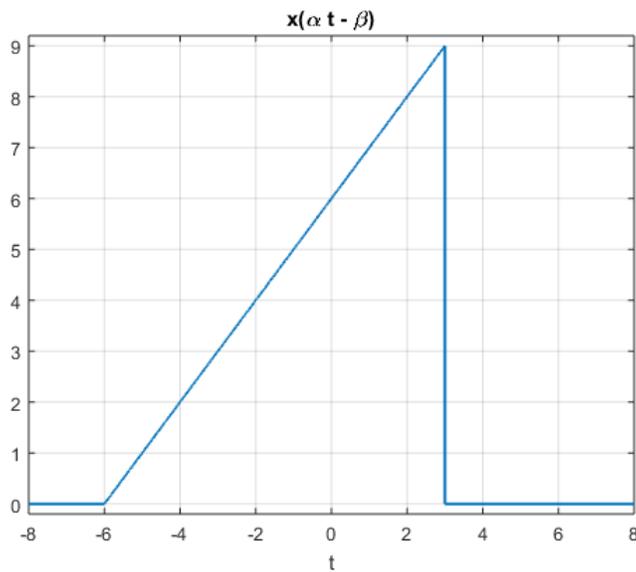


Figura 2.39: Señal arbitraria en tiempo continuo del problema 2.7

2.8 Las señales escaladas y desplazadas en tiempo discreto $x_1\left[\frac{n}{2}+3\right]$ y $x_2[-2n+3]$ se muestran en las figuras 2.40 y 2.41 respectivamente. Determine y grafique $x_1[n]$ y $x_2[n]$.

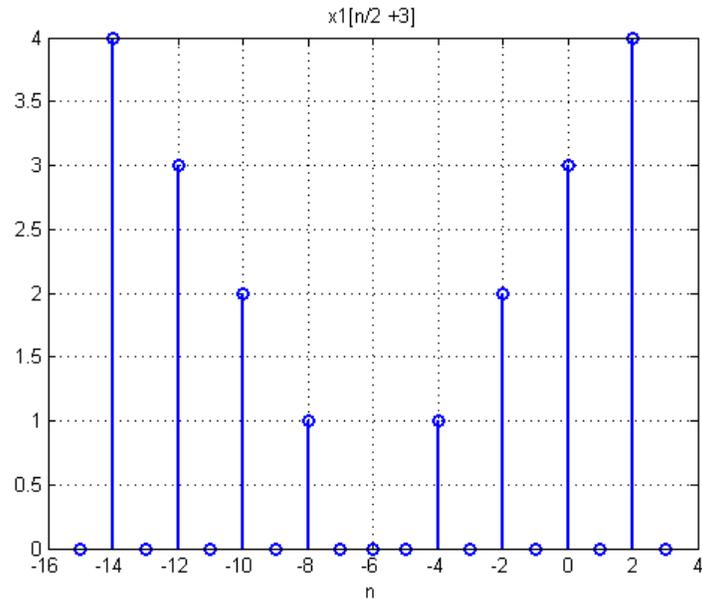


Figura 2.40: Señal arbitraria en tiempo discreto del problema 2.8

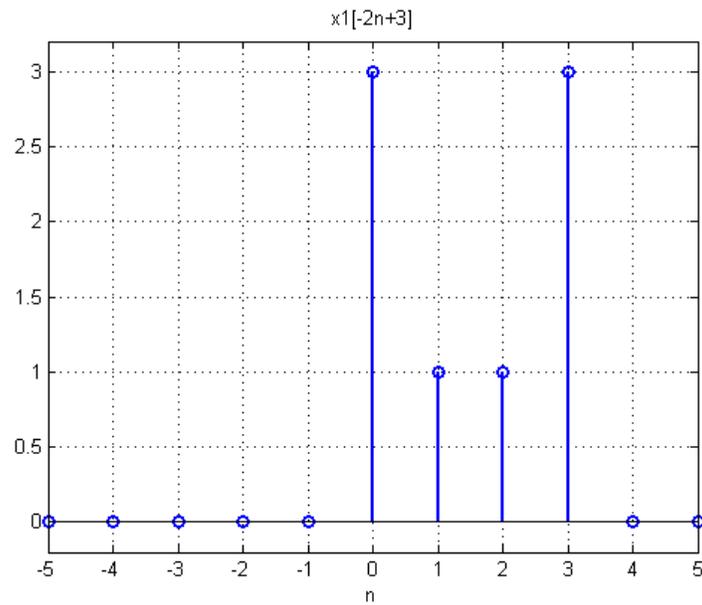


Figura 2.41: Señal arbitraria en tiempo discreto del problema 2.8

2.9 A partir de las exponenciales complejas $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_1[n]$, $x_2[n]$, definidas por

a) $x_1(t) = 5e^{j\frac{\pi}{4}t}$

b) $x_2(t) = 3e^{j(\frac{2\pi}{3}t + \frac{\pi}{8})}$

c) $x_1[n] = 5e^{j\frac{\pi}{7}n}$

d) $x_2[n] = 3e^{j(\frac{30\pi}{14}n)}$

obtenga la gráfica de

a) $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

b) $Re\{x_1(t)\}$

c) $Im\{x_1(t)\}$

d) $|x(t)|$

e) $\angle x(t)$

f) Periodo y frecuencia de $x(t)$

g) $x[n] = x_1[n] + x_2[n]$

h) $Re\{x_1[n]\}$

i) $Im\{x_1[n]\}$

j) $|x[n]|$

k) $\angle x[n]$

l) Periodo y frecuencia de $x[n]$

2.10 Evalúe las siguientes integrales.

a) $\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\delta(t-2)dt$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\delta(t+2)dt$

c) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau}\delta(t-\tau)d\tau$

d) $\int_0^{10} e^{j\frac{\pi}{4}t}\delta(t-2)dt$

e) $\int_{-10}^0 e^{j\frac{\pi}{4}t}\delta(t-2)dt$

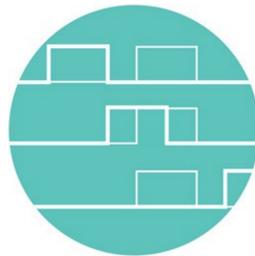
f) $\int_{-\infty}^{\infty} r(t)\delta(t-2)dt$

g) $\int_0^{10} e^{j\frac{\pi}{4}|t|}\delta(t-2)dt$

h) $\int_{-\infty}^{\infty} r(t-2)\delta(-t+2)dt$

3

Representación de Sistemas en Tiempo Continuo



3.1

Introducción

En la clasificación de sistemas del capítulo 1 surgen dos propiedades de suma importancia en el análisis de señales y sistemas, éstas son la de linealidad y la invariabilidad en el tiempo. Muchos procesos físicos y sistemas de importancia práctica poseen estas propiedades, por lo que pueden modelarse como sistemas lineales e invariantes en el tiempo (LIT), con lo que es posible analizarlos con cierto detalle. Además, muchos sistemas no lineales se representan mediante funciones que pueden ser linealizadas en un intervalo amplio de la variable t o de la señal de entrada $x(t)$, de manera que se pueden obtener resultados útiles.

Los sistemas LIT cumplen con la propiedad de superposición, esto significa que si una señal de entrada se puede representar en términos de una combinación lineal de un conjunto de señales básicas, entonces se puede utilizar la superposición para calcular la salida del sistema en términos de las respuestas a estas señales básicas, lo cual facilita en gran medida su análisis y caracterización. La respuesta de sistemas LIT a entradas específicas, que se aborda en este libro, se lleva a cabo a través de los siguientes métodos:

- Solución del modelo del sistema representado por una ecuación diferencial
- Integral de convolución
- Transformada de Laplace a través de la función del sistema
- Transformada de Fourier

Los dos primeros métodos se realizan en el dominio del tiempo ya que la representación de los sistemas y las señales asociadas están dados en términos de funciones de tiempo y los dos siguientes corresponden a métodos en el dominio de la frecuencia debido a que son especificados en términos de funciones de la variable compleja s que corresponde a la variable de frecuencia.

Por otro lado, una de las características de gran importancia del impulso unitario es que muchas señales de tipo general pueden representarse como la combinación lineal de impulsos desplazados. Esta característica junto con las propiedades de superposición e invariabilidad en el tiempo permiten desarrollar una completa caracterización de cualquier sistema LIT en términos de su respuesta al impulso unitario.

En este capítulo se analizan los sistemas que se pueden representar mediante ecuaciones diferenciales ordinarias y lineales haciendo énfasis en aquellos que son invariantes en el tiempo. La transformada de Laplace se presenta en el capítulo 4 y la Transformada de Fourier se aborda en el capítulo 7.

3.2

Representación general de un sistema

La descripción de un sistema general que relaciona una sola entrada con una sola salida se representa de manera esquemática como se muestra en la figura 3.1.



Figura 3.1: Representación general de un sistema

Se interpreta como el sistema H que opera sobre la señal de entrada para producir una señal de salida, y se denota como

$$y(t) = H\{x(t)\} \quad (3.1)$$

en donde $y(t)$ representa la salida del sistema y $x(t)$ la entrada.

Muchos sistemas y procesos en tiempo continuo relacionan la salida con la entrada mediante ecuaciones diferenciales lineales, cuya forma general se expresa como

$$\sum_{n=0}^N a_n(t) \frac{d^n y(t)}{dt^n} = \sum_{n=0}^M b_n(t) \frac{d^n x(t)}{dt^n} = x_f(t) \quad (3.2)$$

donde los coeficientes $a_n(t)$ y $b_n(t)$ pueden depender de la variable independiente t , en cuyo caso corresponde a una ecuación diferencial *variable en el tiempo*, la cual describe un sistema que es variante en el tiempo.

Se denota como $x(t)$ la entrada al sistema o función de excitación y a $x_f(t)$ la función forzada, correspondiente a la función de la Ec. (3.2) interpretada como la combinación lineal de la entrada $x(t)$ y sus derivadas.

Por ejemplo, el modelo del sistema de un circuito eléctrico resistivo-capacitivo RC de primer orden, está representado por la ecuación integro-diferencial

$$Ry(t) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t y(\tau) d\tau + V(t_0) = x_1(t)$$

siendo $y(t)$ la corriente de salida o respuesta del sistema, $V(t_0)$ el voltaje almacenado en el capacitor y $x_1(t)$ el voltaje o entrada del sistema. Al derivar ambos lados la ecuación se obtiene

$$\frac{Rdy(t)}{dt} + \frac{1}{C}y(t) = \frac{dx_1(t)}{dt}$$

En este caso, la función de entrada es $x(t) = x_1(t)$ y la función forzada es $x_f(t) = dx_1(t)/dt$.

Si los coeficientes de la Ec. (3.2) son constantes, es decir no dependen de t , la representación general toma la forma

$$\sum_{n=0}^N a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = \sum_{n=0}^M b_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} = x_f(t) \quad (3.3)$$

modelo que representa un sistema lineal e invariante en el tiempo.

3.3

Respuesta de entrada cero, de estado cero y respuesta total

La respuesta del sistema modelado mediante las Ecs. (3.2) o (3.3) corresponde a la solución de la ecuación diferencial, pudiéndose tener condiciones auxiliares y/o la señal de entrada, a partir de las cuales se obtiene una expresión explícita de la salida en términos de la entrada. La respuesta completa o total $y(t)$ de un sistema consiste de dos soluciones.

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

donde $y_h(t)$ es la solución a la ecuación homogénea, llamada función complementaria, respuesta natural, respuesta libre, respuesta transitoria (no siempre correcta), o respuesta de entrada cero. Esta última es la que adoptamos en este libro y se denota como $y_{zi}(t)$. Esta respuesta se debe exclusivamente a las energías almacenadas en los elementos del sistema.

Por otro lado, $y_p(t)$ es la respuesta de la ecuación diferencial no homogénea debida a una entrada particular, es decir, a la función forzada, $x_f(t)$ y se le llama solución particular, respuesta en estado estable, respuesta permanente (no siempre correcta), respuesta de estado con energía inicial cero, respuesta forzada o respuesta de estado cero, dado que las energías en los elementos se consideran cero. Esta última es la que se adopta en este libro, y se denota como $y_{zs}(t)$.

De manera que la respuesta total de un sistema se puede reescribir como

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) \quad (3.4)$$

En esta sección determinaremos solamente la respuesta de entrada cero $y_{zi}(t)$. Para la respuesta de estado cero $y_{zs}(t)$ se requiere del concepto de respuesta al impulso, por lo que en la Sección 3.5 se abordará esta respuesta.

Considerando que en este capítulo se presenta el planteamiento general de solución de sistemas lineales y variantes en el tiempo, haciendo énfasis en los sistemas LIT, la respuesta de entrada cero $y_{zi}(t)$ de estos sistemas, cuyo modelo es de la forma de la Ec. (3.3), corresponde a la solución de la ecuación homogénea, es decir, cuando $x_f(t) = 0$. Entonces la Ec. (3.3) toma la forma

$$\sum_{n=0}^N a_n \frac{d^n y_{zi}(t)}{dt^n} = 0 \quad (3.5)$$

Suponiendo una solución de la forma $y_{zi}(t) = e^{st}$ en la ecuación homogénea, donde s son constantes a definir, la Ec. (3.5) queda como

$$a_N s^N e^{st} + a_{N-1} s^{N-1} e^{st} + \dots + a_1 s e^{st} + a_0 e^{st} = 0$$

en donde siempre se obtendrá un polinomio de la forma

$$a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \dots + a_1 + a_0 = 0$$

que también se puede expresar como

$$s^N + \frac{a_{N-1}}{a_N} s^{N-1} + \dots + \frac{a_1}{a_N} s + \frac{a_0}{a_N} = 0$$

Este polinomio en s es de orden N y se le nombra ecuación característica, cuyas raíces pueden ser reales, imaginarias y/o complejas. Para el caso de raíces no repetidas, la respuesta adquiere la forma

$$y_{zi}(t) = \sum_{n=1}^N C_n e^{s_n t} \quad (3.6)$$

donde C_n son constantes que dependen de las energías almacenadas en los elementos del sistema y s_n son las raíces de la ecuación característica.

Para el caso de raíces que se repiten k veces la respuesta es de la forma:

$$y_{zi}(t) = \sum_{n=1}^k C_n t^{n-1} e^{s_k t} \quad (3.7)$$

donde s_k son la raíces repetidas y k es el número de repeticiones que se presentan.

Por ejemplo, considerando el caso de un sistema de tercer orden en la Ec. (3.3), la ecuación característica también es de tercer orden y suponiendo que sus raíces son $s_1, s_2 = s_3$, la respuesta de entrada cero es de la siguiente forma:

$$y_{zi}(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} + C_3 t e^{s_2 t}$$

Ejemplo 3.1

Considere el circuito RL de primer orden (sólo incluye un elemento que almacena energía) de la figura 3.2, cuyo modelo es el de la Ec. (3.8) Determine la respuesta de entrada cero si la corriente almacenada en el inductor en $t = 0$ es I_0 .

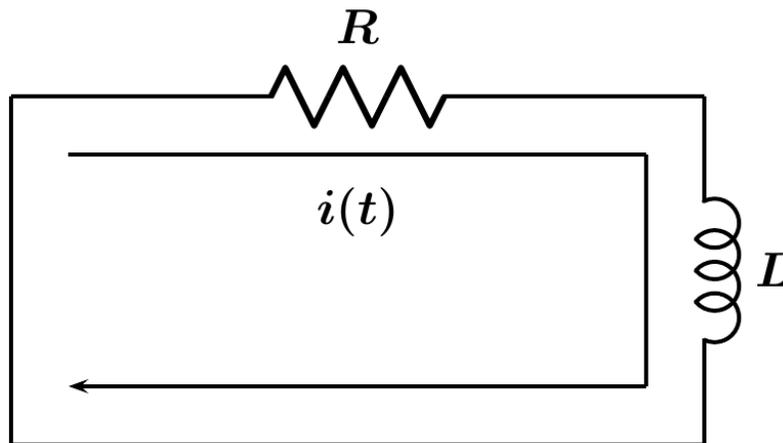


Figura 3.2: Circuito RL con energía almacenada en el inductor y sin excitación

Solución

El modelo de este circuito está dado por

$$\frac{Ldi(t)}{dt} + Ri(t) = 0 \quad (3.8)$$

Este circuito almacena energía debido al inductor, y no tiene excitación alguna, por lo que sólo incluye la respuesta de entrada cero $i_{zi}(t)$, la cual se obtiene de la ecuación homogénea que es la Ec. (3.8).

Como se mencionó anteriormente, las funciones exponenciales de la forma e^{st} cumplen como respuesta para las ecuaciones diferenciales que tiene la forma de la Ec. (3.3), donde s es una constante a determinar, de manera que si $i(t) = e^{st}$ entonces $di/dt = se^{st}$, las cuales al sustituirlas en la Ec. (3.8) queda

$$Lse^{st} + Re^{st} = 0$$

o bien

$$(Ls + R)e^{st} = 0 \quad (3.9)$$

y ya que e^{st} no puede ser cero, obtenemos

$$Ls + R = 0$$

$$s = \frac{-R}{L}$$

Así que la respuesta de entrada cero es

$$i_{zi}(t) = Ce^{-\frac{R}{L}t} \quad (3.10)$$

donde la constante C depende de la condición inicial en $t = 0$, por lo que en este tiempo se evalúa la Ec. (3.10).

$$i(0) = I_0 = C$$

De manera que la respuesta total, para este caso en particular, es la respuesta de entrada cero

$$i(t) = i_{zi}(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} \quad (3.11)$$

La cual tiene la forma de una exponencial decreciente que inicia en I_0 y que decae con una constante de tiempo L/R como se muestra en la figura 3.3.

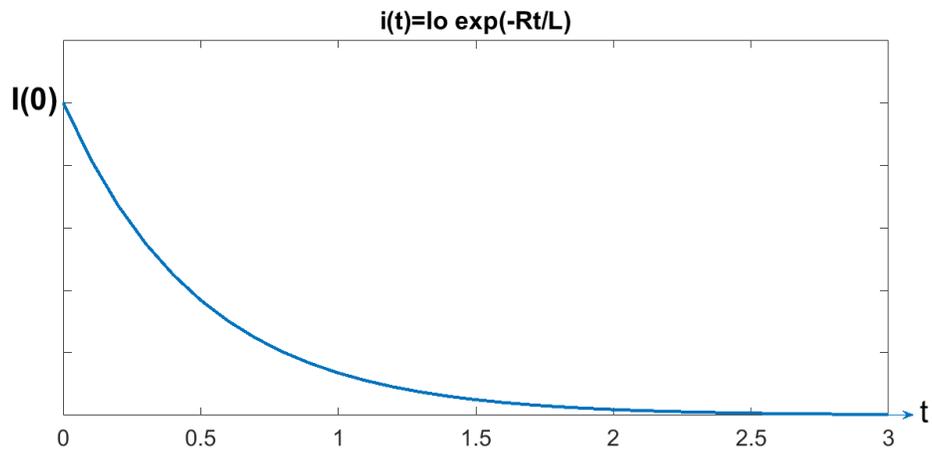


Figura 3.3: Respuesta de entrada cero para un circuito RL

3.4

Respuesta transitoria y respuesta permanente

Toda respuesta puede contener una respuesta transitoria y una permanente o de estado estable. La respuesta transitoria, si existe, es la parte de la respuesta que tiende a cero conforme $t \rightarrow \infty$. La respuesta en estado estable o permanente, es la que no es cero cuando $t \rightarrow \infty$.

Ejemplo 3.2

Considerando la respuesta del ejemplo 3.1, la Ec. (3.11), ¿Cuál es la respuesta transitoria y la de estado permanente?

Solución

De la Ec. (3.11) o la gráfica de la figura 3.3, es fácil observar que la respuesta transitoria, que tiende a cero conforme $t \rightarrow \infty$ es precisamente $i(t)$; mientras que la respuesta permanente es cero.

3.5

Respuesta de estado cero y respuesta al impulso

La respuesta al impulso unitario es la respuesta del sistema cuando la entrada es un impulso unitario. Para definirla, se parte de la Ec. (2.79), la propiedad de convolución del impulso

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau$$

Si $x(t)$ es la entrada al sistema, entonces la salida o respuesta de estado cero $y_{zs}(t)$, dado que no se consideran energías almacenadas, se representa de acuerdo con la Ec. (3.1), como

$$y_{zs}(t) = H \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau \right\} \tag{3.12}$$

Sin embargo, ya que τ es una variable auxiliar y t es la variable independiente, operando H sobre t y no τ , la Ec. (3.12) se puede expresar como

$$y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)H\{\delta(t - \tau)\}d\tau$$

o bien

$$y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t, \tau)d\tau \tag{3.13}$$

siendo $h(t, \tau) = H\{\delta(t - \tau)\}$ precisamente la respuesta a una entrada impulso o simplemente respuesta al impulso, cuando éste se aplica en $t = \tau$ como se muestra en la figura 3.4. Para sistemas LIT, $h(t, \tau) = h(t - \tau)$ y la Ec. (3.14) cambia a

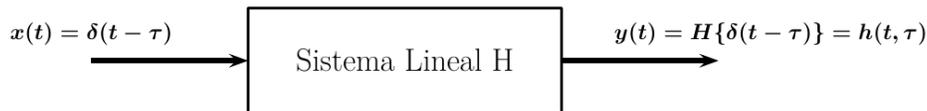


Figura 3.4: Respuesta del sistema cuando la entrada es un impulso

$$y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \tag{3.14}$$

De manera similar, si la entrada es $x_f(t)$, la respuesta al impulso es $h_f(t, \tau)$ y la respuesta de estado cero es

$$y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_f(\tau)h_f(t, \tau)d\tau \tag{3.15}$$

De las Ecs. (3.14) y (3.15) se puede observar que si conocemos la respuesta al impulso, podemos encontrar entonces la respuesta de estado cero.

Haciendo referencia al modelo lineal de la Ec. (3.2), la respuesta al impulso $h_f(t)$, que se debe a $x_f(t)$ y no a $x(t)$, se puede obtener a partir de la respuesta de entrada cero $y_{zi}(t)$, deducción que se presenta en el Apéndice C.

$$h_f(t, \tau) = y_{zi}(t, \tau)u(t - \tau) \quad (3.16)$$

debiendo cumplir las condiciones

$$\begin{aligned} y_{zi}(t) \Big|_{t=\tau} &= 0 \\ \frac{dy_{zi}}{dt} \Big|_{t=\tau} &= 0 \\ \frac{d^2 y_{zi}}{dt^2} \Big|_{t=\tau} &= 0 \\ &\dots \\ \frac{d^{N-1} y_{zi}}{dt^{N-1}} \Big|_{t=\tau} &= \frac{1}{a_N(\tau)} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Por ejemplo, para un sistema de primer orden, $N = 1$ las condiciones serían

$$y_{zi}(t) \Big|_{t=\tau} = \frac{1}{a_1(\tau)}$$

para un sistema de segundo orden, $N = 2$,

$$\begin{aligned} y_{zi}(t) \Big|_{t=\tau} &= 0 \\ \frac{dy_{zi}}{dt} \Big|_{t=\tau} &= \frac{1}{a_2(\tau)} \end{aligned}$$

y para un sistema de tercer orden, $N = 3$,

$$\begin{aligned} y_{zi}(t) \Big|_{t=\tau} &= 0 \\ \frac{dy_{zi}}{dt} \Big|_{t=\tau} &= 0 \\ \frac{d^2 y_{zi}}{dt^2} \Big|_{t=\tau} &= \frac{1}{a_3(\tau)} \end{aligned}$$

y así sucesivamente.

Una vez que se conoce $h_f(t, \tau)$, es posible determinar $h(t, \tau)$ como una combinación lineal de aquella. Para ello, realizaremos el siguiente procedimiento.

Retomando de nuevo el modelo de un sistema lineal, expresado en la Ec. (3.2)

$$\sum_{n=0}^N a_n(t) \frac{d^n y(t)}{dt^n} = x_f(t) \quad (3.18)$$

donde

$$x_f(t) = \sum_{n=0}^M b_n(t) \frac{d^n x(t)}{dt^n} \quad (3.19)$$

Observamos en la Ec. (3.19) que la función forzada $x_f(t)$ es una combinación lineal de la entrada al sistema $x(t)$ y sus derivadas. Considerando la entrada del sistema $x(t) = \delta(t - t_1)$, que representa un impulso en un tiempo arbitrario t_1 , la Ec. (3.19) se expresa como

$$x_f(t) = \sum_{n=0}^M b_n(t) \frac{d^n \delta(t - t_1)}{dt^n} \quad (3.20)$$

La respuesta al impulso del sistema $h(t, t_1)$, que es una respuesta de estado cero, se obtiene mediante la Ec. (3.15), esto es, la entrada al sistema $x(t) = \delta(t - t_1)$ produce la respuesta $y_{zs}(t) = h(t, t_1)$. Este planteamiento se esquematiza en la figura 3.5.

En la figura 3.5 se presenta que una entrada impulso produce la respuesta al impulso; que una señal $x_f(t)$ que es la suma de $x(t) = \delta(t)$ y sus derivadas producirán la respuesta al impulso como la suma de las respuestas debidas a cada uno de los términos de $x_f(t)$.

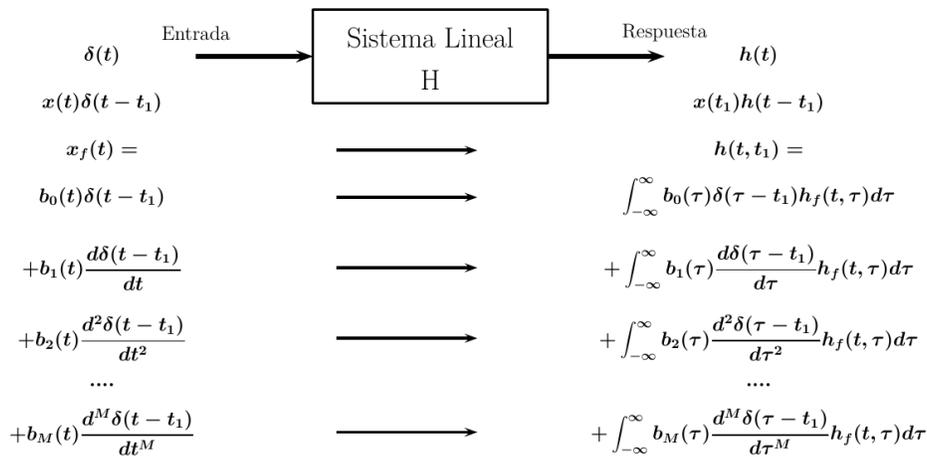


Figura 3.5: Obtención de la respuesta al impulso $h(t, t_1)$ a partir de $x_f(t)$ y $h_f(t, \tau)$

La respuesta al impulso aplicando la Ec. (3.15) queda

$$h(t, t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^M b_n(\tau) \frac{d^n \delta(\tau - t_1)}{d\tau^n} h_f(t, \tau) d\tau \quad (3.21)$$

o bien

$$h(t, t_1) = \sum_{n=0}^M \int_{-\infty}^{\infty} b_n(\tau) \frac{d^n \delta(\tau - t_1)}{d\tau^n} h_f(t, \tau) d\tau$$

Pero aplicando la Propiedad 5 del impulso unitario, la Ec. (2.82)

$$h(t, t_1) = \sum_{n=0}^M (-1)^n \frac{d^n \{b_n(\tau) h_f(t, \tau)\}}{d\tau^n} \Big|_{\tau=t_1}$$

ya que t_1 es un tiempo arbitrario, se puede tomar $\tau = t_1$ de manera que se obtiene

$$h(t, \tau) = \sum_{n=0}^M (-1)^n \frac{d^n \{b_n(\tau) h_f(t, \tau)\}}{d\tau^n} \quad (3.22)$$

Para el caso específico de sistemas invariantes en el tiempo, $h(t, \tau) = h(t - \tau)$, $h_f(t, \tau) = h_f(t - \tau)$ y $b_n(\tau) = b_n$, quedando la Ec. (3.22) como

$$h(t - \tau) = \sum_{n=0}^M b_n (-1)^n \frac{d^n \{h_f(t - \tau)\}}{d\tau^n} \quad (3.23)$$

Tomando en cuenta que

$$\frac{d^n h_f(t - \tau)}{dt^n} = (-1)^n \frac{d^n h_f(t - \tau)}{d\tau^n}$$

la Ec. (3.23) queda

$$h(t - \tau) = \sum_{n=0}^M b_n \frac{d^n \{h_f(t - \tau)\}}{dt^n} \quad (3.24)$$

la cual para sistemas lineales e invariantes en el tiempo que inician en $\tau = 0$, la Ec. (3.24) queda como

$$h(t) = \sum_{n=0}^M b_n \frac{d^n h_f(t)}{dt^n} \quad (3.25)$$

De manera que la respuesta al impulso se interpreta como una combinación lineal de $h_f(t)$ y sus derivadas. Una vez que se conoce la respuesta al impulso $h(t)$, se evalúa la respuesta de estado cero $y_{zs}(t)$, la Ec. (3.14) para así obtener la respuesta total $y(t)$, es decir

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$$

$$y(t) = \sum_{n=1}^N C_n e^{s_n t} + \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (3.26)$$

El primer término corresponde a la respuesta de entrada cero (sin raíces repetidas) y el segundo a la de estado cero.

El procedimiento anterior parece difícil; sin embargo, una forma sistemática de aplicarlo se puede resumir claramente en los siguientes pasos.

- Se determina la respuesta de entrada cero $y_{zi}(t)$, que es la solución a la ecuación homogénea, cuya forma general depende de las raíces de la ecuación característica, teniendo la forma general $e^{s_1 t}$, $e^{s_2 t}$, $e^{s_3 t}$ para raíces diferentes, y e^{st} , $t e^{st}$, $t^2 e^{st}$, etc. para raíces repetidas.

- Con la ecuación anterior se determina la respuesta al impulso $h_f(t, \tau) = h_f(t - \tau)$, para sistemas lineales e invariantes en el tiempo, mediante la Ec. (3.16).

$$h_f(t - \tau) = y_{zi}(t - \tau)u(t - \tau)$$

- Con esta respuesta se determina la respuesta al impulso del sistema $h(t, \tau) = h(t - \tau)$ para sistemas lineales e invariantes en el tiempo, mediante la Ec. (3.25).

$$h(t) = \sum_{n=0}^M b_n \frac{d^n h_f(t)}{dt^n}$$

- Con la cual se calcula la respuesta de estado cero $y_{zs}(t)$, con la Ec. (3.14).

$$y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

- Quedando la respuesta total a una entrada $x(t)$ como

$$y(t) = \sum_{n=1}^N C_n e^{s_n t} + \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

considerando que en la respuesta de entrada cero las raíces no se repiten. Las constantes C_n se determinan con las condiciones iniciales.

Ejemplo 3.3

Considere el circuito RL de primer orden (sólo incluye un elemento que almacena energía) de la figura 3.6, cuyo modelo es el de la Ec. (3.27). Si la excitación es un escalón $x(t) = Vu(t)$. Determine para la corriente $i(t)$ las respuestas

- de entrada cero, $i_{zi}(t)$
- de estado cero, $i_{zs}(t)$
- total, $i(t)$
- transitoria, $i_t(t)$
- permanente, $i_p(t)$
- total, transitoria y permanente para el caso cuando $i(0) = I_0$

$$\frac{Ldi(t)}{dt} + Ri(t) = Vu(t) \tag{3.27}$$

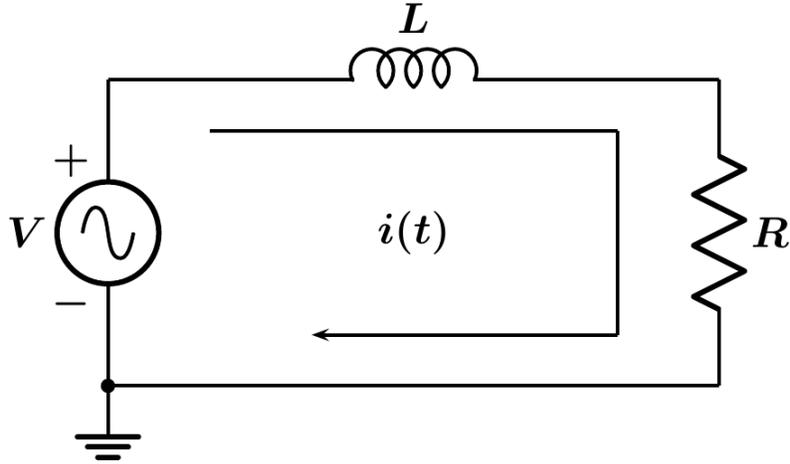


Figura 3.6: Circuito RL de primer orden

Solución

- a) La respuesta de entrada cero $i_{zi}(t)$ es la respuesta de la ecuación homogénea

$$\frac{Ldi(t)}{dt} + Ri(t) = 0 \quad (3.28)$$

Cuya solución es similar a la obtenida en la Ec. (3.10)

$$i_{zi}(t) = Ce^{-\frac{R}{L}t} \quad (3.29)$$

Donde C es una constante que depende de las condiciones iniciales y se determina en la respuesta total.

- b) Aplicando a la Ec. (3.29) las condiciones de la Ec. (3.17) y considerando que el orden de la Ec. (3.28) es $N = 1$

$$i_{zi}(t) = De^{-\frac{R}{L}t}$$

$$i_{zi}(t)|_{t=0} = \frac{1}{a_1} = \frac{1}{L} = D$$

Así que la respuesta de entrada cero, para fines de determinar la respuesta al impulso por este método queda

$$i_{zi}(t) = \frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}t} \quad (3.30)$$

Ya que el modelo del sistema, la Ec. (3.27), no involucra derivadas de $x(t)$, entonces $x_f(t)$ es igual a $x(t)$, obteniendo la respuesta al impulso mediante la Ec. (3.16)

$$h(t-\tau) = h_f(t-\tau) = y_{zi}(t-\tau)u(t-\tau)$$

$$h(t-\tau) = \frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)}u(t-\tau) \quad (3.31)$$

Con esta respuesta al impulso y a partir de la Ec. (3.14), (el sistema es LIT), se determina la respuesta de estado cero

$$i_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$i_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Vu(\tau)\frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau \quad (3.32)$$

Se definen los límites de la integral sabiendo que

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \tau > 0 \\ 0 & \tau < 0 \end{cases}$$

y

$$u(t-\tau) = \begin{cases} 1 & t-\tau > 0 \text{ o } \tau < t \\ 0 & t-\tau < 0 \text{ o } \tau > t \end{cases}$$

y se toman los límites en la integral para los cuales $0 < \tau < t$, obteniendo

$$i_{zs}(t) = \int_0^t V\frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)}d\tau$$

$$i_{zs}(t) = V\frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}t} \int_0^t e^{\frac{R}{L}\tau}d\tau = V\frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}t} \left(\frac{L}{R} \right) e^{\frac{R}{L}\tau} \Big|_0^t$$

o bien la respuesta de estado cero queda

$$i_{zs}(t) = \frac{V}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) u(t) \quad (3.33)$$

c) Una vez determinada la respuesta de estado cero, obtenemos la respuesta total con las Ecs. (3.29) y (3.33)

$$i(t) = i_{zi}(t) + i_{zs}(t)$$

$$i(t) = Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) u(t) \quad (3.34)$$

Donde C es una constante que depende de la corriente en $t = 0^-$. Considerando el caso de condiciones iniciales nulas, es decir $i(0^-) = 0$ aplicada a la Ec. (3.34), se obtiene

$$i(0^-) = 0 = C$$

con lo que se obtiene la respuesta total o completa con condiciones iniciales nulas.

$$i(t) = \frac{V}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) u(t) \quad (3.35)$$

d) A partir de la respuesta total, Ec. (3.35), la respuesta transitoria es

$$i_t(t) = \frac{V}{R} e^{-\frac{R}{L}t} u(t)$$

e) y la respuesta en estado permanente es

$$i_p(t) = \frac{V}{R} u(t)$$

f) Para el caso específico en el que las condiciones iniciales son diferentes de cero, $i(0^-) = I_0$, evaluando la Ec. (3.34) en $t = 0^-$, se obtiene $C = I_0$ por lo que la respuesta completa o total con condiciones diferentes de cero es

$$i(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) u(t) \quad (3.36)$$

en donde se observa que la respuesta transitoria en este caso es

$$i_t(t) = e^{-\frac{R}{L}t} \left(I_0 - \frac{V}{R} \right) u(t)$$

y la respuesta permanente es

$$i_p(t) = \frac{V}{R} u(t)$$

Ejemplo 3.4

Determine la respuesta completa del ejemplo anterior, haciendo uso de la herramienta MATLAB. Considere valores unitarios en las constantes involucradas R , L y V e $I(0) = 2$.

Solución

Para este ejemplo se utilizará la herramienta Symbolic de MATLAB, la cual determina de manera independiente cada ecuación que se plantee. Así, en el programa de este ejemplo, i_{zi} representa la respuesta de entrada cero, i_{zs} la respuesta de estado cero con condiciones iniciales (CI) nulas e i es la respuesta total.

En MATLAB las respuestas se obtienen de manera independiente o directamente la total

$$i(t) = i_{zi}(t) + i_{zs}(t)$$

El código para determinar estas respuestas es el siguiente.

```
%Ejemplo 3.4 Ejemplo de Respuesta de estado cero, entrada cero y total
%mediante la herramienta Symbolic

syms il
izi=dsolve('L*Dil+R*i1=0')           %Respuesta Izi sin excitacion
izs=dsolve('L*Dil+R*i1=V', 'i1(0)=0') %Respuesta Izs, CI nulas
```

```

it=dsolve('L*Di1+R*i1=V','i1(0)=Io') %Respuesta total incluye entrada y CI

%Las mismas pero asignando valores

Izi=dsolve('Di1+i1=0','i1(0)=2') %Respuesta Izi sin excitacion
Izs=dsolve('Di1+i1=1','i1(0)=0') %Respuesta Izs sin CI
it=dsolve('Di1+i1=1','i1(0)=2') %Respuesta total incluye entrada y CI
%Graficas una a una
ezplot(Izi,0,5);
ezplot(Izs,0,5)
ezplot(it,0,5)

```

El despliegue de respuestas de MATLAB es el que se presenta en seguida, las respuestas se pueden reescribir y comparar respectivamente con las calculadas en el ejemplo 3.3.

```

%Respuesta del Ejemplo 3.4

izi = C1*exp(-(R*t)/L)
izs = (V - V*exp(-(R*t)/L))/R
it = (V - exp(-(R*t)/L)*(V - Io*R))/R
Izi = 2*exp(-t)
Izs = 1 - exp(-t)
it = exp(-t) + 1

```

Expresando de nuevo los resultados de MATLAB, quedan como

- Respuesta de entrada cero $i_{zi}(t)$ comparada con la Ec. (3.29).

$$i_{zi}(t) = C_1 e^{-\frac{R}{L}t}$$

- Respuesta de estado cero $i_{zs}(t)$ comparada con la Ec. (3.33).

$$i_{zs}(t) = \frac{V}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) u(t)$$

- Respuesta total $i(t)$ comparada con la Ec. (3.36).

$$i(t) = \left(I_0 - \frac{V}{R} \right) e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V}{R} u(t) \quad (3.37)$$

Las respuestas de MATLAB del mismo sistema con valores unitarios asignados a los elementos y sus respectivas gráficas se presentan en las figuras 3.7 a 3.9.

La respuesta de entrada cero $i_{zi}(t) = 2e^{-\frac{R}{L}t} u(t) = 2e^{-t} u(t)$ es la que se muestra en la figura 3.7.

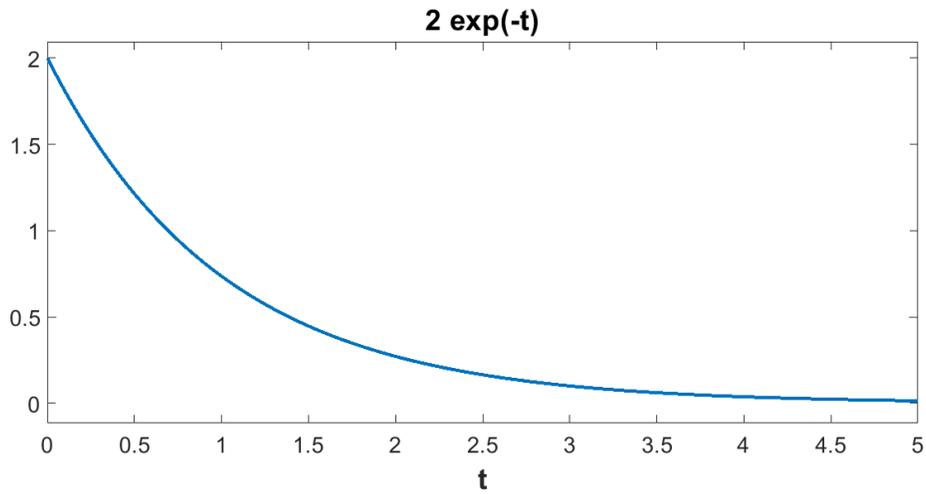


Figura 3.7: Respuesta de entrada cero del Ejemplo 3.4

Respuesta de estado cero $i_{zs}(t) = \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) u(t) = (1 - e^{-t})u(t)$ mostrada en la figura 3.8.

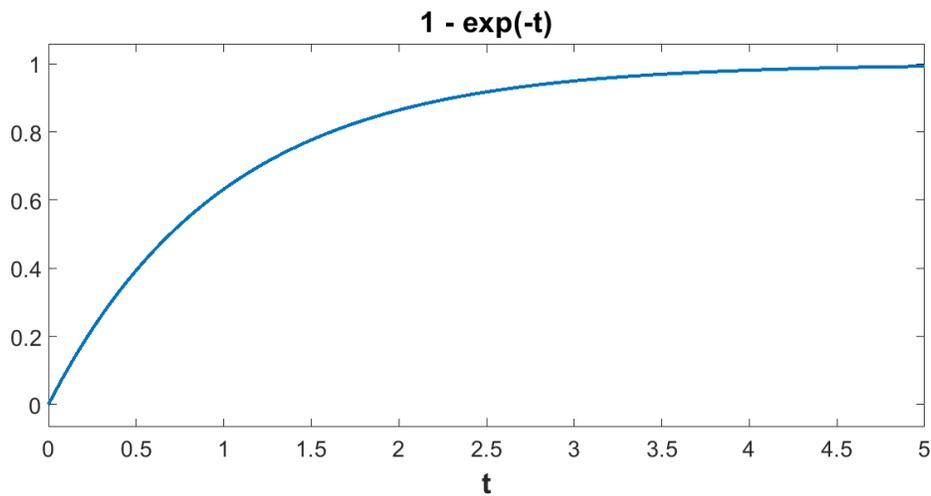


Figura 3.8: Respuesta de estado cero del Ejemplo 3.4

Respuesta total $i(t) = \left(1 + e^{-\frac{R}{L}t}\right) u(t) = (1 + e^{-t})u(t)$, presentada en la figura 3.9.

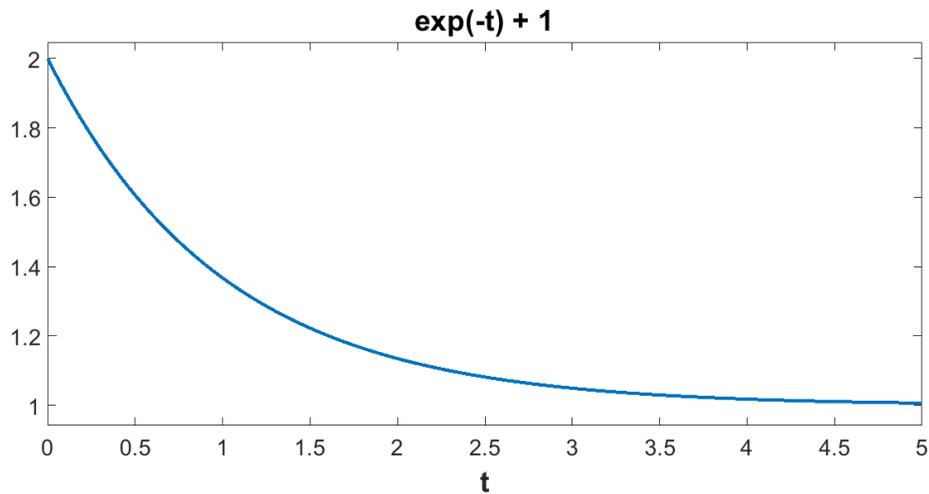


Figura 3.9: Respuesta total del Ejemplo 3.4

Ejemplo 3.5

Considere ahora un circuito de segundo orden RLC (incluye dos elementos que almacenan energía, el inductor L y el capacitor C) como el que se muestra en la figura 3.10. La corriente almacenada en el inductor es $i(0^-) = I_0 = 1\text{ A}$, y el voltaje almacenado en el capacitor es $v(0^-) = V_0 = 2\text{ V}$, $L = 1\text{ H}$, $R = 2\ \Omega$ y $C = \frac{1}{5}\text{ F}$. Si la excitación es un escalón $x(t) = 10\ u(t)$.

Determine para la corriente $i(t)$ las respuestas

- de entrada cero
- de estado cero
- total
- transitoria
- permanente
- a partir de la corriente $i(t)$ determine el voltaje $v(t)$

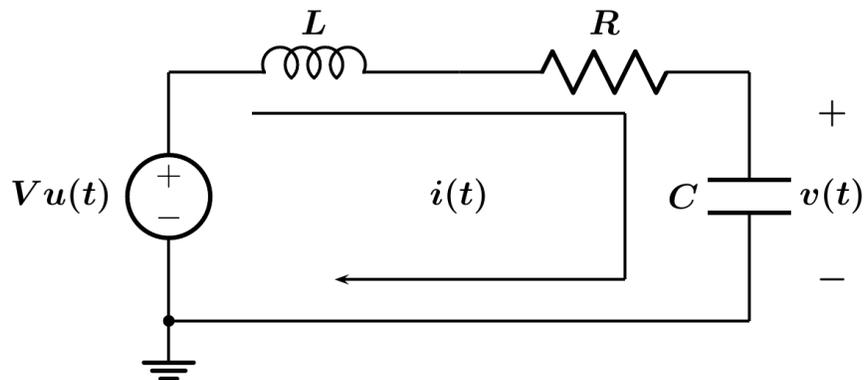


Figura 3.10: Circuito RLC

Solución

El modelo matemático de este circuito, teniendo como respuesta implícita la variable la corriente $i(t)$, es

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + V_0 = x(t) \quad (3.38)$$

Diferenciando la Ec. (3.38) se obtiene

$$L \frac{d^2i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = \frac{dx(t)}{dt} = x_f(t) \quad (3.39)$$

Se observa ahora que $x(t) \neq x_f(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

a) La respuesta de entrada cero $i_{zi}(t)$ es la respuesta de la ecuación homogénea

$$L \frac{d^2i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = 0$$

Asignando los respectivos valores

$$\frac{d^2i(t)}{dt^2} + 2 \frac{di(t)}{dt} + 5i(t) = 0 \quad (3.40)$$

Cuyas raíces son complejas de la forma general $s_{12} = \sigma \pm j\omega$, de donde la respuesta de estado cero tiene la forma general

$$i_{zi}(t) = e^{\sigma t} (C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t))$$

Para este caso particular, $s_{12} = -1 \pm j2$ y la respuesta de entrada cero es

$$i_{zi}(t) = e^{-t} (C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t)) \quad (3.41)$$

Donde las constantes C_i dependen de las condiciones iniciales y se determinan en la respuesta total.

b) Para determinar la respuesta de estado cero, se requiere de la respuesta al impulso y de la respuesta de entrada cero, la Ec. (3.41), que para fines de este procedimiento se reescribe esta ecuación a la cual se aplican las condiciones de la Ec. (3.17), tomando en cuenta que el orden de la Ec. (3.39) es $N = 2$.

$$i_{zi}(t) = e^{-t} (D_1 \cos(2t) + D_2 \sin(2t))$$
$$\frac{di_{zi}(t)}{dt} = e^{-t} [D_2 (2 \cos(2t) - \sin(2t)) - D_1 (2 \sin(2t) + \cos(2t))]$$

en donde

$$i_{zi}(t)|_{t=0} = 0 = D_1$$

$$\left. \frac{di_{zi}(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{a_2} = \frac{1}{L} = 1 = -D_1 + 2D_2$$

Obteniendo $D_2 = \frac{1}{2}$

Así que la respuesta de entrada cero, para fines de determinar la respuesta al impulso con este procedimiento, queda

$$i_{zi}(t) = \frac{1}{2} e^{-t} \sin(2t) \quad (3.42)$$

Ya que ahora $x_f(t) = \frac{dx}{dt}$, se obtiene primero la respuesta al impulso $h_f(t)$ mediante la Ec. (3.16) y debido a que el sistema es LIT, $h_f(t, \tau) = h_f(t - \tau)$, quedando

$$h_f(t - \tau) = \frac{e^{-(t-\tau)}}{2} (\sin 2(t - \tau)) u(t - \tau)$$

De manera que la respuesta al impulso $h_f(t)$ se expresa como $h_f(t) = \frac{e^{-t}}{2} \sin(2t) u(t)$ con la cual se determina la respuesta al impulso $h(t)$ debida a $x(t)$ a partir de la Ec. (3.25)

$$h(t) = b_1 \frac{dh_f(t)}{dt} = e^{-t} \left(\cos(2t) - \frac{1}{2} \sin(2t) \right) u(t) \quad (3.43)$$

Esta respuesta al impulso se sustituye en la respuesta de estado cero a partir de la Ec. (3.14), aplicando la propiedad de conmutatividad.

$$i_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} 10u(t - \tau) e^{-\tau} \left(\cos(2\tau) - \frac{1}{2} \sin(2\tau) \right) u(\tau) d\tau$$

Se definen los límites de la integral

$$i_{zs}(t) = 10 \int_0^t e^{-\tau} (\cos(2\tau)) d\tau - 5 \int_0^t e^{-\tau} (\sin(2\tau)) d\tau$$

y

$$i_{zs}(t) = 2e^{-t} (2 \sin(2\tau) - \cos(2\tau)) \Big|_0^t - e^{-t} (-\sin(2\tau) - 2 \cos(2\tau)) \Big|_0^t$$

o bien la respuesta de estado cero queda

$$i_{zs}(t) = 5e^{-t} \sin(2t) u(t) \quad (3.44)$$

- c) Una vez determinada la respuesta de estado cero, se obtiene la respuesta total sumando la Ec. (3.41) y la (3.44).

$$i(t) = i_{zi}(t) + i_{zs}(t)$$

$$i(t) = e^{-t}(C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t)) + 5e^{-t} \sin(2t)u(t) \quad (3.45)$$

en donde las constantes dependen de los valores almacenados en $t = 0^-$, que para este caso son $i(0^-) = 1 A$ y el valor de la condición inicial para $\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0^-}$ se obtiene de la Ec. (3.38) despejando la derivada y evaluando en $t = 0^-$, esto es

$$\left. \frac{di(t)}{dt} \right|_{t=0^-} = \frac{1}{L} \left(-Ri(t) - \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau - V_0 + x(t) \right) \Big|_{t=0^-} = -\frac{R}{L} i(0^-) - \frac{v(0)}{L}$$

obteniendo

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0^-} = -4 \frac{A}{s}$$

Evaluando la Ec. (3.45) en $t = 0^-$, se obtiene

$$i(0^-) = 1 = C_1$$

evaluando ahora la derivada de la Ec. (3.45) en $t = 0^-$, se obtiene

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0^-} = -4 = 2C_2 - C_1$$

de donde $C_2 = -\frac{3}{2}$

y la respuesta total es

$$i(t) = e^{-t} \left(\cos(2t) - \frac{3}{2} \sin(2t) \right) + (5e^{-t} \sin(2t))u(t)$$

o bien, para $t > 0$

$$i(t) = e^{-t} \left(\cos(2t) + \frac{7}{2} \sin(2t) \right) u(t) \quad (3.46)$$

d) A partir de la respuesta total, Ec. (3.46), la respuesta transitoria es

$$i_t(t) = e^{-t} \left(\cos(2t) + \frac{7}{2} \sin(2t) \right) u(t)$$

e) La respuesta en estado permanente es cero, ya que $i(t)$ tiende a cero cuando $t \rightarrow \infty$.

f) El voltaje se obtiene a partir de la corriente, mediante

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^{\infty} i(t) dt + V_0$$

$$v(t) = 5 \int_0^{\infty} e^{-t} \left(\cos(2t) + \frac{7}{2} \sin(2t) \right) u(t) dt + 2$$

que finalmente queda para $t > 0$ como

$$v(t) = e^{-t} \left(-8 \cos(2t) - \frac{3}{2} \sin(2t) \right) + 10u(t) \quad (3.47)$$

Ejemplo 3.6

Para el circuito del ejemplo 3.5, la figura 3.10, se tiene ahora como respuesta la variable de voltaje $v(t)$. Considerando los mismos valores, entrada y condiciones iniciales, determine para el voltaje $v(t)$ las respuestas

- de entrada cero
- de estado cero
- total
- transitoria
- permanente

Solución

El modelo matemático de este circuito en términos de la corriente es el de la Ec. (3.38), el cual está relacionado con el voltaje a través de

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \quad (3.48)$$

que al sustituir en la Ec. (3.38) queda en términos del voltaje como

$$LC \frac{d^2 v(t)}{dt^2} + RC \frac{dv(t)}{dt} + v(t) = x_f(t) = x(t) \quad (3.49)$$

- La respuesta de entrada cero $v_{zi}(t)$ es la respuesta de la ecuación homogénea

$$LC \frac{d^2 v(t)}{dt^2} + RC \frac{dv(t)}{dt} + v(t) = 0$$

Asignando los respectivos valores, la ecuación característica queda

$$\frac{1}{5} \frac{d^2 v(t)}{dt^2} + \frac{2}{5} \frac{dv(t)}{dt} + v(t) = 0 \quad (3.50)$$

Cuyas raíces son $s_{12} = -1 \pm j2$, a partir de las cuales se obtiene la respuesta de entrada cero

$$v_{zi}(t) = e^{-t}(C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t)) \quad (3.51)$$

similar a la Ec. (3.41), donde las constantes C dependen de las condiciones iniciales y se determinan en la respuesta total.

- b) Para determinar la respuesta de estado cero se requiere de la respuesta al impulso y la de entrada cero, la Ec. (3.51), que para fines de este procedimiento, se reescribe esta ecuación a la cual se aplican las condiciones de la Ec. (3.17), tomando en cuenta que el orden de la Ec. (3.49) es $N = 2$

$$v_{zi}(t) = e^{-t}(D_1 \cos(2t) + D_2 \sin(2t))$$

$$\frac{dv_{zi}(t)}{dt} = e^{-t} [D_2 (2 \cos(2t) - \sin(2t)) - D_1 (2 \sin(2t) + \cos(2t))]$$

en donde

$$v_{zi}(t)|_{t=0} = 0 = D_1$$

$$\left. \frac{dv_{zi}(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{a_2} = \frac{1}{LC} = 5 - D_1 + 2D_2$$

Obteniendo $D_2 = \frac{5}{2}$

Así que la respuesta de entrada cero, para fines de determinar la respuesta al impulso con este procedimiento, queda

$$v_{zi}(t) = \frac{5}{2} e^{-t} \sin(2t) \quad (3.52)$$

Ya que ahora $x_f(t) = x(t)$, se determinará la respuesta al impulso $h(t, \tau) = h(t - \tau)$ mediante la Ec. (3.16)

$$h(t - \tau) = h_f(t - \tau) = \frac{5}{2} e^{-(t-\tau)} \sin(2(t - \tau)) u(t - \tau) \quad (3.53)$$

o bien, la respuesta $h(t)$

$$h(t) = \frac{5}{2} e^{-t} \sin(2t) u(t) \quad (3.54)$$

Observe que la Ec. (3.54) es diferente a la Ec. (3.43) del ejemplo 3.5, ya que las variables de análisis son diferentes. Sin embargo, se sigue conservando la forma general (exponencial compleja amortiguada) debida a las raíces del sistema. Con esta respuesta al impulso se calcula la respuesta de estado cero, a partir de la Ec. (3.14) aplicando por la facilidad la propiedad de conmutatividad.

$$v_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} 10u(t - \tau) \frac{5}{2} e^{-\tau} \sin(2\tau) u(\tau) d\tau$$

Se definen los límites de la integral

$$v_{zs}(t) = 25 \int_0^t e^{-\tau} \sin(2\tau) d\tau$$

y

$$v_{zs}(t) = 25 \frac{e^{-\tau} (-\sin(2\tau) - 2 \cos(2\tau))}{5} \Big|_0^t$$

o bien la respuesta de estado cero queda

$$v_{zs}(t) = [10 - 5e^{-t}(\sin(2t) + 2 \cos(2t))] u(t) \quad (3.55)$$

- c) Una vez determinada la respuesta de estado cero, obtenemos la respuesta total sumando la Ec. (3.51) y la (3.55).

$$v(t) = v_{zi}(t) + v_{zs}(t)$$

$$v(t) = e^{-t}(C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t)) - [5e^{-t}(\sin(2t) + 2 \cos(2t)) - 10] u(t) \quad (3.56)$$

en donde las constantes dependen de las condiciones iniciales en $t = 0^-$, que para este caso son $v(0^-) = 2 V$ y $\frac{dv}{dt} \Big|_{t=0^-}$ la cual se obtiene a partir de la Ec. (3.48), despejando la derivada y evaluando en $t = 0^-$, esto es

$$\frac{dv}{dt} \Big|_{t=0^-} = \frac{i(t)}{C} \Big|_{t=0^-} = 5 \frac{V}{s}$$

Evaluando la Ec. (3.56) en $t = 0^-$ se obtiene

$$v(0) = 2 = C_1$$

evaluando ahora la derivada de la Ec. (3.56) en $t = 0^-$, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= e^{-t} [-C_1 (2 \sin(2t) + \cos(2t)) + C_2 (2 \cos(2t) - \sin(2t)) + 25 \sin(2t)] \\ \frac{dv(0^-)}{dt} &= 5 = 2C_2 - C_1 \end{aligned}$$

de donde $C_2 = \frac{7}{2}$

y la respuesta total queda como

$$v(t) = e^{-t} \left(2 \cos(2t) + \frac{7}{2} \sin(2t) \right) - [5e^{-t}(\sin(2t) + 2 \cos(2t)) - 10] u(t)$$

o bien para $t > 0$

$$v(t) = \left(-8e^{-t} \cos(2t) - \frac{3}{2}e^{-t} \sin(2t) + 10 \right) u(t) \quad (3.57)$$

La cual corresponde a la determinada en el ejemplo 3.5.

d) A partir de la respuesta total, Ec. (3.57) la respuesta transitoria es

$$v_t(t) = \left(-8e^{-t} \cos(2t) - \frac{3}{2}e^{-t} \sin(2t) \right) u(t)$$

e) y la respuesta en estado estable o permanente es

$$v_p(t) = 10u(t)$$

Ejemplo 3.7

Repita el ejemplo 3.6 haciendo uso de MATLAB.

Solución

Las Ecs. (3.38) y (3.49) corresponden a los modelos equivalentes del sistema de la figura 3.10, los cuales se vuelven a plantear.

El modelo matemático de este circuito en términos de la corriente es

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + V_0 = x(t) \quad (3.58)$$

o bien en términos del voltaje es

$$LC \frac{d^2v(t)}{dt^2} + RC \frac{dv(t)}{dt} + v(t) = x_f(t) = x(t) \quad (3.59)$$

Ya que la Ec. (3.58) es una ecuación integro diferencial y la Ec. (3.59) corresponde a una ecuación diferencial lineal e invariante en el tiempo de segundo orden, conviene tomar esta última para realizar el análisis con este método. En este ejemplo se utiliza la función **dsolve()**.

El programa es el siguiente

```
%Ejemplo 3.7 Ejemplo de Respuesta de estado cero, entrada cero y total
%mediante la herramienta Symbolic

syms v

Vzi=dsolve('(1/5)*D2v+(2/5)*Dv+v=0','v(0)=2,Dv(0)=5') %Respuesta Vzi
%sin excitacion

Vzs=dsolve('(1/5)*D2v+(2/5)*Dv+v=10','v(0)=0,Dv(0)=0') %Respuesta Vzs sin CI
```

```

vt=dsolve('(1/5)*D2v+(2/5)*Dv+v=10','v(0)=2,Dv(0)=5') %Respuesta total
%incluye entrada y CI

figure(1);ezplot(Vzi,0,6) %subplot(311),ezplot(Vzi,0,5)
figure(2);ezplot(Vzs,0,6) %subplot(312),ezplot(Vzs,0,5)
figure(3);ezplot(vt,0,6) %subplot(313),ezplot(vt,0,5)

```

y las respuestas que se proporcionan en MATLAB son las siguientes

```

%Respuesta del Ejemplo 3.7

Vzi = 2*cos(2*t)*exp(-t) + (7*sin(2*t)*exp(-t))/2

Vzs = 10 - 5*sin(2*t)*exp(-t) - 10*cos(2*t)*exp(-t)

vt = 10 - (3*sin(2*t)*exp(-t))/2 - 8*cos(2*t)*exp(-t)

```

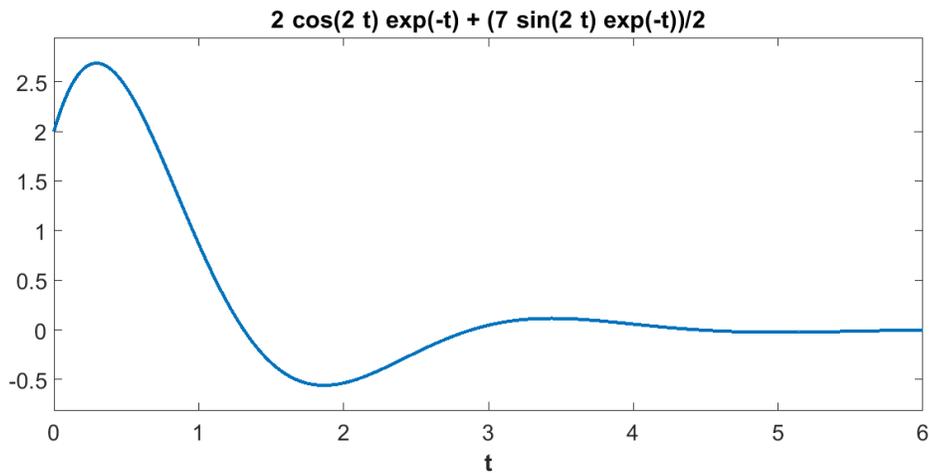


Figura 3.11: Respuesta de entrada cero del Ejemplo 3.7

Las respuestas obtenidas con MATLAB se pueden reescribir y verificar con las del ejemplo 3.6. Así mismo, sus correspondientes gráficas se presentan en las figuras de la 3.11 a la 3.13.

La respuesta de entrada cero $v_{zi}(t) = e^{-t} \left(2 \cos(2t) + \frac{7}{2} \sin(2t) \right)$ se verifica con la Ec. (3.51) y se presenta en la figura 3.11, y la respuesta de estado cero se verifica con la Ec. (3.55) y se presenta en la figura 3.12, la cual está dada por

$$v_{zs}(t) = 10 - e^{-t}(10 \cos(2t) - 5 \sin(2t))u(t)$$

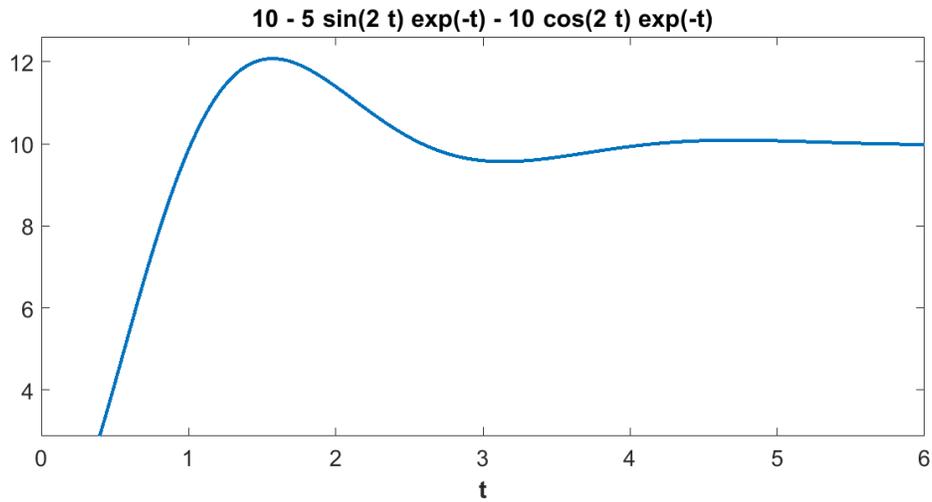


Figura 3.12: Respuesta de estado cero del Ejemplo 3.7

La respuesta total $v(t) = 10 + e^{-t} \left(-8 \cos(2t) - \frac{3}{2} \sin(2t) \right) u(t)$ se verifica con la Ec. (3.57), la cual se muestra en la figura 3.13.

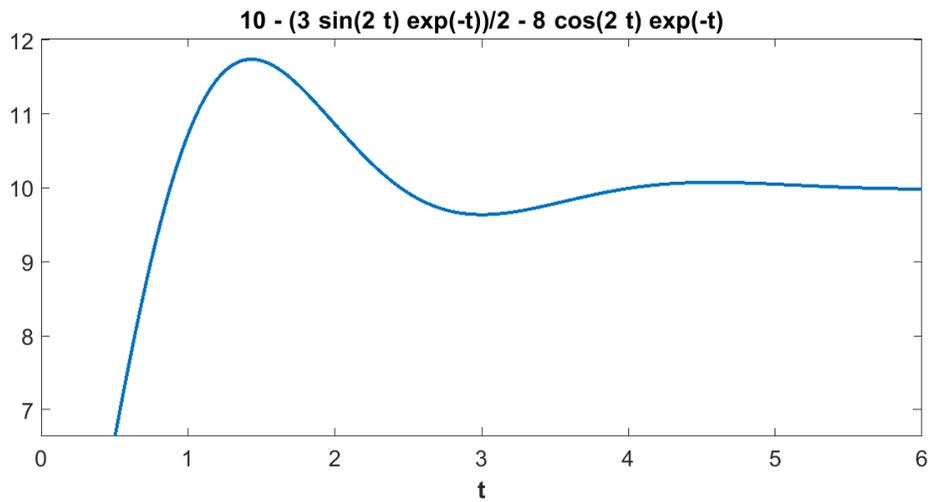


Figura 3.13: Respuesta total del Ejemplo 3.7

3.6

Respuesta de un sistema mediante la integral de convolución

Considere un sistema lineal e invariante en el tiempo, en el cual si la entrada es un impulso $\delta(t)$, la salida es la respuesta al impulso denotada como $h(t)$. Si se aplica al sistema un impulso ponderado y desplazado, la respuesta al impulso tendrá la misma ponderación y desplazamiento que el de la entrada, como se muestra en la figura 3.14.

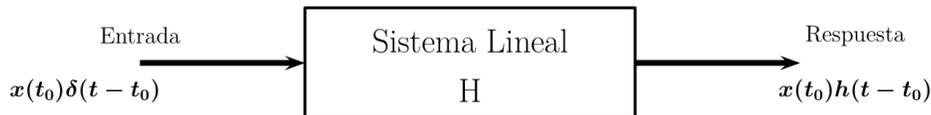


Figura 3.14: Respuesta del sistema a un impulso desplazado y ponderado

Esto es, si de una señal $x(t)$ se toman muestras con el impulso a intervalos regulares, y éstas se aplican al sistema lineal e invariante en el tiempo, entonces las respuestas a cada muestra serán respuestas al impulso desplazadas y ponderadas, es decir,

....

$$x(-3)\delta(t+3) \longrightarrow x(-3)h(t+3)$$

$$x(-2)\delta(t+2) \longrightarrow x(-2)h(t+2)$$

$$x(-1)\delta(t+1) \longrightarrow x(-1)h(t+1)$$

$$x(0)\delta(t) \longrightarrow x(0)h(t)$$

$$x(1)\delta(t-1) \longrightarrow x(1)h(t-1)$$

$$x(2)\delta(t-2) \longrightarrow x(2)h(t-2)$$

....

$$x(\tau)\delta(t-\tau) \longrightarrow x(\tau)h(t-\tau)$$

Entonces, si con la suma de las entradas individuales se obtiene la señal aproximada $\hat{x}(t)$, la suma de las respuestas individuales proporcionará la respuesta completa del sistema a esa entrada. Es decir,

$$\hat{x}(t) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau) \longrightarrow \hat{y}(t) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)$$

Si los intervalos de muestreo son infinitesimales, ambas sumatorias se convierten en integrales, obteniendo que $\hat{x}(t)$ se aproxima a $x(t)$ la entrada del sistema y $\hat{y}(t)$ se aproxima a la respuesta $y(t)$ debida a esa entrada, esto es

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \longrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (3.60)$$

Estas ecuaciones definen la integral de convolución denotada con el símbolo “*”. La Ec. (3.60) se expresa en estos términos como

$$x(t) = x(t) * \delta(t) \longrightarrow y(t) = x(t) * h(t) \quad (3.61)$$

A partir de la cual se observa que la convolución de una señal $x(t)$ con el impulso proporciona la misma señal; y la convolución de una señal con la respuesta al impulso del sistema proporciona la respuesta a esa entrada, siendo ésta una respuesta de estado cero, ya que no se involucran las energías almacenadas en los elementos y es precisamente la definida en las Ecs. (3.13) o (3.14) para sistemas lineales, variantes e invariantes en el tiempo, respectivamente.

Así mismo, se observa que estas ecuaciones cumplen con la propiedad de convolución del impulso unitario, la Ec. (2.79).

Para el caso de sistemas LIT, la respuesta de estado cero $y_{zs}(t)$ aplicando convolución está dada por

$$y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (3.62)$$

y la convolución de dos señales cualesquiera $x(t) = x_1(t) * x_2(t)$ está dada por

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau$$

La convolución cumple con las propiedades:

Conmutativa

$$x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau)x_1(t-\tau)d\tau$$

Asociativa

$$[x_1(t) * x_2(t)] * x_3(t) = x_1(t) * [x_2(t) * x_3(t)]$$

Distributiva

$$x_1(t) * [x_2(t) + x_3(t)] = x_1(t) * x_2(t) + x_1(t) * x_3(t)$$

De Desplazamiento

$$x_1(t-t_0) * x_2(t-t_1) = x_1(t-t_0-t_1) * x_2(t) = x_1(t) * x_2(t-t_0-t_1)$$

Derivativa

$$\frac{d}{dt}(x_1(t) * x_2(t)) = \dot{x}_1(t) * x_2(t)$$

y

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_1(t) * x_2(t)) = \dot{x}_1(t) * \dot{x}_2(t)$$

Integración

$$\int_{-\infty}^t [x_1(\tau) * x_2(\tau)] d\tau = \left(\int_{-\infty}^t x_1(\tau) d\tau \right) * x_2(t) = x_1(t) * \left(\int_{-\infty}^t x_2(\tau) d\tau \right)$$

Convolución con el impulso

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

Convolución con el impulso desplazado

$$x(t) * \delta(t - t_1) = x(t - t_1)$$

La convolución se efectúa en forma analítica o en forma gráfica. En ambos casos, de acuerdo con la definición, la Ec. (3.60), se hace un cambio de variables $t \rightarrow \tau$ en $x_1(t)$ y $t \rightarrow (t - \tau)$ en $x_2(t)$ en donde la variable auxiliar es τ .

Ejemplo 3.8

Considere la señal $x(t) = u(t)$ y la respuesta al impulso $h(t) = 2e^{-3t}u(t)$. Determine la respuesta de estado cero mediante:

- Método analítico
- Método gráfico
- Usando MATLAB

Solución

- De acuerdo con la Ec. (3.60), la convolución se define como

$$y_{zs}(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (3.63)$$

En donde ahora

$$x(\tau) = u(\tau)$$

y

$$h(t - \tau) = 2e^{-3(t-\tau)}u(t - \tau)$$

Sustituyendo en la Ec. (3.61)

$$y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)2e^{-3(t-\tau)}u(t - \tau)d\tau$$

Recordando que

$$u(\tau) = \begin{cases} 1 & \tau > 0 \\ 0 & \tau < 0 \end{cases}$$

y

$$u(t - \tau) = \begin{cases} 1 & t - \tau > 0 \text{ o } \tau < t \\ 0 & t - \tau < 0 \text{ o } \tau > t \end{cases}$$

Se toman los límites para los cuales el argumento del escalón es positivo, así

$$y_{zs}(t) = \int_0^t 2e^{-3(t-\tau)} d\tau = 2e^{-3t} \int_0^t e^{3\tau} d\tau$$

$$y_{zs}(t) = 2e^{-3t} \int_0^t e^{3\tau} d\tau = \frac{2}{3}e^{-3t}(e^{3t} - 1)u(t)$$

y la respuesta de estado cero es

$$y_{zs}(t) = \frac{2}{3}(1 - e^{-3t})u(t) \tag{3.64}$$

b) Consideremos ahora el método gráfico para obtener la respuesta de estado cero.

La figura 3.15 muestra las señales $x(t)$ y $h(t)$ y la figura 3.16 muestra las señales $x(\tau)$ y $h(t - \tau)$. Observe que la señal de entrada es la misma, sólo se ha cambiado la variable, sin embargo, dado que τ es la variable auxiliar de integración, la respuesta al impulso está invertida, y desplazada un tiempo t , en esta gráfica $t = 0$ de manera que $h(t - \tau) = h(-\tau)$.

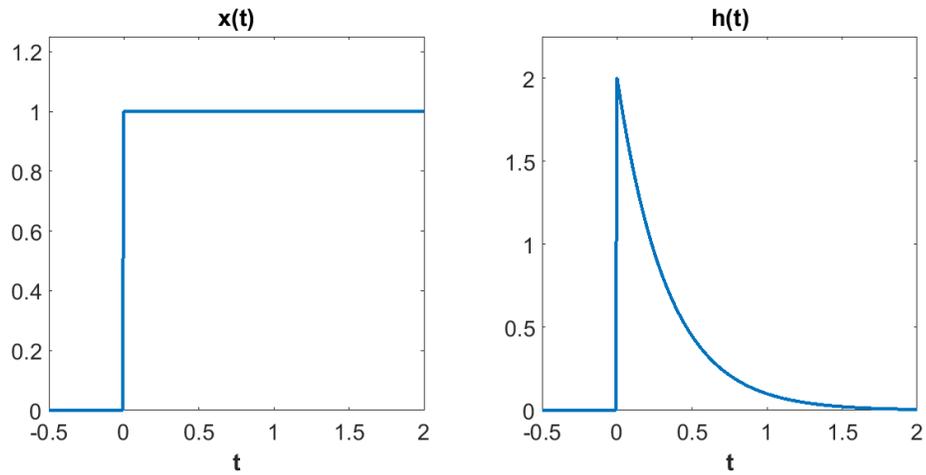


Figura 3.15: Señal de entrada $x(t)$ y respuesta al impulso $h(t)$

```
%Figura 3.15 Ejemplo Convolucion grafica
t=-1:.01:2;
x=us(t);
h=(2*exp(-3*t)).*us(t);
subplot(121), plot(t,x,'LineWidth',2); axis([-0.50 ,2, 0, 1.25]);
title('x(t)');xlabel('t')
subplot(122), plot(t,h,'LineWidth',2); axis([-0.50 ,2, 0, 2.25]);
title('h(t)');xlabel('t')
```

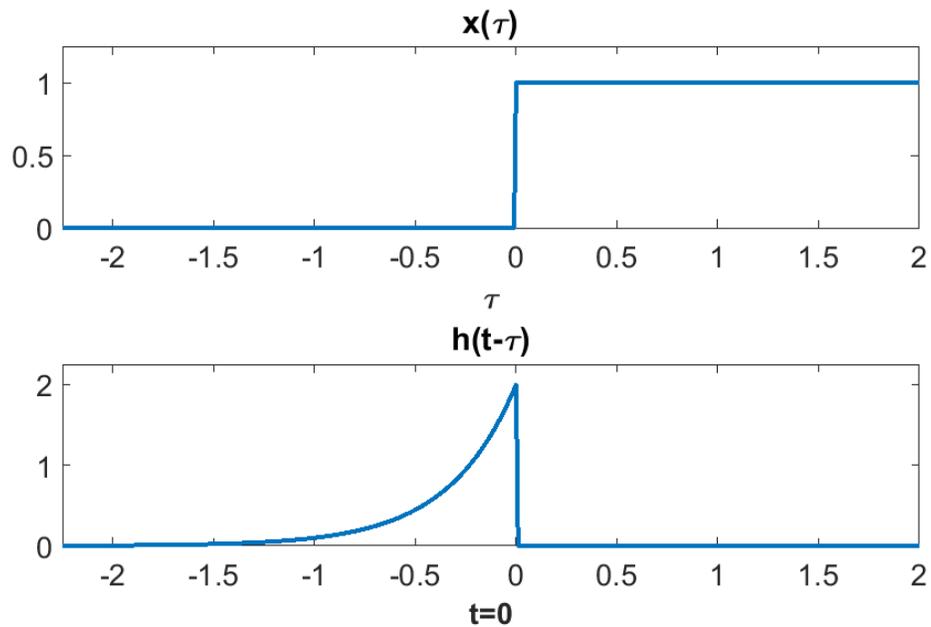


Figura 3.16: Señal $x(\tau)$ y $h(t-\tau)$, en donde $t = 0$

```
%Figura 3.16 Ejemplo Convolucion grafica
```

```
tao=-2.25:.01:2;
x=us(tao);
t1=-1.5; t2=-.5;t3=1.5;
h=(2*exp(-3*(-tao))).*us(-tao);
subplot(211), plot(tao,x,'LineWidth',2); axis([-2.250 ,2, 0, 1.25]);
title('x(tao)');xlabel('tao')
subplot(212), plot(tao,h,'LineWidth',2); axis([-2.250 ,2, 0, 2.25]);
title('h(t-tao)');xlabel('t=0')
```

De acuerdo con la definición de la convolución para la respuesta del sistema, la Ec. (3.60), la integral sólo es válida cuando se traslapan las señales $x(\tau)$ y $h(t-\tau)$, que es cuando la multiplicación de ambas es diferente de cero. En la figura 3.17 se observa que para $t < 0$ no hay traslape entre $x(\tau)$ y $h(t-\tau)$, por lo que $y(t) = 0$. Sin embargo, para $t > 0$ si hay traslape entre $x(\tau)$ y $h(t-\tau)$, así que $y(t) \neq 0$; específicamente, el traslape es entre 0 y t para valores de $t > 0$. Lo anterior se puede expresar como

$$y_{zs}(t) = 0 \quad t < 0$$

y aplicando la definición de convolución, la Ec. (3.60) se obtiene para $t > 0$

$$y_{zs}(t) = \int_0^t 2e^{-3(t-\tau)} d\tau = \frac{2}{3}(1 - e^{-3t})u(t) \quad t > 0$$

que es la misma respuesta obtenida con el procedimiento analítico.

En la figura 3.17 se muestra $h(t-\tau)$ con $t < 0$, $t = 0$ y $t > 0$.

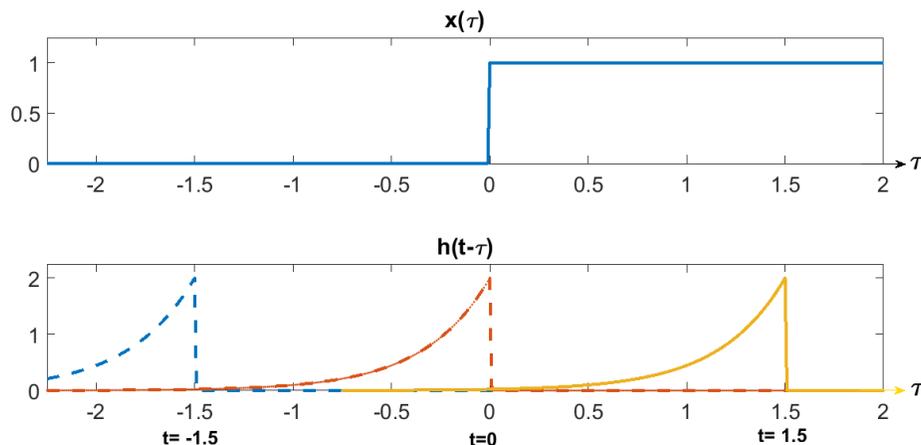


Figura 3.17: Señal $x(\tau)$ y $h(t-\tau)$, en donde $t < 0$, $t = 0$ y $t > 0$

```
%Figura 3.17 Ejemplo Convolucion grafica
```

```
tao=-2.25:.01:2;
x=us(tao);
t1=-1.5; t2=-.5;t3=1.5;
```

```

h=(2*exp(-3*(-tao))).*us(-tao);
subplot(211), plot(tao,x,'LineWidth',2);
axis([-2.250 ,2, 0, 1.25]); title('x(tao)');xlabel('tao')

subplot(212), plot(-1.5+tao,h,'--','LineWidth',2);
axis([-2.250 ,2, 0, 2.25]); title('h(t-tao)');%xlabel('tao')
hold on

subplot(212), plot(tao,h,'.-','LineWidth',2);
axis([-2.250 ,2, 0, 2.25]); title('h(t-tao)');%xlabel('tao')

subplot(212), plot(1.5+tao,h,'LineWidth',2);
axis([-2.250 ,2, 0, 2.25]); title('h(t-tao)');%xlabel('tao')
text(-1.7,-.5,'t= -1.5')
text(-.2,-.5,'t=-0')
text(1.3,-.5,'t= 1.5')

```

- c) La función de MATLAB para realizar la convolución es **conv()**. La respuesta es la que se muestra en la figura 3.18.

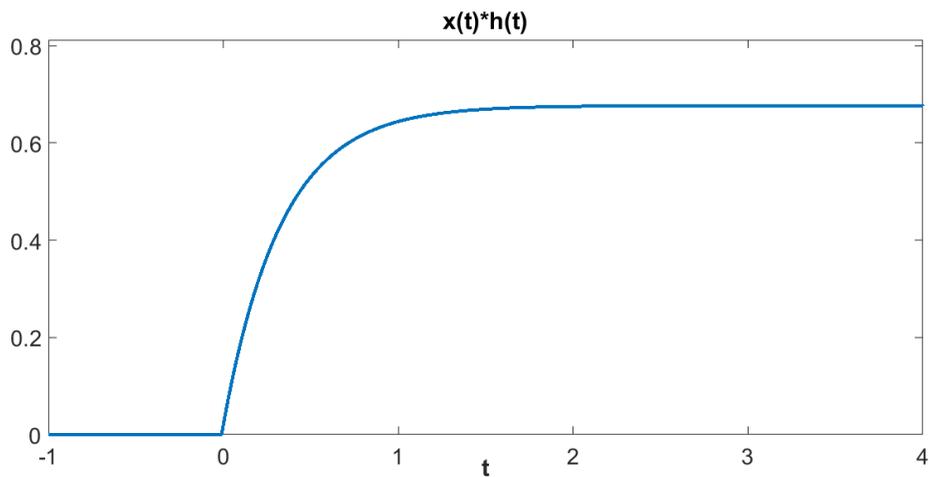


Figura 3.18: Respuesta por convolución

```

%Figura 3.18 Ejemplo de convolucion en TC

t1=-1; dt=.01; t2=4;
t=t1:dt:t2;
x=us(t);
h=2*exp(-3*t).*us(t);
y=dt*conv(x,h);
tc=2*t1:dt:2*t2;
plot(tc,y,'LineWidth',2); grid
xg=-1:4;
set(gca,'xtick',[xg]);
axis([t1,t2,min(y),max(y)*1.2])
xlabel('t');title('x(t)*h(t)')

```

Ejemplo 3.9

Considere la señal $x(t) = u(t) - u(t-1)$ y la respuesta al impulso $h(t) = u(t-1) - u(t-2)$. Determine la respuesta de estado cero mediante:

- a) Método analítico
- b) Método gráfico
- c) Usando MATLAB

Solución

- a) Se definen las señales en términos de τ

$$x(\tau) = u(\tau) - u(\tau - 1)$$

y

$$h(t - \tau) = u(t - \tau - 1) - u(t - \tau - 2)$$

la respuesta mediante la convolución es

$$y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (u(\tau) - u(\tau - 1))(u(t - \tau - 1) - u(t - \tau - 2))d\tau$$

haciendo la multiplicación de términos

$$y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (u(\tau)u(t - \tau - 1) - u(\tau - 1)u(t - \tau - 1) - u(\tau)u(t - \tau - 2) + u(\tau - 1)u(t - \tau - 2))d\tau$$

separando términos

$$y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)u(t - \tau - 1)d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau - 1)u(t - \tau - 1)d\tau \\ - \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)u(t - \tau - 2)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau - 1)u(t - \tau - 2)d\tau$$

tomando en cuenta que

$$u(\tau) = \begin{cases} 1 & \tau > 0 \\ 0 & \tau < 0 \end{cases}$$

y

$$u(t - \tau - t_0) = \begin{cases} 1 & t - \tau - t_0 > 0 \quad \text{o} \quad \tau < t - t_0 \\ 0 & t - \tau - t_0 < 0 \quad \text{o} \quad \tau > t - t_0 \end{cases}$$

Se evalúan los límites para los cuales el argumento del escalón es positivo, obteniendo por separado cada integral:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)u(t-\tau-1)d\tau &= \int_{-\infty}^{t-1} u(\tau)d\tau = \int_0^{t-1} d\tau = t-1 = r(t-1) \\ -\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau-1)u(t-\tau-1)d\tau &= -\int_{-\infty}^{t-1} u(\tau-1)d\tau = -\int_1^{t-1} d\tau = -(t-2) = \\ & \qquad \qquad \qquad -r(t-2) \\ -\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)u(t-\tau-2)d\tau &= -\int_{-\infty}^{t-2} u(\tau)d\tau = -\int_0^{t-2} d\tau = -(t-2) = -r(t-2) \\ +\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau-1)u(t-\tau-2)d\tau &= \int_{-\infty}^{t-2} u(\tau-1)d\tau = \int_0^{t-2} d\tau = t-3 = r(t-3) \end{aligned}$$

y la respuesta de estado cero es una suma de rampas $r(t)$ desplazadas

$$y_{zs}(t) = r(t-1) - r(t-2) - r(t-2) + r(t-3) \tag{3.65}$$

b) Consideremos ahora el método gráfico. En la figura 3.19 se muestran las señales $x(t)$ y $h(t)$.

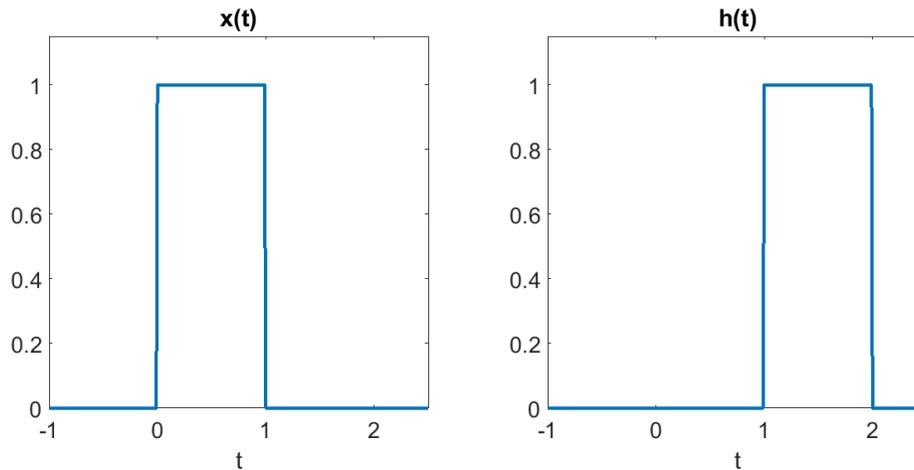


Figura 3.19: Señales $x(t)$ y $h(t)$

```
%Figura 3.19 Ejemplo Convolucion grafica

t=-2.25:.01:2.5;
x=us(t)-us(t-1);
h=us(t-1)-us(t-2);
subplot(121), plot(t,x,'LineWidth',2); axis([-1.0 ,2.5, 0, max(x)*1.15]);
title('x(t)');
xlabel('t')
subplot(122), plot(t,h,'LineWidth',2); axis([-1.0 ,2.5, 0, max(h)*1.15]);
title('h(t)');
xlabel('t')
```

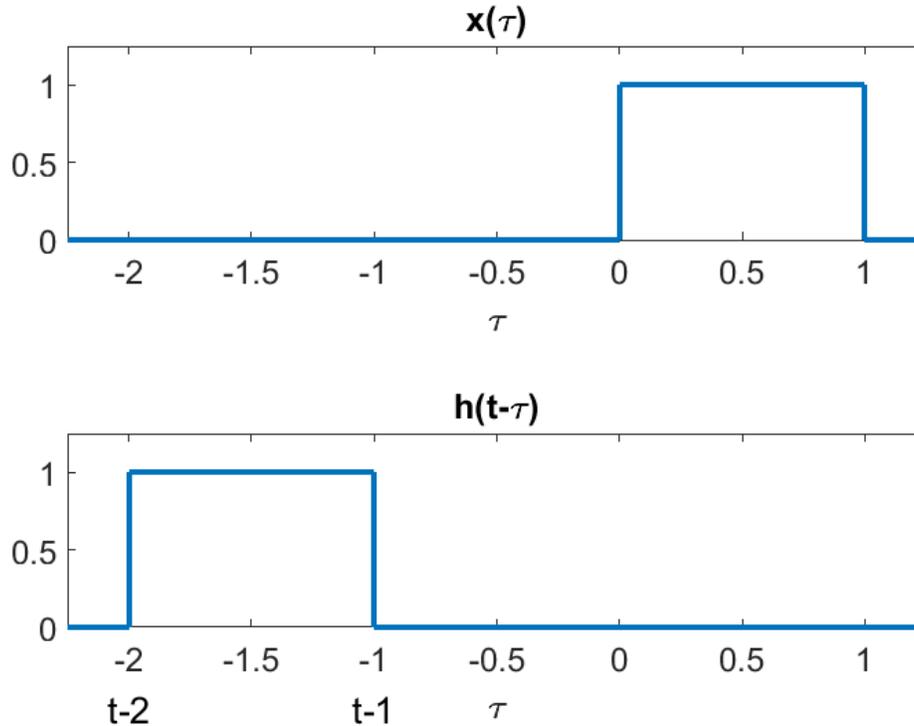


Figura 3.20: Señales $x(\tau)$ y $h(t-\tau)$

`%Figura 3.20 Ejemplo Convolucion grafica`

```
tao=-2.25:.001:2;
x=us(tao)-us(tao-1);
t=0; h=us(t-tao-1)-us(t-tao-2);
subplot(211), plot(tao,x,'LineWidth',2);
axis([-2.250,1.25,0,max(x)*1.25]);
title('x(tao)');xlabel('tao');

subplot(212), plot(tao,h,'LineWidth',2);
axis([-2.25,1.25,0,max(h)*1.25]);
title('h(tao)');xlabel('tao'); text(-1,-.25,'t-1');text(-2,-.25,'t-2')
```

En la figura 3.20 se muestra la gráfica de la señal $h(t-\tau)$ la cual corresponde al caso cuando $t = 0$ es decir, es igual a $h(-\tau)$, y los límites que definen la señal son $t-2$ y $t-1$, como se indica en la figura; la integral sólo es válida cuando se traslapan las señales $x(\tau)$ y $h(t-\tau)$, que es cuando la multiplicación de ambas es diferente de cero. La figura 3.21 muestra 3 diferentes intervalos para determinar la respuesta $y(t)$. No se pierda de vista los límites $t-2$ y $t-1$.

En la figura 3.21a se muestra el intervalo de $t-1 < 0$ o $t < 1$, en el cual no hay traslape, por lo que

$$y_{zs}(t) = 0 \quad t < 0$$

En la figura 3.21b se muestra el intervalo de $0 < t-1 < 1$ o $1 < t < 2$, por lo que el intervalo de integración es de $0 < \tau < t-1$ y la respuesta en este intervalo es

$$y_{zs}(t) = \int_0^{t-1} d\tau = t-1 \quad 1 < t < 2$$

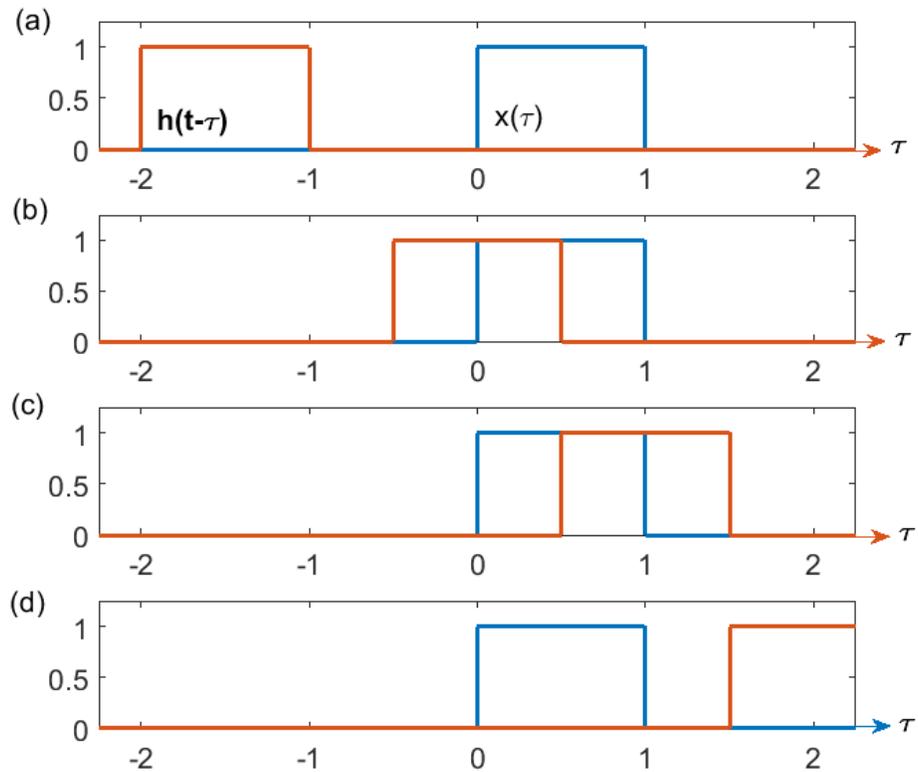


Figura 3.21: Representación gráfica de la convolución de $x(t) * h(t)$

```
%Figura 3.21 Ejemplo Convolucion grafica
```

```
tao=-2.25:.001:2.25;
x=us(tao)-us(tao-1);
t=0; h=us(t-tao-1)-us(t-tao-2);
```

```
subplot(411), plot(tao,x,'LineWidth',2);
axis([-2.250 ,2.25, 0, max(x)*1.25]);
hold on

subplot(411), plot(tao,h,'LineWidth',2);
axis([-2.25 ,2.25, 0, max(h)*1.25]);
text(-2.6,1.3,'(a)');text(-1.9,.25,'h(t-tao)');text(.1,.25,'x(tao)')
```

```
t=1.5; h=us(t-tao-1)-us(t-tao-2);
```

```
subplot(412), plot(tao,x,'LineWidth',2);
axis([-2.25 ,2.25, 0, max(x)*1.25]);
hold on
```

```
subplot(412), plot(tao,h,'LineWidth',2);
axis([-2.25 ,2.25, 0, max(h)*1.25]);
```

```

text(-2.6,1.3, '(b) ')

t=2.5; h=us(t-tao-1)-us(t-tao-2);

subplot(413), plot(tao,x,'LineWidth',2);
axis([-2.250 ,2.25, 0, max(x)*1.25]);
hold on

subplot(413), plot(tao,h,'LineWidth',2);
axis([-2.25 ,2.25, 0, max(h)*1.25]);
text(-2.6,1.3, '(c) ')

t=3.5; h=us(t-tao-1)-us(t-tao-2);

subplot(414), plot(tao,x,'LineWidth',2);
axis([-2.250 ,2.25, 0, max(x)*1.25]);
hold on

subplot(414), plot(tao,h,'LineWidth',2);
axis([-2.25 ,2.25, 0, max(h)*1.25]);
text(-2.6,1.3, '(d) ')

```

En la figura 3.21c se muestra el intervalo de $1 < t - 1 < 2$ o $2 < t < 3$, en este caso el intervalo de integración es de $t - 2 < \tau < 1$ y la respuesta en este intervalo es

$$y_{zs}(t) = \int_{t-2}^1 d\tau = -t + 3 \quad 2 < t < 3$$

Finalmente en la figura 3.21d se presenta el intervalo de $t - 1 > 2$ o $t > 3$, en el cual ya no hay traslape por lo que

$$y_{zs}(t) = 0 \quad t > 3$$

- c) La respuesta de la convolución de $x(t)$ y $h(t)$ con MATLAB es la que se muestra en la figura 3.22, la cual se valida con las respuestas determinadas anteriormente.

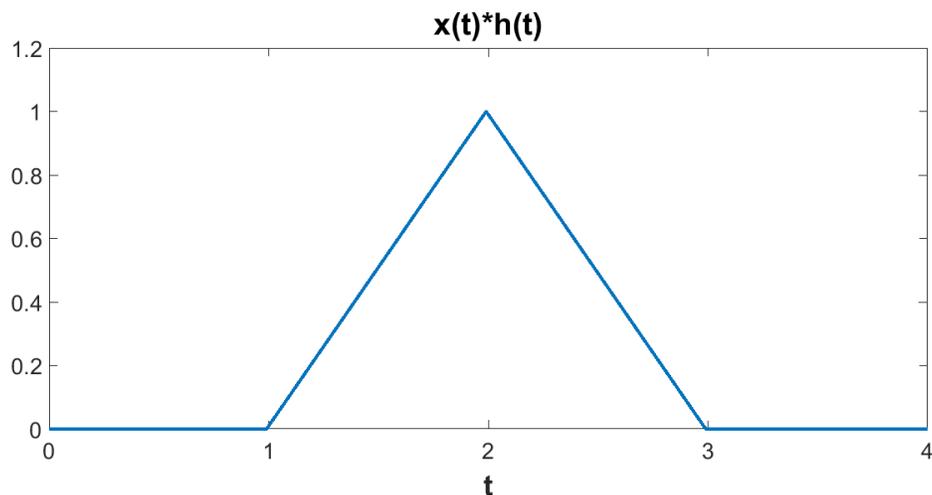


Figura 3.22: La convolución de $x(t)$ y $h(t)$

```
%Figura 3.22 Ejemplo Convolucion en TC
t1=0; dt=.01; t2=4;
t=t1:dt:t2;
x=us(t)-us(t-1);
h=us(t-1)-us(t-2);
y=dt*conv(x,h);
tc=2*t1:dt:2*t2;
plot(tc,y,'LineWidth',2)
xg=t1:t2;
set(gca,'xtick',[xg]);
axis([t1,t2,min(y),max(y)*1.2])
xlabel('t');title('x(t)*h(t)')
```

3.7

Estabilidad

La estabilidad de sistemas se aborda con el método de transformada de Laplace en el capítulo 4, mientras tanto, presentamos algunos aspectos importantes entorno a la estabilidad de sistemas.

Un sistema lineal es estable, y por tanto realizable, si cumple con la condición de que su respuesta al impulso es absolutamente integrable, es decir, si y solo si

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty \quad (3.66)$$

De otra forma el sistema es condicionalmente estable o inestable.

La Ec. (3.66) es una condición suficiente para la estabilidad, lo cual implica que cualquier entrada acotada produce una salida acotada.

Para validar lo anterior, considere la integral de convolución dada por la Ec. (3.60), en la que por simplicidad omitimos los subíndices en y_{zs} .

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (3.67)$$

La desigualdad da

$$|y(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)||x(t-\tau)| d\tau \quad (3.68)$$

En consecuencia si la entrada es acotada, $|x(t)| \leq M$, ($M > 0$ constante), implica que

$$|y(t)| \leq M \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau \quad (3.69)$$

Verificando que $y(t)$ está acotada si $x(t)$ está acotada y se cumple la Ec. (3.66).

La Ec. (3.66) debe además ser una condición necesaria para la estabilidad, ya que si existe una respuesta al impulso que tienda a cero conforme t tiende a infinito, la integral puede no converger, es decir, no se cumple la condición de la Ec. (3.66). Este es el caso cuando $h(t) = \frac{1}{t}u(t)$ en donde la integral no existe y además una entrada acotada produce una salida acotada. Por lo tanto, la Ec. (3.66) debe de ser además una condición necesaria para la estabilidad.

En muchos casos de sistemas realizables, se considera que el sistema es estable si la respuesta al impulso tiende a cero conforme t tiende a infinito, lo que equivale a afirmar que el sistema es estable si la respuesta de entrada cero tiende a cero conforme t tiende a infinito, esto es válido si no se pierde de vista la Ec. (3.66).

Ejemplo 3.10

Considere la respuesta al impulso mostrada en la figura 3.23 la cual está definida como

$$h(t) = u(t) - u(t-1) + u(t-2) - u\left(t - \frac{5}{2}\right) + u(t-3) - u\left(t - \frac{10}{3}\right) + u(t-4) - u\left(t - \frac{17}{4}\right) + u(t-5) - u\left(t - \frac{26}{5}\right) \dots$$

Determine si el sistema es estable.

Solución

La condición para que el sistema sea estable es la integrabilidad absoluta de la respuesta al impulso. En este caso se tiene

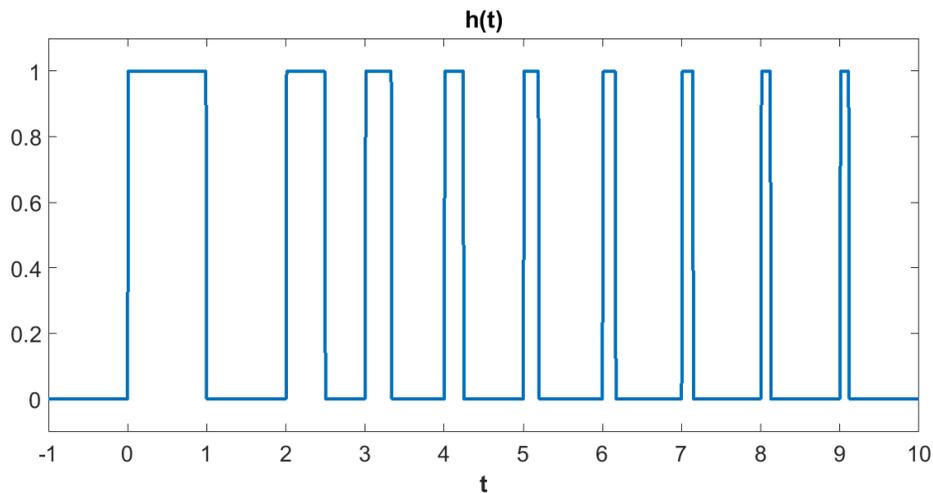


Figura 3.23: Respuesta al impulso $h(t)$

$$\int_0^{\infty} |h(\tau)| d\tau = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

De este resultado se observa que la serie diverge, por lo que el sistema es inestable.

Resumen

En este capítulo se ha presentado un método en el dominio del tiempo, a partir del modelo en el tiempo de un sistema lineal, para determinar sus diferentes respuestas,

- de entrada cero
- de estado cero
- respuesta total
- respuesta al impulso
- respuesta transitoria
- respuesta permanente

La respuesta de estado cero se ha determinado con la integral de convolución. También se ha presentado el concepto de estabilidad del sistema a partir de la integrabilidad absoluta de la respuesta al impulso.

Los procedimientos descritos incluyen ejemplos que se han desarrollado tanto de manera analítica como con el uso de la herramienta `MATLAB`.

Problemas

- 3.1** Considere el circuito del ejemplo 3.3, en donde $L = 5 H$, $R = 2 \Omega$ y la entrada del circuito es un voltaje de la forma $x(t) = e^{-2t} u(t)$, determine y grafique las respuestas para la corriente $i(t)$.
- a) de entrada cero
 - b) de estado cero y al pulso
 - c) total
 - d) transitoria
 - e) permanente
 - f) total, transitoria y permanente para el caso cuando $i(0^-) = 2 A$
- 3.2** Repita el problema 3.1 si ahora $x(t) = e^{-\frac{2t}{5}} u(t)$.
- 3.3** Repita el problema 3.1 si ahora $x(t) = \cos(-2t) u(t)$.
- 3.4** Verifique los resultados de los problemas 3.1, 3.2 y 3.3 con MATLAB.
- a) Utilice la función **dsolve()** similar al ejemplo 3.4.
 - b) Utilice la función **lsim(b,a,x,t)** para determinar la respuesta del sistema a la entrada **x** con condiciones iniciales nulas. **b** y **a** son vectores que definen al sistema, de acuerdo con la Ec. (3.3).
 - c) Utilice la función **impulse(b,a,t)** para determinar la respuesta al impulso del sistema
 - d) Grafique las respuestas obtenidas en b) y c) con **plot(t,lsim(b,a,x,t))** y **plot(t,impulse(b,a,x,t))**.
- 3.5** Considere el sistema de la figura 3.10. La entrada es un escalón $x(t) = 10u(t)$ y las condiciones iniciales son $i(0^-) = 0 A$ y $\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0^-} = 0 \frac{A}{s}$. Determine y grafique la corriente total $i(t)$ para los siguientes casos:
- a) $L = 1 H$, $R = 1 \Omega$ y $C = 1 F$.
 - b) $L = 1/10 H$, $R = 1 \Omega$ y $C = 10/9 F$.
 - c) $L = 1/10 H$, $R = 2 \Omega$ y $C = 1/10 F$.
- 3.6** Repita el problema 3.5 con MATLAB. Utilice las funciones del problema 3.4 para verificar sus respuestas. También son de utilidad las siguientes funciones simbólicas: **int(f)** evalúa la integral de la función **f**, **diff(f)** realiza la diferencial de la función **f**, **roots(a)** determina las raíces del vector **a**.
- En cualquier caso, vea los detalles con **help**, por ejemplo **help int**, etc.
- 3.7** Para el sistema en tiempo continuo, modelado por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = x(t)$$

En donde $y(t)$ representa la salida y $x(t)$ la entrada. Determine la respuesta del sistema al impulso y a una entrada escalón. Considere $y(0^-) = 1$ y $\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0^-} = 0$.

3.8 Verifique el resultado del problema 3.7 con MATLAB.

3.9 Si $x(t) = e^{kt}u(t)$ y $h(t) = e^{st}u(t)$, es la entrada a un sistema de primer orden y la respuesta al impulso del sistema, respectivamente, determine la respuesta de estado cero $y_{zs}(t) = x(t) * h(t)$ mediante la integral de convolución en forma analítica, gráfica y con MATLAB haciendo uso de la función `conv()`, para los siguientes casos:

a) $k = s$

b) $k \neq s$

3.10 Determine la convolución $w(t) = x_1(t) * x_2(t)$ de las siguientes señales

a) $x_1(t) = 2r(t-1) - 2r(t-3) - 4u(t-3)$, $x_2(t) = -2u(t) + 2u(t-2)$

b) $x_1(t) = 2r(t-1) - 2r(t-3) - 4u(t-3)$, $x_2(t) = -2u(t-3) + 2u(t-5)$

c) $x_1(t) = \begin{cases} \left(\frac{2}{3}t - 1\right) & 2 \leq t < 3.5 \\ 2 & 3.5 \leq t < 4 \\ -2t + 9 & 4 \leq t < 5.5 \\ \left(\frac{4}{5}t - 5\right) & 5.5 \leq t < 6.75 \\ 0 & \text{otro valor} \end{cases}$ $x_2(t) = \begin{cases} 0.5 & 7 \leq t < 8 \\ 1.0 & 8 \leq t < 9 \\ 1.5 & 9 \leq t < 10 \\ 1.0 & 10 \leq t < 11 \\ 0 & \text{otro valor} \end{cases}$

3.11 La propiedad de convolución del impulso unitario con una señal, Ec. (3.61) está dada por $x(t) = x(t) * \delta(t)$. Aplique esta propiedad para determinar la convolución de las siguientes señales: $w(t) * x(t)$ y $w(t) * z(t)$. En donde

$$x(t) = 1.5\delta(t+1.5) + 1.5\delta(t-1.5) \quad w(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t < 2 \\ 0 & \text{otro valor} \end{cases}$$

$$z(t) = 2\delta(t-0.5) + 4\delta(t-1)$$

3.12 Determine la convolución de las siguientes señales: $x_1(t) * x_2(t)$, $x_1(t/4) * x_2(t)$, $x_1(t) * x_1(t)$ y $x_2(t) * x_2(t)$. En donde

$$x_1(t) = u(t-1.5) - u(t-2.5)$$

$$x_2(t) = u(t-2.5) - u(t-5.5)$$

3.13 Considere la respuesta al impulso de los ejemplos de este capítulo.

a) Ejemplo 3.3, Ec. (3.31)

b) Ejemplo 3.5, Ec. (3.43)

c) Ejemplo 3.6, Ec. (3.54)

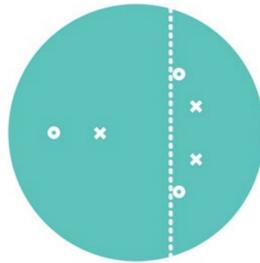
d) Ejemplo 3.8

e) Ejemplo 3.9

Verifique la integrabilidad absoluta de la respuesta al impulso, y con ello valide la estabilidad del respectivo sistema.

4

Análisis de sistemas mediante la Transformada de Laplace



4.1

Introducción

Si en la obtención del modelo matemático de un sistema físico se llevan a cabo algunas suposiciones y se minimizan ciertos parámetros y como resultado se obtiene un modelo lineal y en el que además se considera que los elementos que lo constituyen no sufren modificaciones de su comportamiento en el tiempo, entonces se dice que estos sistemas son *lineales e invariantes en el tiempo*. Las consideraciones anteriores son hechas para una gran cantidad de sistemas físicos. Los modelos matemáticos asociados a estos sistemas están representados por ecuaciones diferenciales lineales, ordinarias y de coeficientes constantes de la forma dada por la Ec. (4.1).

$$\sum_{n=0}^N a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = \sum_{n=0}^M a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} = x_f(t) \quad (4.1)$$

Donde $y(t)$ es la señal o función de la salida, $x(t)$ es la señal o función de la entrada y $x_f(t)$ se le denomina en este texto *excitación* y es una combinación lineal de la entrada $x(t)$ y sus derivadas.

Una metodología para resolver la ecuación diferencial anterior o bien para conocer la respuesta del sistema lineal e invariante en el tiempo es empleando la *Transformada de Laplace*, que tiene como principal ventaja resolver la ecuación diferencial como una relación algebraica.

4.2

Transformada de Laplace y su Inversa

La transformada de Laplace, desarrollada por el matemático y astrónomo francés Pierre Simón Laplace (1749-1827) es una poderosa herramienta matemática de fácil manejo, que se define como

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad \text{Transformada de Laplace bilateral} \quad (4.2)$$

donde:

$x(t)$ es una función en el tiempo continuo y $s = \sigma + j\omega$ es una variable compleja.

La función $X(s)$ se expresa en términos de la variable compleja s y se denomina la transformada de Laplace bilateral por abarcar el intervalo de $-\infty$ a ∞ . En la práctica, el análisis de los sistemas y las funciones del tiempo comienzan en un tiempo finito y en los sistemas invariantes en el tiempo, por conveniencia, se elige que éste sea $t = 0$. Así, la transformada de Laplace que resulta es la *Transformada de Laplace unilateral* que se define como

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad \text{Transformada de Laplace unilateral} \quad (4.3)$$

Como se puede observar la transformada de Laplace unilateral sólo depende de los valores para $t \geq 0$. Si se aplica la transformada de Laplace a funciones en las que sus valores para $t < 0$ son iguales a cero, la transformada de Laplace bilateral y la transformada de Laplace unilateral serán iguales; sin embargo para las funciones en las que sus valores son diferentes de cero para $t < 0$ la transformada de Laplace unilateral tendrá como efecto la pérdida de la información en ese intervalo de tiempo, es decir los valores no nulos de $x(t)$ para $t < 0$ no son considerados por la transformada unilateral de Laplace.

Puesto que en el estudio de los sistemas y las señales se consideran sus comportamientos a partir de $t \geq 0$, es decir, que son nulos para $t < 0$ bastará con considerar el análisis de la transformada de Laplace unilateral.

Si se conoce la transformada de Laplace $X(s)$ de una función dada, es posible determinar la función del tiempo continuo $x(t)$ correspondiente, mediante la *Transformada de Laplace inversa* definida como

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s)e^{st} ds \quad (4.4)$$

La transformada de Laplace inversa, Ec. (4.4), se evalúa en la recta del plano complejo desde $c - j\omega$ hasta $c + j\omega$, donde c es cualquier número real fijo que cumpla que $\text{Re}\{s\} = c$ esté en la región de convergencia de $X(s)$, por lo que la expresión se evalúa en una recta paralela al eje imaginario a una distancia c del mismo.

La Ec. (4.4) comúnmente es difícil de evaluar, lo que hace deseable evitar su uso para calcular la transformada de Laplace inversa. En su lugar, cuando $X(s)$ es un cociente de polinomios en s el cálculo se basa en el desarrollo en fracciones parciales de $X(s)$.

4.3

Propiedades de la Transformada de Laplace

Al analizar los sistemas con la transformada de Laplace se pueden enlistar una serie de propiedades que además de presentar la relación que existe en el dominio del tiempo y el de la frecuencia, se utilizan para reducir la complejidad de análisis de algunos problemas.

Las propiedades de la Transformada de Laplace son:

Propiedad	Señal	Transformada de Laplace
Linealidad	$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$
Desplazamiento en el tiempo	$f(t - a)u_{-1}(t - a)$	$e^{-as}F(s)$
Desplazamiento en frecuencia	$e^{-at}f(t)$	$F(s + a)$
Convolución	$\int_{0^-}^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau$	$F(s)G(s)$
Integración en t	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
Derivación	$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$s^n F(s) - \sum_{m=1}^n s^{n-m} f^{(m-1)}(0^-)$
Multiplicación por t^n	$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$
Valor inicial	$f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
Valor final	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$	$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$
Secuencia periódica	$f(t) = f(t + T)$	$\frac{\mathcal{L}\{\text{Primer ciclo}\}}{1 - e^{-Ts}}$
Escalamiento	$f(at), a > 0$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
División por t	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(u) du$

Tabla 4.1: Propiedades de la Transformada de Laplace

Algunas transformadas de Laplace unilateral comunes son:

No.	Señal en el tiempo continuo	Transformada de Laplace
1	$\delta(t)$	1
2	$u_{-1}(t)$	$\frac{1}{s}$
3	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
4	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5	$a \sin(\omega t)$	$a \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
6	$a \cos(\omega t)$	$a \frac{s}{s^2 + \omega^2}$
7	$e^{-at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
8	$e^{-at} \cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
9	$\frac{t^n e^{-at}}{n!}$	$\frac{1}{(s+a)^{n+1}}$
10	$t \sin(\omega t)$	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
11	$t \cos(\omega t)$	$\frac{s^2 + \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
12	$t^2 \sin(\omega t)$	$\frac{2\omega(3s^2 - \omega^2)}{(s^2 + \omega^2)^3}$
13	$t^2 \cos(\omega t)$	$\frac{2s(3s^2 - \omega^2)}{(s^2 + \omega^2)^3}$
14	$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$	$\log \frac{s+b}{s+a}$

Tabla 4.2: Transformada unilateral de Laplace

4.4

Función de transferencia

La transformada de Laplace es una herramienta para estudiar y analizar los sistemas en tiempo continuo, lineales e invariantes en el tiempo y además causales.

Como se estudió en el capítulo 3, la respuesta de un sistema lineal e invariante en el tiempo está dada por la Ec. (3.4), esto es

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) \quad (4.5)$$

Si se considera que el sistema que se analiza parte del reposo, entonces sus condiciones iniciales son nulas y por consiguiente la respuesta de entrada cero $y_{zi}(t)$ se suprime. Así, la respuesta del sistema está determinada sólo por la entrada y esta es la respuesta de estado cero $y_{zs}(t)$.

La respuesta de estado cero de estos sistemas se puede determinar mediante la integral de convolución

$$y_{zs}(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau = h(t) * x(t) \quad (4.6)$$

donde $h(t)$ es la respuesta al impulso del sistema.

Si $x(t) = 0$ para todo $t < 0$ y el sistema es causal, se tiene

$$y_{zs}(t) = \int_0^t h(\tau) x(t-\tau) d\tau = h(t) * x(t) \quad t > 0 \quad (4.7)$$

Al aplicar la transformada de Laplace a la Ec. (4.7) y con la propiedad de la convolución de la transformada de Laplace

$$Y_{zs}(s) = H(s) X(s) \quad (4.8)$$

donde

$Y_{zs}(s)$ es la transformada de Laplace de la respuesta de estado cero $y_{zs}(t)$

$H(s)$ es la transformada de Laplace de la respuesta al impulso $h(t)$

$X(s)$ es la transformada de Laplace de la entrada $x(t)$

$H(s)$ se denomina *la función de transferencia del sistema*. Constituye la representación en el dominio de la variable compleja s de la respuesta al impulso y permite caracterizar al sistema en dicho dominio, de manera que

$$h(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} H(s) \quad (4.9)$$

Este par de transformación es *fundamental*, ya que establece una relación entre los dominios de la frecuencia s y del tiempo continuo t . Al despejar $H(s)$ de la Ec. (4.8), resulta

$$H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)} \quad (4.10)$$

La Ec. (4.10) expresa la función de transferencia como la relación que hay entre la transformada de Laplace de la salida (respuesta de estado cero) y la entrada del sistema. Se debe enfatizar que la función de transferencia sólo tiene significado si y sólo si, el sistema al que representa es lineal, invariante con el tiempo y con condiciones iniciales nulas.

Ejemplo 4.1

Sea un sistema lineal e invariante en el tiempo en reposo y al que se le aplica como entrada un escalón unitario $x(t) = u_{-1}(t)$. Si la respuesta del sistema es

$$y(t) = [3 + 5e^{-3t} - 3e^{-2t}]u_{-1}(t)$$

determine la función de transferencia del sistema.

Solución

La transformada de Laplace de la entrada es

$$X(s) = \frac{1}{s}$$

La transformada de Laplace de la respuesta de estado cero es

$$Y_{zs}(s) = \frac{3}{s} + \frac{5}{s+3} - \frac{3}{s+2}$$

Sustituyendo en la Ec. (4.10)

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{\frac{3}{s} + \frac{5}{s+3} - \frac{3}{s+2}}{\frac{1}{s}} = \frac{3(s+3)(s+2) + 5s(s+2) - 3s(s+3)}{s(s+2)(s+3)} \\ &= \frac{3s^2 + 15s + 18 + 5s^2 + 10s - 3s^2 - 9s}{s^2 + 5s + 6} \end{aligned}$$

Simplificando, la función de transferencia del sistema es

$$H(s) = \frac{5s^2 + 16s + 18}{s^2 + 5s + 6}$$

4.5

Construcción directa de la función de transferencia

La función de transferencia de un sistema lineal e invariable en el tiempo de orden finito, puede obtenerse directamente del modelo matemático en el dominio del tiempo continuo, como a continuación se describe.

Sea la ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes de orden N que describe al sistema, Ec. (4.11), la transformada de Laplace correspondiente resulta

$$\mathcal{L} \left\{ \sum_{n=0}^N a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} \right\} = \mathcal{L} \left\{ \sum_{n=0}^M a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} \right\} \quad (4.11)$$

Aplicando la propiedad de derivación se tiene

$$\sum_{n=0}^N a_n s^n Y(s) - \sum_{n=1}^N a_n \left\{ \sum_{m=1}^n y^{m-1}(0^-) s^{n-m} \right\} = \sum_{n=0}^M b_n s^n X(s) - \sum_{n=1}^M b_n \left\{ \sum_{m=1}^n x^{m-1}(0^-) s^{n-m} \right\}$$

donde $y^{m-1}(0^-)$ y $x^{m-1}(0^-)$ son las $(m-1)$ -ésimas derivadas de $y(t)$ y $x(t)$ evaluadas en $t = 0^-$, respectivamente. Despejando a $Y(s)$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{\sum_{n=0}^M b_n s^n X(s) - \sum_{n=1}^M b_n \left\{ \sum_{m=1}^n x^{m-1}(0^-) s^{n-m} \right\}}{\sum_{n=0}^N a_n s^n}}_{\text{Respuesta de estado cero } Y_{zs}(s)} + \underbrace{\frac{\sum_{n=1}^N a_n \left\{ \sum_{m=1}^n y^{m-1}(0^-) s^{n-m} \right\}}{\sum_{n=0}^N a_n s^n}}_{\text{Respuesta de entrada cero } Y_{zi}(s)} \quad (4.12)$$

Como se ha mencionado, si el sistema en estudio está en reposo, las condiciones iniciales son nulas y por consiguiente la respuesta de entrada cero en la Ec. (4.12) es nula, de igual manera el término de la respuesta de estado cero relacionado con sus respectivas condiciones iniciales, reduciéndose a

$$Y_{zs}(s) = \frac{\sum_{n=0}^M b_n s^n X(s)}{\sum_{n=0}^N a_n s^n}$$

La *función de transferencia* se define como la razón de la transformada de la salida a la transformada de la entrada cuando todas las condiciones iniciales son cero. Así

$$H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{n=0}^M b_n s^n}{\sum_{n=0}^N a_n s^n} \quad (4.13)$$

o bien

$$H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)} = \frac{K(s+q_0)(s+q_1)\cdots(s+q_M)}{(s+p_0)(s+p_1)\cdots(s+p_N)} = \frac{Q(s)}{P(s)} \quad (4.14)$$

La expresión mostrada en la Ec. (4.14) es la representación general de un sistema que en el dominio del tiempo continuo está dada por la ecuación diferencial dada por la Ec. (4.1). Como se puede notar la función de transferencia es una función racional de los polinomios en s , $Q(s)$ y $P(s)$.

4.6

Patrón de polos y ceros

Las raíces del polinomio $Q(s)$ se les conoce como ceros del sistema, mientras que las raíces del polinomio $P(s)$ se les denomina polos del sistema. Éstos juegan un importante papel en la estabilidad del sistema, como se verá más adelante.

Se conoce como patrón de polos y ceros a la representación gráfica de la función de transferencia en el plano complejo s . Como su nombre lo indica, se ubican en el plano todas y cada una de las raíces, colocando una cruz \times si se trata de un polo y un círculo \circ si es un cero, como se observa en la figura 4.1.

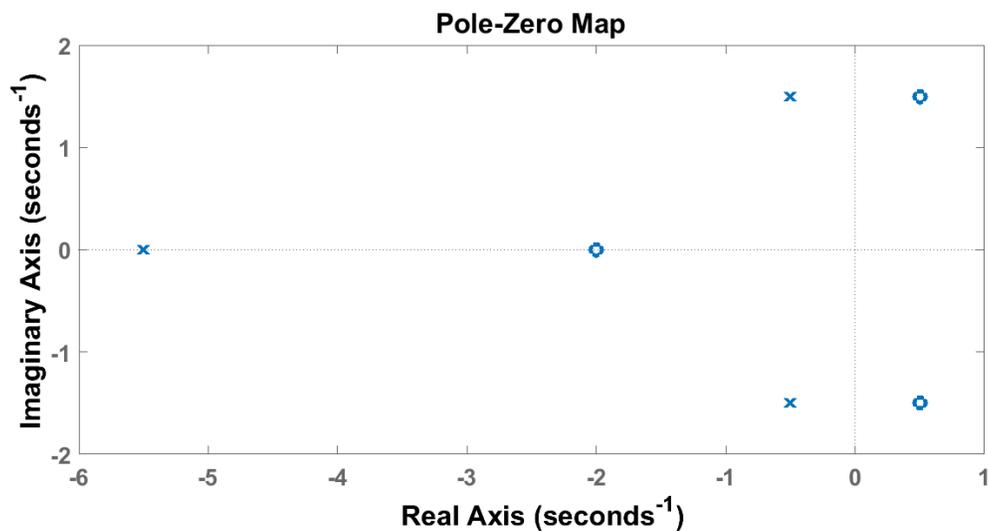


Figura 4.1: Patrón de polos y ceros

Ejemplo 4.2

Sea la función de transferencia de un sistema lineal e invariante en el tiempo

$$H(s) = \frac{s^2 + 5s + 6}{s^3 + 15s^2 + 74s + 120}$$

bosqueje el patrón de polos y ceros correspondiente.

Solución

Calculando las raíces de los polinomios, se tiene para el numerador

$$Q(s) = s^2 + 5s + 6$$

cuyas raíces o ceros son

$$s_1 = -3 \quad \text{y} \quad s_2 = -2$$

En tanto para el denominador se tiene

$$P(s) = s^3 + 15s^2 + 74s + 120$$

las respectivas raíces o polos son

$$s_1 = -4, \quad s_2 = -5 \quad \text{y} \quad s_3 = -6$$

El patrón de polos y ceros se presenta en la figura 4.2.

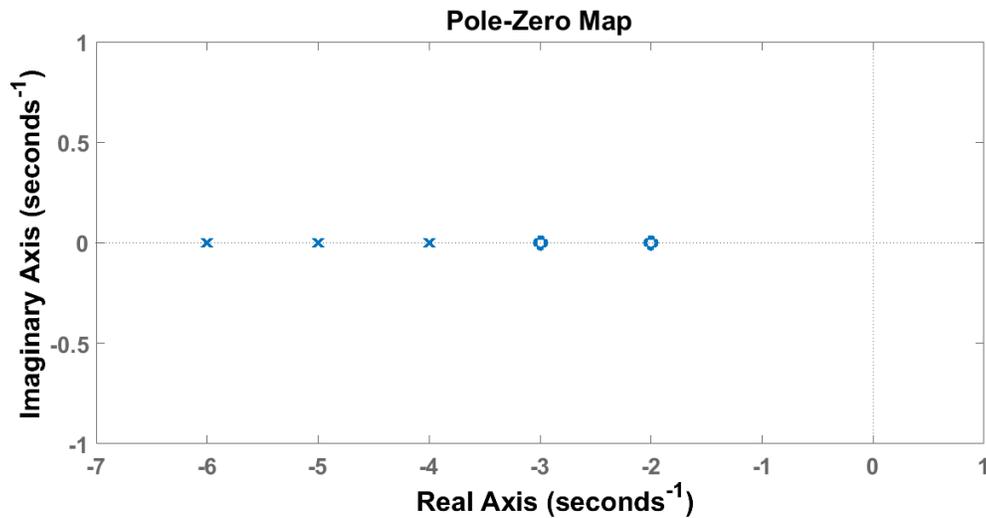


Figura 4.2: Patrón de polos y ceros de $H(s)$

```
% Figura 4.2 Definición del numerador y denominador
num=[1 5 6];
den=[1 15 74 120];
% Impresión en pantalla del sistema
printsys(num,den);
% Cálculo de las respectivas raíces
roots(num)
roots(den)
% Imprime el patrón de polos y ceros
pzmap(num,den);
hold;
line([-7 1],[0 0]);
line([0 0],[-1 1]);
```

Ejemplo 4.3

Se tiene ahora la función de transferencia de un sistema lineal e invariante en el tiempo, determine su patrón de polos y ceros.

$$H(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s^2 + 5s + 12}$$

Solución

Los ceros del sistema son ahora complejos conjugados

$$s_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j \quad \text{y} \quad s_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j$$

De manera semejante, los polos del sistema son

$$s_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j \quad \text{y} \quad s_2 = -\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{23}}{2}j$$

El patrón de polos y ceros se muestra en la figura 4.3.

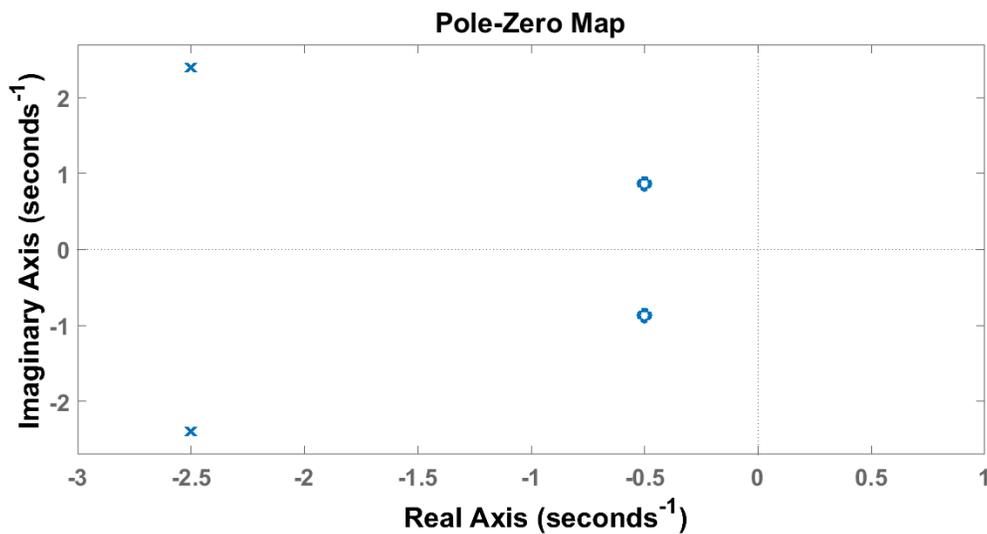


Figura 4.3: Patrón de polos y ceros del ejemplo 4.3

El código de MATLAB que genera el patrón de polos y ceros es el siguiente

```
% Figura 4.3 Definición del numerador y denominador
num=[1 1 1];
den=[1 5 12];
% Impresión en pantalla del sistema
printsys(num,den);
% Cálculo de las respectivas raíces
roots(num)
```

```
roots(den)
% Imprime el patrón de polos y ceros
pzmap(num,den);
hold;
line([-3 1],[0 0]);
line([0 0],[-3 3]);
```

4.7

Respuesta de un sistema mediante la función de transferencia

La respuesta de estado cero de un sistema lineal e invariante en el tiempo debida a diferentes entradas se puede encontrar a partir de la función de transferencia. Despejando $Y_{zs}(s)$ de la Ec. (4.10) se tiene

$$Y_{zs}(s) = H(s) X(s) \quad (4.15)$$

De esta forma se puede calcular $y_{zs}(t)$, la respuesta de estado cero del sistema debida a cualquier entrada, la misma que se calcula mediante la expansión en fracciones parciales de $Y_{zs}(s)$ y la transformada inversa de Laplace respectiva.

Ejemplo 4.4

Sea la función de transferencia de un sistema

$$H(s) = \frac{5s^2 + 16s + 18}{s^2 + 5s + 5}$$

Determine la respuesta de estado cero que ocasiona una entrada escalón unitario.

Solución

Si la entrada es un escalón unitario

$$X(s) = \frac{1}{s}$$

La salida del sistema está dada por

$$Y_{zs}(s) = H(s) X(s)$$

sustituyendo

$$Y_{zs}(s) = \frac{5s^2 + 16s + 18}{s^2 + 5s + 5} \cdot \frac{1}{s}$$

El desarrollo de la expansión en fracciones parciales resulta

$$Y_{zs}(s) = \frac{5s^2 + 16s + 18}{s^2 + 5s + 5} \cdot \frac{1}{s} = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s}$$

donde

$$\begin{aligned}A &= 5 \\B &= -3 \\C &= 3\end{aligned}$$

sustituyendo

$$Y_{zs}(s) = \frac{5}{s+3} - \frac{3}{s+2} + \frac{3}{s}$$

De la transformada de Laplace inversa se obtiene

$$y_{zs}(t) = [5e^{-3t} - 3e^{-2t} + 3]u_{-1}(t)$$

La figura 4.4 muestra la respuesta al escalón del sistema.

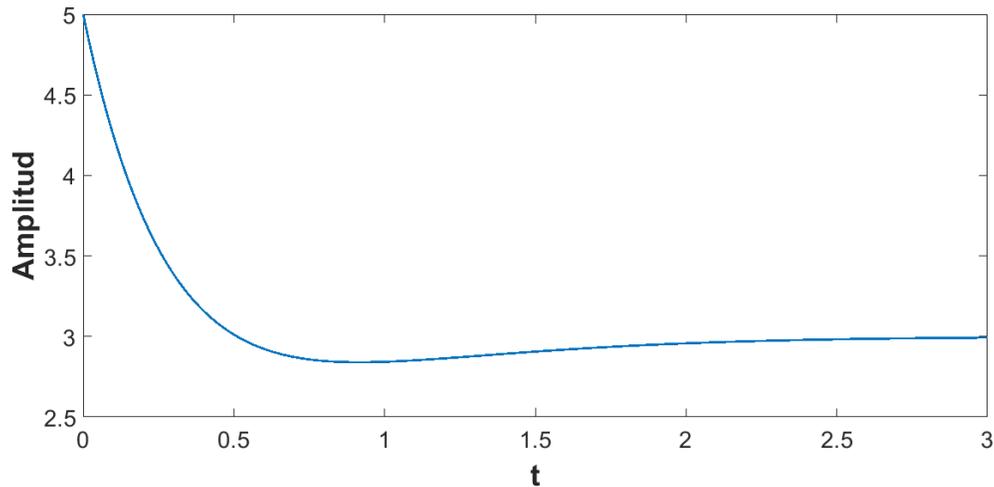


Figura 4.4: Respuesta al escalón del ejemplo 4.7.

Ejemplo 4.5

Encuentre la respuesta del sistema cuya función de transferencia es la del ejemplo 4.2, para una entrada $x(t) = 10e^{-0.1t}u_{-1}(t)$

Solución

La representación de la entrada en el dominio de Laplace es

$$X(s) = \frac{10}{s+0.1}$$

La función de transferencia es

$$H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)} = \frac{s^2 + 5s + 6}{s^3 + 15s^2 + 74s + 120}$$

despejando $Y_{zs}(s)$

$$Y_{zs}(s) = \frac{s^2 + 5s + 6}{s^3 + 15s^2 + 74s + 120} \cdot \frac{10}{s + 0.1} = \frac{10(s^2 + 5s + 6)}{(s + 0.1)(s + 4)(s + 5)(s + 6)}$$

De la expansión en fracciones parciales

$$\frac{10(s^2 + 5s + 6)}{(s + 0.1)(s + 4)(s + 5)(s + 6)} = \frac{A}{s + 0.1} + \frac{B}{s + 4} + \frac{C}{s + 5} + \frac{D}{s + 6}$$

los valores de los residuos A, B, C y D son

$$\begin{aligned} A &= 0.4887 \\ B &= -2.5641 \\ C &= 12.2449 \\ D &= -10.1695 \end{aligned}$$

$$Y_{sz}(s) = \frac{0.4887}{s + 0.1} - \frac{2.5641}{s + 4} + \frac{12.2449}{s + 5} - \frac{10.1695}{s + 6}$$

Las respectivas transformadas inversas de Laplace de cada uno de los elementos resultan

$$y_{zs}(t) = [0.4887e^{-0.1t} - 2.5641e^{-4t} + 12.2449e^{-5t} - 10.1695e^{-6t}]u_{-1}(t)$$

La gráfica de la respuesta de estado cero encontrada se muestra en la figura 4.5.

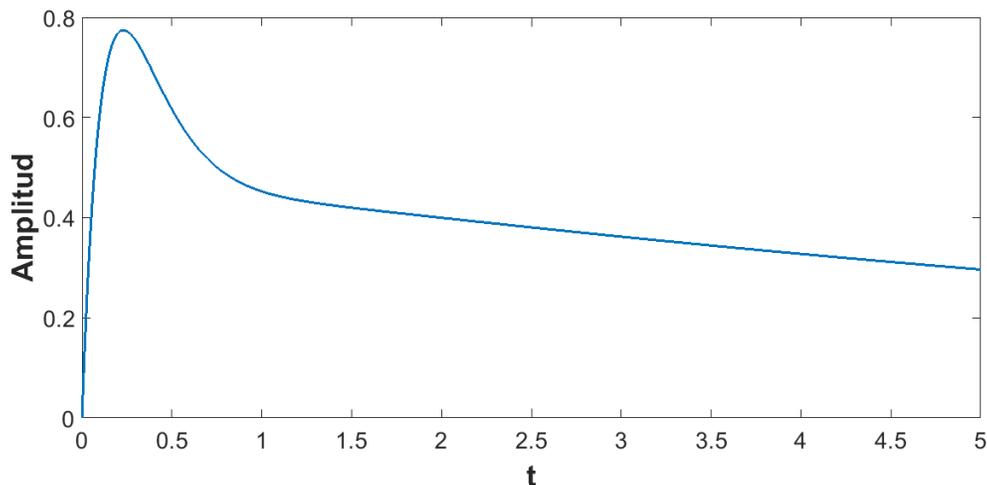


Figura 4.5: Respuesta del sistema del Ejemplo 4.5

El código de MATLAB con el que se encuentra la respuesta del sistema de este ejemplo es:

```
% Figura 4.5 Definición del numerador y denominador
num = [1 5 6];
den = [1 15 74 120];
% Se define la entrada como una señal exponencial
t = [0:0.05:5];
nent = [10];
dent = [1 0.1];
% Se encuentra la multiplicación de H(s) por X(s)
num1 = conv(num,nent)
den1 = conv(den,dent);
% Impresion en pantalla del sistema
printsys(num1,den1);
% Cálculo de la expansión en fracciones parciales
[r,p] = residue(num1,den1)
% Imprime el patrón de polos y ceros
A = figure(1);
set(A,'position',[21 238 490 500]);
pzmap(num1,den1);
hold;
line([-3.5 0.5],[0 0]);
line([0 0],[-1.5 1.5]);
C = figure(3);
set(C,'position',[518 238 490 500]);
% Calcula la respuesta al escalón a partir de la función de transferencia
subplot(2,1,1)
impulse(num1,den1,t);
% Calcula la respuesta al escalón a partir de la transformada inversa de Laplace
y = r(1)*exp(t*p(1))+r(2)*exp(t*p(2))+r(3)*exp(t*p(3))+r(4)*exp(t*p(4));
subplot(2,1,2)
plot(t,y);
```

4.8

Estabilidad

Determinar la estabilidad de los sistemas representados en el plano complejo s es una consideración importante en su estudio, análisis y diseño. Es posible determinar, sin mucha complejidad, la estabilidad de un sistema lineal e invariante en el tiempo a partir de la función de transferencia. Recuérdese: un sistema se dice que es estable si sus respuestas son acotadas cuando las entradas respectivas son también acotadas.

La función de transferencia de un sistema, generalmente, tiene la forma del cociente de polinomios en s , los mismos que pueden ser simplificados en factores de sus respectivas raíces, como en la Ec. (4.14), observando que para que el sistema sea causal la cantidad de polos es mayor o igual al número de ceros. Analizando cualquiera de los polinomios mencionados, se puede encontrar que estará formado por raíces reales (diferentes o iguales) o bien por pares de raíces complejas conjugadas (o imaginarias conjugadas).

Las raíces de los polinomios que constituyen la función de transferencia de un sistema pueden ser reales o complejas conjugadas, donde la parte real puede ser positiva, negativa o nula. Desde este punto de vista, las formas mencionadas de las raíces predominan en el tipo de respuesta del sistema.

Considerando el sistema representado por la Ec. (4.14), la respuesta de estado cero cuando la entrada es un impulso unitario, esto es $x(t) = \delta(t)$, al sustituir en la Ec. (4.15) se tiene

$$Y(s) = H(s) \cdot 1 \tag{4.16}$$

La expansión en fracciones parciales, si se considera que todas las raíces del denominador (los polos) son reales y diferentes, es la siguiente

$$H(s) = \frac{C_1}{s + p_1} + \frac{C_2}{s + p_2} + \dots + \frac{C_N}{s + p_N} \tag{4.17}$$

La respuesta al impulso del sistema está dada por la transformada inversa de Laplace de cada uno de los términos, así

$$h(t) = C_1 e^{-p_1 t} + C_2 e^{-p_2 t} + \dots + C_N e^{-p_N t} \tag{4.18}$$

Al considerar cualquier término de la Ec. (4.18) se puede ver:

- Si la raíz $s = -p_n$ es positiva, entonces el exponente correspondiente es positivo y la exponencial tenderá al infinito con el tiempo.
- Si la raíz $s = -p_n$ es negativa, entonces el exponente correspondiente es negativo y la exponencial tenderá a cero con el tiempo.
- Si la raíz $s = p_n$ es cero, entonces el exponente correspondiente es nulo y la exponencial evaluada será uno, obteniendo un valor constante de C_n

La figura 4.6, muestra gráficamente las tres posibles formas que una raíz real puede ser evaluada.

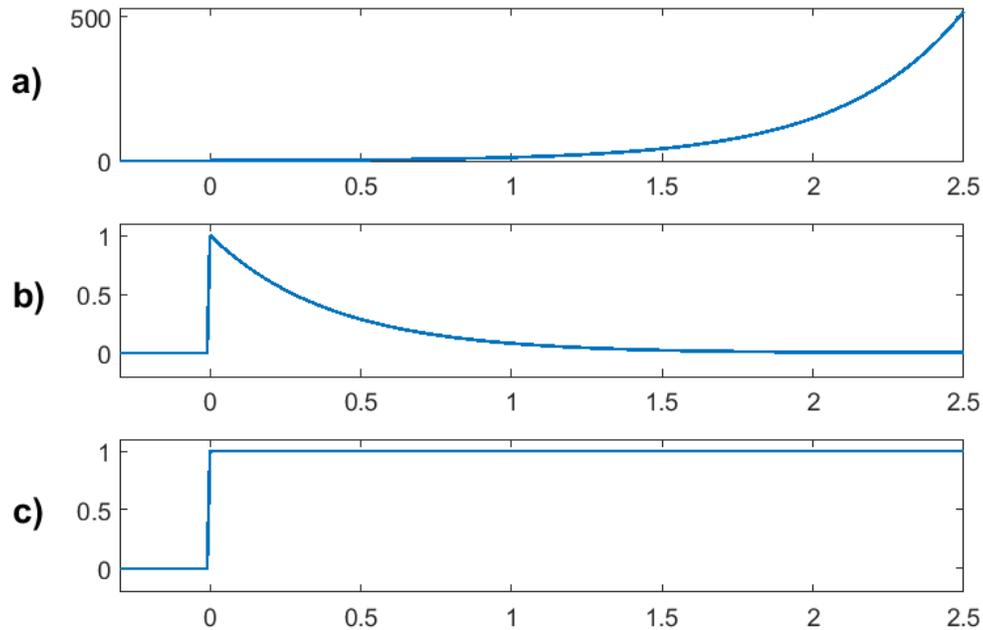


Figura 4.6: Parte real de la raíz ($s + a = 0$): a) Real positiva. b) Real negativa. c) Real igual a cero.

El mismo análisis se puede realizar cuando la función de transferencia tiene, al menos un par de raíces complejas conjugadas. La primera diferencia se encuentra en la expansión en fracción parciales donde se deben mantener como un polinomio de segundo grado, quedando ambas raíces

$$H(s) = \frac{C_1}{s + p_1} + \frac{C_2s + C_3}{s^2 + \alpha s + \beta} + \dots + \frac{C_n}{s + p_n} \quad (4.19)$$

el término de segundo orden satisface la expresión

$$s^2 + \alpha s + \beta = (s + r + bj)(s + r - bj)$$

por lo que los factores cuadráticos en el dominio el tiempo son de la forma

$$\frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2} \xleftrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-at} \sin(\omega t)$$

$$\frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2} \xleftrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-at} \cos(\omega t)$$

Analizado las expresiones en el tiempo se puede observar que las funciones sinusoidales oscilan entre 1 y -1, por lo que dependiendo de la parte real de la raíz compleja se tienen diferentes posibilidades, a saber

- a) Si la parte real del par conjugado es positiva las exponenciales asociadas tenderán en el tiempo a un valor infinito.

- b) Si la parte real del par conjugado es negativa las exponenciales asociadas tenderán en el tiempo a un valor cero.
- c) Si la parte real del par conjugado es cero las exponenciales adquieren un valor constante.

La figura 4.7 muestra gráficamente las tres posibles formas para un par complejo conjugado.

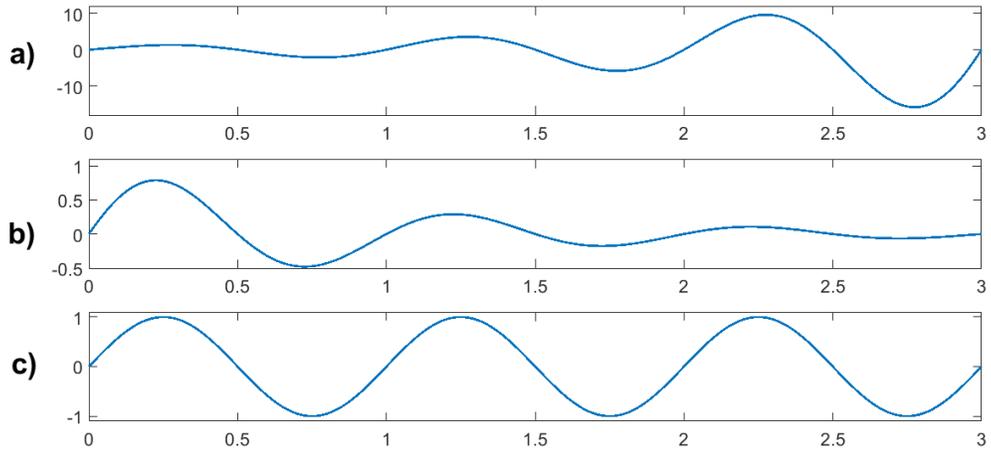


Figura 4.7: Forma de la respuesta cuando las raíces son complejas conjugadas: a) Parte real positiva. b) Parte real negativa. c) Parte real nula.

Resumiendo, la forma de la respuesta de un sistema depende de la posición de los polos contenidos en la función de transferencia, específicamente de la parte real de la raíz. Si es negativa el sistema es estable, si es positiva el sistema es inestable y si la parte real es cero la respuesta será críticamente estable o marginalmente estable, esto se puede observar gráficamente en la figura 4.8.

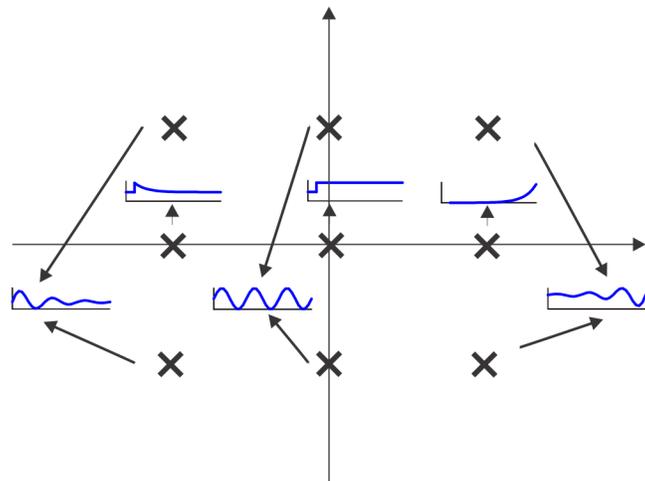


Figura 4.8: Respuesta de los sistemas de acuerdo con la posición de los polos de la función de transferencia.

Ejemplo 4.6

Para la función de transferencia $H(s)$ indicada, determine la respuesta si la entrada es un escalón unitario y diga si es un sistema estable, inestable o críticamente estable.

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$$

Solución

Se sabe que

$$Y(s) = H(s) X(s)$$

Sustituyendo

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2} \cdot \frac{1}{s}$$

Resolviendo por expansión en fracciones parciales

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 2)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 2s + 2}$$

en donde

$$A = \left. \frac{1}{s^2 + 2s + 2} \right|_{s=0} \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

para los términos B y C

$$Bs + C \Big|_{s=-1+j} = \frac{1}{s} \Big|_{s=-1+j} \Rightarrow B = -\frac{1}{2} \text{ y } C = -1$$

sustituyendo se tiene

$$Y(s) = \frac{0.5}{s} + \frac{-0.5s - 1}{s^2 + 2s + 2} = \frac{0.5}{s} - 0.5 \frac{s + 2}{s^2 + 2s + 2}$$

acomodando el denominador para tener el binomio cuadrado perfecto $(s + a)^2$ y el numerador para tener la forma $s + a$

$$Y(s) = \frac{0.5}{s} - 0.5 \frac{s + 1 + 1}{(s + 1)^2 + 1} = \frac{0.5}{s} - 0.5 \frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 1} - 0.5 \frac{1}{(s + 1)^2 + 1}$$

Aplicando la transformada de Laplace inversa, se tiene

$$y(t) = [0.5 - 0.5e^{-t} \cos(t) - 0.5e^{-t} \sin(t)] u_{-1}(t)$$

Las raíces del polinomio del denominador de la función de transferencia son

$$s_{1,2} = -1 \pm j$$

en las que se observa que la parte real de las raíces es negativa, por consiguiente el sistema es estable. La misma conclusión se tiene al analizar la grafica de la respuesta al escalón que se muestra en la figura 4.9.

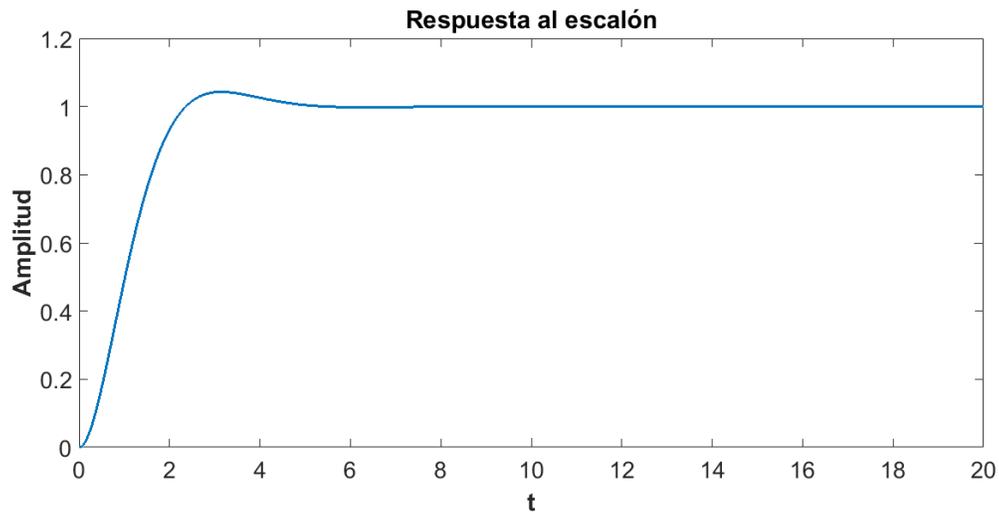


Figura 4.9: Respuesta del sistema del Ejemplo 4.6

```
% Figura 4.9
clear; clc; close all
% Definición del numerador y denominador
num = [1]; den = [1 2 2];
% Se define la entrada como una señal escalón
t = [0:0.01:20];
nent = [1]; dent=[1 0];
% Se encuentra la multiplicación de H(s) por X(s)
num1 = conv(num,nent); den1 = conv(den,dent);
% Impresión en pantalla del sistema
printsys(num1,den1);
% Cálculo de la expansión en fracciones parciales
[r,p] = residue(num1,den1)
% Imprime el patrón de polos y ceros
figure;
pzmap(num1,den1);
axis([-1.2 0.1 -1.2 1.2])
% Calcula la respuesta escalón a partir de la función de transferencia
figure; impulse(num1,den1,t);
figure; y = 0.5*(1-exp(-t).*cos(t) - exp(-t).*sin(t));
plot(t,y,'LineWidth',2)
```

Resumen

En cursos anteriores el lector tenía conocimiento de la utilidad de la *Transformada de Laplace* en la solución de ecuaciones diferenciales lineales, ordinarias y de coeficientes constantes. Ahora, la transformada de Laplace en el estudio, análisis y diseño de los sistemas continuos, lineales e invariantes en el tiempo constituye una herramienta matemática poderosa de manera semejante a su empleo en asignaturas tales como la teoría de control, el filtrado y los sistemas eléctricos. Se ha demostrado que al tener el modelo matemático de un sistema y deducir la función de transferencia correspondiente, se conocen las características del sistema tales como la estabilidad, la respuesta del sistema a cualquier entrada y las relaciones presentes entre ésta y aquella.

La transformada de Laplace es utilizada por especialistas en diversas disciplinas como comunicaciones, control y electrónica, por mencionar sólo algunas, es por ello que su conocimiento es fundamental y esencial en el estudio de los sistemas continuos.

Más adelante se estudiarán métodos equivalentes al de Laplace para los sistemas discretos.

Problemas

- 4.1** La función $h(t) = [e^{-2t} \cos(2t) + 0.5e^{-4t} \sin(2t)] u_{-1}(t)$ es la respuesta al impulso de un sistema lineal e invariante en el tiempo, con ayuda de MATLAB encuentre:
- La función de transferencia correspondiente.
 - El patrón de polos y ceros.
 - Si el sistema es estable.
 - La salida cuando la transformada de Laplace de la entrada es $X(s) = \frac{1}{s}$
- 4.2** Para la respuesta al impulso $h(t) = [e^{-2t} \cos(t) + 4.5e^{-6t} \sin(2t)] u_{-1}(t)$, repita los incisos del problema 4.1, usando la herramienta MATLAB.
- 4.3** Considere la función de transferencia $H(s) = \frac{s^2 + 1}{s^3 + s + 2}$, con el auxilio de MATLAB encuentre:
- El patrón de polos y ceros.
 - Si el sistema es estable.
 - La respuesta del sistema si la entrada $x(t)$ es un escalón unitario.
 - La respuesta del sistema si la entrada es $x(t) = \sin(10t) u_{-1}(t)$
- 4.4** Sea la función de transferencia $H(s) = \frac{s + 1}{s^2 + s + 2}$, repita los incisos que se solicitan en el problema 4.3, use MATLAB para obtenerlos.
- 4.5** Encuentre con ayuda de MATLAB el patrón de polos y ceros de las funciones de transferencia siguientes.
- $H(s) = \frac{1}{s^3 + s^2 + 1}$
 - $H(s) = \frac{s - 1}{(s + 2)(3s^2 + 1)}$
 - $H(s) = \frac{s^2 + s + 1}{(s + 2)(s + 3)}$
 - $H(s) = \frac{s + 1.47}{s^3 + s^2 + 1}$
 - $H(s) = \frac{3s + 1}{s(s + 2)}$
 - $H(s) = \frac{10s}{s + 2} + \frac{5}{2s + 7}$
 - $H(s) = \frac{1}{s^2 - 1}$
 - $H(s) = \frac{100}{s^2 + s + 1}$

i)
$$H(s) = 10 + \frac{5s+2}{s^2+s+20}$$

4.6 Considere las funciones de transferencia del problema 4.5 y determine si el sistema que representa es estable, inestable o críticamente estable.

4.7 Con cada una de las funciones de transferencia del problema 4.5, encuentre y bosqueje la respuesta (empleando MATLAB) cuando la entrada es:

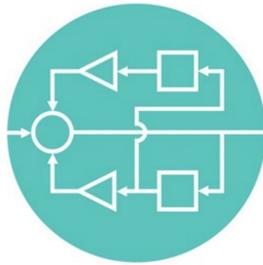
a) $x(t) = u_{-1}(t)$

b) $x(t) = tu_{-1}(t)$

c) $x(t) = \cos(20\pi t)u_{-1}(t)$

5

Representación de Sistemas en Tiempo discreto



5.1

Introducción

En este capítulo se lleva a cabo una introducción al análisis de los sistemas de tiempo discreto en el dominio del tiempo. Son sistemas que se pueden modelar por medio de ecuaciones en diferencias. Se definen, nuevamente, diversas secuencias discretas que son importantes en el estudio de tales sistemas. Se introduce la respuesta al impulso como una descripción en el dominio del tiempo de un sistema discreto lineal e invariante en el tiempo y posteriormente la suma de convolución que relaciona la secuencia de la salida con la secuencia de la entrada y la respuesta al impulso.

El entorno en que vivimos, está inmerso en una gran diversidad de sistemas, muchos de los cuales podemos considerar lineales y en donde los datos que relacionan la entrada con la salida aparecen en forma natural como muestras. Estos sistemas se denominan sistemas de tiempo discreto y se pueden modelar por medio de ecuaciones en diferencias, de la misma manera que los sistemas de tiempo continuo lineales e invariantes en el tiempo se modelan por ecuaciones diferenciales.

5.2

Ecuaciones en Diferencias

Las ecuaciones en diferencias que relacionan las secuencias de las señales de la entrada y de la salida de un sistema discreto muestran las propiedades de los mismos, tales como linealidad, invariabilidad en el tiempo y causalidad, entre otras. Un sistema descrito por una ecuación en diferencias es un sistema dinámico porque el valor de la secuencia de la señal de la salida, $y[n]$ depende no sólo de la secuencia de la señal de la entrada $x[n]$, $x[n-1]$, $x[n-2]$, \dots , sino también de los valores anteriores de ella misma, esto es: $y[n-1]$, $y[n-2]$, \dots .

Como ejemplo, considere la siguiente ecuación en diferencias

$$y[n] = \frac{1}{100} \{x[n] + x[n-1] + \dots + x[n-98] + x[n-99]\} = 0.01 \sum_{m=0}^{99} x[n-m] \quad (5.1)$$

esta ecuación es un modelo matemático de las utilidades de una empresa. $x[n]$ representa la utilidad por las ventas realizadas en el n -ésimo día y $y[n]$ indica la utilidad promedio por las ventas realizadas durante los últimos cien días.

La Ec. (5.1) no es una ecuación recursiva ya que los valores de la secuencia de la salida dependen únicamente de valores de la secuencia de la entrada. Debe ser obvio que este algoritmo para obtener el promedio de las utilidades no es eficiente. El cálculo de la salida es casi siempre el mismo excepto por la entrada más reciente que se debe introducir y la entrada más distante que se debe desechar.

Teniendo en cuenta lo anterior, es posible generar un algoritmo eficiente. Una forma de lograrlo es a partir de la Ec. (5.1), la cual también permite calcular la utilidad promedio del siguiente día, es decir

$$y[n+1] = \frac{1}{100} \{x[n+1] + x[n] + \dots + x[n-97] + x[n-98]\}$$
$$y[n+1] = y[n] + \frac{1}{100} \{x[n+1] - x[n-99]\}$$

y como esta ecuación es válida para toda n , entonces

$$y[n] = y[n-1] + \frac{1}{100} \{x[n] - x[n-100]\} \quad (5.2)$$

La Ec. (5.2) es recursiva y es más eficiente que la Ec. (5.1), ya que para determinar $y[n]$ se requiere realizar menos operaciones aritméticas.

Para diseñar y analizar un sistema o proceso tanto de tiempo continuo como de tiempo discreto es necesario tener, al menos, un modelo matemático que describa su comportamientos en forma adecuada. No obstante, modelar el sistema o proceso puede resultar un trabajo arduo, ya que la mayoría de ellos no son lineales y varían en el tiempo. Sin embargo, haciendo algunas simplificaciones y empleando leyes básicas de la Física es posible obtener modelos mediante ecuaciones en diferencias como se puede apreciar en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 5.1

Considere el circuito escalera que consta de N secciones, con una resistencia de carga R_L , mostrado en la figura 5.1. Encuentre una ecuación en diferencias que permita determinar el voltaje del n -ésimo nodo, $v[n]$, con respecto al nodo de referencia o tierra.

Suponga que $R_L = R$.

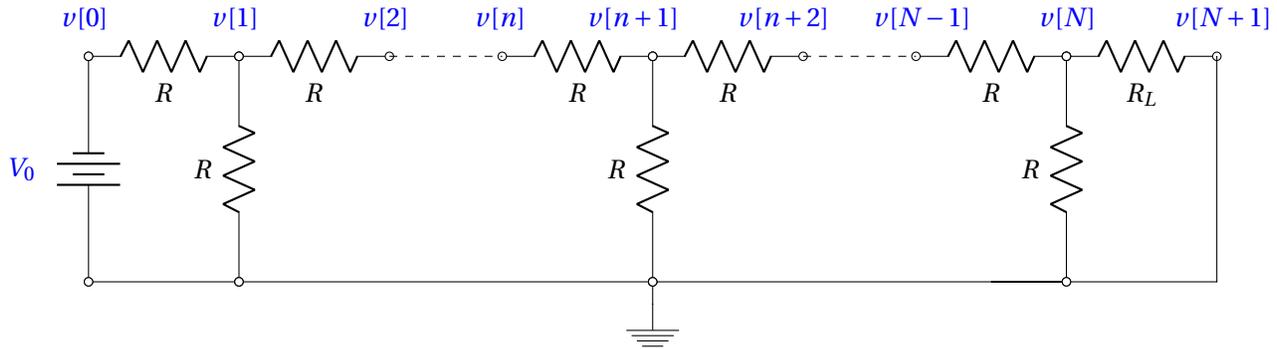


Figura 5.1: Red en escalera de N secciones.

Solución

Aplicando la ley de corrientes de Kirchhoff¹ al nodo $(n+1)$ -ésimo

$$\frac{v[n] - v[n+1]}{R} = \frac{v[n+1] - v[n+2]}{R} + \frac{v[n+1]}{R}$$

simplificando

$$v[n+2] - 3v[n+1] + v[n] = 0 \quad (5.3)$$

La Ec. (5.3) permite determinar el voltaje del n -ésimo nodo. Para resolverla es necesario considerar las condiciones iniciales o lo que se denomina condiciones de frontera, esto es, $v[0] = V_0$ y $v[N+1] = 0$, como se observa en la figura 5.1. Se debe notar, que en esta ecuación en diferencias el índice n no representa la variable tiempo sino una posición.

Ejemplo 5.2

Ahora se considera el número de ordenaciones posibles de k elementos tomados de n en n , el cual está dado por la siguiente ecuación

$$y[n] = \frac{k!}{(k-n)!} \quad (5.4)$$

Se desea encontrar una ecuación en diferencias que permita calcular tal número de ordenaciones.

¹En un circuito eléctrico de parámetros concentrados, en cualquiera de sus nodos y para todo tiempo, la suma algebraica de las corrientes que entran al nodo es cero.

Solución

Si $y[n]$ representa el número de ordenaciones de k elementos tomados de n en n , entonces el número de ordenaciones de k elementos tomados de $(n-1)$ en $(n-1)$ está dado por

$$y[n-1] = \frac{k!}{(k-n+1)!}$$

Realizando el cociente de las dos ecuaciones anteriores y con álgebra básica se tiene

$$y[n] = (k-n+1)y[n-1]$$

esta ecuación en diferencias de primer orden es lineal, con coeficientes variables y homogénea. Para resolverla es necesario tener en cuenta que $y[0] = 1$.

Para verificar la validez del modelo, se calcula el número de ordenaciones de 5 elementos tomados de 4 en 4.

$$y[1] = (5-1+1)y[0] = 5 \times 1 = 5$$

$$y[2] = (5-2+1)y[1] = 4 \times 5 = 20$$

$$y[3] = (5-3+1)y[2] = 3 \times 20 = 60$$

$$y[4] = (5-4+1)y[3] = 2 \times 60 = 120$$

Número de ordenaciones que coincide con el que se obtiene cuando se emplea la Ec. (5.4).

Se debe resaltar, que el número de operaciones necesarias para el cálculo de las ordenaciones es menor cuando se emplea la ecuación en diferencias que cuando se recurre a la Ec. (5.4).

Ejemplo 5.3

En este ejemplo se determinan los primeros elementos de la secuencia de la salida de una ecuación en diferencias que representa el capital en una cuenta de ahorro. Considere que $y[0]$ es el capital inicial depositado.

Solución

El modelo correspondiente se explica por sí solo.

$$y[n] = (1+i)y[n-1] + x[n]$$

donde $y[n]$ representa el capital al final del n -ésimo mes, i es la tasa de interés y $x[n]$ es el depósito efectuado en el n -ésimo mes.

El capital que se tiene en los primeros 3 meses es

$$y[1] = (1+i)y[0] + x[1]$$

$$y[2] = (1+i)y[1] + x[2]$$

$$y[3] = (1+i)y[2] + x[3]$$

Procediendo de esta manera, que se denomina forma *recursiva*, es posible conocer el capital al final de cualquier mes.

De los ejemplos anteriores, se puede concluir que para determinar la secuencia de la salida de una ecuación en diferencias no se requieren grandes conocimientos matemáticos pues con simples operaciones aritméticas, es posible hacerlo. No obstante, cuando la ecuación en diferencias comprende un mayor número de términos o la variable independiente, n , es grande, este método puede resultar bastante tedioso. En las siguientes secciones se estudiarán formas alternativas para calcular la secuencia de la salida, $y[n]$.

5.3

La función unitaria y la secuencia unitaria

La función unitaria o impulso unitario² para sistemas discretos es la función delta de Kronecker, $\delta_k[nT]$, que se define como

$$\delta_k[nT] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

con el propósito de simplificar la notación, se elimina el subíndice k y si se considera que el tiempo entre muestras, T , es igual a la unidad, se tiene

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad (5.6)$$

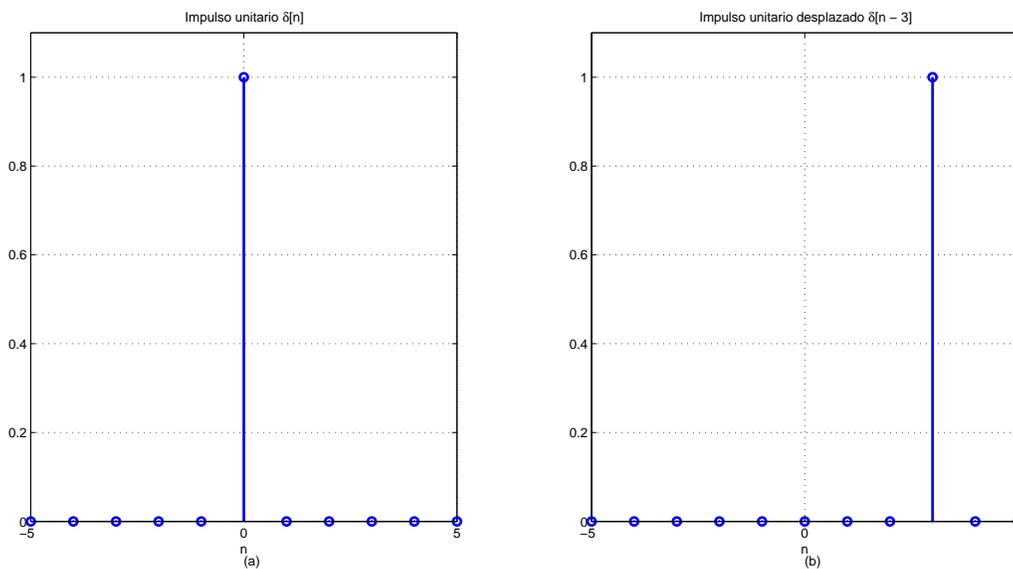


Figura 5.2: Función unitaria o impulso unitario. (a) $\delta[n]$. (b) $\delta[n-3]$.

²Estas funciones ya se definieron en el capítulo 1, aquí se recapitulan por la importancia que tienen en el análisis de los sistemas y las señales.

```

% Código de la Fig. 5.2. Función Impulso unitario
n = [-5:5];
x = secimpls(0,-5,5);
subplot(1,2,1), stem(n,x,'b','linewidth',2);
title('Impulso unitario \delta[n]');
xlabel('n');
grid; axis([-5,5,0,1.1])
text(0,-0.09,'(a)')
x = secimpls(3,-5,5);
subplot(1,2,2), stem(n,x,'b','linewidth',2);
title('Impulso unitario desplazado \delta[n - 3]');
xlabel('n');
grid; axis([-5,5,0,1.1])
text(0,-0.09,'(b)')

```

o en forma general

$$\delta[n - m] = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases} \quad (5.7)$$

La representación de estas funciones se observa en la figura 5.2.

La función escalón unitario discreto o secuencia unitaria se define como

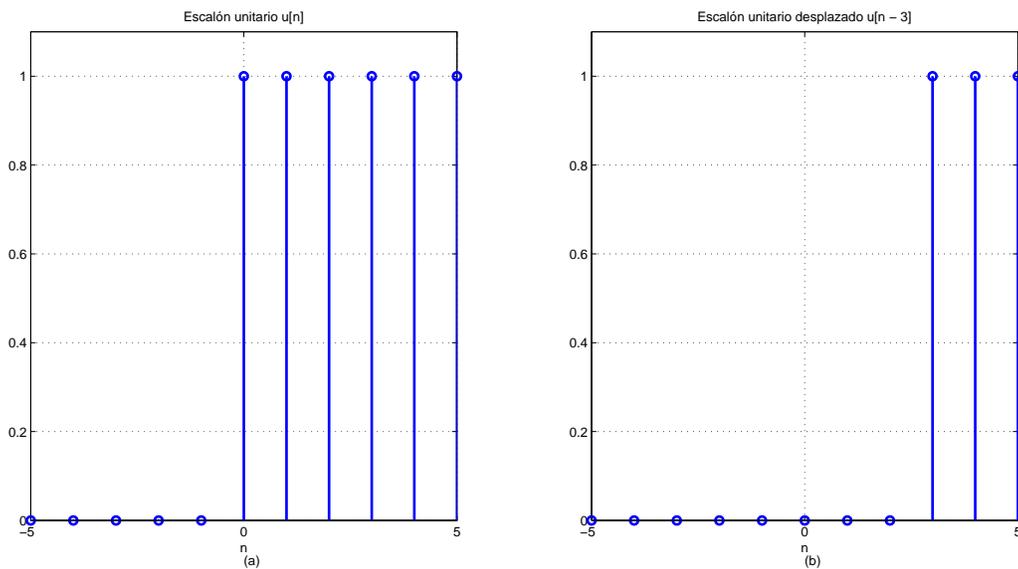


Figura 5.3: Escalón unitario discreto o secuencia unitaria. (a) $u[n]$. (b) $u[n - 3]$.

```

% Código de la Figura 5.3. Escalón unitario.
n = [-5:10];
x = secuno(0,-5,10);
subplot(1,2,1), stem(n,x,'b','linewidth',2);
title('Escalón unitario u[n]');
xlabel('n'),
grid; axis([-5,5,0,1.1]);
text(0,-0.09,'(a)');
x = secuno(3,-5,10);
subplot(1,2,2), stem(n,x,'b','linewidth',2);
title('Escalón unitario desplazado u[n - 3]');
xlabel('n');
grid; axis([-5,5,0,1.1]);
text(0,-0.09,'(b)');

```

$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad (5.8)$$

o en forma general

$$u[n - m] = \begin{cases} 1 & n \geq m \\ 0 & n < m \end{cases} \quad (5.9)$$

Estas secuencias discretas se muestran en la figura 5.3

Al igual que en los sistemas continuos, en los sistemas discretos hay una relación entre la función unitaria o impulso unitario y la secuencia unitaria. La secuencia unitaria se obtiene a partir de la función unitaria mediante la suma

$$u[n] = \sum_{m=0}^{\infty} \delta[n - m] \quad (5.10)$$

mientras que la función unitaria se puede expresar como la diferencia de dos secuencias unitarias

$$\delta[n] = u[n] - u[n - 1] \quad (5.11)$$

Una de las características importantes de la función unitaria o impulso simplemente, es que una secuencia arbitraria se puede representar como una suma de impulsos desplazados. Por ejemplo, la secuencia $x[n]$ se puede expresar como

$$x[n] = \dots + x[-2]\delta[n + 2] + x[-1]\delta[n + 1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n - 1] + x[2]\delta[n - 2] + \dots$$

en forma compacta

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\delta[n - m] \quad (5.12)$$

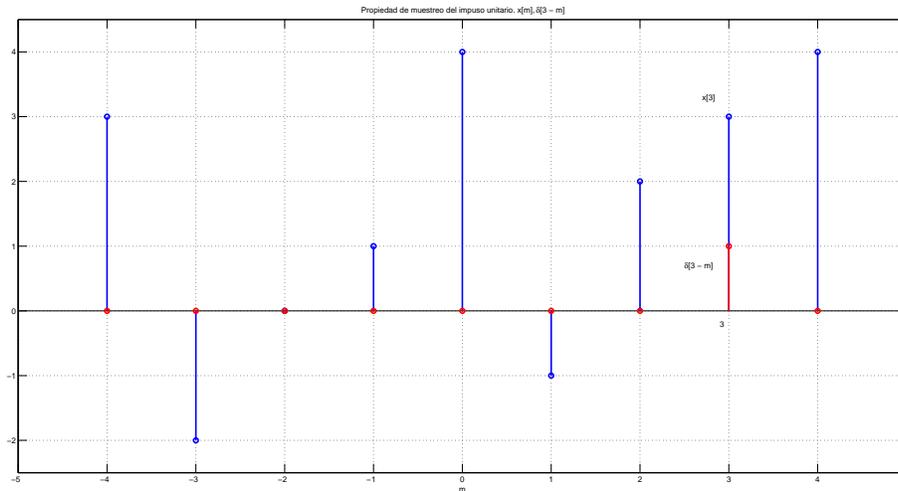


Figura 5.4: Propiedad de muestreo de la función unitaria o impulso.

```
% Código de la Fig. 5.4. Propiedad de muestreo
n = [-5:5];
x = [1,3,-2,0,1,4,-1,2,3,4,-1];
stem(n,x,'b','linewidth',2),
title('Propiedad de muestreo del impulso unitario. x[m], \delta[3 - m]')
xlabel('m');
grid; axis([-5,5,-2.5,4.5]);
hold on
x = secimpls(3,-5,5);
stem(n,x,'r','linewidth',2);
text(2.9,-0.2,'3'); text(2.7,3.3,'x[3]'); text(2.5,0.7,'\delta[3 - m]');
hold off
```

La ecuación anterior es la versión discreta de la *propiedad de muestreo de la función unitaria o impulso unitario*, de gran importancia en el estudio y el análisis de los sistemas y las señales discretos.

En la figura 5.4, se muestra la propiedad de muestreo con una señal arbitraria $x[m]$, para $m = [-5 \cdots 5]$ y $n = 3$.

La rampa unitaria discreta se define como

$$r[n] = \begin{cases} n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad (5.13)$$

Empleando el escalón unitario discreto la rampa unitaria discreta se puede expresar de la manera siguiente

$$r[n] = nu[n] \quad (5.14)$$

5.4

La respuesta al impulso o función unitaria

Cuando se aplica el impulso unitario a un sistema discreto lineal que se encuentra en reposo, es decir con condiciones iniciales nulas, en el instante $n = m$ como se muestra en la figura 5.5, el sistema discreto presenta en la salida la secuencia de la respuesta al impulso. Es decir

$$H\{\delta[n - m]\} = h[n, m] \tag{5.15}$$

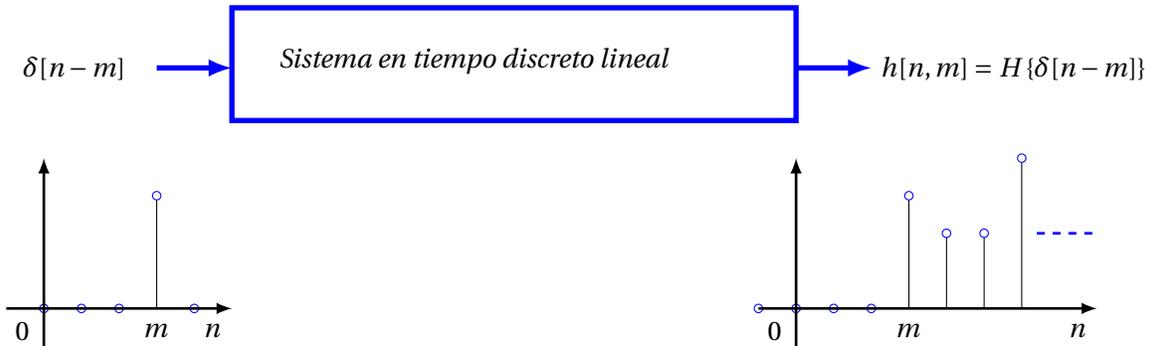


Figura 5.5: Respuesta al impulso o respuesta a la función unitaria, $h[n, m]$.

Esta es la respuesta al impulso $h[n]$ en el instante n cuando se aplica un impulso en el instante m .

Del mismo modo, cuando se aplica una entrada $x[n]$, estando el sistema en reposo, se produce en la salida la respuesta de estado cero, $y_{zs}[n]$.

$$y_{zs}[n] = H\{x[n]\}$$

considerando la propiedad de muestreo del impulso, Ec. (5.12).

$$y_{zs}[n] = H\{x[n]\} = H\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\delta[n - m]\right\} \tag{5.16}$$

pero la respuesta del sistema discreto es función de n no de m , ésta es una variable auxiliar o variable muda como también se conoce, por lo que

$$y_{zs}[n] = H\{x[n]\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]H\{\delta[n - m]\}$$

sustituyendo la Ec. (5.15), la ecuación anterior se puede escribir como

$$y_{zs}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n, m] \quad \text{Respuesta de estado cero, caso general} \quad (5.17)$$

La representación gráfica de la Ec. (5.17) se presenta en la figura 5.6.

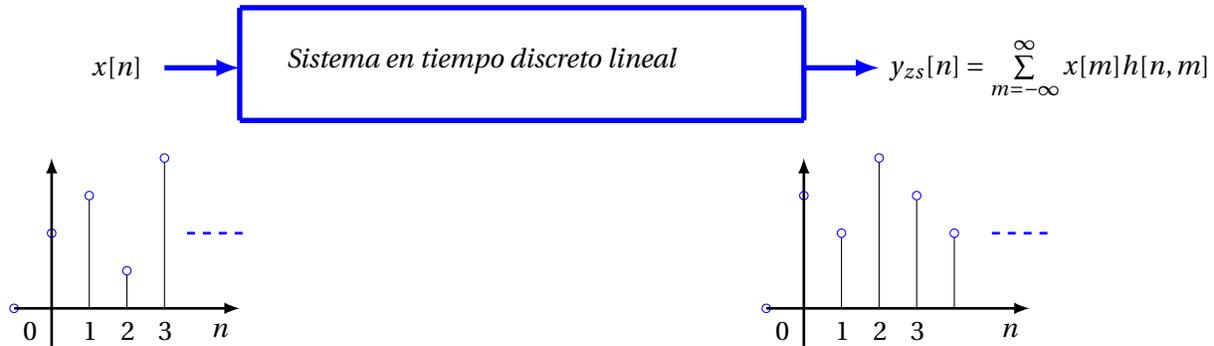


Figura 5.6: Respuesta $y_{zs}[n]$ cuando se aplica la entrada $x[n]$.

Con base en la Ec. (5.17), se puede decir, de manera semejante al caso continuo, que es posible determinar la respuesta de estado cero debida a cualquier entrada arbitraria si se conoce la respuesta al impulso, $h[n, m]$.

La Ec. (5.17) considera el caso general de un sistema discreto lineal. Cuando el sistema discreto además de ser lineal es causal, la respuesta de estado cero es

$$y_{zs}[n] = \sum_{m=-\infty}^n x[m]h[n, m] \quad \text{Respuesta de estado cero de un sistema causal} \quad (5.18)$$

ya que un sistema causal no responde antes de aplicar la entrada. La respuesta de estado cero en el instante n depende únicamente de los valores de la secuencia de la entrada $x[m]$ para $n \geq m$.

En un sistema discreto invariante en el tiempo, el cual también se denomina *sistema discreto invariante con el desplazamiento del tiempo*, la respuesta no depende del instante en que se aplica la entrada, sino que depende de la diferencia $n - m$, por lo que $h[n, m] = h[n - m]$, y la Ec. (5.17) resulta

$$y_{zs}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n - m] \quad \text{Sistema lineal e invariante en el tiempo} \quad (5.19)$$

Esta ecuación se denomina suma de convolución y al igual que la integral de convolución satisface la propiedad de conmutatividad, como a continuación se demuestra.

Si se hace el cambio de variable $l = n - m$, se deben modificar los límites de la suma. Cuando $m = -\infty$, entonces $l = \infty$ y cuando $m = \infty$, es $l = -\infty$. Y la Ec. (5.19) se puede escribir como

$$y_{zs}[n] = \sum_{l=-\infty}^{-\infty} x[n - l]h[l]$$

Pero sumar de más infinito a menos infinito es igual a sumar de menos infinito a más infinito, por consiguiente

$$y_{zs}[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n-l]h[l] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-m]h[m] \quad \text{Sistema lineal e invariante en el tiempo} \quad (5.20)$$

Una interpretación de las ecuaciones (5.19) y (5.20), es que dos sistemas discretos lineales e invariantes en el tiempo, con la respuesta al impulso y la secuencia de entrada intercambiadas producen la misma secuencia de salida. En la figura 5.7 se ilustra esta situación.

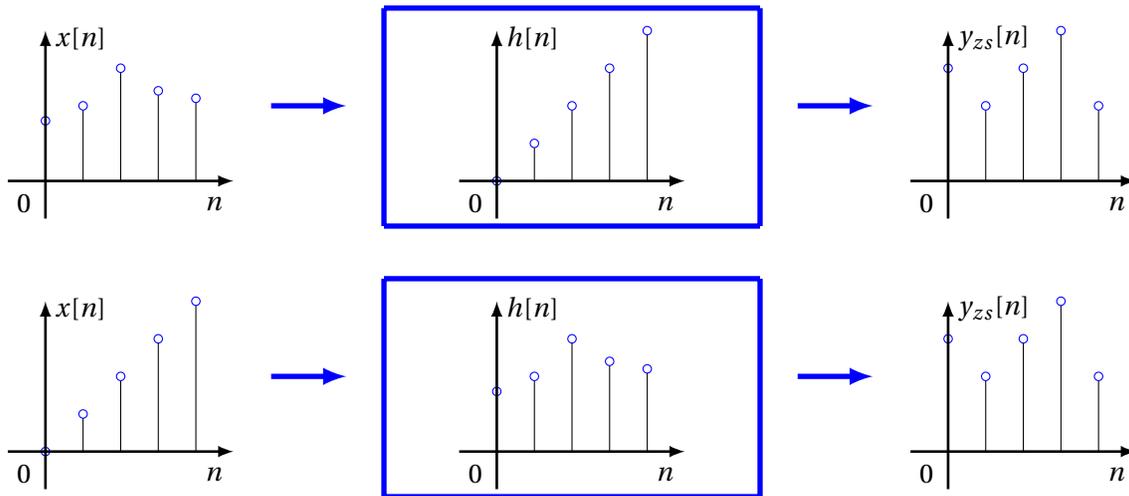


Figura 5.7: Propiedad de conmutatividad de un sistema lineal e invariante en el tiempo.

Para sistemas lineales con una secuencia de entrada que inicia en $n = 0$.

$$y_{zs}[n] = \sum_{m=0}^{\infty} x[m]h[n, m] \quad \text{Sistema lineal que inicia en } n = 0 \quad (5.21)$$

Y para los sistemas discretos lineales, invariantes en el tiempo, causales y que inician en $n = 0$.

$$y_{zs}[n] = \sum_{m=0}^n x[m]h[n-m] \quad \text{Sistema lineal, invariante en el tiempo, causal y que inicia en } n = 0 \quad (5.22)$$

La suma de convolución, Ec. (5.19), se representa por

$$y_{zs}[n] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n] \quad (5.23)$$

como se señaló, permite determinar la respuesta de estado cero de un sistema lineal e invariante en el tiempo y con ella se efectúan las mismas operaciones que con la integral de convolución, esto es, se puede trasponer o reflejar, desplazar, multiplicar y sumar.

Ejemplo 5.4

Determine la respuesta de estado cero del sistema discreto lineal e invariante en el tiempo que tiene una respuesta al impulso $h[n] = u[n]$, cuando la entrada es $x[n] = nu[n]$, mediante *recursividad*.

Solución

Una forma de determinar la respuesta de estado cero es la sustitución directa en la suma de convolución

$$y_{zs}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} nu[m]u[n-m] = \sum_{m=0}^n m$$

los primeros términos son

$$y_{zs}[0] = 0$$

$$y_{zs}[1] = 0 + 1 = 1$$

$$y_{zs}[2] = 0 + 1 + 2 = 3$$

$$y_{zs}[3] = 0 + 1 + 2 + 3 = 6$$

$$y_{zs}[4] = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

⋮

$$y_{zs}[n] = \frac{n(n+1)}{2} u[n]$$

Vale la pena recalcar que la expresión general de la respuesta de estado cero se ha multiplicado por el escalón unitario para indicar que dicha respuesta tiene validez únicamente para $n \geq 0$.

En MATLAB existe la función **conv()** que permite efectuar la convolución de dos secuencias. Sin embargo, tal función tiene el inconveniente de que las secuencias deben ser de longitud finita y no proporciona información sobre los índices del tiempo discreto de las muestras de $y[n]$. La función **conv_m()** evita esta última limitante como se puede apreciar en la figura 5.8.

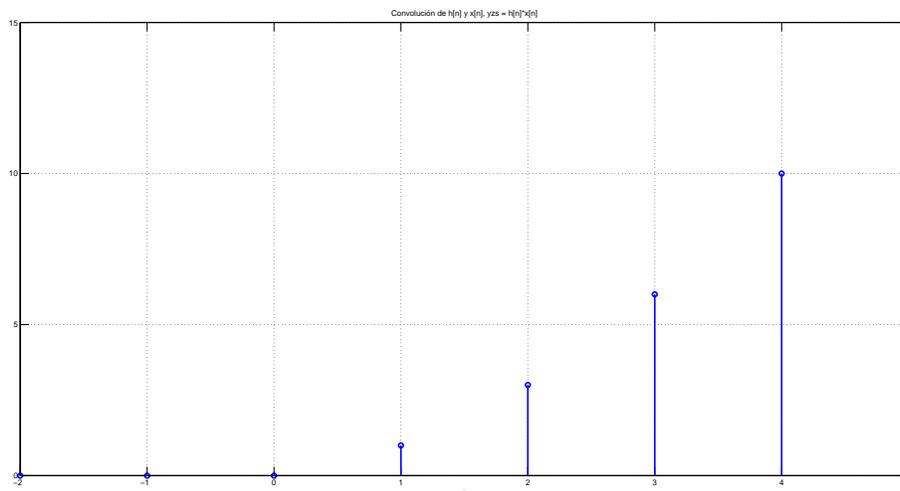


Figura 5.8: Primeros términos de la convolución de $u[n] * nu[n]$.

El programa de MATLAB para generar la figura 5.8 es el siguiente

```

% Código de la Fig. 5.8. Convolución  $y_zs[n] = h[n]*x[n]$ 
h = [0,1,1,1,1,1,1]; nh = [-1:5];
x = [0,0,1,2,3,4,5]; nx = [-1:5];
[yzs,ny] = conv_m(x,nx,h,nh);
stem(ny,yzs,'b','linewidth',2),
title('Convolución de  $h[n]$  y  $x[n]$ ,  $y_zs = h[n]*x[n]$ ');
xlabel('n');
axis([-2 5 0 15]);
grid

```

Ejemplo 5.5

Repita el ejemplo anterior empleando la suma de convolución gráfica.

Solución

En la figura 5.9, se muestran (a) la respuesta al impulso, $h[m]$, (b) la respuesta al impulso transpuesta o reflejada, $h[-m]$, (c) la respuesta al impulso desplazada, $h[5 - m]$, y (d) la secuencia de entrada, $x[m] = mu[m]$, respectivamente.

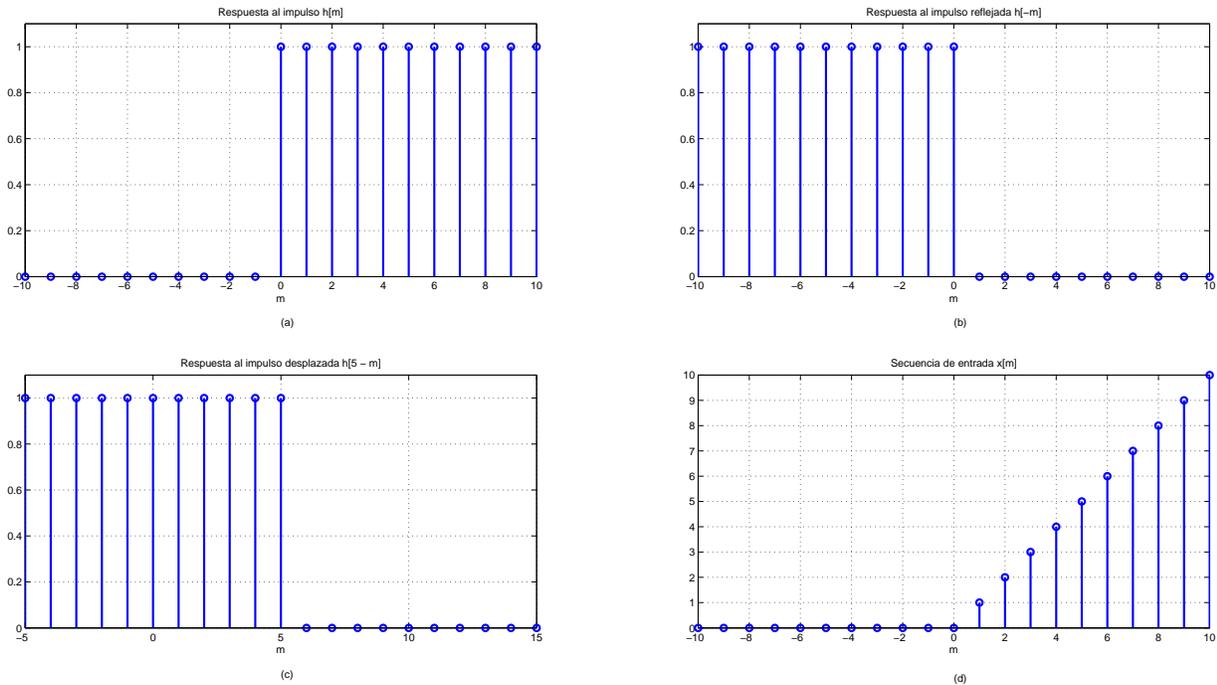


Figura 5.9: (a) Secuencia $h[m]$. (b) Secuencia $h[-m]$. (c) Secuencia $h[5 - m]$. (d) Secuencia de la entrada $x[m]$.

```

% Código de la Fig. 5.9. Suma de convolución h[n]*x[n]
% Obtención de h[m]
n = [-10:10];
h = secuno(10,0,20);
subplot(2,2,1), stem(n,h,'b','linewidth',2);
grid
title('Respuesta al impulso h[m]');
xlabel('m');
axis([-10,10,0 1.1]);
text(0,-0.2,'(a)');

% Obtención de la transpuesta de h[m]
[ht,nt] = transpon(h,n);
subplot(2,2,2), stem(nt,ht,'b','linewidth',2);
grid
title('Respuesta al impulso reflejada h[-m]');
xlabel('m');
axis([-10,10,0 1.1]);
text(0,-0.2,'(b)');

% Obtención del corrimiento o desplazamiento
[hd,nd] = desplaza(ht,nt,5);
subplot(2,2,3), stem(nd,hd,'b','linewidth',2);
grid
title('Respuesta al impulso desplazada h[5 - m]');
xlabel('m');
axis([-5 15 0 1.1]);
text(5,-0.2,'(c)');

% Obtención de x[n]
x = n.*secuno(10,0,20);
subplot(2,2,4), stem(n,x,'b','linewidth',2);
grid
title('Secuencia de entrada x[m]');
xlabel('m');
text(0,-2,'(d)');

```

En la figura 5.10 se muestra el proceso de la convolución gráfica, que consiste en la multiplicación de $h[n - m]$ por $x[m]$ y $y_{zs}[n]$ es simplemente la suma de dichos productos. En la figura 5.10a, para $n = 0$, todos los productos son nulos y por consiguiente su suma es también cero, así $y_{zs}[0] = 0$. En la figura 5.10b, para $n = 1$, $y_{zs}[1] = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1$. En la figura 5.10c, se tiene que para $n = 2$, $y_{zs}[2] = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 3$. En la figura 5.10d, $y_{zs}[3] = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 6$. Siguiendo este proceso, se obtiene que $y_{zs}[n] = [n(n + 1)/2]u[n]$ como antes.

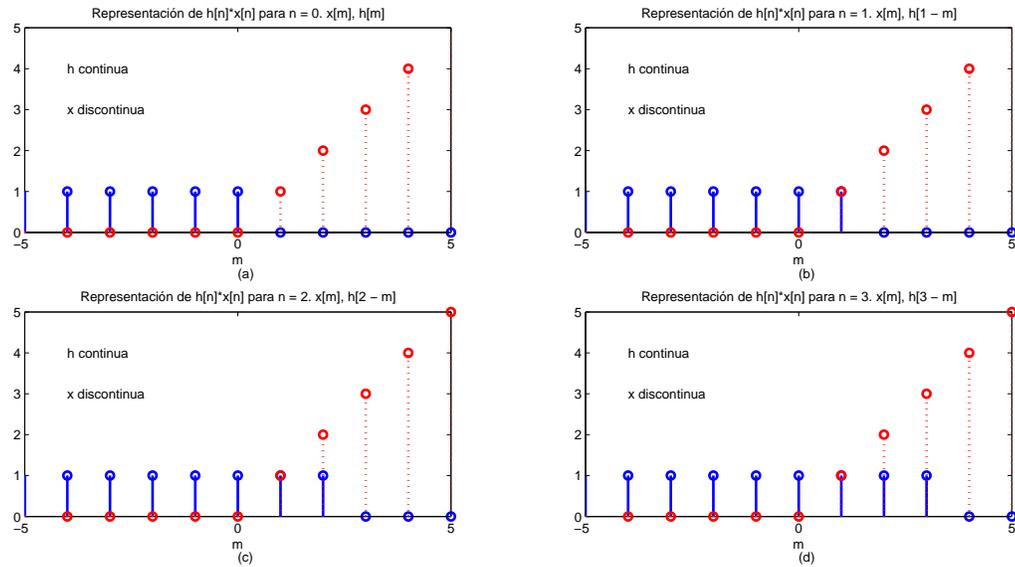


Figura 5.10: Suma de convolución gráfica del Ejemplo 5.4. (a) $n = 0$. (b) $n = 1$. (c) $n = 2$. (d) $n = 3$.

```

% Código de la Fig. 5.10. Primeros términos de la suma de convolución h[n]*x[n]
% Representación de h[n]*x[n] para n = 0
n = [-10:10];
h = secuno(10,0,20); [ht,nt] = transpon(h,n);
subplot(2,2,1), stem(nt,ht,'b','linewidth',2)
hold on;
x = n.*secuno(10,0,20); stem(n,x,'r','linewidth',2);
title('Representación de h[n]*x[n] para n = 0. x[m], h[m]')
xlabel('m');
text(-4,4,'h continua'); text(-4,3,'x discontinua');
axis([-5 5 0 5]); hold off;
text(0,-1,'(a)')

% Representación de h[n]*x[n] para n = 1
[hd,nd] = desplaza(ht,nt,1);
subplot(2,2,2), stem(nd,hd,'b','linewidth',2);
hold on;
x = n.*secuno(10,0,20); stem(n,x,'r','linewidth',2);
title('Representación de h[n]*x[n] para n = 1. x[m], h[1 - m]')
xlabel('m');
text(-4,4,'h continua'); text(-4,3,'x discontinua');
axis([-5 5 0 5]); hold off;
text(0,-1,'(b)')

% Representación de h[n]*x[n] para n = 2
[hd,nd] = desplaza(ht,nt,2);
subplot(2,2,3), stem(nd,hd,'b','linewidth',2);
hold on;
x = n.*secuno(10,0,20); stem(n,x,'r','linewidth',2);
title('Representación de h[n]*x[n] para n = 2. x[m], h[2 - m]')
xlabel('m');
text(-4,4,'h continua'); text(-4,3,'x discontinua');
axis([-5 5 0 5]); hold off;

```

```
text(0,-1,'(c)')

% Representación de h[n]*x[n] para n = 3
[hd,nd] = desplaza(ht,nt,3);
subplot(2,2,4), stem(nd,hd,'b','linewidth',2);
hold on;
x = n.*secuno(10,0,20); stem(n,x,'r','linewidth',2);
title('Representación de h[n]*x[n] para n = 3. x[m], h[3 - m]')
xlabel('m');
text(-4,4,'h continua'); text(-4,3,'x discontinua');
axis([-5 5 0 5]); hold off;
text(0,-1,'(d)')
```

5.5

Ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes

De los ejemplos anteriores, es claro que si se desea encontrar la respuesta $y[n]$ para un valor de la variable independiente n , sólo es necesario realizar sumas y productos. Este procedimiento es más simple comparado con el que se requiere para determinar la solución de una ecuación diferencial. Se está más relacionado con sumas y multiplicaciones que con integrales y derivadas. Pero tal procedimiento de productos y sumas puede ser tedioso.

Ejemplo 5.6

Considere el sistema discreto lineal invariante en el tiempo descrito por la siguiente ecuación en diferencias

$$y[n+2] + 3y[n+1] + 2y[n] = x[n+2] + x[n+1] \quad (5.24)$$

Calcule mediante recursividad:

- Los primeros términos de la respuesta al impulso, $h[n]$.
- Los primeros términos de la respuesta de estado cero, $y_{zs}[n]$, cuando la entrada es

$$x[n] = (-2)^n u[n]$$

Solución

a) Para determinar la respuesta al impulso $h[n]$, se tiene $x[n] = \delta[n]$ con las condiciones iniciales nulas. Entonces

$$h[n+2] + 3h[n+1] + 2h[n] = \delta[n+2] + \delta[n+1]$$

como este sistema es invariante en el tiempo, en la ecuación en diferencias que lo describe se puede sustituir a n por $n-2$, y así

$$h[n] + 3h[n-1] + 2h[n-2] = \delta[n] + \delta[n-1]$$

despejando a $h[n]$

$$h[n] = -3h[n-1] - 2h[n-2] + \delta[n] + \delta[n-1]$$

Ya que $h[-2] = 0$ y $h[-1] = 0$, es posible determinar los primeros términos de la respuesta al impulso

$$\begin{aligned}
h[0] &= -3h[-1] - 2h[-2] + \delta[0] + \delta[-1] = 1 \\
h[1] &= -3h[0] - 2h[-1] + \delta[1] + \delta[0] = -3(1) + 1 = -2 \\
h[2] &= -3h[1] - 2h[0] + \delta[2] + \delta[1] = -3(-2) - 2(1) = 4 \\
h[3] &= -3h[2] - 2h[1] + \delta[3] + \delta[2] = -3(4) - 2(-2) = -8 \\
h[4] &= -3h[3] - 2h[2] + \delta[4] + \delta[3] = -3(-8) - 2(4) = 16 \\
h[5] &= -3h[4] - 2h[3] + \delta[5] + \delta[4] = -3(16) - 2(-8) = -32 \\
&\vdots \\
h[n] &= (-2)^n u[n]
\end{aligned}$$

Nótese que la expresión general de la respuesta al impulso se ha multiplicado por un escalón unitario para indicar que dicha respuesta sólo es válida para $n \geq 0$.

b) La Ec. (5.24) se puede escribir como

$$y[n] = -3y[n-1] - 2y[n-2] + x[n] + x[n-1]$$

Sustituyendo la entrada $x[n] = (-2)^n u[n]$ y las condiciones iniciales $y[-2] = 0$ y $y[-1] = 0$ se tiene

$$y[n] = -3y[n-1] - 2y[n-2] + (-2)^n u[n] + (-2)^{(n-1)} u[n-1]$$

desarrollado la ecuación anterior para los primeros valores de n

$$\begin{aligned}
y_{zs}[0] &= -3y[-1] - 2y[-2] + 1 + 0 = 1 \\
y_{zs}[1] &= -3y[0] - 2y[-1] + (-2)^1 + (-2)^0 = -3(1) - 2(0) - 2 + 1 = -4 \\
y_{zs}[2] &= -3y[1] - 2y[0] + (-2)^2 + (-2)^1 = -3(-4) - 2(1) + 4 - 2 = 12 \\
y_{zs}[3] &= -3y[2] - 2y[1] + (-2)^3 + (-2)^2 = -3(12) - 2(-4) - 8 + 4 = -32 \\
y_{zs}[4] &= -3y[3] - 2y[2] + (-2)^4 + (-2)^3 = -3(-32) - 2(12) + 16 - 8 = 80 \\
y_{zs}[5] &= -3y[4] - 2y[3] + (-2)^5 + (-2)^4 = -3(80) - 2(-32) - 32 + 16 = -192 \\
&\vdots \\
y_{zs}[n] &= (1+n)(-2)^n u[n]
\end{aligned}$$

Es importante enfatizar, que no siempre es posible encontrar en una forma sencilla expresiones *cerradas* como ha ocurrido en este ejemplo tanto para la respuesta al impulso, $h[n]$, como para la respuesta de estado cero, $y_{zs}[n]$.

Solución general de una ecuación en diferencias lineal e invariante en el tiempo

Para determinar la respuesta de estado cero, $y_{zs}[n]$, debida a una entrada arbitraria mediante la suma de convolución es necesario conocer la respuesta al impulso. Es por esto que primero se estudia una técnica para determinar tal respuesta al impulso.

Las ecuaciones en diferencias no contienen derivadas de la variable dependiente sino diferencias de la variable dependiente en valores discretos de la variable independiente. La ecuación en diferencias que describe los sistemas lineales invariantes en el tiempo con una señal de entrada, $x[n]$, y una señal de salida, $y[n]$, tiene la siguiente forma general

$$\sum_{m=0}^N a_m y[n+m] = \sum_{m=0}^M b_m x[n+m] = x_f[n] \quad (5.25)$$

donde $x_f[n]$ se le denomina en este texto *excitación* y es una combinación lineal de la entrada, $x[n]$ y sus diferencias.

La Ec. (5.25) es una ecuación en diferencias lineal pues la variable dependiente $y[n]$ no está elevada a potencias mayores de la unidad, ni contiene productos de sus valores. Se dice que es de orden N si a_0 y a_N no son idénticos a cero, dado que el orden es igual al máximo desplazamiento de la variable dependiente $y[n]$ que aparece en la ecuación en diferencias. También al ser los coeficientes constantes, la Ec. (5.25), describe un sistema o proceso invariante en el tiempo.

Como en el caso de los sistemas de tiempo continuo la respuesta completa es la suma de la respuesta de entrada cero, $y_{zi}[n]$, y la respuesta de estado cero, $y_{zs}[n]$, es decir

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n] \quad (5.26)$$

La respuesta de entrada cero $y_{zi}[n]$ debe satisfacer la ecuación homogénea

$$\sum_{m=0}^N a_m y_{zi}[n+m] = 0 \quad (5.27)$$

Esta respuesta tiene la forma $y_{zi}[n] = z^n$, donde z es raíz de la ecuación característica, que se presenta a continuación.

Sustituyendo dicha forma en la Ec. (5.27)

$$\sum_{m=0}^N a_m z^{n+m} = z^n \sum_{m=0}^N a_m z^m \quad (5.28)$$

y como no se desea la solución trivial, z^n debe ser diferente de cero, y por consiguiente

$$\sum_{m=0}^N a_m z^m = 0 \quad \text{Ecuación característica} \quad (5.29)$$

La relación anterior se denomina ecuación característica de la ecuación en diferencias y a sus raíces se les llama valores característicos. Esta ecuación tiene N raíces y suponiendo que no hay raíces repetidas, la forma de la respuesta de entrada cero es

$$y_{zi}[n] = \sum_{m=1}^N C_m (z_m)^n \quad \text{Respuesta de entrada cero} \quad (5.30)$$

donde las constantes C_m se determinan ya sea por medio de las condiciones iniciales o por las condiciones de frontera. Y así *el problema de calcular la respuesta de entrada cero se reduce a un problema de factorización*. Cuando la ecuación característica contiene raíces múltiples, la respuesta de entrada cero se modifica.

Esto es, si se asume que la m -ésima raíz, es múltiple de orden i ; entonces los elementos del conjunto fundamental correspondientes en la respuesta de entrada cero son de la forma

$$A_1 n^{i-1} z_m^n + A_2 n^{i-2} z_m^n + \dots + A_{i-1} n z_m^n + A_i z_m^n \quad (5.31)$$

Obtención de la respuesta al impulso, $h[n]$

A continuación se presenta una forma de determinar la respuesta al impulso debida a la excitación $x_f[n] = \delta[n]$ y que se representa por $h_f[n]$. Más adelante, a partir de $h_f[n]$ se obtiene la respuesta al impulso, $h[n]$, debida a la entrada, $x[n] = \delta[n]$.

Esta respuesta al impulso $h_f[n]$ también permite encontrar la respuesta de estado cero por medio de la suma de convolución, es decir

$$y_{zs}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_f[m] h_f[n-m] \quad \text{Sistema invariante en el tiempo} \quad (5.32)$$

ecuación equivalente a la Ec. (5.19) que se puede reescribir como

$$y_{zs}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_f[n-m] h_f[m] \quad \text{Sistema invariante en el tiempo} \quad (5.33)$$

ecuación equivalente a la Ec. (5.20).

Inicialmente se asume que la respuesta al impulso, $h_f[n]$, causal es de la forma

$$h_f[n] = y_{zi}[n-1] u[n-1] \quad (5.34)$$

la cual es válida si se cumplen las siguientes condiciones:

$$\left. \begin{array}{l} y_{zi}[0] = 0 \\ y_{zi}[1] = 0 \\ y_{zi}[2] = 0 \\ \vdots \\ y_{zi}[N-2] = 0 \\ y_{zi}[N-1] = \frac{1}{a_N} \end{array} \right\} \quad (5.35)$$

donde a_N es el coeficiente N -ésimo de la Ec. (5.25).

Como se verá a continuación, la afirmación anterior es correcta. De la Ec. (5.25)

$$\sum_{m=0}^N a_m y[n+m] = x_f[n]$$

cuando $x_f[n] = \delta[n]$, la respuesta de estado cero correspondiente es $h_f[n]$, la cual debe satisfacer, por consiguiente, la ecuación

$$\sum_{m=0}^N a_m h_f[n+m] = \delta[n] \quad (5.36)$$

sustituyendo la Ec. (5.34)

$$\sum_{m=0}^N a_m y_{zi}[n+m-1]u[n+m-1] = \delta[n] \quad (5.37)$$

desarrollando esta ecuación, cuando $n = 0$,

$$\sum_{m=0}^N a_m y_{zi}[m-1]u[m-1] = a_0 y_{zi}[-1]u[-1] + \sum_{m=1}^{N-1} a_m y_{zi}[m-1]u[m-1] + a_N y_{zi}[N-1]u[N-1]$$

dado que $u[-1] = 0$, el primer término también es nulo, la suma del segundo término, es igual a cero debido a la Ec. (5.35), y por consiguiente el término restante es igual a la unidad por el último término de la Ec. (5.35), así.

$$\sum_{m=0}^N a_m y_{zi}[m-1]u[m-1] = \delta[0] = 1$$

Para $n \neq 0$, por la Ec. (5.37)

$$\sum_{m=0}^N a_m y_{zi}[n+m-1]u[n+m-1] = 0$$

Ahora se obtendrá la respuesta al impulso, $h[n]$, debida a la entrada $x[n] = \delta[n]$.

La Ec. (5.25) se puede expresar por medio de las ecuaciones

$$\sum_{m=0}^N a_m y[n+m] = x_f[n] \quad (5.38a)$$

$$\sum_{m=0}^M b_m x[n+m] = x_f[n] \quad (5.38b)$$

Si la Ec. (5.32) proporciona la respuesta de estado cero de la Ec. (5.25), entonces para determinar $h[n]$, la respuesta al impulso debida a $x[n] = \delta[n]$, simplemente se aplica un impulso unitario. Es decir, puesto que

$$y_{zs}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_f[m]h_f[n-m]$$

cuando $x[n] = \delta[n]$ y considerando la propiedad de muestreo del impulso, Ec. (5.12)

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[m]h[n-m] = h[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_f[m]h_f[n-m] \quad (5.39)$$

también, de la Ec. (5.38b)

$$x_f[n] = \sum_{m=0}^M b_m \delta[n+m]$$

ecuación que se puede escribir como

$$x_f[m] = \sum_{k=0}^M b_k \delta[m+k] \quad (5.40)$$

sustituyendo la Ec. (5.40) en la Ec. (5.39) resulta

$$h[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^M b_k \delta[m+k] h_f[n-m] = \sum_{k=0}^M \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_k \delta[m+k] h_f[n-m]$$

Considerando la propiedad de muestreo de la función impulso unitario, nuevamente

$$h[n] = \sum_{k=0}^M b_k h_f[n+k]$$

pero k es una variable auxiliar y por consiguiente

$$h[n] = \sum_{m=0}^M b_m h_f[n+m] \quad (5.41)$$

Esta es la ecuación que permite determinar la respuesta al impulso, $h[n]$, causada por la entrada, $x[n] = \delta[n]$, a partir de la respuesta al impulso, $h_f[n]$, debida a la excitación, $x_f[n] = \delta[n]$.

Finalmente la respuesta completa es

$$y[n] = \sum_{m=1}^N C_m [z_m]^n + \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_f[m] h_f[n-m] \quad \text{Respuesta completa} \quad (5.42)$$

o

$$y[n] = \sum_{m=1}^N C_m [z_m]^n + \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] h[n-m] \quad \text{Respuesta completa} \quad (5.43)$$

Debe hacerse hincapié en que la forma de la respuesta de entrada cero es la mostrada si la ecuación característica no tiene raíces repetidas. Cuando se tienen raíces repetidas la respuesta de entrada cero debe incluir la forma mostrada por la Ec. (5.31).

La función **filter()** de MATLAB resuelve una ecuación en diferencias para una entrada arbitraria. Para utilizar dicha función, sin embargo, es necesario realizar una modificación. Dado que los sistemas descritos por la Ec. (5.25) son invariantes en el tiempo, dicha ecuación se puede escribir como

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (5.44)$$

Que es otra forma, muy usual, de las ecuaciones en diferencias para representar o modelar a los sistemas lineales e invariantes en el tiempo.

La forma más simple de la función **filter()** es $\mathbf{y} = \mathbf{filter}(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{x})$. Donde $\mathbf{b} = [b_0, b_1, \dots, b_M]$ y $\mathbf{a} = [a_0, a_1, \dots, a_N]$ son los coeficientes de la Ec. (5.44), y \mathbf{x} es la entrada.

Ejemplo 5.7

Verifique los resultados del ejemplo 5.6, representando la respuesta al impulso y la respuesta de estado cero que produce la función **filter()** de MATLAB.

Solución

Como el sistema descrito por la Ec. (5.24) es lineal e invariante en el tiempo, la variable independiente n se puede sustituir por $n - 2$ y por consiguiente la Ec. (5.45) también representa al mismo sistema

$$y[n] + 3y[n-1] + 2y[n-2] = x[n] + x[n-1] \quad (5.45)$$

Entonces, se tiene: $N = 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 2$, $M = 1$, $b_0 = 1$ y $b_1 = 1$

El programa de MATLAB para determinar y bosquejar la respuesta al impulso y la respuesta de estado cero del sistema se presenta adjunto a la figura 5.11.

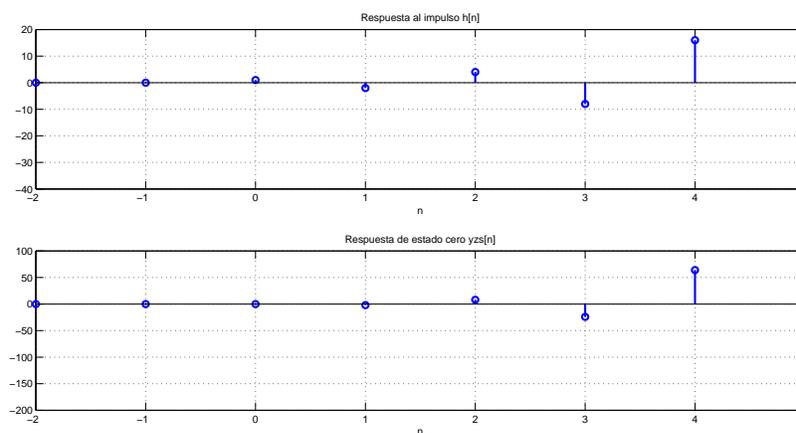


Figura 5.11: Respuesta al impulso y de estado cero del Ejemplo 5.6

```

% Código de la Fig. 5.11. Respuesta al impulso y de estado cero
a = [1,3,2]; b = [1,1];
delta = secimpls(0,-2,5); n = [-2:5];
h = filter(b,a,delta);
subplot(2,1,1), stem(n,h,'b','linewidth',2);
title('Respuesta al impulso h[n]');
xlabel('n');
grid
u = secuno(1,-2,5);           % Secuencia escalón unitario
x = ((-2).^n).*u;           % Secuencia de la entrada
yzs = filter(b,a,x);
subplot(2,1,2), stem(n,yzs,'b','linewidth',2);
title('Respuesta de estado cero yzs[n]');
xlabel('n');
grid

```

Ejemplo 5.8

Determine la ecuación en diferencias que describe al sistema de tiempo discreto lineal e invariante en el tiempo que se muestra en la figura 5.12.³

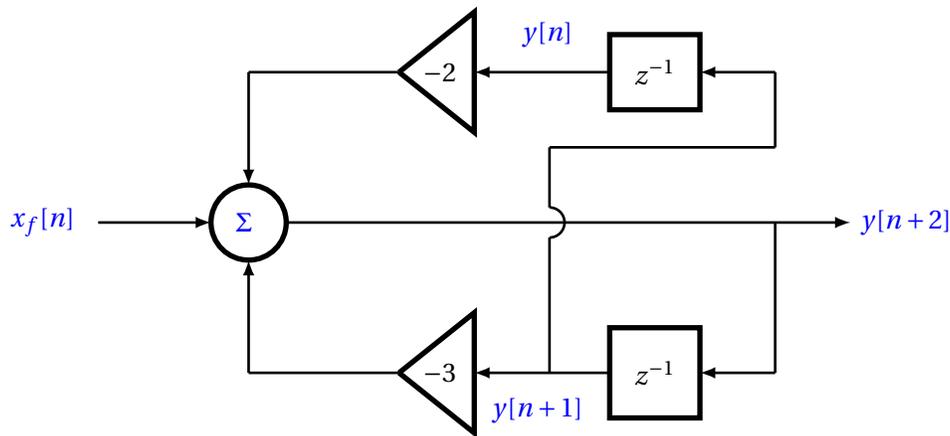


Figura 5.12: Diagrama de bloques de un sistema lineal e invariante en el tiempo.

Solución

De la figura 5.12, $y[n+2]$ es igual a la suma de los términos que llegan al sumador; por lo que

$$y[n+2] = -3y[n+1] - 2y[n] + x_f[n]$$

reordenando términos, resulta

$$y[n+2] + 3y[n+1] + 2y[n] = x_f[n] \quad (5.46)$$

³El bloque con la etiqueta z^{-1} atrasa la señal de entrada una unidad de tiempo, el triángulo multiplica su entrada y el círculo lleva a cabo la suma de sus entradas.

Ejemplo 5.9

Determine la expresión de la respuesta de entrada cero, $y_{zi}[n]$, del sistema de la figura 5.12.

Solución

La ecuación homogénea es

$$y_{zi}[n+2] + 3y_{zi}[n+1] + 2y_{zi}[n] = 0$$

Su ecuación característica, Ec. (5.29), es

$$\begin{aligned}z^2 + 3z + 2 &= 0 \\(z + 1)(z + 2) &= 0 \\z_1 = -1; \quad z_2 &= -2\end{aligned}$$

por lo que la respuesta de entrada cero, Ec. (5.30), es

$$y_{zi}[n] = C_1(-1)^n + C_2(-2)^n \quad (5.47)$$

Ejemplo 5.10

Encuentre la respuesta al impulso, $h_f[n]$, debida a la función de excitación, $x_f[n]$, del sistema de la figura 5.12.

Solución

De la Ec. (5.47), si se cambian las constantes C_m por D_m , se tiene

$$y_{zi}[n] = D_1(-1)^n + D_2(-2)^n$$

considerando las condiciones de la Ec. (5.35)

$$\left. \begin{aligned}y_{zi}[0] = 0 &= D_1 + D_2 \\y_{zi}[1] = 1 &= -D_1 - 2D_2\end{aligned} \right\} D_1 = 1; \quad D_2 = -1$$

de la Ec. (5.34)

$$h_f[n] = [(-1)^{n-1} - (-2)^{n-1}]u[n-1] \quad (5.48)$$

Ejemplo 5.11

Determine la respuesta al impulso, $h[n]$, del sistema descrito por la Ec. (5.46), si

$$x_f[n] = x[n+2] + x[n+1]$$

Solución

Al sustituir la ecuación anterior en la Ec. (5.46) se obtiene

$$y[n+2] + 3y[n+1] + 2y[n] = x[n+2] + x[n+1] = x_f[n] \quad (5.49)$$

Esta ecuación en diferencias tiene la forma de la Ec. (5.25), donde

$$N = 2, a_0 = 2, a_1 = 3, a_2 = 1, M = 2, b_0 = 0, b_1 = 1 \text{ y } b_2 = 1$$

de la Ec. (5.41)

$$h[n] = h_f[n+2] + h_f[n+1]$$

sustituyendo la Ec. (5.48)

$$h[n] = [(-1)^{n+1} - (-2)^{n+1}] u[n+1] + [(-1)^n - (-2)^n] u[n]$$

$$h[n] = [-(-1)^n + 2(-2)^n] u[n+1] + [(-1)^n - (-2)^n] u[n]$$

$$h[n] = (-1)^n [-u[n+1] + u[n]] + (-2)^n u[n+1] + (-2)^n [u[n+1] - u[n]]$$

teniendo en cuenta la Ec. (5.11)

$$h[n] = (-1)^n [-\delta[n+1]] + (-2)^n u[n+1] + (-2)^n [\delta[n+1]]$$

pero la multiplicación de una función por un impulso unitario, es igual a un impulso de peso igual al valor de la función donde ocurre el impulso

$$h[n] = [-(-1)^{-1} + (-2)^{-1}] \delta[n+1] + (-2)^n u[n+1] = \frac{1}{2} \delta[n+1] + (-2)^n u[n+1]$$

evaluando para los primeros valores de n , se tiene

$$\begin{aligned}
h[-1] &= \frac{1}{2}\delta[0] + (-2)^{-1}u[0] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \\
h[0] &= \frac{1}{2}\delta[1] + (-2)^0u[1] = 0 + (-2)^0u[1] = 1 \\
h[1] &= \frac{1}{2}\delta[2] + (-2)^1u[2] = 0 + (-2)^1 = -2 \\
h[2] &= \frac{1}{2}\delta[3] + (-2)^2u[3] = 0 + 4 = 4 \\
h[3] &= \frac{1}{2}\delta[4] + (-2)^3u[4] = 0 - 8 = -8 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

por consiguiente, $h[n]$, se puede escribir como

$$h[n] = (-2)^n u[n] \tag{5.50}$$

Obviamente este resultado es idéntico al que se obtuvo en el ejemplo 5.6.

Ejemplo 5.12

Obtenga la respuesta de estado cero de la ecuación en diferencias de la Ec. (5.49), cuando

$$x[n] = (-2)^n u[n]$$

Solución

De la Ec. (5.19)

$$\begin{aligned}
y_{zs}[n] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-2)^m u[m](-2)^{n-m} u[n-m] \\
y_{zs}[n] &= \sum_{m=0}^n (-2)^m (-2)^{n-m} = -2^n \sum_{m=0}^n (-2)^m (-2)^{-m} = -2^n \sum_{m=0}^n 1
\end{aligned}$$

los primeros valores de la respuesta de estado cero son

$$y_{zs}[0] = (-2)^0 \sum_{m=0}^0 1 = 1$$

$$y_{zs}[1] = (-2)^1 \sum_{m=0}^1 1 = -2(1 + 1) = -4$$

$$y_{zs}[2] = (-2)^2 \sum_{m=0}^2 1 = 4(1 + 1 + 1) = 12$$

$$y_{zs}[3] = (-2)^3 \sum_{m=0}^3 1 = -8(1 + 1 + 1 + 1) = -32$$

se verifican los resultados obtenidos en el ejemplo 5.6.

Si se recurre a la Ec. (5.33), se tiene

$$y_{zs}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_f[n-m]h_f[m]$$

$$y_{zs}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [(-2)^{n-m+2}u[n-m+2] + (-2)^{n-m+1}u[n-m+1]] [(-1)^{m-1} - (-2)^{m-1}] u[m-1]$$

$$y_{zs}[n] = 4(-2)^n \sum_{m=1}^{n+2} (-2)^{-m} [(-1)^{m-1} - (-2)^{m-1}] - 2(-2)^n \sum_{m=1}^{n+1} (-2)^{-m} [(-1)^{m-1} - (-2)^{m-1}]$$

$$y_{zs}[n] = 4(-2)^n \sum_{m=1}^{n+2} [(-2)^{-m} + 0.5] - 2(-2)^n \sum_{m=1}^{n+1} [(-2)^{-m} + 0.5]$$

el cálculo de los primeros valores de la respuesta de estado cero, con la ecuación anterior es

$$\begin{aligned} y_{zs}[0] &= 4 \sum_{m=1}^2 [(-2)^{-m} + 0.5] - 2 \sum_{m=1}^1 [(-2)^{-m} + 0.5] = \\ &= 4[(-0.5 + 0.5) + (-0.25 + 0.5)] - 2[-0.5 + 0.5] = 4(0.25) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{zs}[1] &= -8 \sum_{m=1}^3 [(-2)^{-m} + 0.5] + 4 \sum_{m=1}^2 [(-2)^{-m} + 0.5] = \\ &= -8[(-0.5 + 0.5) + (-0.25 + 0.5) + (-0.125 + 0.5)] + 4[(-0.5 + 0.5) + (-0.25 + 0.5)] = -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{zs}[2] &= 16 \sum_{m=1}^4 [(-2)^{-m} + 0.5] - 8 \sum_{m=1}^3 [(-2)^{-m} + 0.5] \\ &= 16[(-0.5 + 0.5) + (-0.25 + 0.5) + (-0.125 + 0.5) + (-0.0625 + 0.5)] \\ &\quad - 8[(-0.5 + 0.5) + (-0.25 + 0.5) + (-0.125 + 0.5)] = 17 - 5 = 12 \end{aligned}$$

$$y_{zs}[3] = -49 + 17 = -32$$

Resultados idénticos a los ya calculados.

Ejemplo 5.13

Encuentre la respuesta completa de la ecuación en diferencias

$$y[n+2] + 4y[n+1] + 4y[n] = x[n+2] - x[n+1] = x_f[n]$$

Cuando la entrada es $x[n] = nu[n]$ y las condiciones iniciales son: $y[-2] = -1$ y $y[-1] = 1$.

Solución

La ecuación característica es

$$z^2 + 4z + 4 = 0$$

$$(z+2)^2 = 0$$

$$z_1 = z_2 = -2$$

como las raíces son repetidas, los elementos en la respuesta de entrada cero están dados por la Ec. (5.31)

$$y_{zi}[n] = C_1 n(-2)^n + C_2(-2)^n \quad (5.51)$$

La respuesta al impulso, $h_f[n]$, causada por la excitación, $x_f[n]$ se obtiene a continuación

Se cambian las constantes C_1 y C_2 por D_1 y D_2 respectivamente. Así

$$y_{zi}[n] = D_1 n(-2)^n + D_2(-2)^n$$

Los valores de D_1 y D_2 , se encuentran a partir de las condiciones dadas por la Ec. (5.35)

$$\left. \begin{array}{l} y_{zi}[0] = 0 = D_2 \\ y_{zi}[1] = 1 = D_1(-2) \end{array} \right\} D_1 = -\frac{1}{2}; \quad D_2 = 0$$

Así, al considerar la Ec. (5.34)

$$h_f[n] = -\frac{1}{2}(n-1)(-2)^{n-1}u[n-1]$$

con la Ec. (5.41), la respuesta al impulso $h[n]$ debida a $x[n]$, es

$$\begin{aligned} h[n] &= h_f[n+2] - h_f[n+1] = -\frac{1}{2}(n+1)(-2)^{n+1}u[n+1] + \frac{1}{2}n(-2)^n u[n] \\ h[n] &= \frac{(-2)^n}{2} [2(n+1)u[n+1] + nu[n]] \end{aligned}$$

Pero $2(n+1)u[n+1]$ para $n = -1$ es igual a cero, por lo tanto

$$h[n] = \frac{(-2)^n}{2} (3n+2)u[n] \quad (5.52)$$

Ahora se utilizará la Ec. (5.20), para determinar la respuesta de estado cero, $y_{zs}[n]$.

$$y_{zs}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-m]h[m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (n-m)u[n-m] \frac{(-2)^m}{2} (3m+2)u[m]$$

simplificando

$$y_{zs}[n] = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^n (n-m)(3m+2)(-2)^m \quad (5.53)$$

Aunque no se requiere, se obtendrán algunos valores de esta respuesta de estado cero

$$\begin{aligned} y_{zs}[0] &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^0 (0-m)(3m+2)(-2)^m = 0 \\ y_{zs}[1] &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^1 (1-m)(3m+2)(-2)^m = \frac{1}{2}[2+0] = 1 \\ y_{zs}[2] &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^2 (2-m)(3m+2)(-2)^m = \frac{1}{2}[4-10+0] = -3 \\ y_{zs}[3] &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^3 (3-m)(3m+2)(-2)^m = \frac{1}{2}[6-20+32+0] = 9 \end{aligned}$$

La respuesta completa se obtiene con las Ecs. (5.51) y (5.53)

$$y[n] = C_1 n(-2)^n + C_2 (-2)^n + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^n (n-m)(3m+2)(-2)^m$$

considerando las condiciones iniciales

$$\left. \begin{aligned} y[-1] = 1 &= C_1(-1) \left(-\frac{1}{2}\right) + C_2 \left(-\frac{1}{2}\right) \\ y[-2] = -1 &= C_1(-2) \left(\frac{1}{4}\right) + C_2 \left(\frac{1}{4}\right) \end{aligned} \right\} C_1 = 2; \quad C_2 = 0$$

finalmente la respuesta completa es

$$y[n] = 2n(-2)^n + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^n (n-m)(3m+2)(-2)^m \quad (5.54)$$

evaluando esta ecuación para los primeros valores de n se tiene

$$\begin{aligned} y[0] &= 0 \\ y[1] &= -3 \\ y[2] &= 13 \\ y[3] &= -39 \\ y[4] &= 105 \\ y[5] &= -263 \end{aligned}$$

Ejemplo 5.14

El esquema de pagos de una deuda, se presenta por la siguiente ecuación en diferencias

$$y[n] = (1 + i)y[n - 1] - x[n]$$

donde i es la tasa de interés y se considera constante, $y[n]$ es el adeudo después del n -ésimo pago y $x[n]$ es la cantidad que se abona en el n -ésimo pago.

Si la deuda inicial es de $y[0]$, y se desea liquidarla en N periodos con pagos iguales en cantidad, es decir $x[n] = p$ pesos, para $n = 1, 2, \dots, N$. Determine el valor de p , la cantidad de pagos constantes, que se deben realizar.

Solución

Como la tasa de interés es constante, la ecuación en diferencias es lineal e invariante en el tiempo, se puede escribir de la forma dada por la Ec. (5.25).

$$y[n + 1] - (1 + i)y[n] = -x[n + 1] = x_f[n] \quad (5.55)$$

donde $x[n] = p$, para $n = 1, 2, 3, \dots, N$, o sea

$$x[n] = p[u[n - 1] - u[n - 1 - N]]$$

y

$$x_f[n] = -p[u[n] - u[n - N]]$$

la ecuación característica de la Ec. (5.55) es

$$z - (1 + i) = 0$$

Por consiguiente, la respuesta de entrada cero es

$$y_{zi}[n] = D(1 + i)^n$$

el valor de D se obtiene con la Ec. (5.35)

$$y_{zi}[0] = 1 = D$$

entonces

$$h_f[n] = (1 + i)^{n-1}u[n - 1]$$

La respuesta completa, $y[n]$, resulta

$$y[n] = C(1+i)^n + \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_f[m]h_f[n-m]$$

$$y[n] = C(1+i)^n + \sum_{m=-\infty}^{\infty} -p[u[m] - u[m-N]](1+i)^{n-m-1}u[n-m-1]$$

$$y[n] = C(1+i)^n - p \left[\sum_{m=0}^{n-1} (1+i)^{n-m-1} - \sum_{m=N}^{n-1} (1+i)^{n-m-1} \right]$$

El valor de C se obtiene de la condición inicial

$$y[0] = C - 0 = C$$

y la respuesta completa se simplifica

$$y[n] = y[0](1+i)^n - p(1+i)^{n-1} \sum_{m=0}^{N-1} (1+i)^{-m}$$

Recordando que⁴

$$\sum_{n=0}^N r^n = \frac{1-r^{N+1}}{1-r} \quad (5.56)$$

Con un poco de álgebra, la respuesta completa se reduce a

$$y[n] = y[0](1+i)^n - p(1+i)^{n-1} \frac{(1+i) - (1+i)^{-N+1}}{i}$$

cuando $n = N$, la deuda se liquida, es decir $y[N] = 0$. Por lo tanto

$$y[N] = 0 = y[0](1+i)^N - p \frac{(1+i)^N - 1}{i}$$

finalmente, la cantidad constante que se debe pagar se determina despejando p

$$p = \frac{i(1+i)^N}{(1+i)^N - 1} y[0]$$

⁴Si $\sum_{n=0}^N r^n = r^0 + r^1 + \dots + r^N$ entonces $r \sum_{n=0}^N r^n = r + r^2 + \dots + r^{N+1}$, así su diferencia es $\sum_{n=0}^N r^n - r \sum_{n=0}^N r^n = 1 - r^{N+1}$; factorizando $\sum_{n=0}^N r^n = \frac{1-r^{N+1}}{1-r}$.

5.6

Estabilidad

Un sistema dinámico es estable si la señal de la salida es acotada cuando la señal de la entrada es acotada. Lo anterior significa que un sistema dinámico es estable si cuando la entrada no crece indefinidamente, la respuesta de estado cero correspondiente, tampoco crece indefinidamente.

En el lenguaje matemático, la idea anterior se puede expresar de la siguiente manera. Un sistema discreto es estable si y sólo si cualquier entrada acotada produce una salida acotada, es decir, si

$$|x[n]| < \infty \quad \text{para toda } n$$

entonces

$$|y[n]| < \infty \quad \text{para toda } n$$

Para un sistema lineal, invariante en el tiempo y causal, la respuesta de estado cero está dada por la siguiente expresión

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^n x[m]h[n-m]$$

Con el cambio de variable $k = n - m$, cuando $m = -\infty$, $k = \infty$, y cuando $m = n$, $k = 0$, entonces

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

si la secuencia de entrada es acotada, es decir, si

$$|x[n]| \leq M < \infty \quad \text{para toda } n$$

se tiene

$$|y[n]| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |h[k]x[n-k]| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |h[k]||x[n-k]| \leq M \sum_{k=0}^{\infty} |h[k]|$$

es obvio, que si la respuesta al impulso es *absolutamente sumable*, o sea que

$$\sum_{k=0}^{\infty} |h[k]| < \infty \tag{5.57}$$

se infiere que

$$|y[n]| < \infty$$

y la Ec. (5.57) constituye una condición suficiente y necesaria para la estabilidad.

Por lo estudiado en los sistemas continuos, se sabe que un sistema es estable si permanece en reposo a menos que sea excitado por una fuente externa y que regresa al estado de reposo si se elimina la entrada; es por esto que se puede afirmar que un sistema discreto es estable si su respuesta al impulso, tiende a cero cuando n tiende a infinito; lo que requiere que las raíces de la ecuación característica tengan una magnitud menor a la unidad. La aseveración anterior equivale a decir que un sistema discreto es estable si la respuesta de estado cero tiende a cero cuando n tiende a infinito.

Por otro lado, cabe mencionar, que algunos autores consideran que un sistema discreto es marginalmente estable si una de las raíces de la ecuación característica tiene una magnitud igual a uno.

Ejemplo 5.15

Determine si el sistema descrito por la siguiente ecuación en diferencias es o no estable.

$$y[n+1] - y[n] = x[n+1]$$

Solución

Se determina la estabilidad de este sistema considerando las distintas formas de análisis estudiadas.

La ecuación característica es $z - 1 = 0$, lo que implica que la raíz es $z = 1$. Por lo tanto el sistema es inestable.

La respuesta al impulso y la respuesta de entrada cero son, respectivamente

$$h[n] = u[n]$$

$$y_{zi} = C(1)^n$$

cuando n tiende a infinito, ninguna de las respuestas tiende a cero, por consiguiente el sistema no es estable.

Ahora, con la Ec. (5.57), se determina la estabilidad

$$\sum_{k=0}^{\infty} |u[k]| = \sum_{k=0}^{\infty} u[k] = \sum_{k=0}^{\infty} 1 = 1 + 1 + \dots, +1 + \dots$$

esta serie es divergente y se verifica que el sistema es inestable.

Finalmente, se aplica una entrada acotada, por ejemplo $x[n] = u[n]$ y se ve si la salida correspondiente es o no acotada

$$y_{zs}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u[m]u[n-m] = \sum_{m=0}^n 1 = (n+1)u[n]$$

esta respuesta de estado cero no es acotada y se comprueba nuevamente que el sistema es inestable.

Resumen

En este capítulo se han estudiado los conceptos de respuesta al impulso, de la respuesta de entrada cero y la respuesta de estado cero cuya suma constituye la respuesta completa de un sistema de tiempo discreto lineal e invariante en el tiempo.

Tanto los valores de la respuesta al impulso y la respuesta completa se pueden obtener en forma recursiva, simplemente sustituyendo la entrada y las condiciones iniciales correspondientes. Sin embargo, es difícil la mayoría de las veces determinar, a partir del conocimiento de unos valores, la expresión de la función discreta correspondiente. Por esta razón, se presentó un método que permite encontrar la respuesta al impulso a partir de la respuesta de entrada cero. Esta respuesta de entrada cero tiene una forma general simple y se debe conocer si se desea determinar la respuesta completa. Una vez que se conoce la respuesta al impulso, la respuesta de estado cero se obtiene realizando la suma de convolución. No obstante, aunque no ofrece gran dificultad, el cálculo de los valores de la respuesta de estado cero puede resultar laborioso.

También, se ha estudiado el concepto de estabilidad. El enfoque que se ha presentado tiene una gran similitud con el que se llevó a cabo para los sistemas en tiempo continuo.

En el siguiente capítulo se presenta una herramienta que permite determinar una expresión *cerrada* tanto para la respuesta al impulso como para la respuesta completa, es decir, para la respuesta de entrada cero y la respuesta de estado cero, *la transformada zeta*.

Problemas

5.1 La figura 5.13 muestra una señal discreta $x[n]$. Bosqueje y acote las siguientes señales:

- a) $x[n+2]$
- b) $x[2-n]$

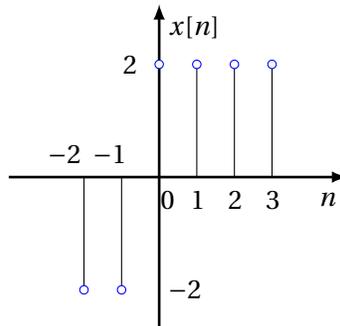


Figura 5.13: Secuencia $x[n]$.

5.2 Exprese las secuencias mostradas en la figura 5.14 en términos de $u[n]$.

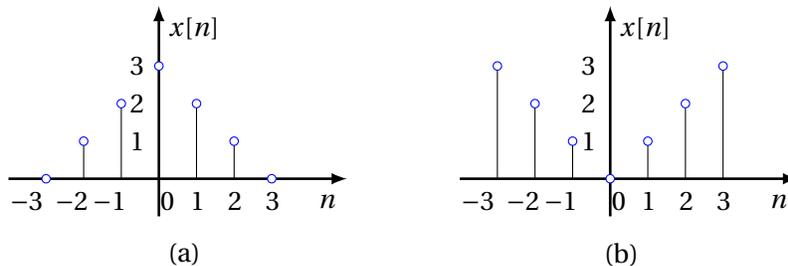


Figura 5.14: Secuencia $x[n]$.

5.3 En cada uno de los incisos, $h[n]$ representa la respuesta al impulso de un sistema lineal e invariante en el tiempo. Determine en cada caso si el sistema correspondiente es causal o estable o satisface ambas propiedades. Justifique su respuesta.

- a) $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$
- b) $h[n] = (0.99)^n u[n+3]$
- c) $h[n] = (0.99)^n u[-n]$
- d) $h[n] = 4^n u[2-n]$

5.4 Determine si cada uno de los enunciados siguientes sobre sistemas lineales e invariantes en el tiempo es verdadero o falso. Justifique sus respuestas.

- a) Si $|h[n]| \leq k$ para toda n , donde k es un número real finito, entonces el sistema con respuesta al impulso $h[n]$ es estable.
- b) Si la respuesta al impulso $h[n]$ es de duración finita, el sistema es estable.
- c) Si el sistema es causal, el sistema es estable.
- d) El sistema inverso H_i de un sistema causal H es siempre causal.⁵

5.5 Sea $x[n]$ una señal discreta tal que:

- i) $x[n] = 0$ para $n < 0$ y $n > 11$.
- ii) $x[n]$ es monótona creciente dentro del intervalo $0 \leq n \leq 11$; es decir: $x[0] \leq x[1] \leq \dots \leq x[11]$.

Si $y[n] = x[n+8] + x[-n+8]$

- a) Demuestre que $y[n]$ es una función par.
- b) Demuestre que $y[n] = 0$ para $n < -8$ y $n > 8$.
- c) Dado que

n	-8	0	1	2	3
$y[n]$	1	2	3	5	7

determine $x[n]$.

5.6 En una reacción química se tienen dos tipos de partículas. Cada segundo, una partícula α se convierte en tres partículas β , y una partícula β se convierte en una partícula α y dos partículas β .

- a) Determine la ecuación en diferencias que describe la reacción química.
- b) Si en $n = 0$, sólo hay una partícula α . ¿Cuántas partículas habrá en total en $n = 100$ segundos?

5.7 En un sistema lineal e invariante en el tiempo que no se sabe si es o no causal, la entrada está dada por

$$x_1[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 2 & n = 1 \\ 0 & \text{otro valor} \end{cases}$$

y $y_1[n]$ es la señal de la salida correspondiente

$$y_1[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & \text{otro valor} \end{cases}$$

⁵El sistema inverso de un sistema es aquel que al tener la salida del sistema original como su entrada, reproduce la entrada del sistema original en su respuesta. Esto es $x[n] * (h[n] * h_i[n]) = x[n]$. Lo anterior implica que $h[n] * h_i[n] = \delta[n]$. El proceso de recuperar $x[n]$ a partir de $h[n] * x[n]$ recibe el nombre de *deconvolución*, ya que revierte la operación de convolución.

Determine la señal de salida $y_2[n]$, cuando la señal de la entrada es

$$x_2[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & \text{otro valor} \end{cases}$$

y se sabe que $y_2[0] = 1/2$.

- 5.8** Determine la respuesta al impulso, $h[n]$, del sistema discreto descrito por la siguiente ecuación en diferencias

$$y[n] - y[n-1] = x[n]$$

- 5.9** En la figura 5.15, $x[n]$ es la señal de la entrada de un sistema discreto lineal e invariante en el tiempo con la respuesta al impulso $h[n]$. Dibuje y acote la respuesta de estado cero correspondiente.

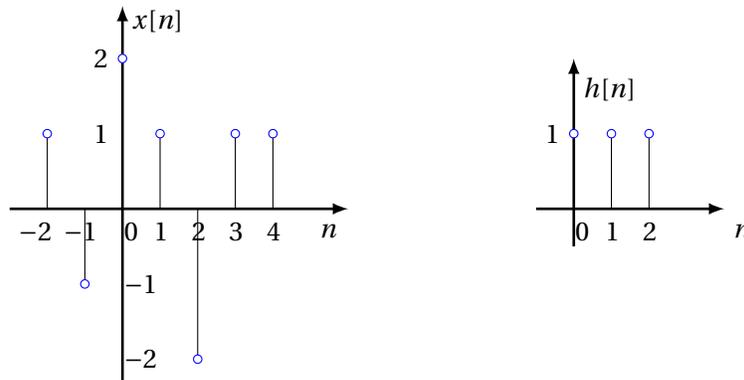


Figura 5.15: Entrada y respuesta al impulso de un sistema lineal e invariante.

- 5.10** Bosqueje y acote la respuesta de escalón unitario del sistema lineal e invariante en el tiempo, caracterizado por la respuesta al impulso siguiente

$$h[n] = (-1)^n u[n]$$

- 5.11** La respuesta de estado cero cuando la entrada es un escalón unitario de un sistema lineal e invariante en el tiempo es

$$y_{zs}[n] = nu[n]$$

utilizando la suma de convolución, encuentre la respuesta de estado cero cuando la entrada es una rampa unitaria.

- 5.12** Considere el sistema lineal e invariante en el tiempo cuya respuesta al impulso es

$$h[n] = a^n u[n]$$

donde a es un número natural.

Determine la $y_{zs}[n]$ cuando la entrada es

$$x[n] = \begin{cases} n+1 & 0 \leq n \leq 2 \\ 0 & \text{otro valor} \end{cases}$$

5.13 Cierta sistema discreto dinámico tiene la siguiente respuesta al impulso

$$h[n] = \delta[n-1] + 2\delta[n-2] + 2\delta[n-3] + \delta[n-4]$$

Determine la respuesta de estado cero de dicho sistema, si la entrada es

$$x[n] = u[n] - u[n-4]$$

5.14 Demuestre que la respuesta de estado cero del sistema discreto lineal e invariante en el tiempo descrito por la ecuación en diferencias

$$y[n] + 3y[n-1] = 4x[n]$$

cuando $x[n] = 2u[n]$, está dada por

$$y_{zs}[n] = 2[1 - (-3)^{n+1}]u[n]$$

5.15 La respuesta de estado cero de un sistema discreto lineal e invariante en el tiempo y causal, cuando la señal de entrada es $x[n] = (-1)^n u[n]$, está dada por

$$y_{zs}[n] = [3(-1)^n - 2\delta[n] + 5\delta[n-1]]u[n]$$

Determine la respuesta al impulso del sistema.

5.16 Dados dos sistemas caracterizados por las siguientes ecuaciones en diferencias

$$y_1[n] = x_1[n] - 0.5y_1[n-1]$$

y

$$y_2[n] = \frac{5}{8}x_2[n] + \frac{1}{3}y_2[n-1]$$

Determine la respuesta al impulso del sistema que se tiene al conectar los sistemas en paralelo y en cascada como se muestra en la figura 5.16.

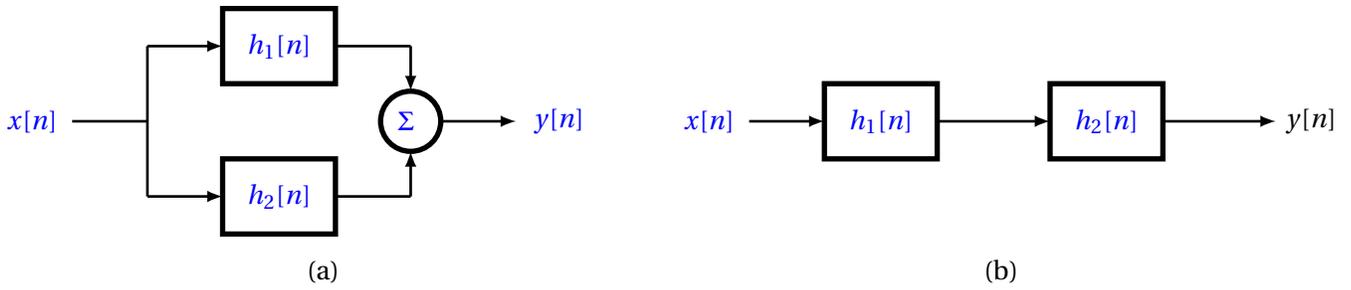


Figura 5.16: (a) Sistemas en paralelo. (b) Sistemas en cascada.

5.17 Bosqueje y acote la respuesta al impulso del sistema discreto modelado por

$$y[n] = x[n] + 2x[n-2] + 2x[n-3] + x[n-5]$$

5.18 La ecuación en diferencias que modela a un sistema discreto lineal e invariante en el tiempo es

$$y[n] + \alpha y[n-1] + \beta y[n-2] = 8x[n]$$

si la respuesta al impulso de tal sistema es

$$h[n] = [A(2)^{-n} + B(3)^{-n}]u[n]$$

donde A y B son constantes.

Determine los valores de α y β .

5.19 La solución de la ecuación en diferencias

$$y[n] + 3y[n-1] + 3y[n-2] + y[n-3] = A \sin\left(\frac{n\pi}{3} + \phi\right) + B2^n$$

es

$$y[n] = (1 + n + n^2)(-1)^n + 3 \sin\left(\frac{n\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) + 2^n$$

Encuentre A , ϕ y B .

5.20 Obtener en forma recursiva $y[0]$, $y[1]$, $y[2]$, \dots , $y[8]$, del sistema modelado por

$$y[n] + 3y[n-2] + 5y[n-3] + y[n-5] = 2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) u[n]$$

considere condiciones iniciales nulas.

5.21 Obtenga la respuesta completa de la ecuación en diferencias

$$y[n] - 4y[n-2] = x[n]$$

cuando $x[n] = 2^n u[n]$, con las condiciones iniciales $y[-2] = y[-1] = 2$

5.22 Sea el sistema discreto lineal e invariante en el tiempo que se muestra en la figura 5.17.

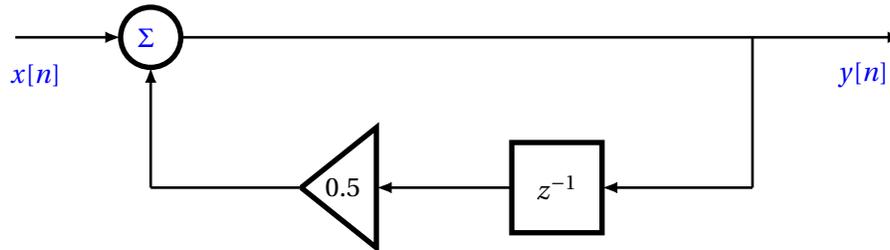


Figura 5.17: Sistema lineal e invariante en el tiempo.

Determine la respuesta de estado cero del sistema, cuando se aplica como entrada la siguiente secuencia

$$x[n] = 3\delta[n] - \delta[n-1] + 3\delta[n-2]$$

5.23 Determine el intervalo de valores de α para que el sistema descrito por la siguiente ecuación en diferencias sea estable.

$$y[n] - e^\alpha y[n-1] = x[n]$$

5.24 Determine y esboce la salida del sistema mostrado en la figura 5.18, cuando

$$x[n] = \frac{n^2}{2} u[n]$$

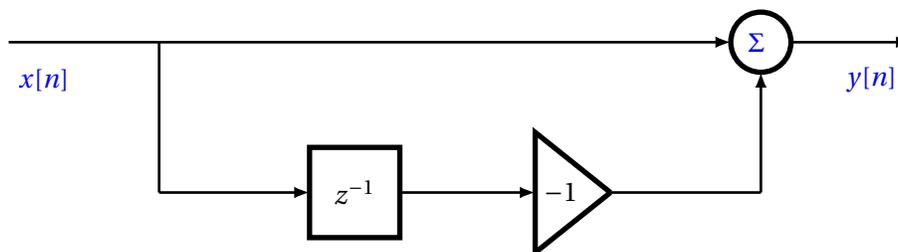


Figura 5.18: Derivador.

5.25 La siguiente ecuación en diferencias describe un integrador numérico

$$y[n] - y[n-1] = \frac{T}{2} [x[n] + x[n-1]]$$

donde T es el intervalo entre los valores discretos.

- Obtenga $h_f[n]$ y $h[n]$.
- Determine si el sistema es estable.
- Encuentre una señal acotada que produzca una salida no acotada.
- Para la entrada del inciso anterior, calcule $y[0]$, $y[1]$, $y[2]$ y $y[3]$.

5.26 Una hipoteca de \$100000.00 será pagada mediante pagos mensuales iguales a p pesos. El interés compuesto mensual es del 12% sobre el balance no pagado, por ejemplo, después del primer mes, la deuda total es igual a

$$\$100000.00 + \$ \left(\frac{0.12}{12} \right) 100000.00 = \$101000.00$$

Determine p de tal manera que después de un tiempo específico, la hipoteca sea pagada totalmente, dejando un balance de cero. Considere que $y[n]$ representa el balance no pagado justo después del n -ésimo pago. Suponga que la cantidad inicial se presta en el mes cero y los pagos mensuales se inician en el mes uno. Si la hipoteca satisface la ecuación en diferencias

$$y[n] = 1.01y[n-1] - p \quad \text{para } n > 0$$

- Determine $y[n]$ para $n \geq 0$.
- Si la hipoteca deberá ser pagada en 30 años, después de 360 pagos mensuales de p pesos; determine el valor de p .
- ¿Cuál es el pago total hecho al banco después de 30 años?
- Este esquema de pago, ¿se puede considerar un *sistema estable*?

5.27 Una pelota de plástico se tira verticalmente desde una altura de diez metros. La pelota cuando cae, siempre rebota hasta alcanzar una altura igual a la mitad de la distancia anterior.

- Si $x[n]$ representa la altura que alcanza la pelota en el n -ésimo rebote. Elabore un programa de MATLAB para esbozar a $x[n]$.
- Si $y[n]$ representa la pérdida de altura de la pelota en el n -ésimo rebote. Encuentre una expresión de $y[n]$ en función de $x[n]$ y elabore un programa de MATLAB para bosquejar a $y[n]$.

5.28 A cierto sistema dinámico, lineal, invariante en el tiempo y causal, estando en reposo, se le aplica como entrada una rampa unitaria. La respuesta que registra es

$$y[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 2n + 4\delta[n] + 2\delta[n-1] - 4 & n \geq 0 \end{cases}$$

Encuentre la respuesta del sistema cuando la entrada es una secuencia unitaria y desarrolle un programa de MATLAB para trazar:

- la respuesta debida a la rampa unitaria
- la respuesta debida al escalón unitario.

Ayuda:

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

$$u[n] = (n+1)u[n+1] - nu[n]$$

5.29 El sistema H que se muestra en la figura 5.19 es lineal e invariante en el tiempo. Cuando $x_1[n] = u[n]$, su respuesta de estado cero es $y_1[n] = u[n] - 2u[n-1] + u[n-2]$. Elabore un programa de MATLAB para visualizar la respuesta de estado cero $y_2[n]$ del sistema conectado en cascada de la figura 5.19b, cuando $x_2[n] = u[n] - u[n-2]$.

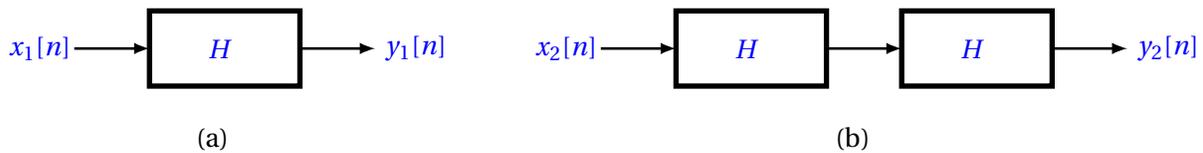


Figura 5.19: (a) Sistema lineal e invariante. (b) Sistemas en cascada.

5.30 El modelo de un sistema está dado por la ecuación en diferencias siguiente

$$y[n] = x[n] - x[n-1] - y[n-1]$$

a) Encuentre la respuesta del sistema cuando

$$x[n] = \begin{cases} 1 & n \text{ par} \\ 0 & n \text{ impar} \end{cases}$$

Considere las condiciones iniciales nulas, esto es $y[-1] = x[-1] = 0$.

- b) Elabore un programa de MATLAB para bosquejar a $x[n]$.
- c) Elabore un programa de MATLAB para representar a $y[n]$.

6

La Transformada Z



6.1

Introducción

En el capítulo anterior se estudiaron métodos para describir y analizar el comportamiento de los sistemas discretos lineales e invariantes en el tiempo o desplazamiento. Estas técnicas se llevan a cabo en el dominio del tiempo ya que las señales se representan como funciones del tiempo. Sin embargo, aunque dichos procedimientos son simples, pueden resultar en ocasiones muy laboriosos. En este capítulo, se introduce una *herramienta matemática* que simplifica el análisis y la síntesis de los sistemas discretos lineales e invariantes en el tiempo, *la transformada z*.

De manera análoga a la transformada de Laplace que se emplea en el estudio de los sistemas continuos lineales e invariantes en el tiempo, la transformada z se utiliza en el análisis de los sistemas discretos lineales e invariantes en el tiempo. La transformada z permite realizar operaciones, “*ver*” propiedades y características de las señales y los sistemas discretos en una forma más simple que en el dominio del tiempo. La técnica que se presenta en este capítulo recibe el nombre de análisis en el dominio de la frecuencia.

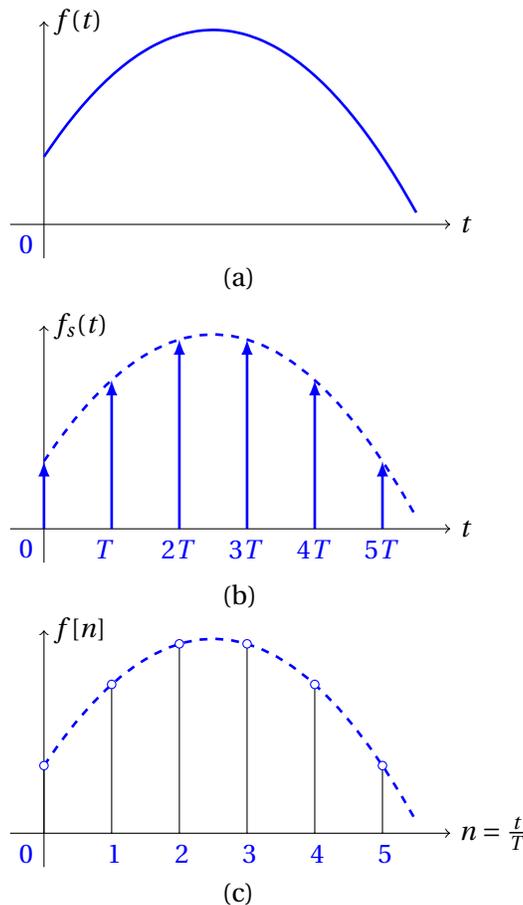


Figura 6.1: (a) Señal continua. (b) Señal muestreada. (c) Señal discreta.

Considere las tres señales mostradas en la figura 6.1; la primera, $f(t)$, es una función en tiempo continuo. La segunda señal, $f_s(t)$, se obtiene multiplicando una secuencia periódica de impulsos unitarios de periodo T por $f(t)$, es decir

$$f_s(t) = f(t)\delta_T(t) = f(t) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=0}^{\infty} f[nT]\delta(t - nT) \quad (6.1)$$

y la tercera señal, $f[n]$, es la secuencia discreta de $f(t)$.

La transformada de Laplace *unilateral* de $f_s(t)$ es $F_s(s)$, esto es

$$F_s(s) = \mathcal{L}\{f_s(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} f[nT]e^{-nTs} \quad (6.2)$$

si en la ecuación anterior se hace la siguiente sustitución

$$z = e^{sT} = e^{(\sigma + j\omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} \quad (6.3)$$

se define *la transformada z unilateral* de $f[nT]$ como

$$F(z) = \mathcal{L}\{f_s(t)\} \Big|_{z=e^{sT}} = \mathcal{Z}\{f[nT]\} = \sum_{n=0}^{\infty} f[nT]z^{-n} \quad (6.4)$$

para toda z que verifique la convergencia de $F(z)$; por lo que el conjunto de valores de z para los cuales $F(z)$ existe, se denomina *región de convergencia*.

La Ec. (6.3) se puede considerar un mapeo del plano complejo s al plano complejo z , como se muestra en la figura 6.2. El origen $s = 0 + j0$ y el eje imaginario $s = \pm j\omega$ del plano s corresponden al punto $1 + j0$ y al círculo unitario del plano z respectivamente. No obstante, dado que

$$z = e^{sT} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} = e^{\sigma T} e^{j(\omega T + 2\pi k)} \quad \text{donde } k \text{ es un entero}$$

cuando se recorre el eje imaginario desde $-\infty$ a $+\infty$, el círculo unitario se delinea un número infinito de veces.

De lo anterior, se infiere que existen un número infinito de puntos del plano s que se mapean en un punto del plano z .

Cuando $\sigma < 0$, $|z| = |e^{\sigma T}| < 1$, el semiplano izquierdo del plano s se mapea en el interior del círculo unitario del plano z , o dicho de otra manera, hay una correspondencia entre la región de estabilidad de los sistemas continuos y la región de estabilidad de los sistemas discretos.

Por otra parte, la secuencia $f[nT]$ se dice que es *la transformada z inversa* de $F(z)$ y puede ser unívocamente determinada por

$$f[nT] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F(z)z^{n-1} dz \quad \text{Transformada z inversa} \quad (6.5)$$

donde Γ es un contorno en sentido antihorario que encierra las singularidades de $F(z)z^{n-1}$.¹

¹El lugar geométrico de los puntos donde $F(z)z^{n-1} \rightarrow \infty$, es decir los polos.

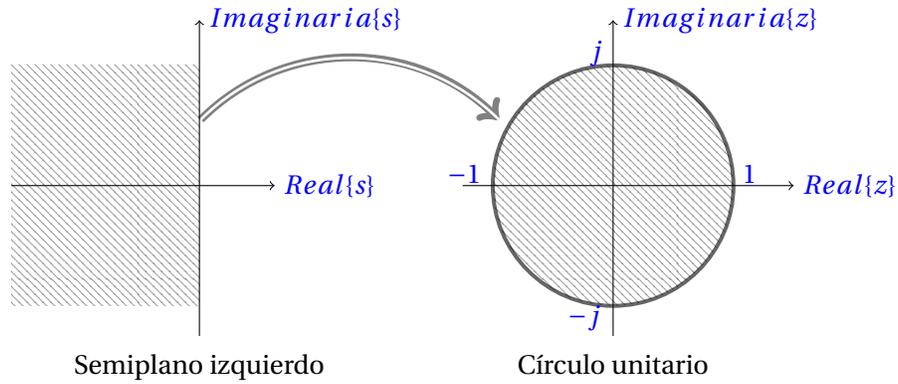


Figura 6.2: Mapeo del plano s al plano z , con $z = e^{sT}$.

De esta manera, la secuencia $f[nT]$ y la función compleja $F(z)$ se dice que constituyen *un par de transformación z* , que se simboliza por

$$f[nT] \longleftrightarrow F(z) \quad (6.6)$$

o

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{f[nT]\} &= F(z) \\ \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} &= f[nT] \end{aligned} \quad (6.7)$$

La transformada z unilateral, Ec. (6.4), considera secuencias para $n \geq 0$ únicamente, que para la mayoría de los problemas de naturaleza práctica resulta suficiente.

En lo que sigue y con la finalidad de simplificar, el periodo de muestreo, T , se considera igual a uno.

6.2

Propiedades de la transformada z

Unicidad

La transformada z es única

$$f[n] = g[n] \longleftrightarrow F(z) = G(z) \quad (6.8)$$

Linealidad

La transformada z es lineal

$$af[n] + bg[n] \longleftrightarrow aF(z) + bG(z) \quad (6.9)$$

Desplazamiento en el tiempo Atraso

$$f[n - m] \longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f[n - m]z^{-n}$$

con el cambio de variable $l = n - m$; cuando $n = 0$, $l = -m$ y cuando $n = \infty$, $l = \infty$

$$f[n - m] \longleftrightarrow \sum_{l=-m}^{\infty} f[l]z^{-l-m} = z^{-m} \sum_{l=-m}^{\infty} f[l]z^{-l} = z^{-m} \sum_{l=0}^{\infty} f[l]z^{-l} + z^{-m} \sum_{l=-m}^{-1} f[l]z^{-l}$$

así

$$f[n - m] \longleftrightarrow z^{-m}F(z) + z^{-m} \sum_{l=-m}^{-1} f[l]z^{-l} \quad (6.10)$$

Adelanto

$$f[n + m] \longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f[n + m]z^{-n}$$

con el cambio de variable $l = n + m$; cuando $n = 0$, $l = m$ y cuando $n = \infty$, $l = \infty$

$$f[n + m] \longleftrightarrow \sum_{l=m}^{\infty} f[l]z^{-l+m} = z^m \sum_{l=m}^{\infty} f[l]z^{-l} = z^m \sum_{l=0}^{\infty} f[l]z^{-l} - z^m \sum_{l=0}^{m-1} f[l]z^{-l}$$

finalmente

$$f[n+m] \longleftrightarrow z^m F(z) - z^m \sum_{l=0}^{m-1} f[l] z^{-l} \quad (6.11)$$

Convolución

La respuesta de estado cero de un sistema lineal, causal, invariante en el tiempo y que empieza en $n = 0$, está dada por la suma de la convolución

$$y_{zs}[n] = x[n] * h[n] = \sum_{m=0}^n x[m] h[n-m] \longleftrightarrow Y_{zs}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{m=0}^n x[m] h[n-m] \right\} z^{-n}$$

en la transformada z , el índice n de la suma exterior varía de cero hasta infinito, y el índice de la suma interior de cero a n , por consiguiente, el índice superior de m se puede sustituir por infinito. Así

$$y_{zs}[n] = \sum_{m=0}^n x[m] h[n-m] \longleftrightarrow Y_{zs}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} x[m] h[n-m] \right\} z^{-n}$$

al permutar el orden de las sumas

$$y_{zs}[n] = \sum_{m=0}^n x[m] h[n-m] \longleftrightarrow Y_{zs}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} x[m] h[n-m] \right\} z^{-n} = \sum_{m=0}^{\infty} x[m] \sum_{n=0}^{\infty} h[n-m] z^{-n}$$

con el cambio de variable $l = n - m$, en la segunda suma

$$y_{zs}[n] = \sum_{m=0}^n x[m] h[n-m] \longleftrightarrow Y_{zs}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} x[m] \sum_{l=-m}^{\infty} h[l] z^{-l-m} = \sum_{m=0}^{\infty} x[m] z^{-m} \sum_{l=-m}^{\infty} h[l] z^{-l}$$

pero $h[l] = 0$, para $l < 0$ ya que se trata de un sistema causal, por tanto

$$y_{zs}[n] = \sum_{m=0}^n x[m] h[n-m] \longleftrightarrow Y_{zs}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} x[m] z^{-m} \sum_{l=0}^{\infty} h[l] z^{-l} = X(z) H(z) \quad (6.12)$$

De esta ecuación, se deduce que la transformada z de la respuesta al impulso, $h[n]$, es la función de transferencia $H(z)$. O sea

$$h[n] \longleftrightarrow H(z) \quad (6.13)$$

De la Ec. (6.12)

$$H(z) = \frac{Y_{zs}(z)}{X(z)} \quad (6.14)$$

este resultado establece, de manera semejante al caso continuo, que la función de transferencia de un sistema discreto lineal, invariante en el tiempo, causal y que inicia en $n = 0$, es igual a la razón de la transformada z de la respuesta de estado cero a la transformada z de la entrada.

La función de transferencia de un sistema lineal e invariante en el tiempo es una función racional de la variable compleja z , es decir, que se puede escribir como la razón de dos polinomios de z . Así, $H(z)$ se puede expresar como

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{k(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) \cdots}{(z - p_1)(z - p_2)(z - p_3) \cdots} \quad (6.15)$$

La constante k constituye la ganancia, las constantes z_1, z_2, z_3, \dots se denominan los *ceros* de $H(z)$, ya que son valores de z para cuales $H(z)$ es cero. Por el contrario p_1, p_2, p_3, \dots se conocen como los *polos* de $H(z)$, y proporcionan los valores de z para los cuales $H(z)$ tiende a infinito.

En general, la transformada z de la suma de la convolución de dos señales discretas arbitrarias $f_1[n]$ y $f_2[n]$ es igual al producto de sus transformadas z

$$f_1[n] * f_2[n] \longleftrightarrow F_1(z)F_2(z) \quad (6.16)$$

Escalamiento

Multiplicar una secuencia $f[n]$ por a^n , mapea la transformada z con un argumento escalado.

$$a^n f[n] \longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a^n f[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} f[n] \left(\frac{z}{a}\right)^{-n} = F\left(\frac{z}{a}\right) \quad (6.17)$$

Derivación

$$nf[n] \longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} nf[n] z^{-n} = z \sum_{n=0}^{\infty} f[n] n z^{-1-n} = z \sum_{n=0}^{\infty} f[n] \left[-\frac{dz^{-n}}{dz}\right] = -z \frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} f[n] z^{-n}$$

así

$$nf[n] \longleftrightarrow -z \frac{dF(z)}{dz} \quad (6.18)$$

Teorema del valor inicial

Este teorema permite conocer el valor inicial $f[0]$ de una secuencia a partir de la transformada $F(z)$ sin obtener la transformada z inversa de $F(z)$. De la definición de la transformada z

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n] z^{-n} = f[0] + f[1]z^{-1} + f[2]z^{-2} + \dots$$

entonces

$$\lim_{n \rightarrow 0} f[n] = f[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) \quad (6.19)$$

Teorema del valor final

El teorema establece lo siguiente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f[n] = f[\infty] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z) \quad (6.20)$$

Para verificar este teorema, considere

$$f[n]u[n] - f[n-1]u[n-1] \longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} [f[n]u[n] - f[n-1]u[n-1]]z^{-n}$$

al aplicar la propiedad de desplazamiento en el tiempo

$$\sum_{n=0}^{\infty} [f[n]u[n] - f[n-1]u[n-1]]z^{-n} = F(z) - z^{-1}F(z) = \left(\frac{z-1}{z}\right)F(z)$$

ecuación que se puede escribir como

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N [f[n]u[n] - f[n-1]u[n-1]]z^{-n} = \left(\frac{z-1}{z}\right)F(z)$$

Obteniendo el límite cuando $z \rightarrow 1$

$$\lim_{z \rightarrow 1} \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N [f[n]u[n] - f[n-1]u[n-1]]z^{-n} \right\} = \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{z-1}{z}\right)F(z)$$

de donde

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N [f[n]u[n] - f[n-1]u[n-1]] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z)$$

desarrollando la suma

$$\lim_{N \rightarrow \infty} f[N] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z)$$

pero N puede ser cualquier variable, por tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f[n] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z)$$

Debe tenerse cuidado al aplicar este teorema; ya que para tener validez $(z-1)F(z)$ debe ser analítica para $|z| \geq 1$, lo que equivale a decir que $(z-1)F(z)$ no puede tener polos sobre o fuera del círculo unitario.

No.	$f[n]; n \geq 0$		$F(z)$
	$f[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F(z) z^{n-1} dz$		$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n] z^{-n}$
1	Unicidad	$x[n] = y[n]$	$X(z) = Y(z)$
2	Linealidad	$\sum_{n=1}^N a_n f_n[n]$	$\sum_{n=1}^N a_n F_n(z)$
3	Desplazamiento (Atraso)	$f[n-m]$	$z^{-m} F(z) + z^{-m} \sum_{l=-m}^{-1} f[l] z^{-l} \quad m \geq 0$
4	Desplazamiento (Adelanto)	$f[n+m]$	$z^m F(z) - z^m \sum_{l=0}^{m-1} f[l] z^{-l} \quad m \geq 0$
5	Suma de convolución	$\sum_{m=0}^n f_1[m] f_2[n-m]$	$F_1(z) F_2(z)$
6	Multiplicación en el tiempo	$f_1[n] f_2[n]$	$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{F_1(\eta) F_2(z/\eta) d\eta}{\eta}$
7	Escalamiento	$a^n f[n]$	$F\left(\frac{z}{a}\right)$
8	Derivación	$n f[n]$	$-z \frac{dF(z)}{dz}$
9	Teorema del valor inicial	$\lim_{n \rightarrow 0} f[n] = f[0]$	$\lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$
10	Teorema del valor final	$\lim_{n \rightarrow \infty} f[n]$	$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1) F(z)$

Tabla 6.1: Propiedades de la transformada z unilateral

No.	$x[n]$	$X(z)$
1	$\delta[n]$	1
2	$\delta[n - m]$	z^{-m}
3	$u[n]$	$\frac{z}{z - 1}$
4	$u[n - m]$	$\frac{z}{z - 1} z^{-m}$
5	$nu[n]$	$\frac{z}{(z - 1)^2}$
6	$n^2u[n]$	$\frac{z^2 + z}{(z - 1)^3}$
7	$a^n u[n]$	$\frac{z}{z - a}$
8	$na^{n-1}u[n]$	$\frac{z}{(z - a)^2}$
9	$\frac{n[n - 1] \cdots [n - m + 1]}{m!} a^{n-m} u[n]$	$\frac{z}{(z - a)^{m+1}}$
10	$e^{bn} u[n]$	$\frac{z}{z - e^b}$

11	$\cos[\omega n]u[n]$	$\frac{z[z - \cos(\omega)]}{z^2 - 2z \cos(\omega) + 1}$
12	$\sin[\omega n]u[n]$	$\frac{z \sin(\omega)}{z^2 - 2z \cos(\omega) + 1}$
13	$\cosh[bn]u[n]$	$\frac{z[z - \cosh(b)]}{z^2 - 2z \cosh(b) + 1}$
14	$\sinh[bn]u[n]$	$\frac{z \sinh(b)}{z^2 - 2z \cosh(b) + 1}$
15	$f[n]e^{-bn}u[n]$	$F(ze^b)$

Tabla 6.2: Pares de transformadas z

Ejemplo 6.1

Determine la transformada z de la función impulso y de las secuencias unitaria, rampa y parábola.

Solución

Función unitaria o impulso

$$\begin{aligned} \delta[n] &\longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \delta[n]z^{-n} = 1 \\ \delta[n-m] &\longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \delta[n-m]z^{-n} = z^{-m} \quad (\text{Región de Convergencia } |z| > 0) \end{aligned} \quad (6.21)$$

Secuencia unitaria o escalón unitario discreto

$$u[n] \longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} u[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \quad (\text{Región de Convergencia } |z| > 1) \quad (6.22)$$

La ecuación anterior se puede verificar, recordando

$$\sum_{n=0}^N x^n = \frac{1-x^{N+1}}{1-x} \quad (\text{Serie geométrica})$$

y empleando la propiedad de desplazamiento, Ec. (6.10)

$$u[n-m] \longleftrightarrow \frac{z^{-m}}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1} z^{-m} \quad (|z| > 1) \quad (6.23)$$

Secuencia rampa

Considerando la propiedad de derivación, Ec. (6.18)

$$r[n] = nu[n] \longleftrightarrow -z \frac{d}{dz} \left[\frac{z}{z-1} \right] = \frac{z}{(z-1)^2} \quad (|z| > 1) \quad (6.24)$$

Secuencia parábola

Nuevamente con la Ec. (6.18)

$$p[n] = n^2 u[n] \longleftrightarrow -z \frac{d}{dz} \left[\frac{z}{(z-1)^2} \right] = \frac{z^2 + z}{(z-1)^3} \quad (|z| > 1) \quad (6.25)$$

Ejemplo 6.2

Determine la transformada z de la secuencia exponencial y a partir de ésta obtenga la transformada z de las secuencias *seno* y *coseno*.

Solución

Secuencia exponencial

Con la propiedad de escalamiento, Ec. (6.17)

$$e^{\omega n} u[n] = (e^{\omega})^n u[n] \longleftrightarrow \frac{\frac{z}{e^{\omega}}}{\frac{z}{e^{\omega}} - 1} = \frac{z}{z - e^{\omega}} \quad (|z| > |e^{\omega}|) \quad (6.26)$$

Con la Ec. (6.26), es posible determinar los siguientes pares de transformadas

$$\cos(\omega n) u[n] = \frac{e^{j\omega n} + e^{-j\omega n}}{2} u[n] \longleftrightarrow \frac{z[z - \cos(\omega)]}{z^2 - 2z \cos(\omega) + 1} \quad (|z| > 1) \quad (6.27)$$

$$\sin(\omega n) u[n] = \frac{e^{j\omega n} - e^{-j\omega n}}{2j} u[n] \longleftrightarrow \frac{z \sin(\omega)}{z^2 - 2z \cos(\omega) + 1} \quad (|z| > 1) \quad (6.28)$$

Ejemplo 6.3

Obtenga la transformada z de la siguiente función

$$f[n] = (n-1)(0.2)^{n-1} \sin\left[\frac{\pi}{6}(n-1)\right] u[n-1] \quad (6.29)$$

Solución

De la Ec. (6.28), se tiene

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}n\right) u[n] \longleftrightarrow \frac{0.5z}{z^2 - 2\frac{\sqrt{3}}{2}z + 1}$$

Considerando la propiedad de escalamiento, Ec. (6.17)

$$(0.2)^n \sin\left(\frac{\pi}{6}n\right) u[n] \longleftrightarrow \frac{0.5\left(\frac{z}{0.2}\right)}{\left(\frac{z}{0.2}\right)^2 - \sqrt{3}\left(\frac{z}{0.2}\right) + 1} = \frac{0.1z}{z^2 - 0.2\sqrt{3}z + (0.2)^2}$$

con la propiedad de derivación, Ec. (6.18)

$$n(0.2)^n \sin\left(\frac{\pi}{6}n\right) u[n] \longleftrightarrow -z \frac{d}{dz} \left[\frac{0.1z}{z^2 - 0.2\sqrt{3}z + (0.2)^2} \right]$$

$$n(0.2)^n \sin\left(\frac{\pi}{6}n\right) u[n] \longleftrightarrow -z \frac{-0.1z^2 + 0.1(0.2)^2}{z^4 - 0.4\sqrt{3}z^3 + 5(0.2)^2z^2 - 2\sqrt{3}(0.2)^3z + (0.2)^4}$$

finalmente, aplicando la propiedad de desplazamiento, Ec. (6.10)

$$\mathcal{Z}\{f[n]\} = \mathcal{Z}\left\{(n-1)(0.2)^{n-1} \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{6}\right) u[n-1]\right\}$$

$$\mathcal{Z}\{f[n]\} = z^{-1} \mathcal{Z}\left\{n(0.2)^n \sin\left(\frac{\pi}{6}n\right) u[n]\right\} = \frac{0.1z^2 - 0.1(0.2)^2}{z^4 - 0.4\sqrt{3}z^3 + 5(0.2)^2z^2 - 2\sqrt{3}(0.2)^3z + (0.2)^4}$$

$$\mathcal{Z}\{f[n]\} = F(z) = \frac{0.1z^2 - 0.004}{z^4 - 0.6928z^3 + 0.2z^2 - 0.0277z + 0.0016} \quad (|z| > 0.2) \quad (6.30)$$

Una forma de verificar la validez de esta transformada, consiste en comparar los primeros términos de la secuencia de $f[n]$ con los que se obtienen con la función **filter** cuando la secuencia de entrada es $x[n] = \delta[n]$, como se puede apreciar en el siguiente código de MATLAB.

```
% Código del ejemplo 3 del Capítulo 6.
b = [0, 0, 0.1, 0, -0.004];
a = [1, -0.6928, 0.2, -0.0277, 0.0016];
[x,n] = secimpls(0,0,6)
f_z=filter(b,a,x) % De la Transformada z
f=[(n-1).*(1/5).^ (n-1).*sin(pi*(n-1)/6)].*secuno(1,0,6) % Secuencia original
```

Los valores que se obtienen son:

x =						
1	0	0	0	0	0	0
n =						
0	1	2	3	4	5	6
f_z =						
0.0	0.0	0.1000	0.0693	0.0240	0.0055	0.0008
f =						
0.0	0.0	0.1000	0.0693	0.0240	0.0055	0.0008

Por lo que se puede concluir, que la Ec. (6.30) sí es la transformada z de $f[n]$, Ec. (6.29).

Ejemplo 6.4

Demuestre

$$na^{n-1} \longleftrightarrow \frac{z}{(z-a)^2} \quad (|z| > |a|) \quad (6.31)$$

Solución

$$na^{n-1} \longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} na^{n-1} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{a} \left(\frac{z}{a}\right)^n = \frac{z}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{a} \left(\frac{z}{a}\right)^{n-1} = \frac{z}{a} \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{d}{dz} \left[\frac{z}{a}\right]^{-n} = -\frac{z}{a} \frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{z}{a}\right]^{-n}$$

Con la serie geométrica

$$\sum_{n=0}^N x^n = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}$$

resulta

$$na^{n-1} \longleftrightarrow -\frac{z}{a} \frac{d}{dz} \left[\frac{z}{z-a}\right] = \frac{z}{(z-a)^2} \quad (|z| > |a|)$$

6.3

Transformada z inversa

La función $f[n]$ se dice que es la transformada z inversa de $F(z)$ y está dada por

$$f[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F(z) z^{n-1} dz = \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} \quad (6.32)$$

Esta integral se puede determinar por medio del teorema del residuo, el cual establece que

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi j \left[\text{Res}_{z=a_1} f(z) + \text{Res}_{z=a_2} f(z) + \dots + \text{Res}_{z=a_k} f(z) \right]$$

Si

$$F(z) z^{n-1} = F_o(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{N(z)}{\prod_{i=1}^k (z - p_i)^{m_i}}$$

donde k y m_i son enteros positivos. Empleando el teorema del residuo, se tiene

$$f[n] = \sum_{i=1}^k \text{Res}_{z=p_i} [F_o(z)] \quad (6.33)$$

donde para un polo simple

$$\text{Res}_{z=p_i} [F_o(z)] = \lim_{z \rightarrow p_i} [(z - p_i) F_o(z)] \quad (6.34)$$

y para un polo de orden r

$$\text{Res}_{z=p_i} [F_o(z)] = \frac{1}{(r-1)!} \lim_{z \rightarrow p_i} \frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}} [(z - p_i)^r F_o(z)] \quad (6.35)$$

Se debe notar que $F_o(z)$ puede tener un polo en el origen cuando $n = 0$ y posiblemente polos de mayor orden para $n < 0$. Esto debe tenerse en cuenta al determinar $f[0]$, $f[-1]$, $f[-2]$,

Ejemplo 6.5

Determine la transformada z inversa de

$$a) F(z) = \frac{(z+1)z}{2(z-1)(z+2)} \quad b) F(z) = \frac{(z+1)}{2(z-1)(z+2)}$$

Solución

Para el inciso a):

$$F_o(z) = \frac{(z+1)z^n}{2(z-1)(z+2)}$$

Para $n \geq 0$

$$f[n] = \text{Res}_{z=1} [F_o(z)] + \text{Res}_{z=-2} [F_o(z)] = \frac{(z+1)z^n}{2(z+2)} \Big|_{z=1} + \frac{(z+1)z^n}{2(z-1)} \Big|_{z=-2} = \frac{(1)^n}{3} + \frac{(-2)^n}{2(3)}$$

se puede demostrar que para $n < 0$, $f[n] = 0$ y por consiguiente

$$f[n] = \frac{1}{3} \left[1 + \frac{(-2)^n}{2} \right] u[n] \quad (6.36)$$

y para el inciso b):

$$F_o(z) = \frac{(z+1)z^{n-1}}{2(z-1)(z+2)}$$

En este caso cuando $n = 0$, $F_o(z)$ tiene un polo en el origen, por lo que $f[0]$ se debe determinar por separado

$$f[0] = \frac{(z+1)}{2(z-1)(z+2)} \Big|_{z=0} + \frac{(z+1)}{2z(z+2)} \Big|_{z=1} + \frac{(z+1)}{2z(z-1)} \Big|_{z=-2} = \frac{1}{2(-1)(2)} + \frac{2}{2(1)(3)} + \frac{-1}{2(-2)(-3)} = 0$$

Para $n > 0$

$$f[n] = \text{Res}_{z=1} [F_o(z)] + \text{Res}_{z=-2} [F_o(z)] = \frac{(z+1)z^{n-1}}{2(z+2)} \Big|_{z=1} + \frac{(z+1)z^{n-1}}{2(z-1)} \Big|_{z=-2} = \frac{(1)^{n-1}}{3} + \frac{(-2)^{n-1}}{2(3)}$$

cuando $n < 0$, $f[n] = 0$ y por consiguiente

$$f[n] = \frac{1}{3} \left[1 + \frac{(-2)^{n-1}}{2} \right] u[n-1] \quad (6.37)$$

Existen diversos métodos para determinar la transformada z inversa, por ejemplo, división larga, convolución, expansión binomial y desarrollo en fracciones parciales, siendo este último el más común para obtener $f[n]$ a partir de $F(z)$.

Método de la división larga

Por medio de la división larga, se pueden calcular los términos de la secuencia $f[n]$, dada una función racional $F(z)$. Dichos términos se encuentran aplicando el par de transformación 2 de la Tabla 6.2 al cociente que resulta.

Ejemplo 6.6

Obtenga mediante división larga, la transformada z inversa de la función $F(z)$ del ejemplo 6.5a).

$$F(z) = \frac{(z+1)z}{2(z-1)(z+2)} = \frac{z^2 + z}{2z^2 + 2z - 4}$$

Solución

Al llevar a cabo la división del numerador entre el denominador, resulta

$$\begin{array}{r}
 0.5 + z^{-2} - z^{-3} + 3z^{-4} - 5z^{-5} + \dots \\
 \hline
 2z^2 + 2z - 4 \quad \left| \begin{array}{l} z^2 + z \\ z^2 + z - 2 \end{array} \right. \\
 \hline
 \quad \quad \quad 2 \\
 \quad \quad \quad 2 + 2z^{-1} - 4z^{-2} \\
 \hline
 \quad \quad \quad -2z^{-1} + 4z^{-2} \\
 \quad \quad \quad -2z^{-1} - 2z^{-2} + 4z^{-3} \\
 \hline
 \quad \quad \quad \phantom{-2z^{-1} - 2z^{-2} + 4z^{-3}} 6z^{-2} - 4z^{-3} \\
 \quad \quad \quad \phantom{-2z^{-1} - 2z^{-2} + 4z^{-3}} 6z^{-2} + 6z^{-3} - 12z^{-4} \\
 \hline
 \quad \quad \quad \phantom{-2z^{-1} - 2z^{-2} + 4z^{-3}} \dots \quad \dots
 \end{array}$$

por consiguiente

$$F(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \frac{3}{z^4} - \frac{5}{z^5} + \dots$$

considerando el par de transformación 2 de la Tabla 6.2

$$f[n] = 0.5\delta[n] + 0\delta[n-1] + \delta[n-2] - \delta[n-3] + 3\delta[n-4] - 5\delta[n-5] + \dots$$

secuencia que coincide con la que se obtiene al evaluar la $f[n]$ correspondiente, Ec.(6.36).

Método de la suma de convolución

Para obtener la transformada z inversa de una función $F(z)$ por medio de la suma de convolución es necesario, primero, expresar a $F(z)$ como el producto de dos transformadas conocidas y posteriormente efectuar la suma de convolución correspondiente para determinar $f[n]$, es decir

$$f[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)X(z)\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m]$$

Ejemplo 6.7

Determine la transformada z inversa de

$$F(z) = \frac{z}{(z-1)^3}$$

Solución

En este caso, $F(z)$ se puede expresar como

$$F(z) = \frac{z}{(z-1)^2} \frac{1}{(z-1)} = H(z)X(z)$$

de esta manera

$$H(z) = \frac{z}{(z-1)^2} \longleftrightarrow h[n] = nu[n] \quad \text{y} \quad X(z) = \frac{1}{(z-1)} \longleftrightarrow x[n] = u[n-1]$$

así

$$f[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} mu[m]u[n-m-1] = \sum_{m=0}^{n-1} m = \sum_{m=1}^{n-1} m = \frac{n(n-1)}{2}$$

finalmente

$$f[n] = \frac{n(n-1)}{2}u[n]$$

Método de la expansión binomial

La expansión binomial se puede utilizar en transformadas z con un solo polo.

Ejemplo 6.8

Encuentre la transformada z inversa de

$$F(z) = \frac{kz}{z-a}$$

Solución

$F(z)$ se puede expresar como

$$F(z) = k(1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + a^3z^{-3} + \dots) = \sum_{n=0}^{\infty} (ka^n u[n])z^{-n} \longleftrightarrow ka^n u[n] = f[n] \quad (6.38)$$

asimismo, si

$$F(z) = \frac{k}{z-a}$$

entonces

$$\begin{aligned} F(z) &= k(z^{-1} + az^{-2} + a^2z^{-3} + a^3z^{-4} + \dots) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (ka^{n-1} u[n-1])z^{-n} \longleftrightarrow ka^{n-1} u[n-1] = f[n] \end{aligned} \quad (6.39)$$

Método de fracciones parciales

La función racional $F(z)$, se puede expresar en términos de fracciones parciales como

$$F(z) = \sum_{n=1}^N F_n(z)$$

donde las $F_n(z)$ son transformadas z de polos simples, de manera que

$$\mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} = \sum_{n=0}^N \mathcal{Z}^{-1}\{F_n(z)\}$$

Ejemplo 6.9

Determine la transformada z inversa de

$$a) \quad F(z) = \frac{(z+1)z}{2(z-1)(z+2)} \quad b) \quad F(z) = \frac{z}{(z^2 + 0.25)^2}$$

Solución

a) Como el grado del numerador es igual al del denominador, la función $F(z)$ se debe reescribir como

$$F(z) = \frac{1}{2} \frac{z^2 + z - 2}{z^2 + z - 2} - \frac{1}{2} \frac{-2}{z^2 + z - 2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{(z-1)(z+2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+2} \right\}$$

por consiguiente, considerando los pares de transformación 1 y 4, de la Tabla 6.2 y de la Ec. (6.39), se tiene

$$f[n] = \frac{1}{2} \delta[n] + \frac{1}{3} [1 - (-2)^{n-1}] u[n-1] \quad (6.40)$$

Una alternativa, consiste en expresar por medio de fracciones parciales a $F(z)/z$, en lugar de $F(z)$, como a continuación se muestra

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{z+1}{2(z-1)(z+2)} = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{z-1} + \frac{1}{2} \frac{1}{z+2} \right]$$

Ahora, multiplicando por z ambos miembros

$$F(z) = \frac{1}{3} \left[\frac{z}{z-1} + \frac{1}{2} \frac{z}{z+2} \right]$$

del par de transformación 7 de la Tabla 6.2

$$f[n] = \frac{1}{3} \left[1 + \frac{1}{2} (-2)^n \right] u[n] \quad (6.41)$$

Las Ecs. (6.40) y (6.41), son las transformadas z inversas de una misma $F(z)$. ¿Proporcionan las mismas secuencias?

b) En este caso, se tiene

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{1}{(z^2 + 0.25^2)^2} = \frac{1}{(z + 0.5j)^2 (z - 0.5j)^2} = \frac{a_1}{(z + 0.5j)^2} + \frac{a_2}{z + 0.5j} + \frac{b_1}{(z - 0.5j)^2} + \frac{b_2}{z - 0.5j}$$

en donde los residuos se pueden determinar por medio de la Ec. (6.35), esto es

$$a_k = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z-p_i)^r F(z)] \Big|_{z=p_i} \quad (6.42)$$

así

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{1}{(z^2 + 0.25^2)^2} = -\frac{1}{(z + 0.5j)^2} + \frac{2j}{z + 0.5j} - \frac{1}{(z - 0.5j)^2} - \frac{2j}{z - 0.5j}$$

por lo que

$$F(z) = -\frac{z}{(z + 0.5j)^2} + \frac{2jz}{z + 0.5j} - \frac{z}{(z - 0.5j)^2} - \frac{2jz}{z - 0.5j}$$

de los pares de transformación 7 y 8 de la Tabla 6.2

$$f[n] = -n(-0.5j)^{n-1}u[n] + 2j(-0.5j)^n u[n] - n(0.5j)^{n-1}u[n] - 2j(0.5j)^n u[n]$$

agrupando términos

$$f[n] = \left\{ -n \left[\frac{(0.5j)^n}{0.5j} + \frac{(-0.5j)^n}{-0.5j} \right] - 2j[(0.5j)^n - (-0.5j)^n] \right\} u[n]$$

$$f[n] = 2j \left\{ n[(0.5j)^n - (-0.5j)^n] - [(0.5j)^n - (-0.5j)^n] \right\} u[n]$$

$$f[n] = 2j \left[\left(\frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{2}} \right)^n - \left(\frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}} \right)^n \right] (n-1) u[n]$$

$$f[n] = 2j \frac{(n-1)}{2^n} \left[e^{j\frac{\pi}{2}n} - e^{-j\frac{\pi}{2}n} \right] u[n]$$

considerando la identidad de Euler, finalmente

$$f[n] = \frac{2j(n-1)}{2^n} \left[2j \sin \left(\frac{\pi n}{2} \right) \right] u[n] = \frac{4(1-n)}{2^n} \sin \left(\frac{\pi n}{2} \right) u[n]$$

6.4

Ecuaciones en diferencias

La forma general de la ecuación en diferencias que modela un sistema discreto lineal e invariante en el tiempo de orden N con una entrada $x[n]$ y una salida $y[n]$ es

$$\sum_{m=0}^N a_m y[n+m] = \sum_{m=0}^M b_m x[n+m] = x_f[n]$$

La transformada z de la ecuación anterior se obtiene aplicando los pares de transformación 2 y 4 de la Tabla 6.1

$$\sum_{m=0}^N a_m z^m \left[Y(z) - \sum_{l=0}^{m-1} y[l]z^{-l} \right] = \sum_{m=0}^M b_m z^m \left[X(z) - \sum_{l=0}^{m-1} x[l]z^{-l} \right] \quad (6.43)$$

resolviendo para $Y(z)$

$$Y(z) = \left[\frac{\sum_{m=0}^N a_m z^m \sum_{l=0}^{m-1} y[l]z^{-l}}{\sum_{m=0}^N a_m z^m} \right] + \left[\frac{\sum_{m=0}^M b_m z^m}{\sum_{m=0}^N a_m z^m} X(z) - \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^m \sum_{l=0}^{m-1} x[l]z^{-l}}{\sum_{m=0}^N a_m z^m} \right] \quad (6.44)$$

Recordando que la respuesta completa es igual a la suma de la respuesta de entrada cero más la respuesta de estado cero

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n]$$

se infiere que

$$Y(z) = Y_{zi}(z) + Y_{zs}(z) \quad (6.45)$$

pudiéndose apreciar que la respuesta de entrada cero, $y_{zi}[n]$, se debe a las N condiciones iniciales $y[0], y[1], \dots, y[N-1]$ mientras que la respuesta de estado cero, $y_{zs}[n]$, se debe a la función de excitación $x[n], x[n+1], \dots, x[n+M]$.

La función de transferencia $H(z)$, se puede obtener a partir de la Ec. (6.44), *al considerar todas las condiciones iniciales nulas*.

$$Y_{zs}(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^m}{\sum_{m=0}^N a_m z^m} X(z)$$

por lo que

$$H(z) = \frac{Y_{zs}(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^m}{\sum_{m=0}^N a_m z^m} \quad (6.46)$$

Ejemplo 6.10

Demuestre que la ecuación en diferencias del sistema lineal e invariante en el tiempo que se muestra en la figura 6.3 es

$$y[n+2] + 4y[n+1] + 4y[n] = x[n+2] - x[n+1]$$

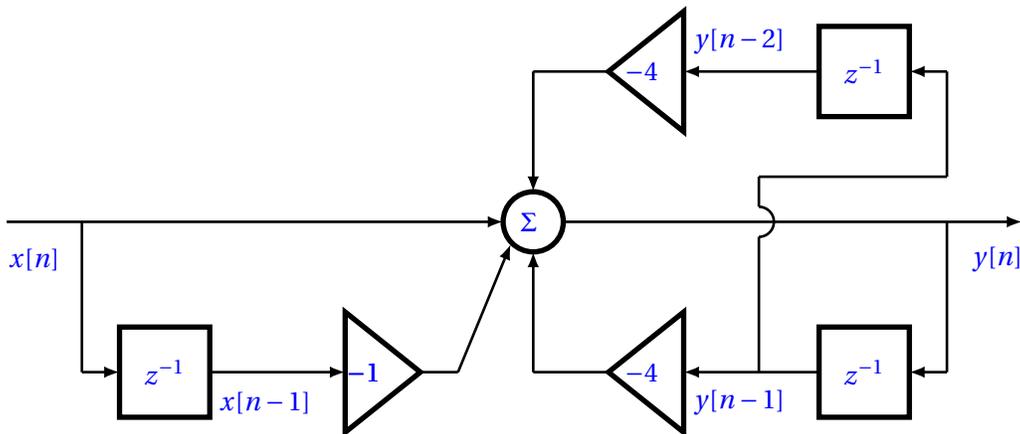


Figura 6.3: Diagrama de bloques de un sistema lineal e invariante en el tiempo de segundo orden.

Solución

En la figura 6.3, $y[n]$ es igual a la suma de las variables que llegan al punto de suma, es decir

$$y[n] = -4y[n-1] - 4y[n-2] + x[n] - x[n-1] \quad (6.47)$$

como este sistema es invariante en el tiempo, se puede sustituir a n por $n+2$, por lo que

$$y[n+2] + 4y[n+1] + 4y[n] = x[n+2] - x[n+1] \quad (6.48)$$

Ejemplo 6.11

Determine la respuesta al impulso del sistema mostrado en la figura 6.3.

Solución

Aplicando a la Ec. (6.48) el par de transformación 4 de la Tabla 6.1, la transformada z correspondiente es

$$z^2 Y(z) - z^2 [y[0] + y[1]z^{-1}] + 4 [zY(z) - z[y[0]]] + 4Y(z) = z^2 X(z) - z^2 [x[0] + x[1]z^{-1}] - [zX(z) - z[x[0]]]$$

resolviendo para $Y(z)$

$$Y(z) = \frac{y[0]z^2 + y[1]z + 4y[0]z}{z^2 + 4z + 4} + \frac{z^2 - z}{z^2 + 4z + 4} X(z) - \frac{x[0]z^2 + x[1]z + x[0]z}{z^2 + 4z + 4} \quad (6.49)$$

con todas las condiciones iniciales nulas, la función de transferencia es

$$H(z) = \frac{Y_{zs}(z)}{X(z)} = \frac{z^2 - z}{z^2 + 4z + 4} \quad (6.50)$$

La respuesta al impulso se obtiene a partir de la transformada z inversa de la Ec. (6.50)

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{z-1}{z^2 + 4z + 4} = \frac{z-1}{(z+2)^2} = \frac{-3}{(z+2)^2} + \frac{1}{z+2}$$

entonces

$$H(z) = \frac{-3z}{(z+2)^2} + \frac{z}{z+2}$$

con los pares de transformación 7 y 8 de la Tabla 6.2

$$h[n] = -3n(-2)^{n-1}u[n] + (-2)^n u[n] = \frac{(-2)^n}{2} (3n+2)u[n] \quad (6.51)$$

Se debe notar que la Ec. (6.50) se pudo determinar en una forma más simple utilizando la Ec. (6.46), puesto que en la Ec. (6.48)

$$N = 2, a_0 = 4, a_1 = 4, a_2 = 1, M = 2, b_0 = 0, b_1 = -1, b_2 = 1$$

y sustituyendo estos valores en la Ec. (6.46)

$$H(z) = \frac{Y_{zs}(z)}{X(z)} = \frac{0 - z + z^2}{4 + 4z + z^2}$$

ecuación idéntica a la obtenida antes.

Ejemplo 6.12

Encuentre la respuesta de estado cero del sistema descrito por la Ec. (6.48), cuando la secuencia de entrada es $x[n] = nu[n]$.

Solución

La respuesta de estado cero, $y_{zs}[n]$, es la parte de la respuesta completa del sistema que se debe únicamente a la entrada, $x[n]$, cuando las condiciones iniciales son nulas; en este caso cuando $y[-1] = y[-2] = 0$. Si para obtener tal respuesta se emplea la Ec. (6.49), es necesario primero determinar los valores de $y[0]$ y $y[1]$. Estos valores se pueden obtener utilizando la Ec. (6.47), como se muestra a continuación, considerando que $x[n] = nu[n]$

$$y[n] = -4y[n-1] - 4y[n-2] + nu[n] - (n-1)u[n-1]$$

sustituyendo valores

$$y[0] = -4y[-1] - 4y[-2] + 0u[0] - (-1)u[-1] = 0$$

$$y[1] = -4y[0] - 4y[-1] + u[1] - (0)u[0] = 1$$

Entonces en la Ec. (6.49)

$$Y_{zs}(z) = \frac{0z^2 + z + 0z}{z^2 + 4z + 4} + \frac{z^2 - z}{z^2 + 4z + 4} X(z) - \frac{0z^2 + z - 0z}{z^2 + 4z + 4} = \frac{z(z-1)}{(z-2)^2} X(z)$$

Dado que la transformada z de $x[n]$ es $X(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$

$$Y_{zs}(z) = \frac{z(z-1)}{(z+2)^2} \frac{z}{(z-1)^2} = z \left[\frac{z}{(z+2)^2(z-1)} \right]$$

desarrollando en fracciones parciales

$$Y_{zs}(z) = z \left[\frac{2}{3} \frac{1}{(z+2)^2} - \frac{1}{9} \frac{1}{z+2} + \frac{1}{9} \frac{1}{z-1} \right] = \frac{1}{9} \left[\frac{6z}{(z+2)^2} - \frac{z}{z+2} + \frac{z}{z-1} \right]$$

teniendo en cuenta los pares de transformación 3, 7 y 8 de la Tabla 6.2, la transformada z inversa de la ecuación anterior es

$$y_{zs}[n] = \frac{1}{9} [6n(-2)^{n-1}u[n] - (-2)^n u[n] + u[n]] = \frac{1}{9} [6n(-2)^{n-1} - (-2)^n + 1] u[n]$$

Aunque no es necesario, se evalúa esta ecuación para los primeros valores de n

$$y_{zs}[0] = \frac{1}{9} [6(0)(-2)^{-1} - (-2)^0 + 1] = 0$$

$$y_{zs}[1] = \frac{1}{9} [6(1)(-2)^0 - (-2)^1 + 1] = \frac{1}{9} [6 + 2 + 1] = 1$$

$$y_{zs}[2] = \frac{1}{9} [6(2)(-2)^1 - (-2)^2 + 1] = \frac{1}{9} [-24 - 4 + 1] = -3$$

$$y_{zs}[3] = \frac{1}{9} [6(3)(-2)^2 - (-2)^3 + 1] = \frac{1}{9} [72 + 8 + 1] = 9$$

Ejemplo 6.13

Determine la respuesta completa del sistema mostrado en la figura 6.3, cuando $y[-2] = -1$, $y[-1] = 1$ y $x[n] = nu[n]$.

Solución

La respuesta completa, $y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n]$, se obtiene de la transformada z inversa de la Ec. (6.49). Debe notarse, sin embargo, que para determinar la transformada z inversa de esta ecuación es necesario conocer los valores de $y[0]$ y $y[1]$ que la entrada y las condiciones iniciales producen. Estos valores se pueden determinar utilizando la Ec. (6.47) de manera semejante a la mostrada en el ejemplo anterior, o sea

$$y[0] = -4y[-1] - 4y[-2] + 0u[0] - (-1)u[-1] = -4(1) - 4(-1) + 0 + 0 = 0$$

$$y[1] = -4y[0] - 4y[-1] + 1u[1] - (0)u[0] = -4(0) - 4(1) + 1 - 0 = -3$$

Sustituyendo en la Ec. (6.49) estos valores y la transformada z de $x[n]$

$$Y(z) = \frac{0z^2 - 3z + 4(0)z}{z^2 + 4z + 4} + \frac{z^2 - z}{z^2 + 4z + 4} \frac{z}{(z-1)^2} - \frac{0z^2 + 1z - 0z}{z^2 + 4z + 4}$$

$$Y(z) = \frac{z^2}{(z+2)^2(z-1)} - \frac{4z}{(z+2)^2} = \frac{-3z^2 + 4z}{(z+2)^2(z-1)}$$

$$Y(z) = z \left[\frac{-3z + 4}{(z+2)^2(z-1)} \right] \quad (6.52)$$

desarrollando en fracciones parciales

$$Y(z) = -\frac{10}{3} \frac{z}{(z+2)^2} - \frac{1}{9} \frac{z}{z+2} + \frac{1}{9} \frac{z}{z-1} = \frac{1}{9} \left[\frac{-30z}{(z+2)^2} - \frac{z}{z+2} + \frac{z}{z-1} \right]$$

por lo que

$$y[n] = \frac{1}{9} [-30n(-2)^{n-1} - (-2)^n + 1] u[n]$$

Con el fin de comparar este resultado con el ejemplo 5.13 del capítulo 5, se evalúa $y[n]$ para los primeros valores de n

$$y[0] = \frac{1}{9} [-30(0)(-2)^{-1} - (-2)^0 + 1] = 0$$

$$y[1] = \frac{1}{9} [-30(1)(-2)^0 - (-2)^1 + 1] = -3$$

$$y[2] = \frac{1}{9} [-30(2)(-2)^1 - (-2)^2 + 1] = 13$$

$$y[3] = \frac{1}{9} [-30(3)(-2)^2 - (-2)^3 + 1] = -39$$

Es conveniente señalar, que es una práctica común escribir las ecuaciones en diferencias que modelan a los sistemas lineales e invariantes en el tiempo de la forma que se muestra en la Ec. (6.47).

Ejemplo 6.14

Empleando la Ec. (6.47), determine la respuesta completa del sistema de la figura 6.3, cuando $x[n] = nu[n]$, $y[-2] = -1$ y $y[-1] = 1$.

Solución

Al aplicar la propiedad de atraso de la transformada z , Ec. (6.10), a la ecuación en diferencias siguiente

$$y[n] + 4y[n-1] + 4y[n-2] = x[n] - x[n-1]$$

se tiene

$$\begin{aligned} Y(z) + 4\{z^{-1}Y(z) + z^{-1}[y[-1]z^1]\} + 4\{z^{-2}Y(z) + z^{-2}[y[-2]z^2 + y[-1]z^1]\} \\ = X(z) - \{z^{-1}X(z) + z^{-1}[x[-1]z^1]\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(z) + 4z^{-1}Y(z) + 4y[-1] + 4z^{-2}Y(z) + 4y[-2] + 4y[-1]z^{-1} \\ = X(z) - z^{-1}X(z) - x[-1] \end{aligned}$$

Resolviendo para $Y(z)$

$$Y(z) = -\frac{4y[-1] + 4y[-2] + 4y[-1]z^{-1}}{1 + 4z^{-1} + 4z^{-2}} + \frac{1 - z^{-1}}{1 + 4z^{-1} + 4z^{-2}}X(z) - \frac{x[-1]}{1 + 4z^{-1} + 4z^{-2}}$$

sustituyendo lo valores correspondientes

$$Y(z) = -\frac{4(1) + 4(-1) + 4(1)z^{-1}}{1 + 4z^{-1} + 4z^{-2}} + \frac{1 - z^{-1}}{1 + 4z^{-1} + 4z^{-2}} \frac{z}{(z-1)^2} - \frac{0}{1 + 4z^{-1} + 4z^{-2}}$$

$$Y(z) = -\frac{4z}{z^2 + 4z + 4} + \frac{z^2 + z}{z^2 + 4z + 4} \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{-4z}{(z+2)^2} + \frac{z^2}{(z+2)^2(z-1)}$$

finalmente

$$Y(z) = z \left[\frac{-3z + 4}{(z+2)^2(z-1)} \right]$$

ecuación idéntica a la que se obtuvo en el ejemplo anterior. Por consiguiente

$$y[n] = \frac{1}{9} [-30n(-2)^{n-1} - (-2)^n + 1] u[n]$$

El método más común para encontrar la secuencia $f[n]$ a partir de $F(z)$ es el de fracciones parciales. MATLAB tiene implementada la función **residuez** que convierte la representación de un sistema de tiempo discreto mediante la razón de dos polinomios en una expansión de fracciones parciales. Esta función, también permite efectuar la operación inversa, es decir, dada la expansión de fracciones parciales obtener los polinomios originales.

[R,p,C] = residuez(a,b) encuentra los residuos, polos y posiblemente un polinomio (si $M \geq N$) de una expansión de fracciones parciales de la razón de dos polinomios $B(z)$ y $A(z)$. Los vectores **b** y **a** especifican los coeficientes de los polinomios en potencias ascendentes de z^{-1} .

Sea $F(z)$ una función racional impropia, es decir $M \geq N$

$$F(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} \quad (6.53)$$

si no existen polos múltiples, $F(z)$ se puede reescribir como

$$F(z) = \sum_{m=1}^N \frac{R_m}{1 - p_m z^{-1}} + \sum_{m=0}^{M-N} C_m z^{-m} \quad (6.54)$$

Si no es el caso, es decir que el polo p_i tiene una multiplicidad r , entonces la expansión por fracciones parciales incluye un término en la forma

$$\sum_{k=1}^r \frac{R_k}{(1 - p_i z^{-1})^k} = \frac{R_1}{1 - p_i z^{-1}} + \frac{R_2}{(1 - p_i z^{-1})^2} + \dots + \frac{R_r}{(1 - p_i z^{-1})^r} \quad (6.55)$$

Cuando la función **residuez** tiene tres argumentos de entrada y dos argumentos de salida, **[b,a] = residuez[R,p,C]**, se ejecuta la operación inversa, es decir, convierte la expansión de fracciones parciales nuevamente a polinomios cuyos coeficientes se encuentran en los vectores **b** y **a**.

Ejemplo 6.15

Determine la transformada z inversa de la función de transferencia $H(z)$, Ec. (6.50), del ejemplo 6.11.

$$H(z) = \frac{Y_{zs}(z)}{X(z)} = \frac{z^2 - z}{z^2 + 4z + 4}$$

Solución

Primero es necesario reescribir la función de la forma Ec. (6.53)

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 + 4z^{-1} + 4z^{-2}} = \frac{1 - z^{-1}}{(1 - 2z^{-1})^2}$$

el programa de MATLAB, para obtener la expansión en fracciones parciales es

```
% Código del ejemplo 15 del Capítulo 6.  
num = [1,-1];  
den = poly([-2,-2])  
[R,p,C] = residuez(num,den)
```

En este archivo.m se utiliza la función **poly** como una forma alternativa de determinar el denominador a partir de sus raíces. Los resultados que se obtienen son

```
den =  
1    4    4  
R =  
-0.5000  
1.5000  
p =  
-2  
-2  
C =  
[]
```

por tanto

$$H(z) = \frac{-0.5}{1 + 2z^{-1}} + \frac{1.5}{(1 + 2z^{-1})^2} = \frac{-0.5z}{z + 2} + \frac{1.5z^2}{(z + 2)^2}$$

considerando los pares de transformación 7 y 8 de la Tabla 6.2 y la propiedad de adelanto

$$\begin{aligned} h[n] &= -0.5(-2)^n u[n] + 1.5(n+1)(-2)^n u[n+1] \\ &= -0.5(-2)^n u[n] + 1.5(n+1)(-2)^n u[n] \\ &= (-2)^n (-0.5 + 1.5n + 1.5) u[n] = \frac{(-2)^n}{2} (3n+2) u[n] \end{aligned}$$

expresión que coincide con la que se determinó en el ejemplo 6.11. Veamos ahora el resultado de

```

% Código del ejemplo 15 del Capítulo 6.
[b,a] = residuez[R,p,C]
b =
1   -1
a =
1   4   4

```

Como se aprecia, se obtienen los coeficientes de los polinomios del numerador y denominador originales.

Ejemplo 6.16

Determine la respuesta de estado cero del sistema cuya función de transferencia es la del ejemplo anterior cuando la entrada es

$$x[n] = nu[n]$$

Solución

Del ejemplo 6.12, la transformada z de la respuesta de estado cero es

$$Y_{zs}(z) = \frac{z(z-1)}{(z+2)^2} \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z^2}{z^3+3z^2-4} = \frac{z^{-1}}{1+3z^{-1}-4z^{-3}}$$

la expansión por fracciones parciales empleando la función **residuez**, se puede obtener con el siguiente código

```

% Código del ejemplo 16 del Capítulo 6.
num = [0,1];
den = poly([-2,-2,1])
[R,p,C] = residuez(num,den)
[b,a] = residuez(R,p,C)

```

los resultado que se obtienen son los siguientes

```

den =
1   3   0  -4
R =
0.2222 - 0.0000i
-0.3333 + 0.0000i
0.1111 + 0.0000i
p =
-2.0000 + 0.0000i
-2.0000 - 0.0000i
1.0000 + 0.0000i
C =
[]
b =
-0.0000 - 0.0000i   1.0000 - 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
a =
1   3   0  -4

```

Resultados que se pueden escribir como

$$\begin{aligned}
 Y_{zs}(z) &= \frac{0.2222}{1+2z^{-1}} - \frac{0.3333}{(1+2z^{-1})^2} + \frac{0.1111}{1+z^{-1}} \\
 &= 0.2222 \frac{z}{z+2} - 0.3333 \frac{z^2}{(z+2)^2} + 0.1111 \frac{z}{z-1}.
 \end{aligned}$$

la secuencia $y_{zs}[n]$ correspondiente, se determina a partir de la transformada z inversa de la expresión anterior

$$\begin{aligned}
 y_{zs}[n] &= 0.2222(-2)^n u[n] - 0.3333(n+1)(-2)^n u[n] + 0.1111 u[n] \\
 &= [-0.1111(-2)^n - 0.3333n(-2)^n + 0.1111] u[n]
 \end{aligned}$$

En el ejemplo 6.12, la respuesta de estado cero que se determinó fue

$$y_{zs}[n] = \frac{1}{9} [6n(-2)^{n-1} - (-2)^n + 1] u[n]$$

esta ecuación se puede reescribir como

$$\begin{aligned}
 y[n] &= \frac{1}{9} \left[\frac{6n(-2)^n}{-2} - (-2)^n + 1 \right] u[n] \\
 &= \frac{1}{9} [-3n(-2)^n - (-2)^n + 1] \\
 &= [-0.3333n(-2)^n - 0.1111(-2)^n + 0.1111] u[n]
 \end{aligned}$$

que obviamente coincide con el resultado que se obtuvo por medio de la función **residuez**.

De lo anterior, se concluye que es posible conocer la respuesta completa de un sistema si se conoce la ecuación en diferencias que lo representa, la entrada y las condiciones iniciales mediante la transformada z inversa de la expansión en fracciones parciales que la función **residuez** genera.

Finalmente, en el capítulo anterior la función **filter** se utilizó para determinar la respuesta de estado cero de un sistema lineal e invariante en el tiempo dados los coeficientes de la ecuación en diferencias que lo representa y la secuencia de entrada. Cambiando los parámetros de entrada de la función, se le puede utilizar para obtener la respuesta completa (la respuesta de entrada cero, debida a las condiciones iniciales más la respuesta de estado cero debida a la entrada). La forma de la función **filter** con este propósito es

$$\mathbf{y} = \mathbf{filter}(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{x}, \mathbf{xic}) \tag{6.56}$$

donde **xic** es un vector de condiciones iniciales equivalentes.

Considere el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.17

Repita el ejemplo 6.14, utilizando la Ec. (6.56).

Solución

En el ejemplo 6.14 la respuesta completa tiene la forma

$$Y(z) = -\frac{4y[-1] + 4y[-2] + 4y[-1]z^{-1}}{1 + 4z^{-1} + 4z^{-2}} + \frac{1 - z^{-1}}{1 + 4z^{-1} + 4z^{-2}}X(z) - \frac{x[-1]}{1 + 4z^{-1} + 4z^{-2}}$$

ecuación que se puede escribir como

$$Y(z) = -\frac{[4y[-1] + 4y[-2] + x[-1]] + 4y[-1]z^{-1}}{1 + 4z^{-1} + 4z^{-2}} + \frac{1 - z^{-1}}{1 + 4z^{-1} + 4z^{-2}}X(z)$$

sustituyendo los valores de las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} Y(z) &= -\frac{[4 - 4 + 0] + 4z^{-1}}{1 + 4z^{-1} + 4z^{-2}} + \frac{1 - z^{-1}}{1 + 4z^{-1} + 4z^{-2}}X(z) \\ &= -\frac{0 + 4z^{-1}}{1 + 4z^{-1} + 4z^{-2}} + \frac{1 - z^{-1}}{1 + 4z^{-1} + 4z^{-2}}X(z) \end{aligned}$$

esta respuesta se puede considerar como la suma de una respuesta debida a condiciones iniciales equivalentes más nuestra vieja conocida, la respuesta de estado cero. En este caso el vector de condiciones iniciales **xic** es

$$\mathbf{xic} = [\mathbf{xic}[0], \mathbf{xic}[-1]] = [-0, -4]$$

el código.m que produce la respuesta completa es

```
% Código del ejemplo 17 del Capítulo 6.
n = [0:5];
x = n;
xic = [-0,-4]
a = [1,4,4]; b = [1,-1];
y = filter(b,a,x,xic)
```

los valores de la secuencia de la respuesta completa que se producen son

```
n =
0     1     2     3     4     5
xic =
0     -4
y =
0     -3     13    -39     105    -263
```

Compare estos valores con los obtenidos en el ejemplo 6.13. ¿Qué se puede concluir?

Resumen

En este capítulo se ha presentado el concepto de la transformada z , *herramienta matemática* que desempeña un papel análogo al de la transformada de Laplace en el análisis de los sistemas continuos, para el estudio de los sistemas de tiempo discreto y digitales lineales e invariantes en el tiempo.

El plano complejo z se obtuvo a partir del plano complejo s . Mediante la transformación $z = e^{sT}$, la región de estabilidad de los sistemas analógicos se mapeó en el círculo unitario, región de estabilidad de los sistemas discretos.

La función de transferencia se ha definido como la transformada z de la respuesta al impulso y viceversa.

Se han estudiado las propiedades de la transformada z y la manera de emplearla para la obtención de las diversas partes que constituyen la respuesta completa de un sistema de tiempo discreto lineal e invariante en el tiempo.

También, se han presentado varias **funciones.m** implementadas en código de MATLAB como parte integral en el estudio de los sistemas discretos y que nos permiten soslayar el trabajo arduo y tedioso.

Como un último comentario, en la literatura relacionada con estos temas se pueden encontrar otras **funciones.m** afines a estos tópicos que se implementan periódicamente, se recomienda al lector estudiarlas con la finalidad de facilitar la comprensión de los conceptos y su aplicación y en un momento dado crear sus propias funciones << ***.m** >>.

Problemas

6.1 Determine la transformada z de

- a) $\frac{1}{2^n} u[n]$
- b) $\frac{n}{2^n} u[n]$
- c) $\frac{a^n}{n!} u[n]$
- d) $\frac{[\ln(a)]^n}{n!} u[n]$
- e) $\sum_{m=0}^n x[m]$
- f) $\sin\left[\frac{\pi n}{3}\right] u[n]$

6.2 Encuentre la transformada z de la secuencia periódica mostrada en la figura 6.4.

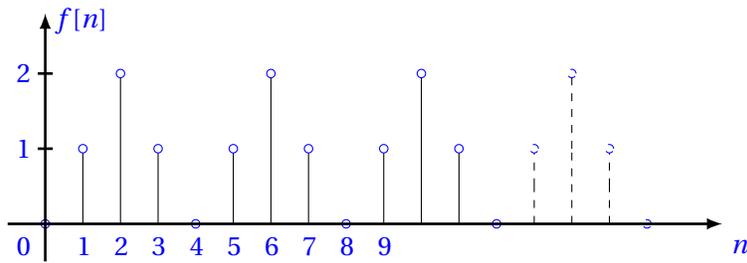


Figura 6.4: Señal periódica con $N = 4$.

6.3 Demuestre que la transformada z de la secuencia periódica $f[n]u[n] = f[n + N]u[n]$ es

$$f[n]u[n] \longleftrightarrow \frac{z^N}{z^N - 1} F_1(z)$$

donde

$$F_1(z) = \sum_{n=0}^{N-1} f[n]z^{-n}$$

es la transformada z del primer ciclo de $f[n]u[n]$.

6.4 Con el resultado del problema anterior, determine la transformada z de la siguiente secuencia

$$x[n] = \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) u[n]$$

6.5 Encuentre la respuesta al impulso del sistema discreto cuya función de transferencia es

$$H(z) = \frac{3z + 2}{2z^2 - 1}$$

6.6 Un sistema discreto está caracterizado por la función de transferencia

$$H(z) = \frac{z}{z - 1}$$

Encuentre la respuesta $y_{zs}[n]$ del sistema cuando la entrada es

$$x[n] = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) u[n]$$

6.7 Encuentre la respuesta completa del sistema discreto descrito por la ecuación en diferencias

$$y[n + 3] + y[n] = x[n]$$

cuando las condiciones iniciales son $y[0] = y[1] = 0$, $y[2] = 1$ y la entrada es $x[n] = 2^n u[n]$.

6.8 La ecuación en diferencias

$$y[n] - y[n - 1] = \frac{T}{2} [x[n] + x[n - 1]]$$

describe a un integrador numérico. Determine

- La función de transferencia correspondiente.
- La respuesta al impulso.
- La respuesta de estado cero cuando $x[n] = u[n]$. Considere $T = 1$.
- Bosqueje y acote la respuesta del inciso anterior.
- ¿Es este sistema estable? Justifique su respuesta.

6.9 Considere la interconexión en cascada de tres sistemas discretos lineales e invariantes en el tiempo que se muestra en la figura 6.5.

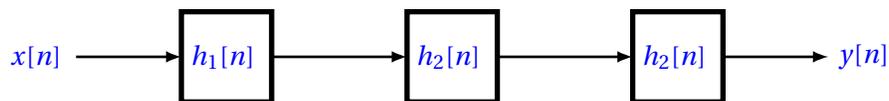


Figura 6.5: Sistemas en cascada.

Dado que la respuesta al impulso $h_2[n] = u[n] - u[n - 2]$ y la respuesta al impulso completa es la que se muestra en la figura 6.6. Encuentre la respuesta al impulso $h_1[n]$.

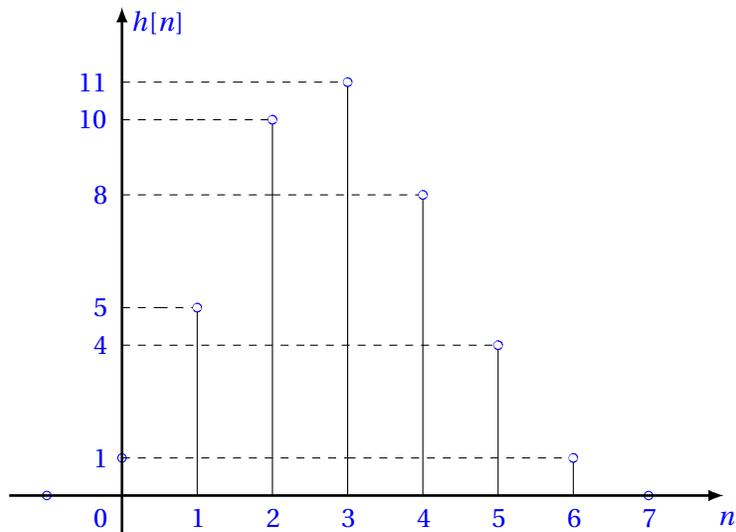


Figura 6.6: Respuesta al impulso del sistema de la figura 6.5.

6.10 A cierto sistema dinámico discreto, invariante en el tiempo, causal y lineal, estando en reposo, se le aplica como entrada la secuencia rampa unitaria. La respuesta que se registra es

$$y[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 2n + 4\delta[n] + 2\delta[n-1] - 4 & n \geq 0 \end{cases}$$

- Deduzca la respuesta del sistema cuando la entrada es una secuencia unitaria.
- Represente el sistema mediante un diagrama de bloques.

6.11 Un sistema discreto se representa por medio del diagrama de bloques de la figura 6.7.

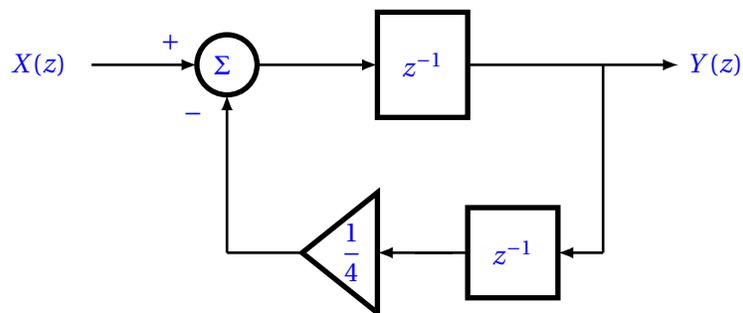


Figura 6.7: Sistema discreto realimentado.

- Determine si el sistema es o no estable.
- Encuentre la respuesta cuando la entrada es un escalón unitario.

6.12 Considere el sistema discreto que se muestra en la figura 6.8

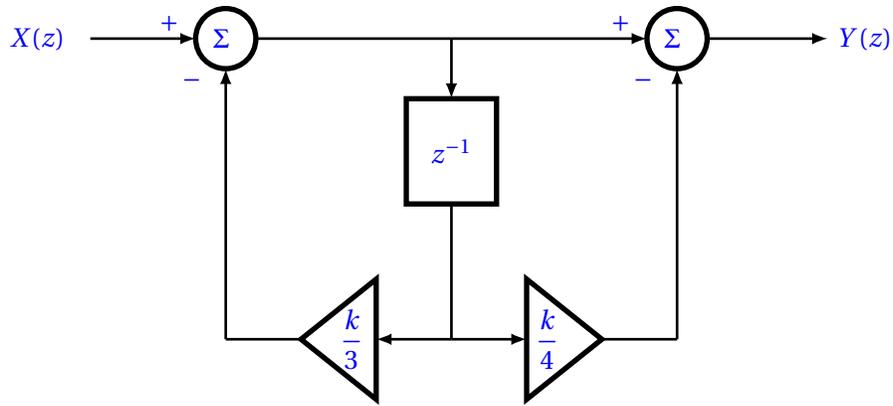


Figura 6.8: Sistema discreto.

Determine:

- La función de transferencia $H(z)$.
- El intervalo de valores de k para que el sistema sea estable.
- $y_{zs}[n]$ si $k = 1$ y $x[n] = \left(\frac{2}{3}\right)^n u[n]$.

6.13 Determine la ecuación en diferencias del sistema lineal e invariante en el tiempo, S , que satisface la relación entrada-salida mostrada en la figura 6.9.

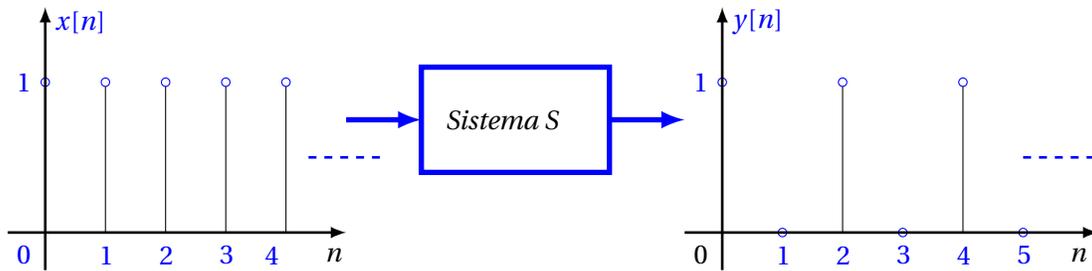


Figura 6.9: Relación entrada-salida de un sistema lineal e invariante en el tiempo.

6.14 La respuesta al impulso de un sistema lineal e invariante en el tiempo es

$$h[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ n & n \geq 0 \end{cases}$$

Encuentre la señal de entrada, $x[n]$, que causa que la respuesta de estado cero, $y_{zs}[n]$, sea

$$y_{zs}[n] = \begin{cases} 0 & n \neq 2 \\ 1 & n = 2 \end{cases}$$

6.15 De un sistema lineal e invariante en el tiempo se sabe que cuando el sistema está en reposo y se aplica la entrada

$$x[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n \geq 0 \end{cases}$$

la salida correspondiente es

$$y[n] = 2^n + 3(5)^n + 10 \quad n \geq 0$$

Determine:

- La ecuación en diferencias que describe al sistema.
- La salida debida a la entrada

$$x[n] = \begin{cases} 2 & 0 \leq n \leq 10 \\ 0 & \text{otro valor} \end{cases}$$

6.16 En el siguiente sistema, caracterizado por su función de transferencia

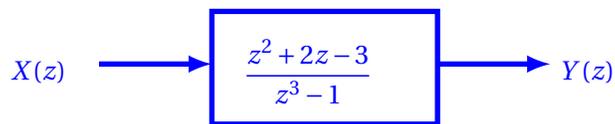


Figura 6.10: Función de transferencia de un sistema lineal e invariante en el tiempo.

Determine el valor de $y[n]$ cuando $n \rightarrow \infty$, si la entrada es una secuencia escalón unitario.

6.17 Encuentre la función de transferencia del sistema que se muestra en la figura 6.11.

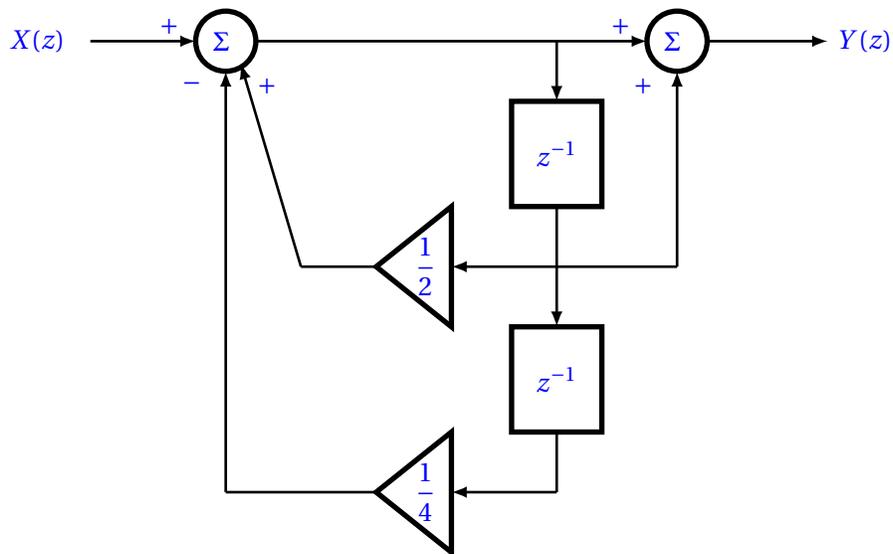


Figura 6.11: Sistema de segundo orden.

6.18 Un sistema discreto, $H(z)$, está descrito por la ecuación en diferencias siguiente

$$y[n] - 2y[n - 1] = 3x[n - 1]$$

- ¿Es este sistema estable?
- Un elemento de realimentación, $G(z)$, caracterizado por la ecuación en diferencias

$$y[n] - \alpha y[n - 1] = \beta x[n - 1]$$

se utiliza para estabilizar el sistema anterior, como se muestra en la figura 6.12. Determine los valores de las constantes α y β de manera que el sistema realimentado tenga un polo doble en $z = 0.5$.

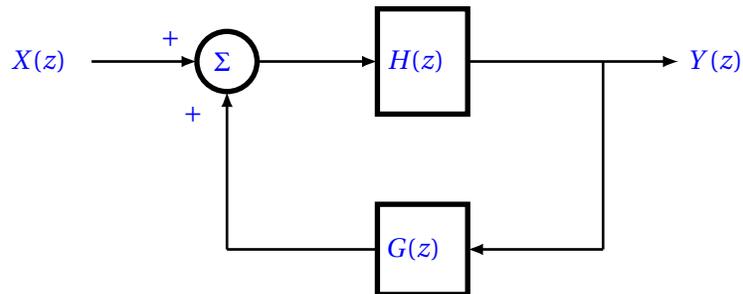


Figura 6.12: Sistema discreto con retroalimentación positiva.

6.19 Considere el sistema discreto $G(z)$ de la figura 6.13a. Para estabilizarlo se realimenta como se muestra en la figura 6.13b.

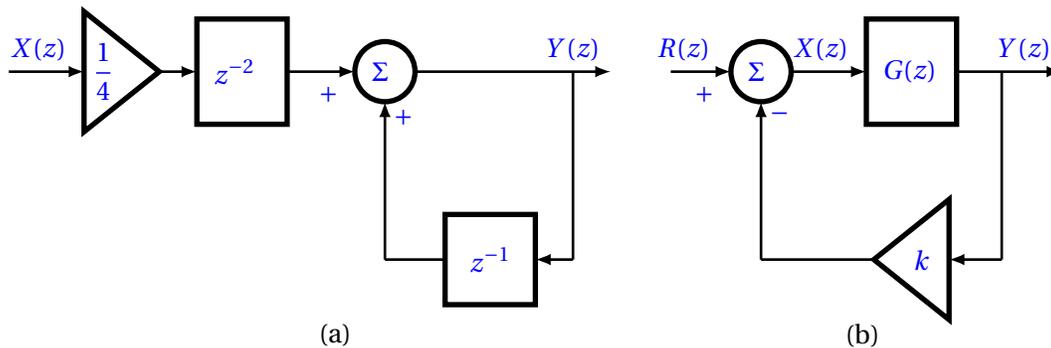


Figura 6.13: (a) Sistema de lazo abierto. (b) Sistema de lazo cerrado.

Obtenga:

- La función de transferencia $H(z) = \frac{Y(z)}{R(z)}$
- El valor de la constante k para que $H(z)$ tenga polos repetidos en $z = 0.5$
- La respuesta $y[n]$ cuando $r[n]$ es un escalón unitario. Considere $k = 1$.

6.20 Dibuje y acote la respuesta $y[n]$ del sistema de la figura 6.14, cuando la entrada es una rampa unitaria.

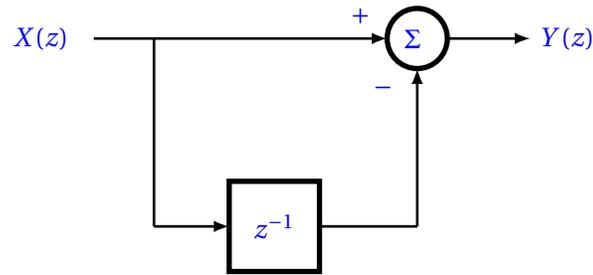


Figura 6.14: Derivador digital.

¿Que puede concluir?

6.21 Determine la respuesta al impulso del sistema causal de la figura 6.15

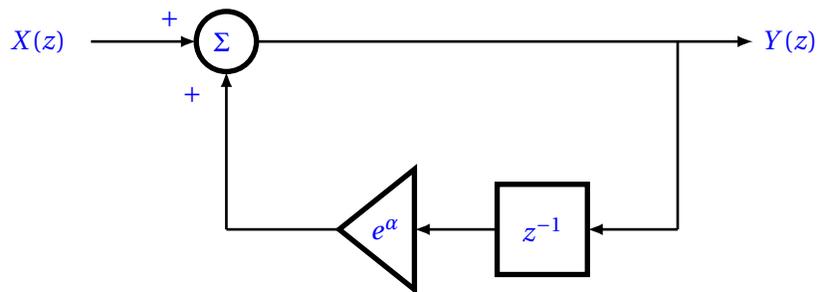


Figura 6.15: Sistema discreto de primer orden causal.

6.22 Considere el sistema lineal e invariante en el tiempo del sistema que se presenta en la figura 6.16.

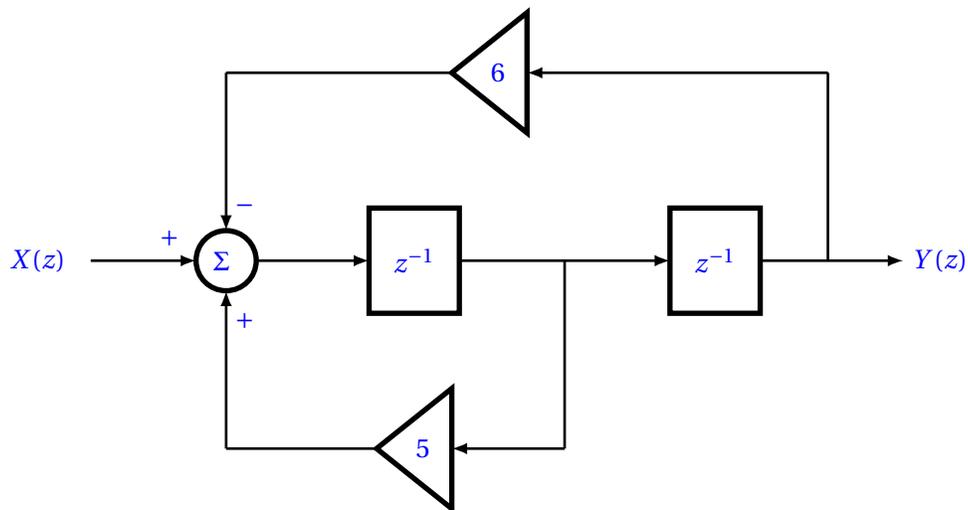


Figura 6.16: Sistema de segundo orden.

Determine la respuesta del sistema cuando la entrada es un escalón unitario.

6.23 Determine la respuesta al impulso del sistema discreto modelado por la ecuación en diferencias

$$y[n] = 8y[n-3] + x[n] + 2x[n-2]$$

6.24 La figura 6.17 muestra un sistema multivariable de dos entradas y dos salidas.

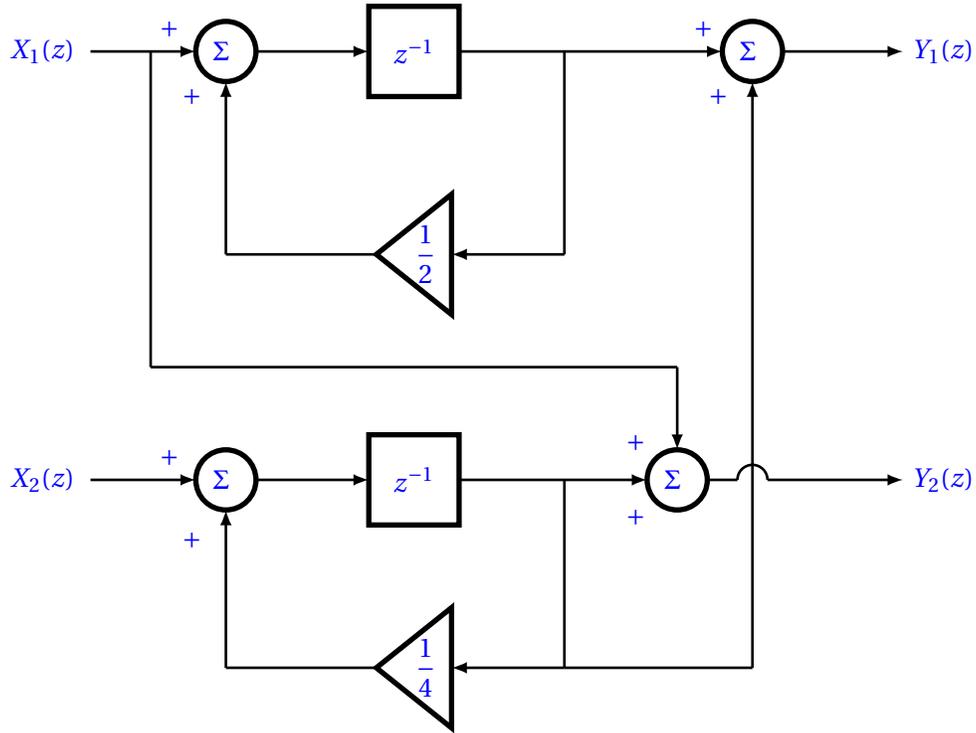


Figura 6.17: Sistema discreto multivariable.

Determine su matriz de respuesta al impulso.

7

La Serie y la Transformada de Fourier en Tiempo Continuo



7.1

Introducción

Para determinar la respuesta y caracterización de un sistema lineal e invariante en el tiempo, se han abordado en el capítulo 3 los métodos en el dominio del tiempo y en el capítulo 4 el método de la Transformada de Laplace, análisis que se lleva a cabo en el dominio de la frecuencia.

La Serie y la Transformada de Fourier son métodos alternativos para el análisis de señales y sistemas en el dominio del tiempo y de la frecuencia, respectivamente, en donde al igual que con la Transformada de Laplace, transforman la representación de una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes de un sistema, en una expresión algebraica, permitiendo entre otras cosas, simplificar de manera considerable la determinación de la respuesta permanente de ese sistema, así como su respuesta en frecuencia.

La Serie de Fourier en tiempo continuo representa señales periódicas como la suma ponderada de exponenciales complejas armónicamente relacionadas, cuyas frecuencias son múltiplos enteros unas de otras, mientras que la Transformada representa señales aperiódicas como la suma continua de exponenciales complejas.

Esta representación permite obtener de manera directa la salida permanente de un sistema a una entrada periódica. Para introducir a este tema, haremos referencia a algunos conceptos discutidos en capítulos anteriores.

Como se analizó en el capítulo 3, la respuesta de un sistema LIT comprende dos respuestas, la respuesta de entrada cero $y_{zi}(t)$ y la respuesta de estado cero $y_{zs}(t)$, esto es

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$$

Recordemos que la respuesta $y_{zi}(t)$ tiende a cero cuando $t \rightarrow \infty$, como una consecuencia directa de la estabilidad del sistema.

También se discutió que una forma de obtener la respuesta de estado cero $y_{zs}(t)$ para sistemas LIT es a través de la integral de convolución, la Ec. (3.14).

$$y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau$$

en donde para el caso en que la señal de entrada es una exponencial compleja $x(t) = e^{j\omega_0 t} u(t)$, y la respuesta al impulso $h(t)$ es absolutamente integrable (sistema estable) e inicia en $t = 0$, la respuesta de estado cero es

$$\begin{aligned} y_{zs}(t) &= \int_0^{\infty} h(\tau) e^{j\omega_0(t-\tau)} u(t-\tau) d\tau \\ &= \int_0^t h(\tau) e^{j\omega_0(t-\tau)} d\tau \\ &= \int_0^{\infty} h(\tau) e^{j\omega_0(t-\tau)} d\tau - \int_t^{\infty} h(\tau) e^{j\omega_0(t-\tau)} d\tau \end{aligned}$$

El segundo término de esta respuesta tiende a cero conforme $t \rightarrow \infty$, considerando que la respuesta al impulso $h(t)$ de un sistema estable es absolutamente integrable. De aquí que la respuesta que queda, conforme t crece, es la respuesta permanente

$$y_{zs}(t) = y_p(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) e^{j\omega_0(t-\tau)} d\tau$$

La cual se puede expresar como

$$y_p(t) = e^{j\omega_0 t} \int_0^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} d\tau \quad (7.1)$$

Bajo este enfoque, se abordará la serie exponencial y trigonométrica de Fourier como medio para la obtención de la respuesta permanente de los sistemas LIT, observando que por esta razón la señal de entrada $x(t)$ y de salida permanente $y(t)$ no estarán multiplicadas por $u(t)$. Además, para fines prácticos se omitirá el subíndice p en $y_p(t)$ y se hará referencia a esta respuesta como $y(t)$.

7.2

Función propia del sistema

Las exponenciales complejas $e^{j\omega_0 t}$ son funciones propias de los sistemas (LIT), ya que cumplen con la característica de que al aplicarlas a un sistema, la respuesta permanente es la misma entrada multiplicada por una constante compleja. Las exponenciales complejas son periódicas, como se discutió en el capítulo 2, cuya frecuencia angular es $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ la constante compleja es la función de transferencia o función del sistema $H(s)|_{s=j\omega_0}$ evaluada a la frecuencia ω_0 de la señal de entrada. A esta constante se le denomina valor propio del sistema. Esto es, la respuesta permanente a una entrada exponencial compleja es

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} \rightarrow y(t) = H(s)|_{s=j\omega_0} e^{j\omega_0 t} \quad (7.2)$$

Lo anterior se demuestra mediante la integral de convolución, obtenida con la Ec. (7.1)

$$y(t) = e^{j\omega_0 t} \int_0^\infty h(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} d\tau$$

en donde

$$H(s)|_{s=j\omega_0} = \int_0^\infty h(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} d\tau \quad (7.3)$$

es el valor propio y se interpreta como la función de transferencia del sistema, en el dominio de la frecuencia, evaluada a la frecuencia de la señal de entrada.

Como ejemplo, consideremos diferentes entradas, todas exponenciales complejas. De acuerdo con la Ec. (7.2) las respuestas serán

$$\begin{array}{ll} x(t) = e^{j\omega_1 t} & \rightarrow y(t) = H(s)|_{s=j\omega_1} e^{j\omega_1 t} \\ x(t) = 5e^{j\omega_2 t} & \rightarrow y(t) = H(s)|_{s=j\omega_2} 5e^{j\omega_2 t} \\ x(t) = 2e^{j(\omega_1 t + \frac{\pi}{4})} & \rightarrow y(t) = H(s)|_{s=j\omega_1} 2e^{j(\omega_1 t + \frac{\pi}{4})} \\ x(t) = 2e^{j\omega_1 t} e^{j\frac{\pi}{4}} & \rightarrow y(t) = H(s)|_{s=j\omega_1} 2e^{j\omega_1 t} e^{j\frac{\pi}{4}} \\ x(t) = 5e^{j\omega_1 t} + 2e^{j\frac{\pi}{4}} e^{j\omega_2 t} & \rightarrow y(t) = H(s)|_{s=j\omega_1} 5e^{j\omega_1 t} + H(s)|_{s=j\omega_2} 2e^{j\frac{\pi}{4}} e^{j\omega_2 t} \end{array}$$

Ya que las exponenciales complejas son funciones propias de los sistemas (LIT), una señal de entrada se puede definir como la superposición de un número infinito de exponenciales complejas, que pueden o no estar ponderadas y desplazadas. De manera general, la serie exponencial de $x(t)$ es

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t} \\
 &= \dots + a_{-2} e^{-j2\omega_0 t} + a_{-1} e^{-j\omega_0 t} + a_0 + a_1 e^{j\omega_0 t} + a_2 e^{j2\omega_0 t} + \dots
 \end{aligned} \tag{7.4}$$

en donde a los coeficientes a_k pueden ser complejos. En cuyo caso la salida o respuesta permanente es

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H(s_k) e^{jk\omega_0 t} \tag{7.5}$$

donde $H(s_k) = H(s)|_{s=jk\omega_0}$

que de manera general la denotaremos como $H(jk\omega)$.

Ejemplo 7.1

Considere la respuesta al impulso de un sistema como

$$h(t) = e^{-2t} u(t)$$

Si la entrada es una exponencial compleja

$$x(t) = e^{j\frac{2\pi}{3}t}$$

Determine el valor propio del sistema a la frecuencia de la señal de entrada.

Solución

De acuerdo con la Ec. (7.3), el valor propio es

$$\begin{aligned}
 H(s)|_{s=j\omega_0} &= \int_0^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} d\tau = \int_0^{\infty} e^{-2\tau} u(\tau) e^{-j\frac{2\pi}{3}\tau} d\tau \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-2\tau} e^{-j\frac{2\pi}{3}\tau} d\tau \\
 H(s)|_{s=j\omega_0} &= \frac{1}{2 + j\frac{2\pi}{3}}
 \end{aligned}$$

Observe que una forma de obtener el valor propio es a partir de la función de transferencia evaluada a la frecuencia de la señal de entrada, es decir, que se puede obtener la función del sistema mediante la técnica de Laplace unilateral o mediante la Ec. (7.3) y evaluarla a la frecuencia deseada. Esto es

$$\begin{aligned}
 H(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau = \int_0^{\infty} e^{-2\tau} e^{-s\tau} d\tau \\
 &= \frac{1}{2+s}
 \end{aligned}$$

en donde

$$H(s)|_{s=j\omega_0} = \frac{1}{2+s} \Big|_{s=j\omega_0} = \frac{1}{2+j\frac{2\pi}{3}}$$

Ejemplo 7.2

Expresar la señal $x(t)$, con frecuencia fundamental ω_1 , en forma exponencial, como en la Ec. (7.4), y determine sus coeficientes a_k .

- a) $x(t) = \cos(\omega_1 t)$
- b) $x(t) = \cos(\omega_1 t) + \sin(2\omega_1 t)$

Solución

- a) La señal $x(t)$ se puede expresar en términos de exponenciales complejas quedando en la forma de la Ec. (7.4) como

$$x(t) = \frac{1}{2} e^{j\omega_1 t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_1 t}$$

ya que la frecuencia fundamental es ω_1 , entonces $k = \pm 1$ y los coeficientes a_k de las exponenciales se obtienen de manera directa como

$$a_{-1} = a_1 = \frac{1}{2}$$

- b) La señal $x(t)$ en este caso queda en términos de exponenciales complejas como

$$x(t) = \frac{1}{2} e^{j\omega_1 t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_1 t} + \frac{1}{j2} e^{j2\omega_1 t} - \frac{1}{j2} e^{-j2\omega_1 t}$$

ya que la frecuencia fundamental de $x(t)$ es ω_1 , los coeficientes a_k son

$$a_{-1} = a_1 = \frac{1}{2}$$

y

$$a_{-2}^* = a_2 = \frac{1}{j2}$$

Ejemplo 7.3

Expresar la señal $x(t)$ en términos de exponenciales complejas, considerando que $\omega_2 = 2\omega_1$ y determine los coeficientes a_k de la serie exponencial, la Ec. (7.4).

$$x(t) = 2 + \cos\left(\omega_1 t + \frac{\pi}{4}\right) + 3 \sin(\omega_2 t) + 3 \cos(\omega_2 t)$$

Solución

$x(t)$ se puede expresar en forma exponencial como

$$\begin{aligned} x(t) &= 2 + \frac{1}{2} e^{j(\omega_1 t + \frac{\pi}{4})} + \frac{1}{2} e^{-j(\omega_1 t + \frac{\pi}{4})} + \frac{3}{2j} e^{j2\omega_1 t} - \frac{3}{2j} e^{-j2\omega_1 t} + \frac{3}{2} e^{j2\omega_1 t} + \frac{3}{2} e^{-j2\omega_1 t} \\ &= 2 + \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{4}} e^{j\omega_1 t} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{-j\omega_1 t} + \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2j}\right) e^{j2\omega_1 t} + \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2j}\right) e^{-j2\omega_1 t} \end{aligned}$$

En este caso los coeficientes de las exponenciales son

$$a_0 = 2$$

$$a_{-1}^* = a_1 = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$a_{-2}^* = a_2 = \frac{3}{2} + \frac{3}{2j}$$

Observe que el subíndice k de los coeficientes corresponde al múltiplo de la frecuencia fundamental.

Ejemplo 7.4

Considerando el ejemplo 7.1 en donde la respuesta al impulso corresponde a un sistema de primer orden, cuyo modelo, que relaciona la entrada con la salida es

$$\frac{dy}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

Determine la respuesta del sistema a la entrada $x(t) = e^{j\frac{2\pi}{3}t}$ en donde $\omega_0 = \frac{2\pi}{3} \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$

Solución

De acuerdo con la característica de las funciones propias, la respuesta se obtiene de la Ec. (7.5), en la cual se requiere determinar el valor propio $H(s)|_{s=\pm j\omega_0}$ que se interpreta como la función del sistema evaluada a la frecuencia de la señal de entrada $j\omega_0$.

Del ejemplo 7.1, se obtuvo

$$\begin{aligned}
 H(s)|_{s=j\omega_0} &= \frac{1}{2 + j\frac{2\pi}{3}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2^2 + \left(\frac{2\pi}{3}\right)^2} e^{j \tan^{-1}\left(\frac{\pi}{3}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{2^2 + \left(\frac{2\pi}{3}\right)^2}} e^{-j \tan^{-1}\left(\frac{\pi}{3}\right)}
 \end{aligned}$$

Aplicando la Ec. (7.5) se obtiene la respuesta permanente $y(t)$ con $k = 1$, ya que solo se tiene una exponencial

$$y(t) = a_1 H(s_1) e^{j\omega_0 t}$$

$$\begin{aligned}
 y(t) = H(s_1)|_{s_1=j\omega_0} e^{j\frac{2\pi}{3}t} &= \frac{1}{\sqrt{2^2 + \left(\frac{2\pi}{3}\right)^2} e^{j \tan^{-1}\left(\frac{\pi}{3}\right)}} e^{-j\frac{2\pi}{3}t} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2^2 + \left(\frac{2\pi}{3}\right)^2}} e^{-j \tan^{-1}\left(\frac{\pi}{3}\right)} e^{j\frac{2\pi}{3}t}
 \end{aligned}$$

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{2^2 + \left(\frac{2\pi}{3}\right)^2}} e^{j\left(\frac{2\pi}{3}t - \tan^{-1}\frac{\pi}{3}\right)}$$

Como se observa, si una señal periódica se expresa en términos de exponenciales complejas, la respuesta del sistema sigue siendo la misma señal de entrada alterada en su magnitud y fase por el valor propio $H(s)|_{s=j\frac{2\pi}{3}}$.

Ejemplo 7.5

Considere ahora el sistema de segundo orden dado por

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = 5x(t)$$

Si la entrada $x(t)$ es del tipo sinusoidal, determine la respuesta del sistema a esta entrada.

$$x(t) = \cos\left(\sqrt{3}t + \frac{\pi}{8}\right)$$

Solución

Primero se obtiene el valor propio. Otra forma de determinar la función de transferencia del sistema, es considerando una función exponencial compleja de la forma e^{st} , la Ec. (7.5) y sus derivadas, y sustituirlas en la ecuación diferencial.

$$y(t) = H(s) e^{st}$$

$$\frac{dy}{dt} = H(s) s e^{st}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = H(s) s^2 e^{st}$$

la respuesta y sus derivadas en la ecuación que describe al sistema queda como

$$H(s) s^2 e^{st} + 2H(s) s e^{st} + 5H(s) e^{st} = 5e^{st}$$

A partir de la cual se obtiene fácilmente la función del sistema

$$H(s) e^{st} (s^2 + 2s + 5) = 5e^{st}$$

$$H(s) = \frac{5}{s^2 + 2s + 5}$$

Si sustituimos $s = j\omega$ obtenemos

$$H(j\omega) = \frac{5}{(j\omega)^2 + 2j\omega + 5} = \frac{5}{(5 - \omega^2) + j2\omega}$$

A partir de la cual se calcula el valor propio considerando la frecuencia de la señal de entrada $\omega_0 = \sqrt{3}$.

$$H(j\omega)|_{\omega_0 = \pm\sqrt{3}} = \frac{5}{4} e^{\mp j\frac{\pi}{3}}$$

Los coeficientes espectrales se obtienen al expresar $x(t)$ en forma exponencial, resultando

$$a_{-1} = a_1 = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{8}}$$

De manera que la respuesta permanente $y(t)$ con $k = -1$ y $k = 1$ es

$$\begin{aligned} y(t) &= a_{-1} H(-jk\omega_0) e^{-jk\omega_0 t} + a_1 H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \\ &= \left(\frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{8}} \right) \left(\frac{5}{4} e^{j\frac{\pi}{3}} \right) \left(e^{-j\sqrt{3}t} \right) + \left(\frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{8}} \right) \left(\frac{5}{4} e^{-j\frac{\pi}{3}} \right) \left(e^{j\sqrt{3}t} \right) \\ &= \frac{5}{4} \left(\frac{1}{2} e^{-j[\sqrt{3}t + \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{3}]} + \frac{1}{2} e^{j[\sqrt{3}t + \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{3}]} \right) \end{aligned}$$

Obteniendo finalmente

$$\begin{aligned}y(t) &= \frac{5}{4} \cos\left(\sqrt{3}t + \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{5}{4} \cos\left(\sqrt{3}t - \frac{5\pi}{24}\right)\end{aligned}$$

Observe que la respuesta $y(t)$ se puede obtener de manera directa multiplicando y sumando la magnitud y el ángulo, respectivamente, del valor propio con la entrada del sistema.

7.3

Serie de Fourier de señales periódicas continuas

Como se ha visto, las señales exponenciales complejas permiten determinar la respuesta permanente de un sistema LIT de manera muy fácil, prácticamente, mediante la determinación del valor propio del sistema.

Un gran número de señales periódicas también se pueden representar mediante una suma de exponenciales complejas relacionadas armónicamente, como en la Ec. (7.4), la cual se vuelve a plantear y se le nombra *Ecuación de Síntesis* o *Serie Exponencial de Fourier*.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t}$$

siendo la respuesta a esta entrada

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H(s_k) e^{jk\omega_0 t}$$

en donde $H(s_k) = H(s)|_{s=jk\omega_0}$

Los coeficientes a_k pueden ser complejos, de manera que se expresan en términos de su magnitud y su argumento como

$$a_k = A_k e^{j\theta_k}$$

entonces, la respuesta, la Ec. (7.5), a la entrada expresada en la Ec. (7.4) es

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k H(s_k) e^{jk\omega_0 t} e^{j\theta_k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k H(s_k) e^{j(k\omega_0 t + \theta_k)} \quad (7.6)$$

Ya que los coeficientes a_k de la señal de entrada están presentes tanto en la señal de entrada como en la señal de salida, si se conocen se puede expresar la señal de entrada en forma exponencial y con ellos determinar la respuesta permanente del sistema. A estos coeficientes se le llama *coeficientes espectrales* o *coeficientes de la Serie exponencial de Fourier*, y su valor está asociado con la k -ésima frecuencia de la señal de entrada.

De lo anterior, lo que procede ahora es obtener una expresión para determinar los a_k . Para ello, se multiplica la señal de entrada, Ec. (7.4) por una exponencial compleja de la forma $e^{-jm\omega_0 t}$ y se integra en un periodo ambos lados de la ecuación

$$\begin{aligned} \int_0^T x(t) e^{-jm\omega_0 t} dt &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_0^T e^{jk\omega_0 t} e^{-jm\omega_0 t} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_0^T e^{j\omega_0 t(k-m)} dt \end{aligned} \quad (7.7)$$

Evaluando primero la integral del lado derecho se tiene,

$$\int_0^T e^{j\omega_0 t(k-m)} dt = \int_0^T \cos(\omega_0 t[k-m]) + j \sin(\omega_0 t[k-m]) dt = \begin{cases} T & k = m \\ 0 & k \neq m \end{cases} \quad (7.8)$$

por lo que la Ec. (7.7) queda como

$$\int_0^T x(t) e^{-jm\omega_0 t} dt = \begin{cases} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k T & k = m \\ 0 & k \neq m \end{cases}$$

pero $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k T = a_m T$ cuando $k = m$, quedando finalmente como

$$\int_0^T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = a_k T$$

y despejando de aquí a_k

$$a_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (7.9)$$

A esta expresión se le llama *Ecuación de Análisis*, con la cual se determinan los coeficientes espectrales de la Serie de Fourier. El caso específico cuando $k = 0$, es

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

que como se observa, es el valor promedio de la señal $x(t)$. Las ecuaciones de Síntesis y de Análisis, las Ecs. (7.4) y (7.9), respectivamente, forman el par de ecuaciones que definen la Serie Exponencial de Fourier en TC en términos de la frecuencia fundamental ω_0 .

Desarrollando la Ecuación de Síntesis queda

$$x(t) = \dots + a_{-2} e^{-j2\omega_0 t} + a_{-1} e^{-j\omega_0 t} + a_0 + a_1 e^{j\omega_0 t} + a_2 e^{j2\omega_0 t} + \dots$$

agrupando los términos de la misma frecuencia se obtienen las componentes armónicas

a_0	Componente de directa
$a_{-1} e^{-j\omega_0 t} + a_1 e^{j\omega_0 t}$	Componentes de la primera armónica a la frecuencia ω_0
$a_{-2} e^{-j2\omega_0 t} + a_2 e^{j2\omega_0 t}$	Componentes de la segunda armónica a la frecuencia $2\omega_0$
...	
$a_{-k} e^{-jk\omega_0 t} + a_k e^{jk\omega_0 t}$	Componentes de la k -ésima armónica a la frecuencia $k\omega_0$

que volviendo a poner en forma de sumatoria y si se cumple que $a_k = a_{-k}^*$, (a_{-k} es el conjugado complejo de a_k) queda como

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k e^{jk\omega_0 t} + a_{-k} e^{-jk\omega_0 t}] = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k e^{jk\omega_0 t} + a_k^* e^{-jk\omega_0 t}] \quad (7.10)$$

Expresión que adquiere la forma de cosenos, además, ya que los coeficientes pueden ser complejos $a_k = A_k e^{j\theta_k}$, como en el caso del ejemplo 7.3, la Ec. (7.10) se puede expresar como

$$x(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k) \quad (7.11)$$

Esta es una expresión alternativa a la serie exponencial de Fourier expresada en términos de cosenos.

Podemos modificar esta forma, usando la identidad trigonométrica para el coseno de una suma de argumentos y obtener

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| [\cos(\theta_k) \cos(k\omega_0 t) - \sin(\theta_k) \sin(k\omega_0 t)] \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [b_k \cos(k\omega_0 t) - c_k \sin(k\omega_0 t)] \end{aligned}$$

en donde

$$\begin{aligned} b_k &= 2|a_k| \cos(\theta_k) \\ &\text{y} \\ c_k &= 2|a_k| \sin(\theta_k) \end{aligned} \quad (7.12)$$

que también se pueden expresar como

$$\begin{aligned} \frac{b_k}{2} &= \operatorname{Re}\{a_k\} \\ \frac{c_k}{2} &= \operatorname{Im}\{a_k\} \end{aligned} \quad (7.13)$$

Ahora bien, la Ec. (7.9) la podemos expresar como

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) [\cos(k\omega_0 t) - j \sin(k\omega_0 t)] dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cos(k\omega_0 t) dt - j \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \sin(k\omega_0 t) dt \end{aligned}$$

en donde,

$$Re\{a_k\} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cos(k\omega_0 t) dt$$

y

$$Im\{a_k\} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \sin(k\omega_0 t) dt$$

que al relacionarlas con la Ec. (7.13)

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(k\omega_0 t) dt, \quad c_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(k\omega_0 t) dt \quad (7.14)$$

es decir, $b_k = 2Re\{a_k\}$, $c_k = 2Im\{a_k\}$, de manera que

$$a_k = \frac{1}{2}(b_k - jc_k), \quad a_{-k} = \frac{1}{2}(b_k + jc_k) \quad (7.15)$$

Observe que para $k = 0$, $b_0 = 2a_0$ y $c_0 = 0$. Por lo tanto,

$$x(t) = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(k\omega_0 t) \quad (7.16)$$

La Ec. (7.16) representa la serie de Fourier generalizada o *Serie Trigonométrica de Fourier*, sin embargo, para el análisis de sistemas y señales es más común utilizar la serie exponencial de Fourier, ya que permite una interpretación directa de las características de amplitud y fase de las componentes de la serie a diferentes frecuencias.

Los coeficientes a_k permiten determinar el espectro discreto de $x(t)$, el cual se representa con dos gráficas, la de magnitud $|a_k| = A_k$ vs k , y la de fase $\angle a_k = \theta_k$ vs k , o bien con la parte real $Re\{a_k\}$ y la parte imaginaria $Im\{a_k\}$ vs k donde k representa la frecuencia normalizada.

Convergencia de las Series de Fourier

La mayoría de las señales periódicas de interés en la ingeniería pueden aproximarse y ser expresadas mediante las series de Fourier. Las condiciones que debe de cumplir $x(t)$ se manifiestan mediante las llamadas condiciones de Dirichlet, las cuales básicamente establecen que

- Si $x(t)$ es periódica, en cualquier periodo debe ser absolutamente integrable.
- La señal $x(t)$ debe tener un número finito de máximos y mínimos en un intervalo de tiempo finito.
- La señal $x(t)$ debe tener un número finito de discontinuidades (saltos) en un intervalo de tiempo finito.

Las señales que se abordan en este libro, cumplen cabalmente con estas condiciones.

7.4

Propiedades de la Serie de Fourier

En la Tabla 7.1 se presentan las propiedades de la Serie de Fourier, con las cuales se facilita el cálculo de los coeficientes en lugar de aplicar directamente la ecuación de análisis.

Propiedad	Señal Periódica	Coefficiente de la Serie Exponencial de Fourier
	$\left. \begin{matrix} x(t) \\ y(t) \end{matrix} \right\} \text{ Periódicas con Periodo } T \text{ y}$ <p>frecuencia fundamental $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$</p>	a_k b_k
Linealidad	$Ax(t) + By(t)$	$Aa_k + Bb_k$
Desplazamiento en el tiempo	$x(t - t_0)$	$a_k e^{-jk\omega_0 t_0} = a_k e^{-jk(2\pi/T)t_0}$
Desplazamiento en frecuencia	$e^{jM\omega_0 t} x(t)$	a_{k-M}
Conjugación	$x^*(t)$	a_{-k}^*
Inversión en el tiempo	$x(-t)$	a_{-k}
Escalamiento en el tiempo	$x(\alpha t), \alpha > 0$ (Periódica con periodo T/α)	a_k
Convolución periódica	$\int_0^T x(\tau) y(t - \tau) d\tau$	$T a_k b_k$
Multiplicación	$x(t) y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l}$
Diferenciación	$\frac{dx(t)}{dt}$	$jk\omega_0 a_k = jk \frac{2\pi}{T} a_k$
Integración	$\int_0^T x(t) dt$ (solo si $a_0 = 0$)	$\left(\frac{1}{jk\omega_0}\right) a_k = \left(\frac{1}{jk(2\pi/T)}\right) a_k$

Propiedad	Señal Periódica	Coefficiente de la Serie Exponencial de Fourier
Simetría conjugada para señales reales	$x(t)$ real	$\left\{ \begin{array}{l} a_k = a_{-k}^* \\ \text{Re}\{a_k\} = \text{Re}\{a_{-k}\} \\ \text{Im}\{a_k\} = -\text{Im}\{a_{-k}\} \\ a_k = a_{-k} \\ \angle a_k = -\angle a_{-k} \end{array} \right.$
Señal real y par	$x(t)$ real y par	a_k real y par
Señal real e impar	$x(t)$ real e impar	a_k imaginaria e impar
Descomposición par e impar de señales reales	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Par}\{x(t)\} \quad [x(t) \text{ real}] \\ \text{Impar}\{x(t)\} \quad [x(t) \text{ real}] \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Re}\{a_k\} \\ j\text{Im}\{a_k\} \end{array} \right.$
Relación de Parseval para señales periódicas	$\frac{1}{T} \int_0^T x(t) ^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k ^2$	

Tabla 7.1: Propiedades de la Serie Continua de Fourier

En los ejemplos 7.2 y 7.3 los coeficientes se obtuvieron de manera directa ya que las señales fueron del tipo sinusoidal. En los ejemplos siguientes se utilizará la ecuación de Análisis y las Propiedades de la Serie de Fourier para determinar los coeficientes espectrales.

Ejemplo 7.6

Considere la señal cuadrada $x(t)$ con periodo T y ancho del pulso $2T_1$, mostrada en la figura 7.1

Determine

- Los coeficientes de la serie exponencial de Fourier en términos de T y T_1 .
- Los coeficientes con $T = 4$, con $T_1 = 1$ tomando en cuenta hasta $k = \pm 10$.
- La expresión de $x(t)$ en la serie de Fourier en términos de cosenos.

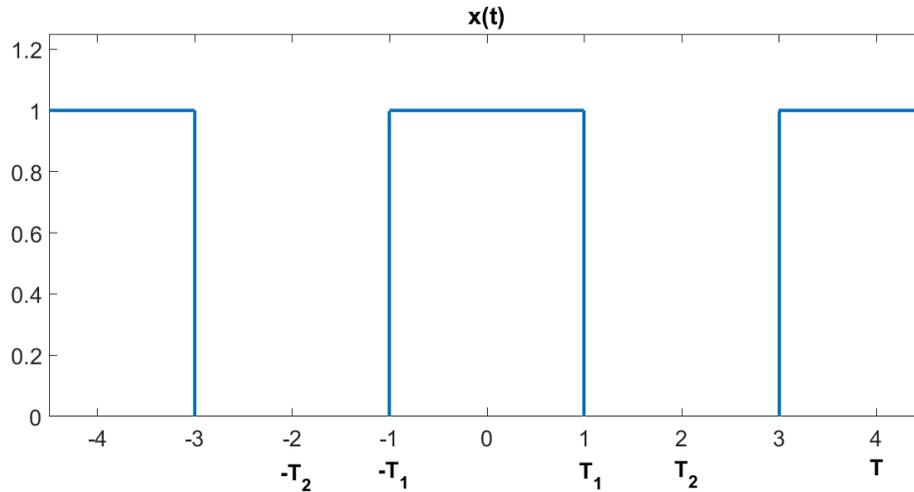


Figura 7.1: Señal periódica cuadrada con periodo T

```
% Figura 7.1 Senal cuadrada periodica
t = -4.5:.001:4.5;
y = square(2*pi*.25*(t+1));
plot(t,y,'LineWidth',2)
axis([-4.5 4.5 0 1.25]); title('x(t)')
ejey(0:.01:1.25);
text(.9,-.1,'T1'); text(-1.1,-.1,'-T1');
text(1.9,-.1,'T2'); text(-2.1,-.1,'-T2');
text(4,-.1,'T'); text(-4.1,-.1,'-T')
```

Solución

- a) El periodo de la señal $x(t)$ es de 0 a T , sin embargo por facilidad, también se puede definir un periodo en el intervalo de $-T_2$ a T_2 como

$$x(t) = \begin{cases} 1 & -T_1 < t < T_1 \\ 0 & \text{otro valor} \end{cases}$$

Esto permite determinar los coeficientes de una forma más fácil, utilizando la Ecuación de Análisis, Ec. (7.9). Con $k = 0$ se obtiene el valor promedio o componente de directa de la señal.

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} dt = \frac{2T_1}{T}$$

Con $k \neq 0$ se obtiene el resto de los coeficientes de las armónicas de la señal

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t} dt = -\frac{1}{T} \frac{e^{-jk\omega_0 t}}{k\omega_0} \Big|_{-T_1}^{T_1}$$

$$a_k = -\frac{1}{T} \left(\frac{e^{-jk\omega_0 T_1} - e^{jk\omega_0 T_1}}{jk\omega_0} \right) = \frac{2}{k\omega_0 T} \sin(k\omega_0 T_1)$$

b) Si $T = 4$ y $T_1 = 1$, $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$ y los coeficientes quedan como

$$a_0 = \frac{1}{2} \quad k = 0$$

y

$$a_k = \frac{1}{k\pi} \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) \quad k \neq 0$$

Evaluando para los 10 primeros coeficientes positivos y negativos

$$a_0 = \frac{1}{2}$$

$$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{\pi}$$

$$a_3 = a_{-3} = -\frac{1}{3\pi}$$

$$a_5 = a_{-5} = \frac{1}{5\pi}$$

$$a_7 = a_{-7} = -\frac{1}{7\pi}$$

$$a_9 = a_{-9} = \frac{1}{9\pi}$$

...

el resto se obtiene de manera directa.

c) Una vez conociendo los coeficientes se puede expresar la señal $x(t)$ en términos de cosenos, mediante la Ec. (7.11).

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \frac{2}{3\pi} \cos\left(\frac{3\pi}{2}t\right) + \frac{2}{5\pi} \cos\left(\frac{5\pi}{2}t\right) - \frac{2}{7\pi} \cos\left(\frac{7\pi}{2}t\right) + \frac{2}{9\pi} \cos\left(\frac{9\pi}{2}t\right) + \dots$$

Ejemplo 7.7

Considerando la señal cuadrada $x(t)$ del ejemplo 7.6, determine con MATLAB:

- Los coeficientes de la serie exponencial de Fourier con $T = 4$ y $T = 8$, si el ancho del pulso es $2T_1 = 2$. Evalúe hasta $k = \pm 10$ y bosqueje el espectro discreto de la señal $x(t)$.
- La aproximación de $x(t)$ con las primeras 6, 15 y 30 armónicas.

Solución

a) La señal $x(t)$ se vuelve a graficar en la figura 7.2, ahora en el intervalo de $0 < t < T$ con $T_1 = 1$.

En la figura 7.3 están graficados los coeficientes de la Serie de Fourier, los cuales como se determinó en el ejemplo 7.6, son reales. En la figura 7.4 se presentan los coeficientes para la misma señal con $T = 8$ y $T_1 = 1$.

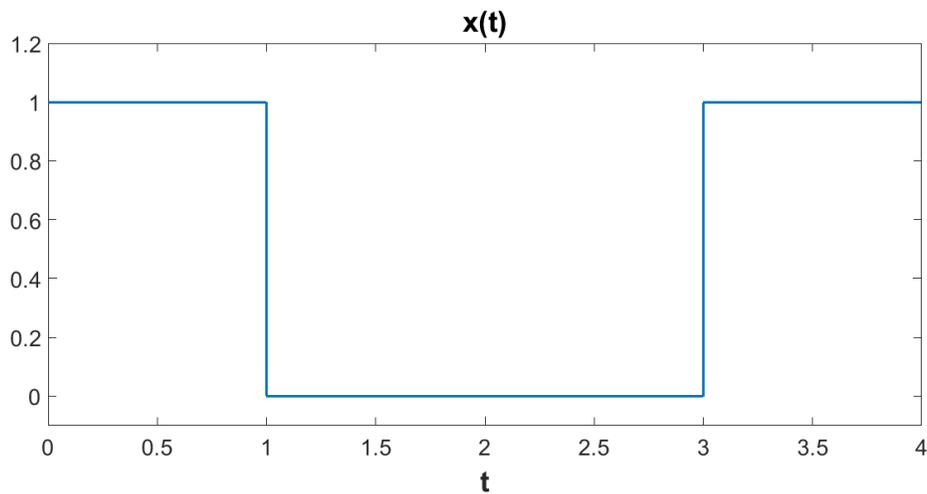


Figura 7.2: Señal periódica cuadrada con $T = 4$

Como se observa en ambas figuras, conforme aumenta el periodo de la señal, aumentan las componentes espectrales en un mismo intervalo de frecuencia, ya que $k\omega = k2\pi/T$. Esta es una consideración de gran importancia cuando se aborda la Transformada de Fourier para señales aperiódicas.

Los coeficientes proporcionados por MATLAB para la señal cuadrada con $T = 4$ son los que se presentan en el cuadro de resultados, el valor intermedio es $a_0 = 0.5$, a partir del cual los demás son simétricos, observándose que corresponden a los obtenidos en el ejemplo 7.6.

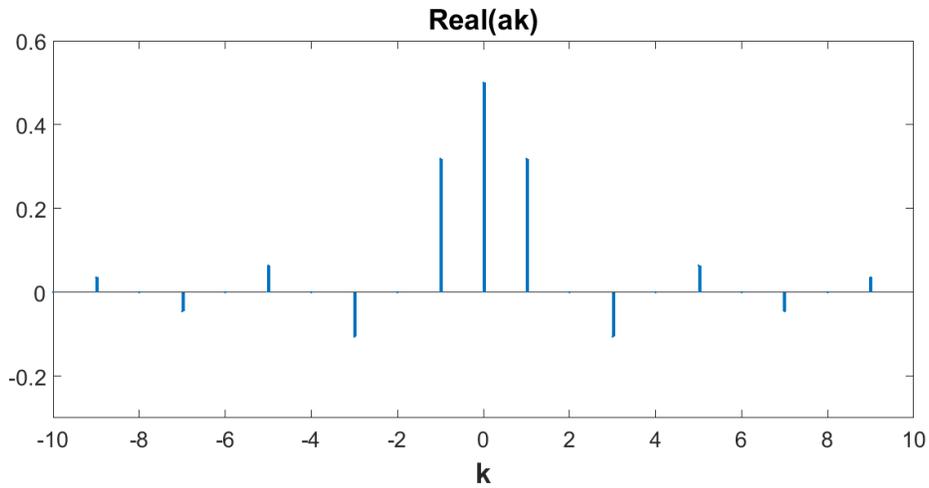


Figura 7.3: Espectro de la Señal periódica $x(t)$ con $T=4$

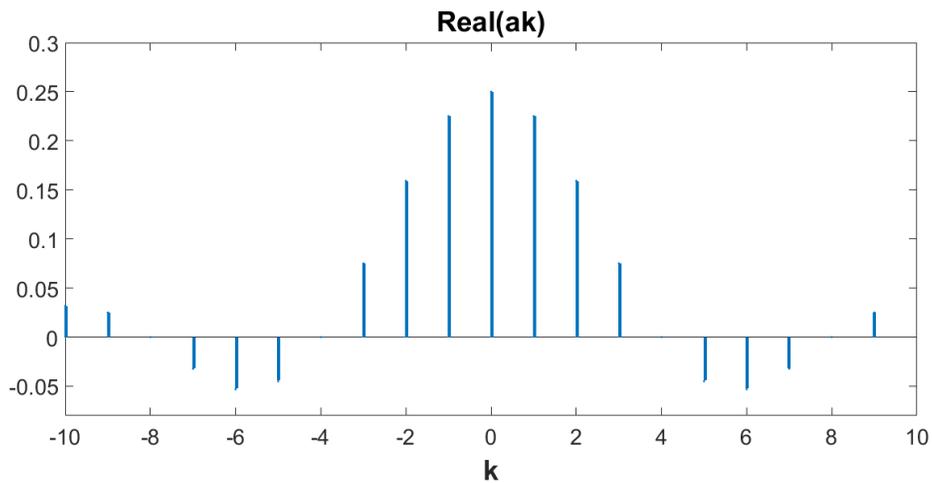


Figura 7.4: Espectro de la Señal periódica $x(t)$ con $T = 8$

```
% Ejemplo 7.7 RESULTADOS
ans =
Columns 1 through 7
-0.0289 0.0000 0.0354 -0.0000 -0.0455 0.0000 0.0637
Columns 8 through 14
0.0000 -0.1061 0.0000 0.3183 0.5000 0.3183 -0.0000
Columns 15 through 21
-0.1061 -0.0000 0.0637 -0.0000 -0.0455 0.0000 0.0354
```

```
%Ejemplo 7.7 Figura 7.3 y 7.4 Senal x(t) y Coeficientes de la serie de Fourier
T=4; %periodo de la senal
ks=10;
ti=0; dt=.001; ts=T-dt;
t=ti:dt:ts;
ns=length(t);
```

```

x=(.5*square(2*pi*(t+1)/T))+.5;
set(gcf,'defaultlinewidth',2);
plot(t,x); axis([0 4 -1 max(x)*1.2]); line(0:.1:4,0)
xlabel('t');title('x(t)');
Xf=(1/ns)*fftshift(fft(x));%Desplaza la componente de DC al centro del espectro
n=ceil(ns/2);
real(Xf(n-ks:n+ks))% ks Coeficientes de la SF
k=t-T/2;
figure(2)
set(gcf,'defaultlinewidth',2);
stem(k(n-ks:n+ks)/dt,real(Xf(n-ks:n+ks)),'.');
line(-10:.1:10,0)
xlabel('k'); title('Real(ak)')
axis([-10 10 -3 .6])

```

b) Una vez que se tienen los coeficientes, se aplican a la Ecuación de Síntesis para reconstruir la señal. La figura 7.5 muestra la señal reconstruida para diferentes valores de k .

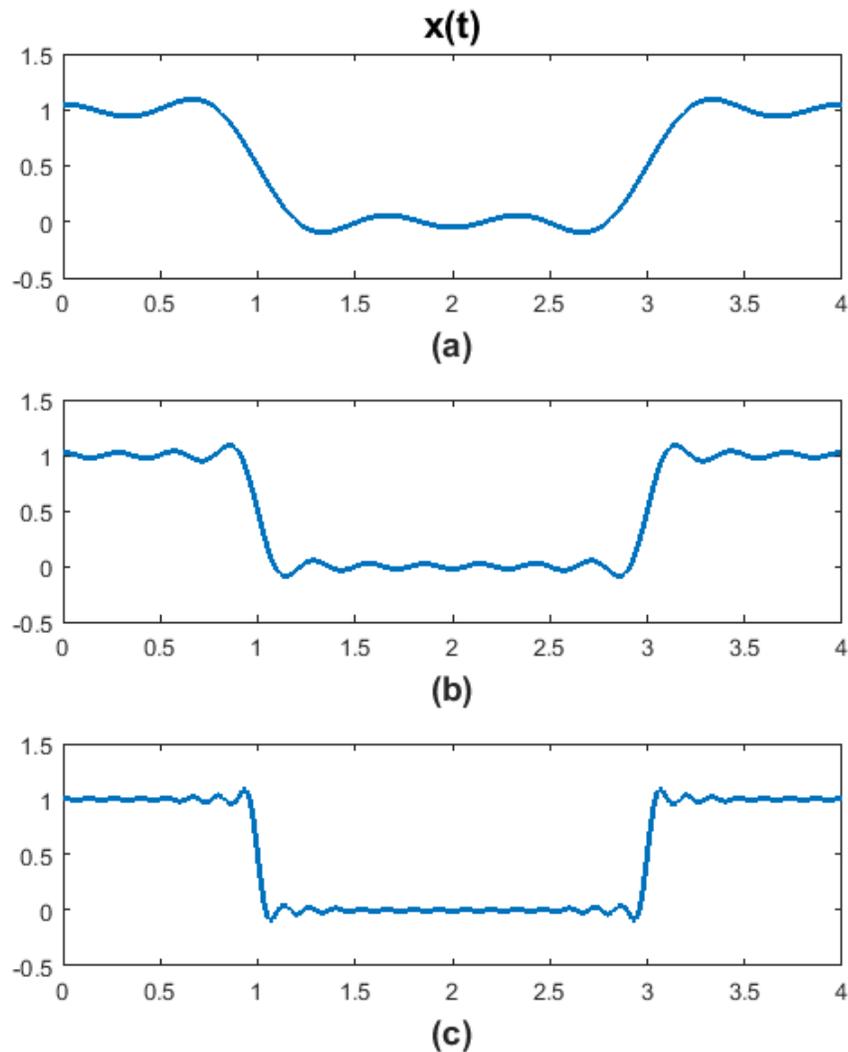


Figura 7.5: Señal reconstruida a partir de los coeficientes de Fourier, para (a) $k = 6$, (b) $k = 15$ y (c) $k = 30$

```

%Figura 7.5 Aproximacion a x(t) con los coeficientes ak
ks=30; T=4; %No de coeficientes a considerar para regenerar x(t)
ti=0; dt=.001; ts=T-dt;
t=ti:dt:ts;
ns=length(t);
n=ceil(length(t)/2);
x=(.5*square(2*pi*(t+1)/T))+.5; %Senal x(t)
Xf=(1/ns)*fftshift(fft(x)); %FFT de x(t)
ak=Xf(n-ks:n+ks);
ak1=fftshift(ak) %Coeficientes iniciando en ao
x1=[];
x1=ak1(1);
for k=2:ks
x1=x1+2*abs(ak1(k))*cos((k-1)*2*pi*t/4)+angle(ak1(k));
if k==6 ;x6=x1;end
if k==15 ;x15=x1;end
if k==30 ;x30=x1;end
end
subplot(311),plot(t,x6); xlabel(' (a) ');title('x(t)')
subplot(312),plot(t,x15); xlabel(' (b) ')
subplot(313),plot(t,x30); xlabel(' (c) ')

```

Ejemplo 7.8

Considere ahora la señal $x_1(t) = x(t - 1)$ con $T = 4$ donde $x_1(t)$ es la señal del ejemplo 7.7 pero desplazada una unidad. Determine los coeficientes de la serie exponencial de Fourier y grafique el espectro discreto de la señal. La señal $x_1(t)$ se muestra en la figura 7.6.

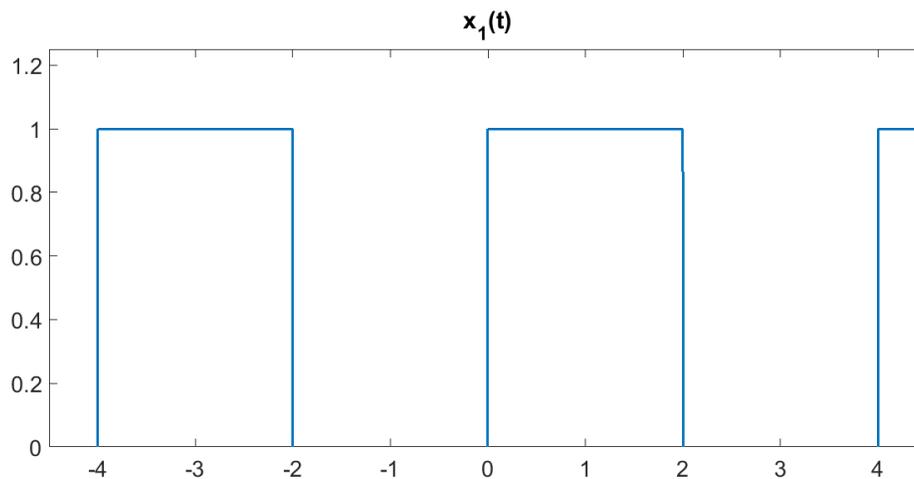


Figura 7.6: Señal periódica desplazada $x_1(t) = x(t - 1)$ con $T = 4$

Solución

Aplicando la propiedad de desplazamiento se obtiene que

$$x(t) \leftrightarrow a_k$$

$$x_1(t) = x(t-1) \leftrightarrow b_k = a_k e^{-jk\omega_0}$$

Es decir los coeficientes de $x_1(t)$ serán los mismos que $x(t)$ pero debido al desplazamiento, éste se ve reflejado en el espectro con un ángulo de defasamiento, esto es

$$b_0 = \frac{1}{2} \quad k = 0$$

y

$$b_k = \frac{1}{k\pi} \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) e^{-jk\frac{\pi}{2}} \quad k \neq 0$$

La magnitud de los coeficientes b_k se puede expresar en términos de la función $\text{sinc}(\theta)$ Recordando del capítulo 2 que

$$\text{sinc}(\theta) = \frac{\sin(\pi\theta)}{\pi\theta}$$

Sustituyendo $\theta = \frac{k}{2}$

$$\frac{1}{2} \text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k\pi}$$

es decir, que los coeficientes se pueden expresar como

$$b_k = \frac{1}{2} \text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) e^{-jk\frac{\pi}{2}}$$

en donde la magnitud de la función sinc corresponde a la componente de directa b_0 . En la figura 7.7 se muestra el espectro en magnitud y fase de los coeficientes b_k .

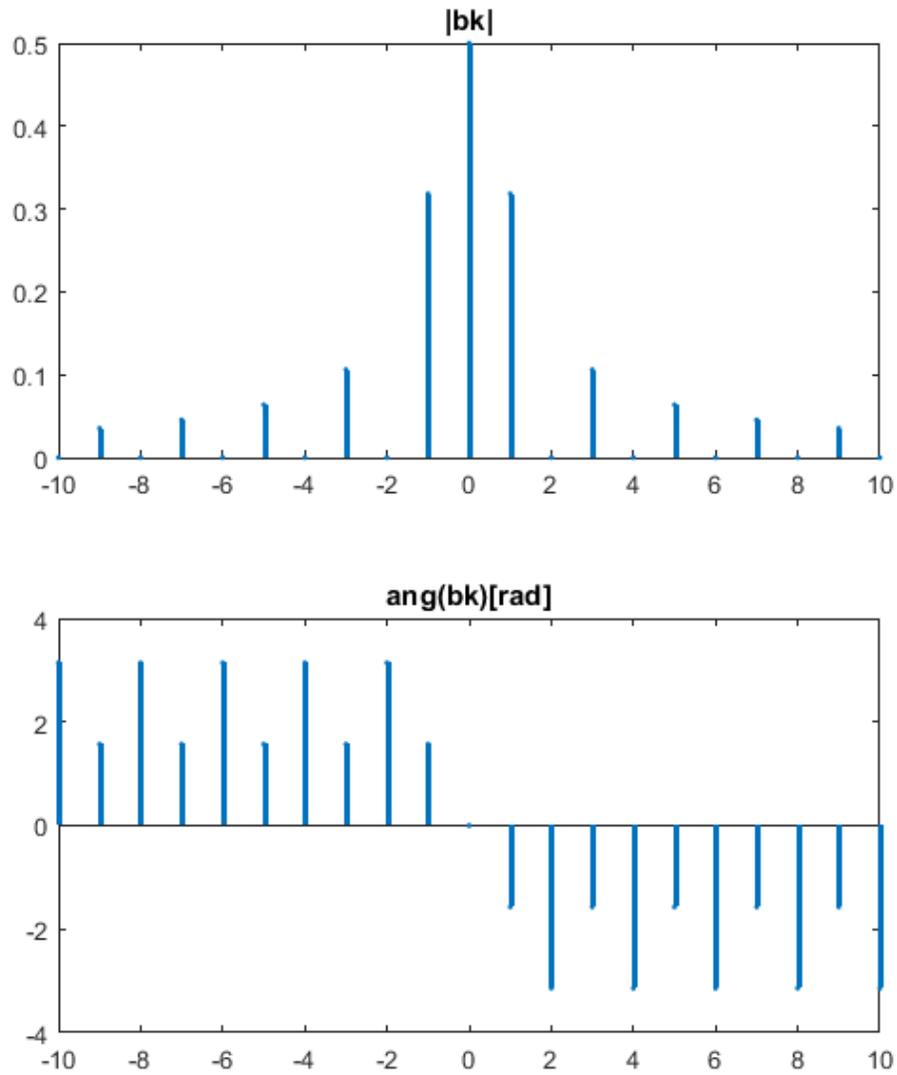


Figura 7.7: Espectro discreto en magnitud y fase de la señal $x_1(t)$ a partir de los coeficientes b_k

```

%Figura 7.7 Espectro de x1(t) con la funcion sinc
k=10;
for ks=-k:k
bk(1,ks+k+1)=.5*sinc(ks/2)*exp(-j*ks*pi/2);
end
subplot(211),stem(-k:k,abs(bk),'.'),title('|bk|')
subplot(212),stem(-k:k,angle(bk),'.'),title('ang(bk) [rad]')
line(-k:.01:k,0)

```

Ejemplo 7.9

Se tiene ahora una señal triangular $x_1(t)$ periódica con $T = 4$ mostrada en la figura 7.8. Aplique las propiedades de la Serie de Fourier y los resultados del ejemplo 7.6 para determinar los coeficientes y con ellos el espectro de la señal.

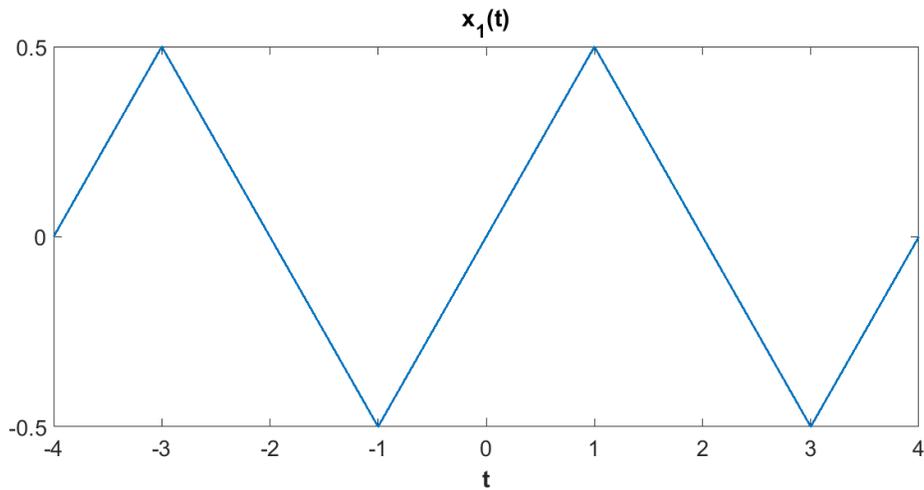


Figura 7.8: Señal triangular periódica $x_1(t)$ con $T = 4$

```
%Figura 7.8 Coeficientes para la señal triangular a partir de los coeficientes teóricos
t=-4:.1:4;
x=.5*sawtooth((2*pi*(t+1)/4),.5);
plot(t,x); xlabel('t'); title('x1(t)')
line(t,0)
line(0,-.5:.01:.5)

k=-10:10;
ak=(-j*2)./(k*pi).^2).*sin(k*pi/2);
ak1=fftshift(ak)
```

Solución

A partir del ejemplo 7.6, se observa que $x_1(t)$ está relacionada con la integral de $x(t) - \frac{1}{2}$ es decir, mediante un desplazamiento en amplitud de $x(t)$ y su integral. La señal $x'(t) = x(t) - \frac{1}{2}$ se muestra en la figura 7.9 y su integral corresponde a $x_1(t)$, la figura 7.8.

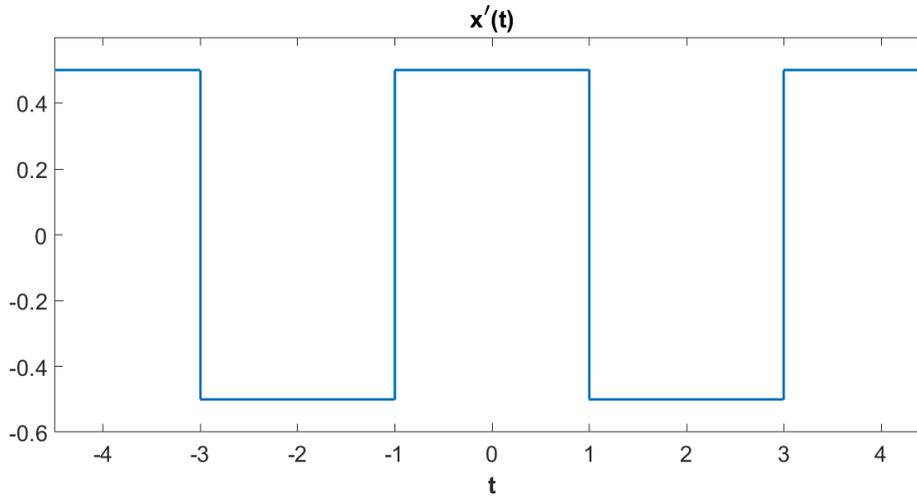


Figura 7.9: Señal cuadrada simétrica con respecto al eje vertical, su integral proporciona $x_1(t)$

Ahora bien, del ejemplo 7.6 se obtiene que

$$x'(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \begin{cases} a_k = 0 & k = 0 \\ a_k = \frac{1}{k\pi} \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) & k \neq 0 \end{cases}$$

por lo que, si se conocen los coeficientes a_k de $x'(t)$ es posible obtener los coeficientes b_k de $x_1(t)$ aplicando la propiedad de integración. Esto es, de las dos gráficas se observa que

$$x_1(t) = \int_0^T x'(t) dt$$

Por lo que, los coeficientes b_k de $x_1(t)$, son

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \begin{cases} b_0 = 0 & k = 0 \\ b_k = \frac{2}{j(k\pi)^2} \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) & k \neq 0 \end{cases}$$

Evaluando los coeficientes quedan como

$$\begin{aligned}
 b_0 &= 0 \\
 b_1 &= b_{-1}^* = -j \frac{2}{\pi^2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -j \frac{2}{\pi^2} \\
 b_3 &= b_{-3}^* = -j \frac{2}{(3\pi)^2} \sin\left(3\frac{\pi}{2}\right) = -j \frac{2}{(3\pi)^2} \\
 b_5 &= b_{-5}^* = -j \frac{2}{(5\pi)^2} \sin\left(5\frac{\pi}{2}\right) = -j \frac{2}{(5\pi)^2} \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

La aproximación a la señal triangular se puede expresar en términos de la serie de Fourier aplicando los coeficientes a la Ec. (7.11) o la Ec. (7.16), quedando

$$x_1(t) = \frac{4}{\pi^2} \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \frac{1}{3^2} \sin\left(\frac{3\pi}{2}t\right) + \frac{1}{5^2} \sin\left(\frac{5\pi}{2}t\right) - \dots \right] \quad (7.17)$$

En la expresión de la Ec. (7.17) se observa que conforme aumenta k , la magnitud de la armónica disminuye en un factor al inverso de k^2 .

Ya que los coeficientes b_k son imaginarios, el espectro de la señal se presenta únicamente con la parte imaginaria, como se muestra en la figura 7.10. Recordemos que k representa la frecuencia normalizada, es decir, $k = 1$ representa la frecuencia fundamental $\omega = 2\pi/4 = \pi/2$, $k = 2$ representa el doble de la frecuencia fundamental $2\omega = \pi$, y así sucesivamente.

La señal reconstruida con las primeras 3 y 11 armónicas es la que se presenta en la figura 7.11 en las que se observa de manera cualitativa que con muy pocas armónicas se reconstruye la señal triangular.

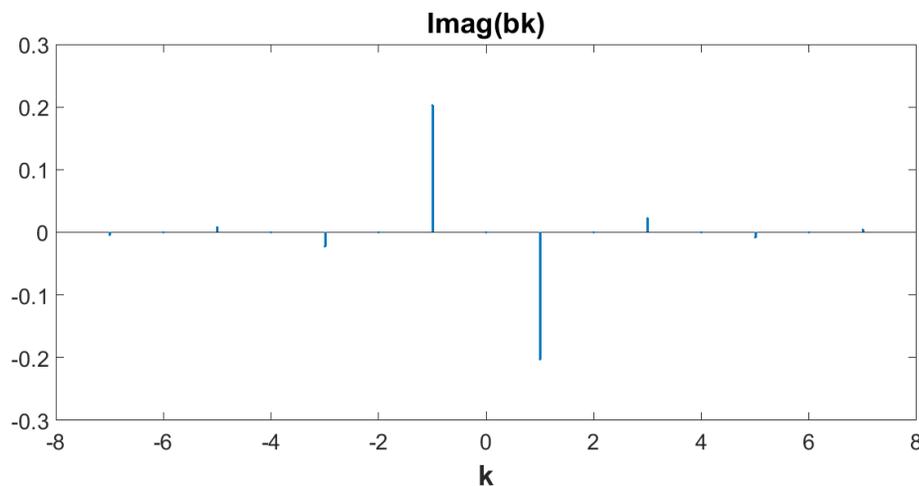


Figura 7.10: Espectro discreto de la señal triangular

```

%Figura 7.10 Coeficientes para la señal triangular a partir la fft
ks=7;
t=0:.01:4-.01;
x=.5*sawtooth((2*pi*(t+1)/4),.5);
plot(t,x)
line(t,0)
line(0,-.5:.01:.5)
figure(2)
k=-ks:ks;
ak=(1./length(t))*fft(x);
ak1=fftshift(ak);
ak(1:ks)
l2=floor(length(ak)/2);
stem(-ks:ks,imag(ak1(l2-ks+1:l2+ks+1)),'.');
line(-ks-1:.01:ks+1,0)
line(0,-.25:.01:.25)
title('Imag(bk)');xlabel('k');

```

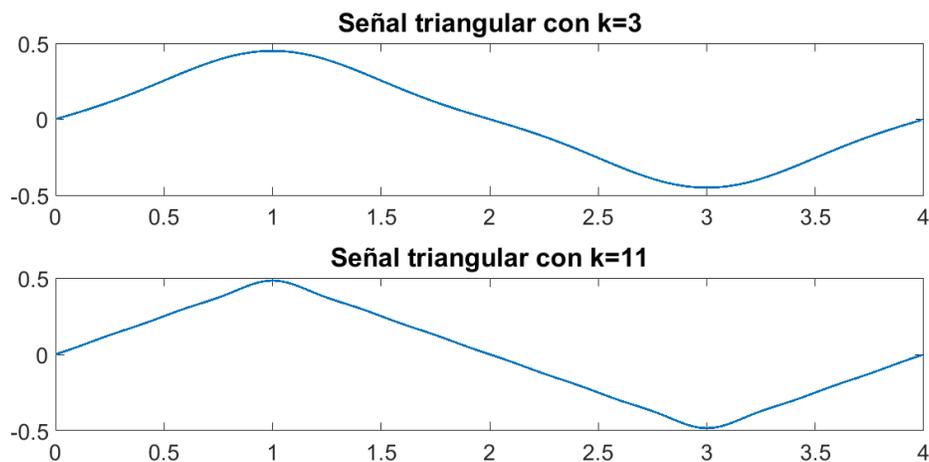


Figura 7.11: Reconstrucción de la señal triangular con $k = 3$ y $k = 11$ armónicas

```

%Figura 7.11 Reconstruccion de la señal triangular
t=0:.01:4-.01;
xr=zeros(1,length(t));
k=11;
for i=1:k
ak(i+1)
(imag(ak(i+1)))
xr=xr+(2*(-imag(ak(i+1))))*sin(i*pi*t/2));
if i==3;      xr1=xr;      end
end
subplot(211),plot(t,xr1); title('Señal triangular con k=3')
subplot(212),plot(t,xr); title('Señal triangular con k=11')

```

7.5

Transformada de Fourier

La representación de señales periódicas en el dominio de la frecuencia es a través del espectro discreto de la señal, el cual se obtuvo mediante la serie de Fourier, misma que se determinó a partir de los coeficientes de la serie considerando un intervalo de tiempo, es decir, el periodo de la señal.

Tomando como base el par de ecuaciones de la serie de Fourier, la ecuación de análisis y la de síntesis, que se repiten aquí

$$a_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (7.18)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (7.19)$$

las señales aperiódicas pueden considerarse, en cierto sentido, como señales periódicas con periodo infinito, en cuyo caso la frecuencia tiende a cero y los coeficientes a_k también tienden a cero, como es evidente en la ecuación de análisis, la Ec. (7.18). Sin embargo, si ahora se toma el producto $a_k T$, la integral de la Ec. (7.18) es diferente de cero, y ya que $T \rightarrow \infty$, $\omega_0 \rightarrow 0$, entonces $k\omega_0$ prácticamente es ahora una variable continua ω , entonces

$$a_k T = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

si se define

$$a_k T = X(jk\omega_0)$$

Entonces

$$a_k = \frac{X(jk\omega_0)}{T} = \frac{X(jk\omega_0)}{2\pi} k\omega_0 \quad (7.20)$$

Sustituyendo la Ec. (7.20) en la Ec. (7.19)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{X(jk\omega_0)}{2\pi} e^{jk\omega_0 t} k\omega_0$$

Reafirmando de nuevo, si $T \rightarrow \infty$, la sumatoria pasa a ser una integral en donde $k\omega_0 \approx \omega$ es ahora una variable continua, y la diferencial de la integral es con respecto a la frecuencia ω , quedando la ecuación de síntesis para señales aperiódicas queda como

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (7.21)$$

y la ecuación de análisis para señales aperiódicas como

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (7.22)$$

Constituyendo ambas el par de transformadas de Fourier, denotándose de manera corta como

$$x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$$

En donde la Ec. (7.22) representa la Ecuación de Análisis para señales aperiódicas, siendo $X(j\omega)$ la representación de $x(t)$ en el dominio de la frecuencia, la que se define como la Transformada de Fourier y la Ec. (7.21) define la Ecuación de Síntesis llamada la Transformada inversa de Fourier.

La ecuación de síntesis representa, al igual que con las señales periódicas, una combinación lineal y continua de exponenciales complejas.

Ya que $X(j\omega)$ es una función compleja se puede expresar como

$$X(j\omega) = \text{Re}\{X(j\omega)\} + j\text{Im}\{X(j\omega)\} = |X(j\omega)| e^{j\phi(\omega)}$$

Al igual que con el espectro discreto de señales periódicas, el espectro $X(j\omega)$ de $x(t)$ se representa con dos gráficas, la de magnitud $|X(j\omega)|$ y la de fase $\phi(\omega)$ vs ω , o bien la de la parte real $\text{Re}\{X(j\omega)\}$ y la parte imaginaria $\text{Im}\{X(j\omega)\}$ vs ω .

Existencia de la Integral de Fourier

A partir de la Serie de Fourier se obtiene la Transformada de Fourier, y ésta existe si la señal aperiódica es una señal de energía, esto es

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty \quad (7.23)$$

además, las condiciones para su existencia son similares tanto en la serie como en la transformada de Fourier, es decir, que debe satisfacer las llamadas Condiciones de Dirichlet.

- La señal $x(t)$ debe ser absolutamente integrable, $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$
- La señal $x(t)$ debe tener un número finito de máximos y mínimos en cualquier intervalo finito.
- La señal $x(t)$ debe tener un número finito de discontinuidades en cualquier intervalo finito.

Teorema de Parseval para la Transformada de Fourier

Su análisis es similar al de la potencia promedio de las señales periódicas. Se parte de la energía en una señal $x(t)$ cuando $T \rightarrow \infty$, la cual está dada por la Ec. (7.23).

Que representa la energía que disipa la señal aperiódica $x(t)$ en una resistencia de 1Ω , interpretación que se da para una señal eléctrica.

Para funciones reales $x(t)^* = x(t)$, por lo que

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)^* x(t) dt$$

aplicando la Ec. (7.21)

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)^* \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt$$

e intercambiando integrales

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)^* e^{j\omega t} dt \right] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} [x(t) e^{-j\omega t} dt]^* \right] d\omega$$

reordenando términos

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} [x(t) e^{-j\omega t}] \right]^* d\omega$$

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) X(j\omega)^* d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

De lo anterior la energía es

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega \quad (7.24)$$

La Ec. (7.24) representa el Teorema de Parseval para la Transformada de Fourier en donde

$$G(j\omega) = |X(j\omega)|^2 \quad (7.23a)$$

es el espectro de Densidad de Energía de la señal $x(t)$, y el área bajo la curva de ese espectro proporciona la energía de la señal.

El espectro de densidad de energía $G(j\omega)$ es llamado también función de densidad de energía o densidad espectral de energía de la señal $x(t)$.

7.6

Propiedades de la Transformada de Fourier

En la Tabla 7.2 se presentan las propiedades de la Transformada de Fourier, las cuales facilitan el cálculo del espectro para una amplia cantidad de señales aperiódicas.

Propiedad	Señal Aperiódica	Transformada de Fourier
	$x(t)$ $y(t)$	$X(j\omega)$ $Y(j\omega)$
Linealidad	$ax(t) + by(t)$	$aX(j\omega) + bY(j\omega)$
Desplazamiento en el tiempo	$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} X(\omega)$
Desplazamiento en frecuencia	$e^{j\omega_0 t} x(t)$	$X(j(\omega - \omega_0))$
Conjugación	$x^*(t)$	$X^*(-j\omega)$
Inversión en el tiempo	$x(-t)$	$X(-j\omega)$
Escalamiento de tiempo y de frecuencia	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$
Convolución	$x(t) * y(t)$	$X(j\omega) Y(j\omega)$
Multiplicación	$x(t) y(t)$	$\frac{1}{2\pi} X(j\omega) * Y(j\omega)$
Diferenciación en el tiempo	$\frac{d}{dt} x(t)$	$j\omega X(j\omega)$
Integración	$\int_{-\infty}^t x(t) dt$	$\frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0) \delta(\omega)$
Diferenciación en frecuencia	$tx(t)$	$j \frac{d}{d\omega} X(j\omega)$
Simetría conjugada para señales reales	$x(t)$ real	$\left\{ \begin{array}{l} X(j\omega) = X(j\omega)^* \\ \text{Re}\{X(j\omega)\} = \text{Re}\{X(-j\omega)\} \\ \text{Im}\{X(j\omega)\} = -\text{Im}\{X(-j\omega)\} \\ X(j\omega) = X(-j\omega) \\ \angle X(j\omega) = -\angle X(-j\omega) \end{array} \right.$

Propiedad	Señal Aperiódica	Transformada de Fourier
Simetría para señales reales y pares	$x(t)$ real y par	$X(j\omega)$ real y par
Simetría para señales reales e impares	$x(t)$ real e impar	$X(j\omega)$ imaginaria e impar
Descomposición par-impar de señales reales	Par $\{x(t)\}$ $[x(t)$ real]	$\text{Re}\{X(j\omega)\}$
	Impar $\{x(t)\}$ $[x(t)$ real]	$\text{Im}\{X(j\omega)\}$
Relación de Parseval para señales aperiódicas $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) ^2 d\omega$		

Tabla 7.2: Propiedades de la transformada de Fourier

Ejemplo 7.10

Determine la transformada de Fourier de la señal exponencial $x(t)$.

$$x(t) = e^{-t} u(t)$$

Solución

Aplicando la ecuación de análisis, la Ec. (7.22), se obtiene

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-t(1+j\omega)} dt \\ &= -\frac{1}{1+j\omega} e^{-t(1+j\omega)} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{1+j\omega} \end{aligned}$$

Ya que $X(j\omega)$ es una función compleja, se puede expresar la magnitud como

$$|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$$

y el ángulo como

$$\angle X(j\omega) = -\tan^{-1}(\omega)$$

El espectro de amplitud de $x(t)$ se muestra en la figura 7.12 y el de fase se presenta en la figura 7.13.

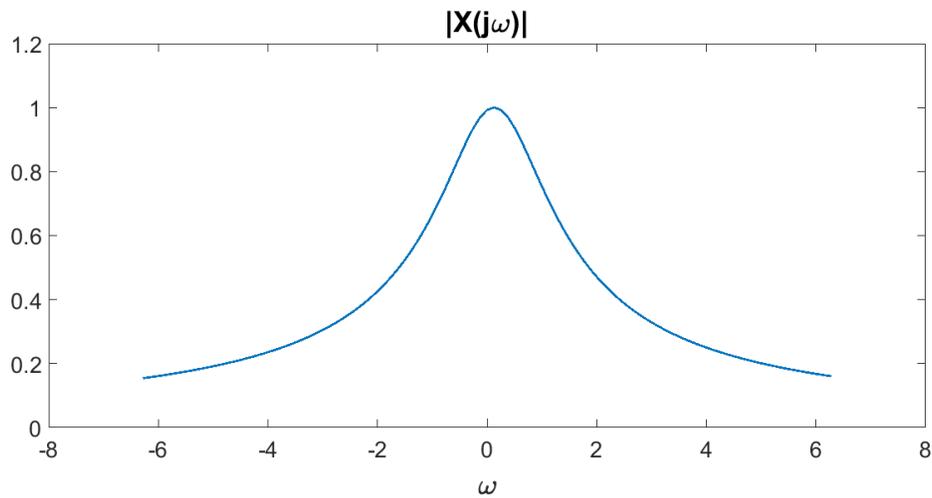


Figura 7.12: Espectro de amplitud de la señal aperiódica $x(t)$

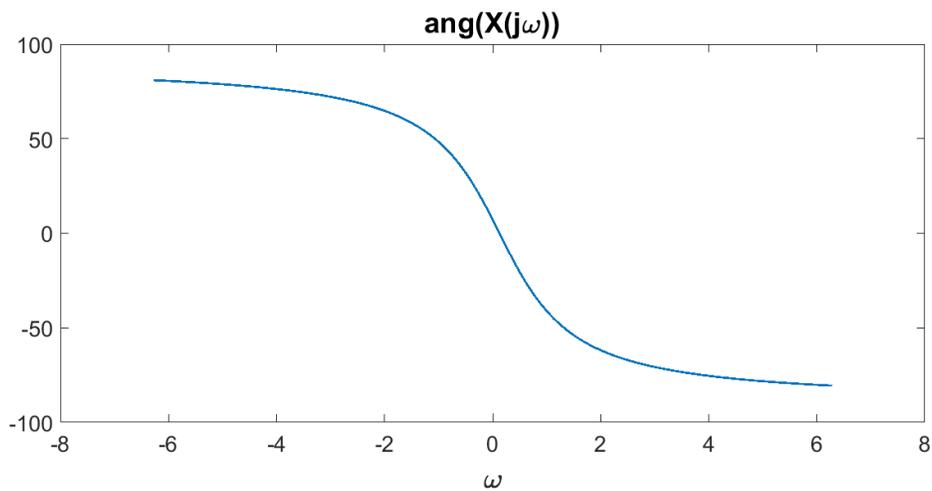


Figura 7.13: Espectro de fase de la señal aperiódica $x(t)$

Un listado truncado de los valores del espectro proporcionados con MATLAB es el siguiente, el cual incluye la magnitud y el ángulo de $X(j\omega)$ a su correspondiente frecuencia ω .

TFx =w	X(jw)	ang(X(jw))
-1.2566	0.6230	51.4521
-1.1310	0.6627	48.4847
-1.0053	0.7056	45.1229
-0.8796	0.7512	41.3111
-0.7540	0.7989	36.9940
-0.6283	0.8472	32.1239
-0.5027	0.8939	26.6722
-0.3770	0.9362	20.6452
-0.2513	0.9703	14.1006
-0.1257	0.9927	7.1589
0	1.0005	0
0.1257	0.9927	-7.1589

0.2513	0.9703	-14.1006
0.3770	0.9362	-20.6452
0.5027	0.8939	-26.6722
0.6283	0.8472	-32.1239
0.7540	0.7989	-36.9940
0.8796	0.7512	-41.3111
1.0053	0.7056	-45.1229
1.1310	0.6627	-48.4847
1.2566	0.6230	-51.4521

```
%Figura712, 713 Transformada de Fourier
k=10;
dt=.001;
t=0:dt:50-dt;
x=exp(-t);
Xf1=fftshift(dt*fft(x));
N=length(Xf1);
w1=-(2*pi/dt)+(N/2+1:N-1)*(2*pi/(N*dt));
w2=(0:(N/2))*(2*pi/(N*dt));
w=[w1 w2];
lw=(N/2)-k:(N/2)+k;
plot(w(lw),abs(Xf1(lw)));
axis([-1.3 1.3 0.5 1.1]);
title('|X(jw)|');xlabel('w');line(0,.1:1:1.1)
figure;plot(w(lw),angle(Xf1(lw))*180/pi);
axis([-1.3 1.3 -60 60]);
title('ang(X(jw))');xlabel('w');line(-8:.5:8,0);line(0,-100:2:100)
TFx=[w(lw)' abs(Xf1(lw+1))' (angle(Xf1(lw+1))*180/pi)']
```

En este ejemplo, la aproximación a $X(j\omega)$ se llevó a cabo en MATLAB a través de

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^T x(t) e^{-j\omega t} dt \approx \sum_{n=0}^{N-1} x(n\tau) e^{-j\omega n\tau}$$

donde $T = N\tau$, N es un entero y τ es un número (incremento) suficientemente pequeño para aproximar la sumatoria a la integral.

La instrucción en MATLAB que calcula la sumatoria es $\mathbf{X}=\mathbf{dt}*\mathbf{fft}(\mathbf{x})$, donde $dt = \tau$ es el intervalo entre muestras $dt = t(2) - t(1)$, \mathbf{x} es el vector que contiene $x(t)$ y evalúa la aproximación a $X(j\omega)$ mediante

$$X(j\omega) \approx X(k+1) = \tau \sum_{n=0}^{N-1} x(n\tau) e^{-j\omega_k n\tau} \quad 0 \leq k \leq N$$

y la frecuencia se calcula mediante

$$\omega_k = \begin{cases} \frac{2\pi k}{N\tau} & 0 \leq k \leq \frac{N}{2} \\ \frac{2\pi k}{N\tau} + \frac{2\pi}{\tau} & \frac{N}{2} + 1 \leq k \leq N-1 \end{cases}$$

Ejemplo 7.11

Para la señal cuadrada $x(t)$ con ancho del pulso $2T_1$, mostrada en la figura 7.14, determine

- La transformada de Fourier y grafique el espectro.
- El inciso anterior para $x_1(t) = x\left(\frac{t}{4}\right)$
- El espectro de densidad de energía de la señal $x(t)$.

$$x(t) = u(t + T_1) - u(t - T_1)$$

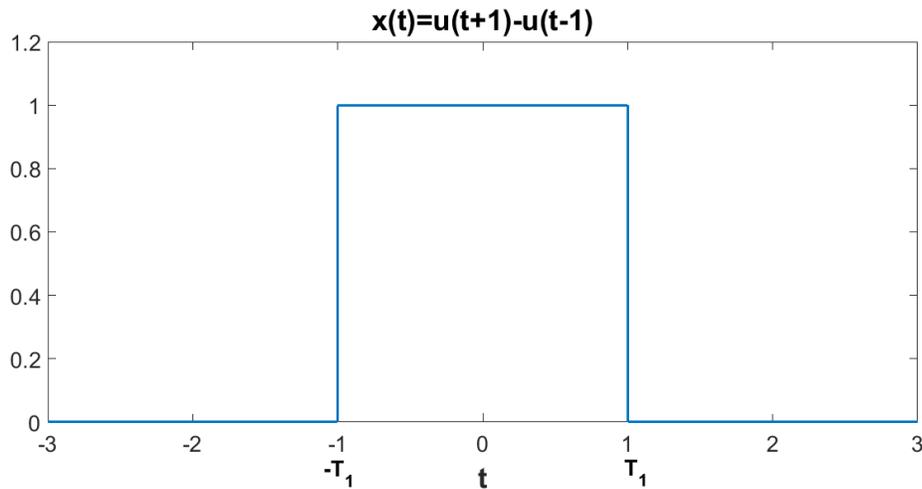


Figura 7.14: Señal cuadrada $x(t)$

Solución

- Aplicando la ecuación de análisis, la Ec. (7.22), se obtiene

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-T_1}^{T_1} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-T_1}^{T_1} \\ &= \frac{2}{\omega} \left(\frac{e^{j\omega T_1} - e^{-j\omega T_1}}{j2} \right) = \frac{2 \sin(\omega T_1)}{\omega} \end{aligned}$$

o bien

$$X(j\omega) = 2T_1 \operatorname{sinc}(\omega T_1 / \pi)$$

El espectro de amplitud de $x(t)$ se muestra en la figura 7.15.

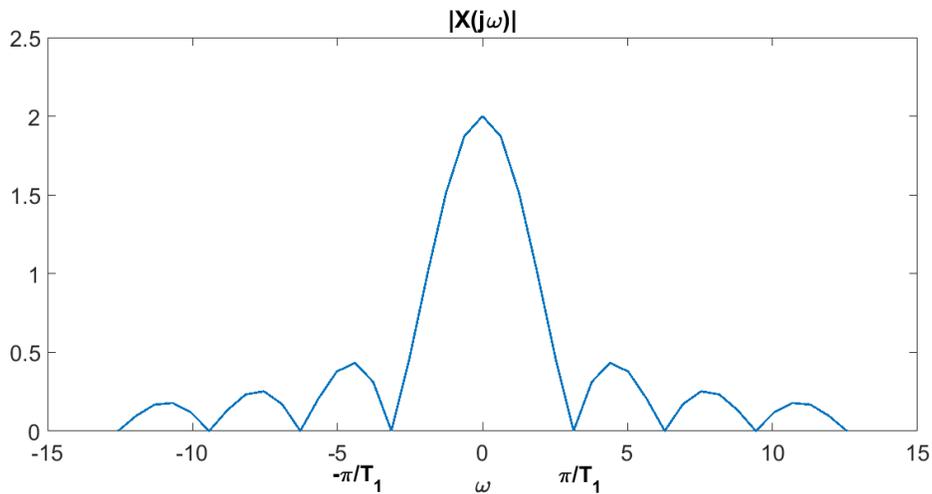


Figura 7.15: Espectro de la señal cuadrada $x(t)$

Del espectro obtenido se pueden señalar dos características, una está asociada con la señal $x(t)$ de la figura 7.14 la cual tiene un ancho de pulso de $2T_1 = 2$ donde $T_1 = 1$ y la amplitud del espectro en $\omega = 0$ es precisamente $2T_1 = 2$, la amplitud del *sinc*; la segunda es que el cruce por cero del espectro se presenta en $\frac{\pm\pi}{T_1}$.

El programa en MATLAB para determinar el espectro como el de la figura 7.15, despliega los valores de la frecuencia asociada a la respectiva magnitud y fase del espectro (no incluidos, se recomienda verificarlo).

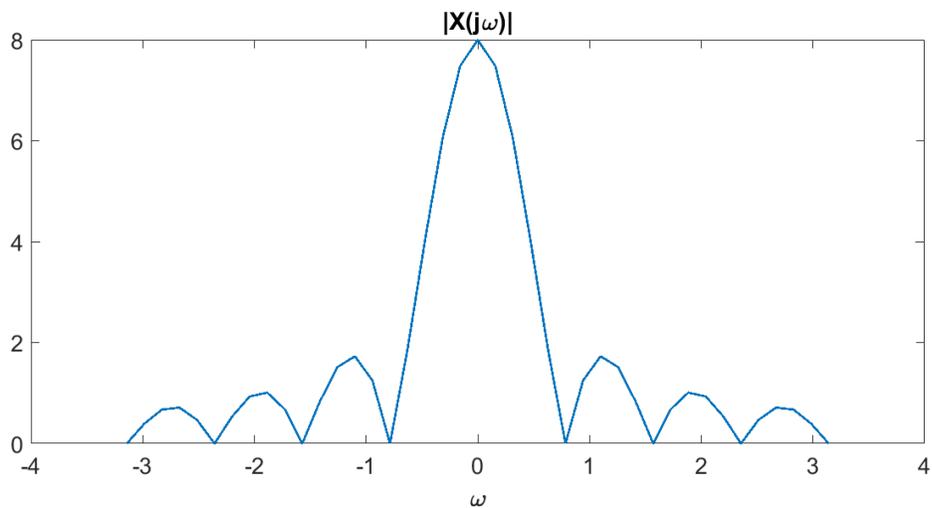


Figura 7.16: Espectro de la señal cuadrada $x_1(t)$

- b) La Transformada de Fourier para la señal $x\left(\frac{t}{4}\right)$, que corresponde a la misma señal de (a) pero expandida en tiempo en un factor de 4, se puede obtener aplicando la propiedad de escalamiento definida como

$$x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$$

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$$

que para este caso $a = 1/4$, por lo que la transformada de Fourier de la señal escalada es

$$x_1(t) \leftrightarrow \frac{1}{|1/4|} 2 \operatorname{sinc}\left(\frac{4\omega}{\pi}\right)$$

o bien

$$X_1(j\omega) = 8 \operatorname{sinc}\left(\frac{4\omega}{\pi}\right)$$

La gráfica del espectro mostrada en la figura 7.16, se obtiene de la misma forma que en el inciso anterior, cumpliendo con las características de amplitud y cruce por cero mencionadas en el inciso anterior.

Observando los espectros de ambas señales es posible concluir que conforme el intervalo de la señal $x(t)$ se hace mas grande, la amplitud del espectro aumenta y intervalo de frecuencias se hace mas estrecho.

- c) El espectro de densidad de energía de la señal se obtiene aplicando la Ec. (7.24), el cual se presenta en la figura 7.17.

$$G(j\omega) = |X(j\omega)|^2 = 4 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)$$

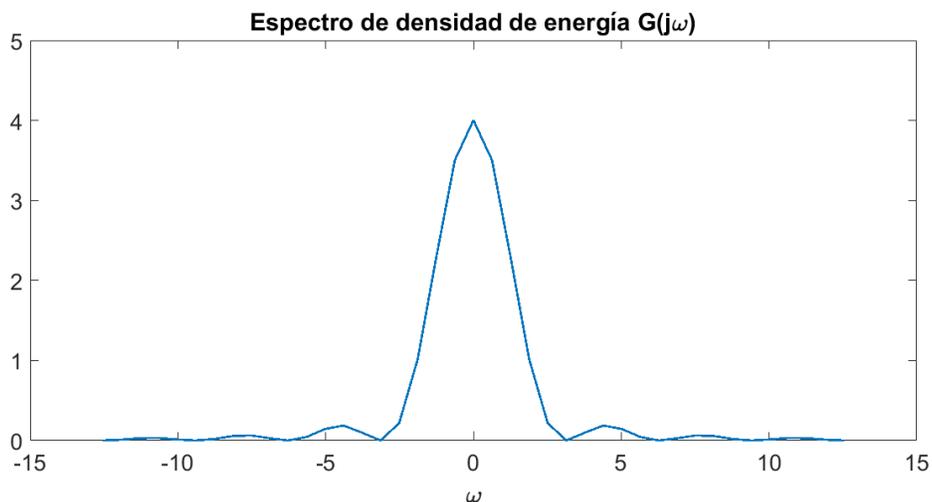


Figura 7.17: Espectro de densidad de energía de la Señal cuadrada $x(t)$

```

%Figura7.15 Transformada de Fourier
k=20;
dt=.001;
t=-5:dt:5-dt;
x=us(t+1)-us(t-1);
plot(t,x);axis([-3 3 0 max(x)*1.2]); %Figura 7.14
title('x(t)=u(t+1)-u(t-1)');xlabel('t')
Xf1=fftshift(dt*fft(x));
N=length(Xf1);
w1=-(2*pi/dt)+((N/2)+1:N-1)*(2*pi/(N*dt));
w2=(0:(N/2))*(2*pi/(N*dt));
w=[w1 w2];
lw=((N/2)-k:(N/2)+k);
figure; plot(w(lw),abs(Xf1(lw+1))); %Figura 7.15
title('|X(jw)|');xlabel('w');line(0,.1:.1:2.5)
figure;plot(w(lw),angle(Xf1(lw+1))*180/pi);
title('ang(X(jw))');xlabel('w');line(-8:.5:8,0);line(0,-100:2:100)
TFx=[w(lw)' abs(Xf1(lw+1))' (angle(Xf1(lw+1))*180/pi)'] %Despliegue de frec., magnitud y
%fase
G=(abs(Xf1)).^2; %Espectro de densidad de energia Figura 7.17
figure; plot(w(lw),G(lw+1)); xlabel('w')
title('Espectro de densidad de energia G(jw)')

```

Ejemplo 7.12

La señal $x_1(t)$ es similar a la señal cuadrada $x(t)$ del ejemplo 7.11, pero atrasada una unidad. Determine su transformada de Fourier.

$$x_1(t) = x(t-1)$$

$$x_1(t) = u(t) - u(t-2)$$

Solución

Aplicando la propiedad de desplazamiento

$$x(t-t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$$

y sabiendo que

$$X(j\omega) = 2 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)$$

se obtiene entonces

$$X_1(j\omega) = 2 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}\right) e^{-j\omega}$$

cuya amplitud es

$$|X_1(j\omega)| = 2 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)$$

y su ángulo es

$$\angle X_1(j\omega) = \angle(-\omega)$$

La magnitud del espectro sigue siendo la misma del ejemplo anterior, el desplazamiento de la señal se refleja en un cambio de fase del espectro.

Ejemplo 7.13

A partir de la convolución de $x(t)$ con $h(t)$ se obtiene la respuesta de estado cero de un sistema. Si las señales mencionadas son las siguientes

$$x(t) = u(t) - u(t-1)$$

$$h(t) = u(t-1) - u(t-2)$$

y la respuesta que se obtiene es

$$y(t) = x(t) * h(t) = r(t-1) - 2r(t-2) + r(t-3)$$

Aplicando la propiedad de convolución de la transformada de Fourier, definida como la convolución en el tiempo de dos señales corresponde a la multiplicación de esas dos señales en el dominio de la frecuencia, es decir,

$$y(t) = x(t) * h(t) \leftrightarrow Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$$

Determine la respuesta $y(t)$ mediante la transformada de Fourier utilizando la herramienta MATLAB.

Solución

Las transformadas de $x(t)$ y $h(t)$ son similares a las determinadas en los ejemplos 7.11 y 7.12. Una vez que se tiene el producto de las transformadas se utiliza la función `ifft()` para determinar la transformada inversa, que corresponde a la señal en el dominio del tiempo. La figura 7.18 muestra el espectro de $Y(j\omega)$ y la figura 7.19 presenta la señal $y(t)$ en dominio del tiempo, la cual se puede comparar con la respuesta presentada en el enunciado.

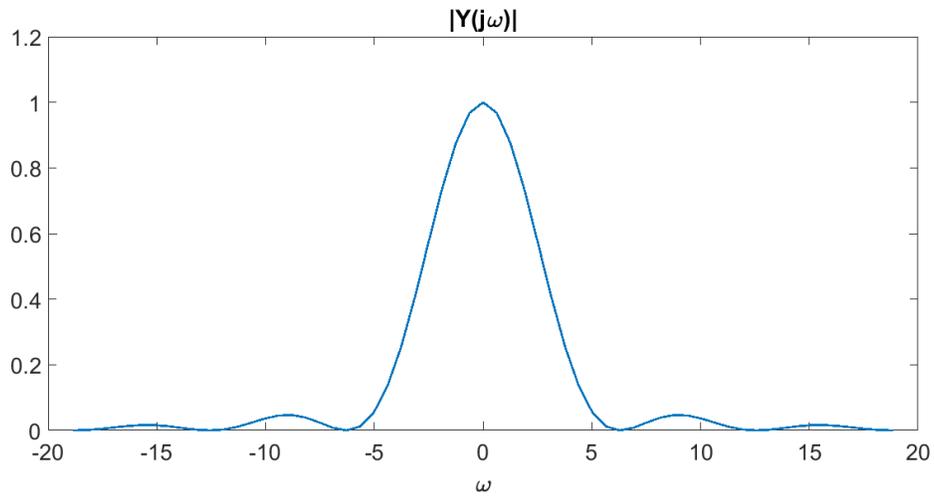


Figura 7.18: Espectro $Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$

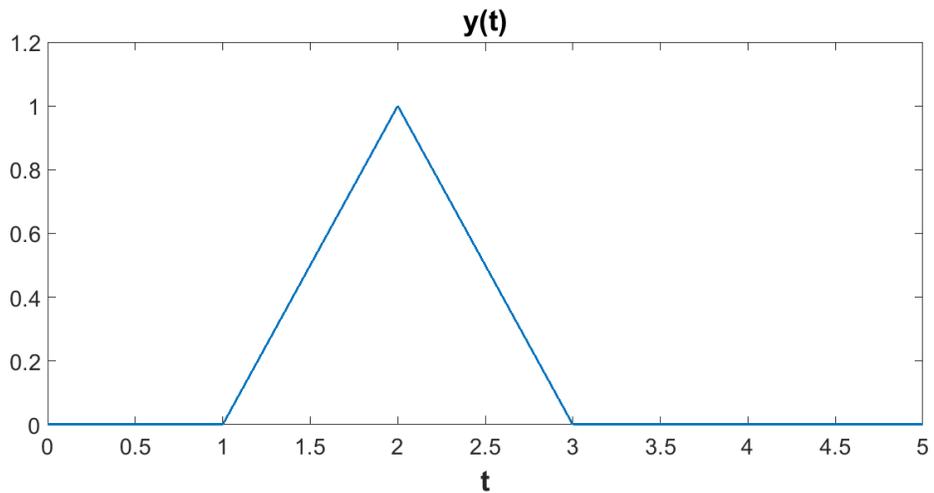


Figura 7.19: Señal en el dominio del tiempo $y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(j\omega)\}$

```
% Figura 7.18 Transformada de Fourier
k=30;
dt=.001; %entre menor sea el intervalo mejor es el espectro
t=0:dt:10-dt;
x=us(t)-us(t-1);
h=us(t-1)-us(t-2);
Xf1=fftshift(dt*fft(x)); %TF de x
Hf1=fftshift(dt*fft(h)); %TF de h
Yf1=Xf1.*Hf1; %X(jw)H(w)
N=length(Xf1);
w1=-(2*pi/dt)+((N/2)+1:N-1)*(2*pi/(N*dt));
w2=(0:(N/2))*(2*pi/(N*dt));
w=[w1 w2];
lw=((N/2)-k:(N/2)+k);
plot(w(lw),abs(Yf1(lw+1)));
title('|Y(jw)|');xlabel('w');
```

```

axis([-20 20 0 (max(abs(Yf1))*1.2)]);line(0, .1:.1:1.1);
figure;plot(w(lw), angle(Yf1(lw+1))*180/pi);
title('ang(Y(jw))');xlabel('w');line(-8:.5:8,0);line(0,-100:2:100)
TFx=[w(lw)' abs(Yf1(lw+1))' (angle(Yf1(lw+1))*180/pi)']
y=(1/dt)*ifft(fftshift(Yf1)); %Obtencion de la TF inversa Fig. 719
figure; plot((1:length(y))*dt, real(y))
axis([0 5 0 max(real(y))*1.2])
title('y(t)'); xlabel('t')

```

Ejemplo 7.14

Considere la señal aperiódica $x(t)$ con $\omega = 1$, determine el espectro de la señal y compárelo con las señales del ejemplo 7.11.

$$x(t) = \frac{\sin(\omega t)}{\pi t}$$

Solución

Partiendo de que una señal cuadrada en tiempo genera una señal *sinc* como espectro, puede suponerse que una señal *sinc* en el tiempo generará como espectro una señal cuadrada. Si este es el caso, consideremos

$$X(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < 1 \\ 0 & |\omega| > 1 \end{cases}$$

en donde la señal en dominio del tiempo aplicando la ecuación de síntesis, la Ec. (7.21), es

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{jt2\pi} (e^{jt} - e^{-jt})$$

$$x(t) = \frac{1}{\pi t} \sin(t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{\pi}\right)$$

que es precisamente la señal de este ejemplo. A esta correspondencia se le llama Propiedad de Dualidad o Simetría, en donde para cualquier par de transformadas hay un par dual con las variables de tiempo y frecuencia intercambiadas.

La figura 7.20 muestra la aproximación del espectro de $x(t)$ y en la figura 7.21 se presenta la señal reconstruida a partir de este espectro, la cual es la señal *sinc*.

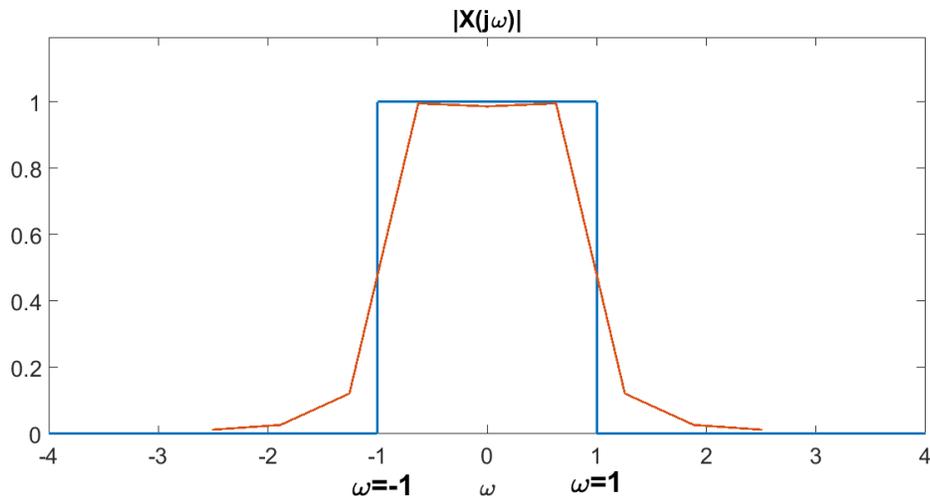


Figura 7.20: Espectro de la señal *sinc*, la línea naranja es la aproximación y la azul corresponde al espectro ideal

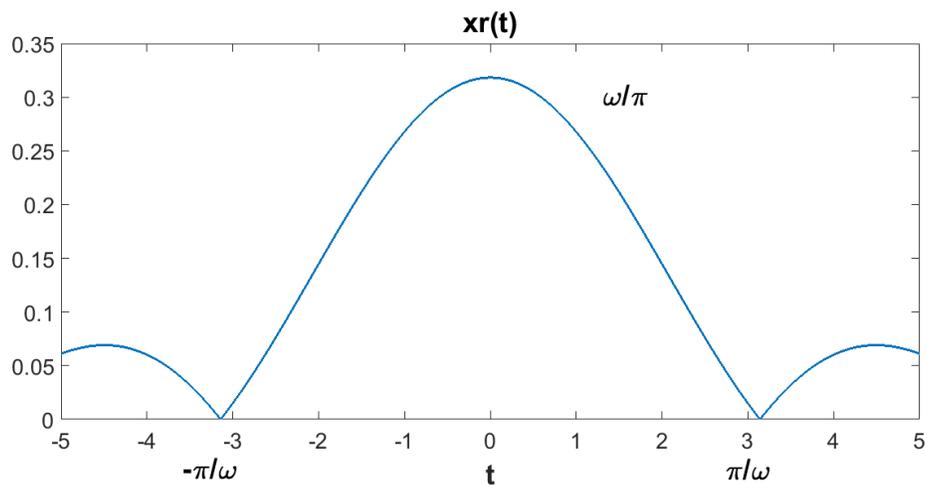


Figura 7.21: Magnitud de la señal $x_r(t)$ que corresponde a un *sinc* con $\omega = 1$ reconstruida a partir del espectro de la figura 7.20

```
% Figura 7.20 Transformada de Fourier
k=4;
dt=.0001; %entre menor sea el intervalo mejor es el espectro
t=-5:dt:5-dt;
w0=1;
x=(w0/pi)*sinc(w0*t/pi);
Xf1=fftshift(dt*fft(x)); %TF de x
xt=us(t+1)-us(t-1);
N=length(Xf1);
w1=-(2*pi/dt)+(N/2+1:N-1)*(2*pi/(N*dt));
w2=(0:(N/2))*(2*pi/(N*dt));
w=[w1 w2];
lw=(N/2)-k:(N/2)+k;
plot(t,xt);hold on;
```

```

set(gcf,'defaultlinelinerwidth',1.5);
plot(w(lw),abs(Xf1(lw+1)));
title('|X(jw)|');xlabel('w');
axis([-k k 0 (max(abs(Xf1))*1.2)]);line(0,.1:.1:1.1);
figure;plot(w(lw),angle(Xf1(lw+1))*180/pi);
title('ang(X(jw))');xlabel('w');line(-8:.5:8,0);line(0,-100:2:100)
TFx=[w(lw)' abs(Xf1(lw+1))' (angle(Xf1(lw+1))*180/pi)']
xr=(1/dt)*ifft(fftshift(Xf1)); %Obtencion de la TF inversa Fig. 721
figure;
plot(t,abs(xr))
title('xr(t)'); xlabel('t')

```

Ejemplo 7.15

Determine la transformada de Fourier de un impulso $x(t) = \delta(t)$.

Solución

La técnica de la Transformada de Fourier se aplica de igual forma a señales sin energía como las funciones singulares, ya que la integrabilidad absoluta no siempre es necesaria para que exista la Transformada de Fourier, pero sí representa una condición suficiente para que exista. Bajo esta consideración, aplicando la ecuación de análisis, la Ec. (7.22), se obtiene

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$

Es decir que el espectro del impulso se compone de todas las frecuencias. Además, se verifica este resultado, a partir del ejemplo 7.11b y del concepto de dualidad, en el que conforme el ancho del pulso tiende a infinito, su espectro tiende a un impulso, y viceversa, un impulso en el tiempo tiene un espectro que comprende todas las frecuencias, como en este ejemplo.

7.7

Transformada de Fourier aplicada a Sistemas Lineales e Invariantes en el Tiempo

Un sistema lineal e invariante en el tiempo se modela, como se describió en el capítulo 3, mediante una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes,

$$\sum_{n=0}^N a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = \sum_{n=0}^M b_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} \quad (7.24)$$

Ya que las señales exponenciales son funciones propias de estos sistemas, entonces la respuesta permanente del sistema es la señal de entrada multiplicada por el valor propio del sistema. Este planteamiento se llevó a cabo en el ejemplo 7.5, ahora se aplicará la propiedad de diferenciación en tiempo para la transformada de Fourier para llegar al mismo resultado.

Obteniendo la Transformada de Fourier de la Ec. (7.24)

$$\sum_{n=0}^N a_n \mathcal{F} \left\{ \frac{d^n y(t)}{dt^n} \right\} = \sum_{n=0}^M b_n \mathcal{F} \left\{ \frac{d^n x(t)}{dt^n} \right\}$$

y aplicando la propiedad de diferenciación en tiempo se obtiene

$$\sum_{n=0}^N a_n (j\omega)^n Y(j\omega) = \sum_{n=0}^M b_n (j\omega)^n X(j\omega)$$

Ya que estas sumatorias solo afecta a $(j\omega)$ y sus correspondientes coeficientes, se puede expresar como

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum_{n=0}^M b_n (j\omega)^n}{\sum_{n=0}^N a_n (j\omega)^n} \quad (7.25)$$

en donde $H(j\omega)$ representa la respuesta en frecuencia del sistema y es una razón de polinomios en $(j\omega)$, siendo los coeficientes de la ecuación diferencial los mismos en $H(j\omega)$.

A partir de la Ec. (7.25), se puede concluir que si se conoce la respuesta en frecuencia de un sistema $H(j\omega)$, la respuesta del sistema a una entrada específica se puede determinar mediante

$$Y(j\omega) = H(j\omega) X(j\omega) \quad (7.26)$$

y obtener posteriormente la transformada inversa para obtener $y(t)$ cuando se aplica la entrada $x(t)$.

Ejemplo 7.16

Un sistema lineal e invariante en el tiempo está descrito mediante la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 5 \frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t) \quad (7.27)$$

- Aplique la Ec. (7.25) para determinar la respuesta en frecuencia $H(j\omega)$ del sistema.
- A partir de la $H(j\omega)$, determine la respuesta al impulso $h(t)$ del sistema.
- Si la entrada es $x(t) = e^{-4t} u(t)$, aplique la Ec. (7.26) y determine la respuesta del sistema.
- Verifique los incisos anteriores con MATLAB.

Solución

- La respuesta en frecuencia se determina de manera directa aplicando la Ec. (7.25), observando que los coeficientes en el dominio del tiempo y de la frecuencia son los mismos.

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 1}{(j\omega)^2 + 5j\omega + 6} = \frac{j\omega + 1}{(j\omega + 2)(j\omega + 3)} \quad (7.28)$$

Ya que $H(j\omega)$ es una función compleja, también se puede expresar como

$$H(j\omega) = \frac{\sqrt{\omega^2 + 1} \angle \tan^{-1}(\omega)}{\sqrt{(6 - \omega^2)^2 + 25\omega^2} \angle \tan^{-1}\left(\frac{5\omega}{6 - \omega^2}\right)} \quad (7.29)$$

- La Transformada inversa de $H(j\omega)$ se obtiene mediante expansión en fracciones parciales a partir de la Ec. (7.28) quedando

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 1}{(j\omega + 2)(j\omega + 3)} = \frac{A}{(j\omega + 2)} + \frac{B}{(j\omega + 3)}$$

determinando

$$\begin{aligned} A &= -1 \\ B &= 2 \end{aligned}$$

Aplicando la propiedad de linealidad y antitransformando, cuyas transformadas son similares al ejemplo 7.10, se obtiene

$$h(t) = -e^{-2t} + 2e^{-3t} \quad 0 < t < \infty$$

Por lo que la respuesta al impulso para este sistema causal queda como

$$h(t) = (-e^{-2t} + 2e^{-3t}) u(t)$$

- c) Si la entrada al sistema es $x(t) = e^{-4t}u(t)$, la respuesta del sistema se determina mediante la Ec. (7.26), es decir,

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

y

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 1}{(j\omega + 2)(j\omega + 3)}$$

Siendo la transformada de $x(t) = e^{-4t}u(t)$,

$$X(j\omega) = \frac{1}{(j\omega + 4)}$$

Así que la transformada de la respuesta del sistema es

$$Y(j\omega) = \frac{j\omega + 1}{(j\omega + 2)(j\omega + 3)(j\omega + 4)}$$

La antitransformada se obtiene fácilmente mediante expansión en fracciones parciales

$$Y(j\omega) = \frac{j\omega + 1}{(j\omega + 2)(j\omega + 3)(j\omega + 4)} = \frac{A}{(j\omega + 2)} + \frac{B}{(j\omega + 3)} + \frac{C}{(j\omega + 4)}$$

obteniendo

$$A = -\frac{1}{2}$$

$$B = 2$$

$$C = -\frac{3}{2}$$

Ya que la entrada inicia para $t > 0$, la respuesta del sistema es

$$y(t) = \left(-\frac{1}{2}e^{-2t} + 2e^{-3t} - \frac{3}{2}e^{-4t} \right) u(t)$$

- d) La respuesta en frecuencia se obtiene con la multiplicación de las transformadas de $x(t)$ y $h(t)$. La figura 7.22 muestra la magnitud y fase del espectro $Y(j\omega)$ y en la figura 7.23 se muestra la antitransformada de $Y(j\omega)$ que es $y(t)$.

De manera alternativa, para determinar la respuesta al impulso se utiliza la función de MATLAB **impz()**, esta respuesta se presenta en la figura 7.24. Finalmente, para determinar la respuesta del sistema a la entrada $x(t)$, se hace uso de la función **lsim()**, obteniendo la respuesta de la figura 7.25, similar a la determinada con la antitransformada.

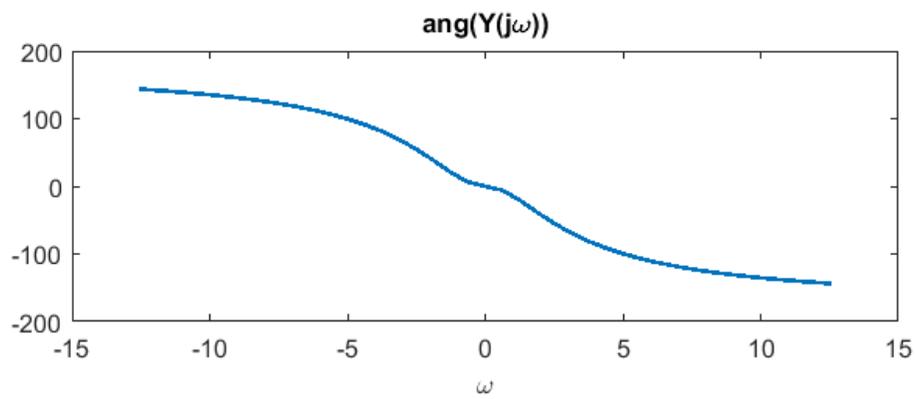
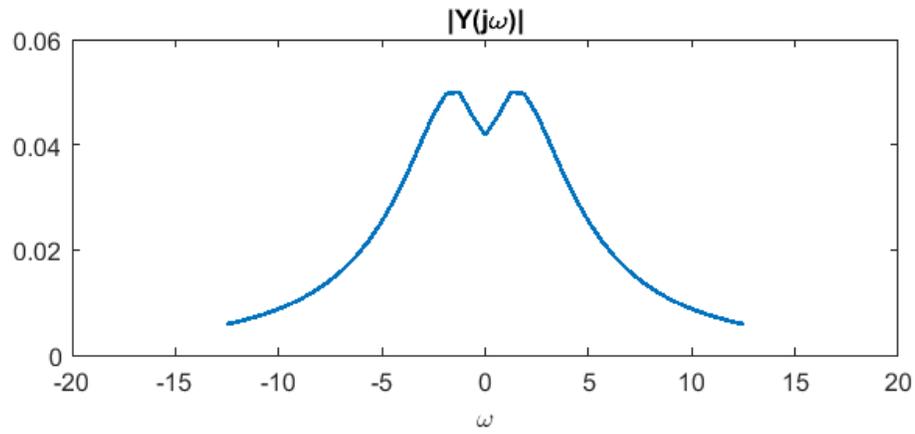


Figura 7.22: Magnitud y fase del espectro $Y(j\omega)$

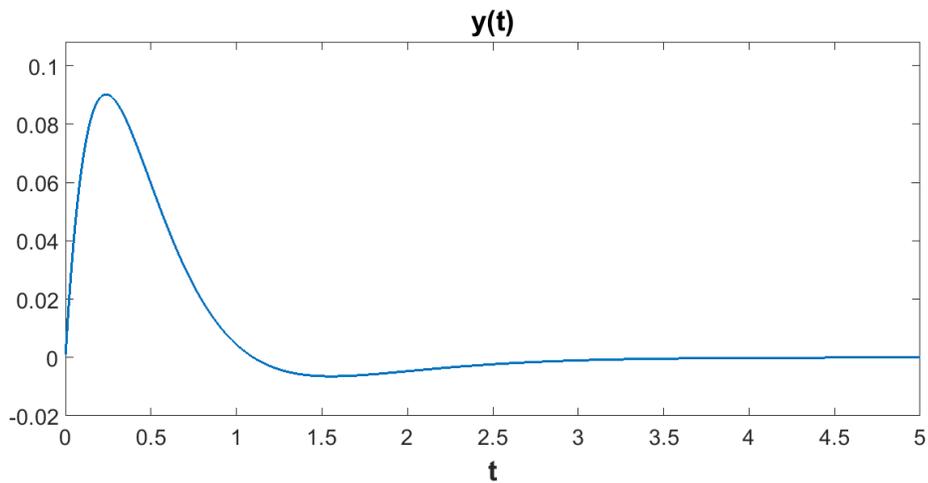


Figura 7.23: Señal $y(t)$ obtenida mediante la antitransformada de $Y(\omega)$

```

% Figura 7.22 Transformada de Fourier
k=20;
dt=.001; %entre menor sea el intervalo mejor es el espectro
t=0:dt:10-dt;
x=exp(-4*t);
h=-exp(-2*t)+2*exp(-3*t);
Xf1=fftshift(dt*fft(x)); %TF de x
Hf1=fftshift(dt*fft(h)); %TF de h
Yf1=Xf1.*Hf1; %X(jw)H(w)
N=length(Xf1);
w1=-(2*pi/dt)+((N/2)+1:N-1)*(2*pi/(N*dt));
w2=(0:(N/2))*(2*pi/(N*dt));
w=[w1 w2];
lw=((N/2)-k:(N/2)+k);
plot(w(lw),abs(Yf1(lw+1)));
title('|Y(jw)|');xlabel('w');
axis([-20 20 0 (max(abs(Yf1))*1.2)]);line(0, .1:.1:1.1);
figure;plot(w(lw),angle(Yf1(lw+1))*180/pi);
title('ang(Y(jw))');xlabel('w');line(-8:.5:8,0);line(0,-100:2:100)
TFx=[w(lw)' abs(Yf1(lw+1))' (angle(Yf1(lw+1))*180/pi)']
y=(1/dt)*ifft(fftshift(Yf1)); %Obtencion de la TF inversa
figure; plot((1:length(y))*dt,real(y))
axis([0 5 -.02 max(real(y))*1.2])
title('y(t)'); xlabel('t')

```

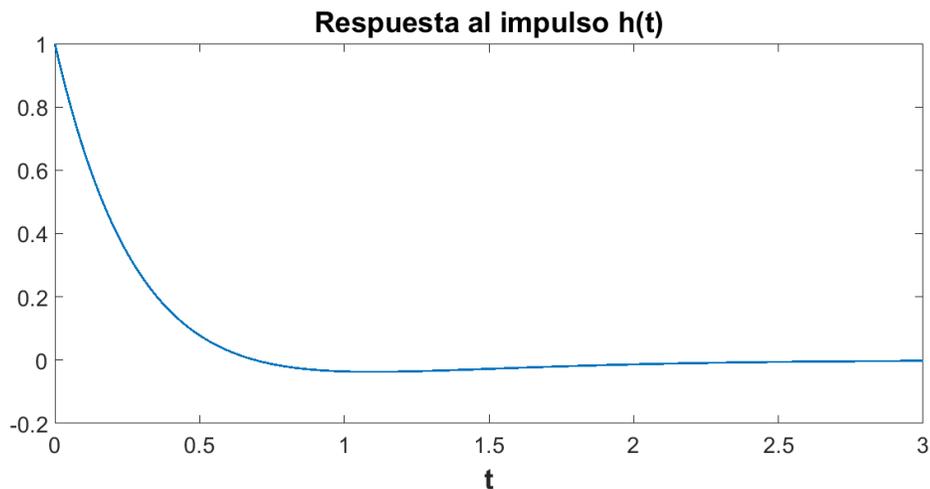


Figura 7.24: Respuesta al impulso $h(t)$ obtenida con la función `impz()`

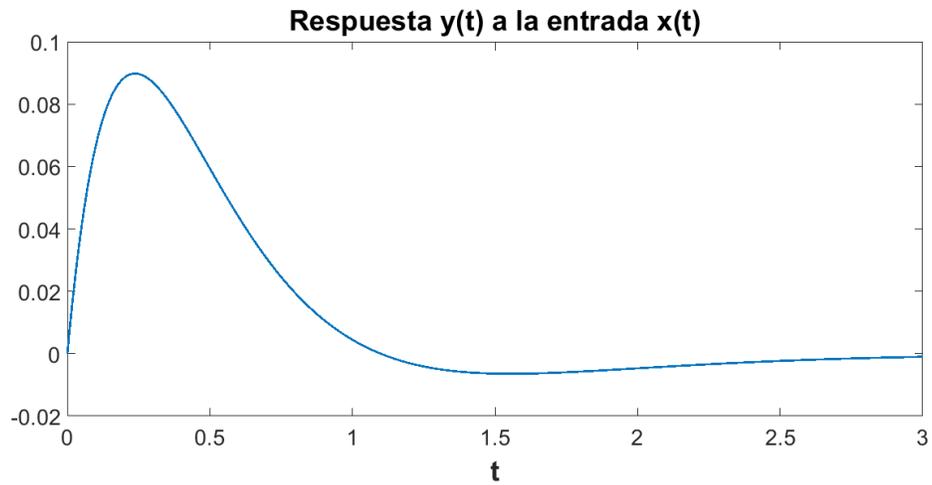


Figura 7.25: Respuesta $y(t)$ a la entrada $x(t)$ obtenida con la función `lsim()`, similar a la figura 7.23

```

% Figura 7.24 Respuesta al impulso con imp()
t=0:.01:3;
a=[1 5 6];
b=[1 1];
h=impz(b,a,t); %Respuesta al impulso
plot(t,h)
title('Respuesta al impulso h(t)')
xlabel('t')
figure
x=exp(-4*t);
y=lsim(b,a,x,t); %Respuesta a la entrada x
plot(t,y);
title('Respuesta y(t) a la entrada x(t)')
xlabel('t')

```

Resumen

En este capítulo se ha analizado que las señales exponenciales complejas son funciones propias de los sistemas lineales e invariantes en el tiempo y tienen la característica de que la respuesta del sistema es la misma señal de entrada multiplicada por una constante que se llama valor propio. Esta característica es de suma importancia ya que si una señal se puede representar mediante exponenciales complejas, la respuesta del sistema se obtiene fácilmente. Bajo este esquema se ha abordado el tema de Serie de Fourier para señales periódicas, determinando los coeficientes de las exponenciales mediante la ecuación de análisis y reconstruyendo la señal mediante la ecuación de síntesis. Con los coeficientes se ha determinado el espectro discreto de la señal. Así mismo, se ha analizado la transformada de Fourier para señales aperiódicas encontrando el espectro en frecuencia de la señal mediante la correspondiente ecuación de análisis y se ha determinado la respuesta de sistemas mediante la transformada de Fourier. El capítulo incluye diversos ejemplos tanto analíticos como desarrollados con la herramienta de MATLAB.

Problemas

7.1 Considere la señal

$$x(t) = 1 + \cos\left(\frac{2\pi t}{9}\right) + \cos\left(\frac{4\pi t}{9}\right) + \cos\left(\frac{6\pi t}{9}\right)$$

- Determine la frecuencia fundamental ω_0 de $x(t)$ y grafique $x(t)$.
- Obtenga y grafique la magnitud de los coeficientes a_k vs k (múltiplos de ω_0).
- Reconstruya la señal a partir de los coeficientes y verifique que es precisamente $x(t)$.

7.2 Obtenga con MATLAB los coeficientes de la señal del problema 1, utilizando la función **fft(x)** donde x es el vector de la señal $x(t)$. Específicamente utilice $a_k = (1./length(t)) * fft(x)$, siendo t el vector de tiempo. Liste los primeros 10 coeficientes, grafíquelos y verifique que corresponden a la señal $x(t)$.

7.3 Considere la señal

$$x(t) = 1 + \cos\left(\frac{2\pi t}{9}\right) + \cos\left(\frac{2\pi t}{9} + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{4\pi t}{9}\right) + \sin\left(\frac{4\pi t}{9} + \frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{6\pi t}{9}\right)$$

- Determine la frecuencia fundamental ω_0 de $x(t)$ y grafique $x(t)$.
- Obtenga y grafique la magnitud y fase, o bien, la parte real y la parte imaginaria de los coeficientes a_k vs k (múltiplos de ω_0).
- Reconstruya la señal a partir de los coeficientes y verifique que es precisamente $x(t)$.

7.4 Obtenga con MATLAB los coeficientes de la señal del problema 3, utilizando la función **fft(x)** donde x es el vector de la señal $x(t)$. Específicamente utilice $a_k = (1./length(t)) * fft(x)$, siendo t el vector de tiempo. Liste los primeros 10 coeficientes, grafíquelos y verifique que corresponden a la señal $x(t)$.

7.5 Considere los coeficientes espectrales de la señal $x(t)$ con periodo $T = 5$, listados a continuación,

$$a_0 = 1$$

$$a_{-1} = a_1 = 2$$

$$a_{-2} = a_2 = \frac{3}{2}$$

$$a_{-3} = a_3 = \frac{1}{2}$$

$$a_{-k} = a_k = 0 \quad \text{para } |k| \geq 4$$

- Obtenga la expresión de $x(t)$ y reconstruya la señal en la forma dada por la Ec. (7.16).
- Grafique el espectro de la señal $|a_k|$ vs k , o bien, $\text{real}(a_k)$ vs k ,

c) A partir de la señal $x(t)$ que obtuvo, determine con MATLAB los coeficientes y verifique su resultado.

7.6 Considere los coeficientes espectrales de la señal $x(t)$ con periodo $T = 5$ listados a continuación,

$$a_0 = 1$$

$$a_{-1} = a_1^* = 2 - j2$$

$$a_{-2} = a_2^* = \frac{3}{2} e^{j\frac{\pi}{8}}$$

$$a_{-3} = a_3 = \frac{1}{2}$$

$$a_{-k} = a_k = 0 \quad \text{para } |k| \geq 4$$

- Obtenga la expresión de $x(t)$ y reconstruya la señal en la forma dada por la Ec. (7.16).
- Grafique el espectro de la señal $|a_k|$ vs k , y $\angle a_k$ vs k , o bien, $\text{real}(a_k)$ vs k y $\text{imag}(a_k)$ vs k .
- A partir de la señal $x(t)$ que obtuvo, determine con MATLAB los coeficientes y verifique su resultado.

7.7 Considere el sistema en tiempo continuo modelado por la ecuación diferencial

$$\frac{dy(t)}{dt} + 10y(t) = 10x(t)$$

Aplique la Ec. (7.5) para obtener la respuesta del sistema a la entrada $x(t)$. En donde

- $x(t) = 1 + \cos\left(\frac{2\pi t}{9}\right) + \cos\left(\frac{4\pi t}{9}\right) + \cos\left(\frac{6\pi t}{9}\right)$
- $x(t) = 1 + \cos\left(\frac{2\pi t}{9}\right) + \cos\left(\frac{4\pi t}{9}\right) + \cos\left(\frac{6\pi t}{9}\right) + \cos\left(\frac{50\pi t}{9}\right)$

El valor propio $H(s_k)$ lo puede obtener con la Ec. (7.3), o bien aplicando la función **freqs(b,a)** en MATLAB.

7.8 Considere el sistema en tiempo continuo modelado por la ecuación diferencial

$$\frac{dy(t)}{dt} + 10y(t) = 10\frac{dx(t)}{dt} + 10x(t)$$

Aplique la Ec. (7.5) para obtener la respuesta del sistema a la entrada $x(t)$. En donde

- $x(t) = 1 + \cos\left(\frac{2\pi t}{9}\right) + \cos\left(\frac{4\pi t}{9}\right) + \cos\left(\frac{6\pi t}{9}\right)$
- $x(t) = 1 + \cos\left(\frac{2\pi t}{9}\right) + \cos\left(\frac{4\pi t}{9}\right) + \cos\left(\frac{6\pi t}{9}\right) + \cos\left(\frac{50\pi t}{9}\right)$

El valor propio $H(s_k)$ lo puede obtener con la Ec. (7.3), o bien aplicando la función **freqs(b,a)** en MATLAB.

Compare la respuesta con la obtenida en el problema 7.7.

7.9 Considere el sistema en tiempo continuo modelado por la ecuación diferencial

$$\frac{dy^2(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = 10\frac{dx(t)}{dt} + 10x(t)$$

Aplice la Ec. (7.5) para obtener la respuesta del sistema a la entrada $x(t)$. En donde

- a) $x(t) = 1 + \cos\left(\frac{2\pi t}{9}\right) + \cos\left(\frac{4\pi t}{9}\right) + \cos\left(\frac{6\pi t}{9}\right)$
 b) $x(t) = 1 + \cos\left(\frac{2\pi t}{9}\right) + \cos\left(\frac{4\pi t}{9}\right) + \cos\left(\frac{6\pi t}{9}\right) + \cos\left(\frac{50\pi t}{9}\right)$

El valor propio $H(s_k)$ lo puede obtener con la Ec. (7.3), o bien aplicando la función **freqs(b,a)** en MATLAB.

Analice la función $H(s) = H(j\omega)$ de los problemas 7.7, 7.8 y 7.9.

7.10 Obtenga y grafique los coeficientes de la serie de Fourier de la señal $r(t) = \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)x(t)$, donde $x(t)$ es periódica con $T = 4$ y se define como:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & -1 \leq t < 1 \\ 0 & 1 \leq t < 3 \end{cases}$$

7.11 Verifique el resultado del problema 10 con MATLAB. Específicamente utilice $ak = (1./length(t)) * fft(t)$, siendo t el vector de tiempo y r el vector de la señal. Liste los primeros 10 coeficientes, gráfiquelos y reconstruya la señal para verificar que corresponden a $r(t)$. Apóyese en los ejemplos 7.7 y 7.9 para la reconstrucción de la señal.

7.12 Considere la señal $y(t) = r(t) + r(t-2)$ donde $r(t)$ es la señal del problema 10 con periodo 4. Obtenga y grafique los coeficientes de la serie de Fourier. Verifique el resultado con MATLAB.

7.13 Considere el sistema de primer orden que relaciona la entrada y la salida a través de la ecuación diferencial:

$$\frac{dy(t)}{dt} + 10y(t) = x(t)$$

Si la señal de entrada es

$$x(t) = e^{st} u(t)$$

Sabiendo que

$Y(j\omega) = H(j\omega) X(j\omega)$ y que $y(t) \leftrightarrow Y(j\omega)$. Determine la respuesta del sistema cuando $s = -10$ y cuando $s = -5$.

7.14 Compruebe la validez del resultado del problema 13 con el resultado obtenido con MATLAB. Apóyese en las funciones **fft()**, **fftshift()** e **ifft()**, y en el ejemplo 7.16.

8

La Serie y la Transformada de Fourier en Tiempo Discreto



8.1

Introducción

El análisis de Fourier para las señales y los sistemas continuos es una herramienta muy poderosa para conocer sus propiedades y la misma utilidad tiene el análisis de Fourier al aplicarlo a los sistemas discretos, siendo la base conceptual de temas de gran importancia como son el filtrado, el muestreo y la modulación.

Aunque el análisis de Fourier para el tiempo continuo fue desarrollado en el siglo XIX, su aplicación para el tiempo discreto solo se desarrolla hasta 1950, teniendo un aumento exponencial, gracias al explosivo desarrollo de sistemas de simulación y sistemas digitales cada vez más rápidos.

8.2

Representación de señales discretas periódicas

En el capítulo 2 se presentó que una señal $x[n]$ en tiempo discreto es periódica si existe un número N entero positivo para el que se cumple que

$$x[n] = x[n + mN] \quad (8.1)$$

donde N es el periodo de la señal y m es cualquier número entero positivo o negativo.

Las exponenciales complejas que cumplen con la Ec. (8.1) son periódicas, de manera que se puede tener un conjunto de ellas representado por

$$x_k[n] = e^{jk(2\pi/N)n} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm N \quad (8.2)$$

Observando que cuando $k = 0$ y $k = N$, $x_0[n]$ y $x_N[n]$ son la misma señal y serán la misma cuando $k = 1$ y $k = N + 1$ y así sucesivamente. Esto se verifica fácilmente, recordando del capítulo 2 que

$$x[n] = e^{j(\omega_0 + 2\pi)n} = e^{j\omega_0 n} \quad (8.3)$$

por lo anterior, el conjunto $x_k[n]$ se restringe a N exponenciales complejas relacionadas armónicamente, cuya frecuencia de cada una es múltiplo k de la frecuencia fundamental $\omega_0 = 2\pi/N$, a diferencia de las exponenciales complejas en tiempo continuo, en donde el número de exponenciales complejas relacionadas armónicamente puede ser infinito, como se discutió en el capítulo 7.

Al igual que en tiempo continuo, las exponenciales complejas son funciones propias de los sistemas LIT, por lo que una señal discreta periódica se puede definir como la superposición de un número finito de exponenciales complejas, que pueden estar ponderadas y desplazadas, es decir

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \quad (8.4)$$

La Ec. (8.4) se conoce como *Ecuación de Síntesis o la Serie Exponencial de Fourier* en tiempo discreto, siendo a_k los *coeficientes espectrales o coeficientes de la Serie Exponencial de Fourier* definidos como

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n} \quad (8.5)$$

La Ec. (8.5) se le llama *Ecuación de Análisis*, y existen solo N valores de a_k . Las Ecs. (8.4) y (8.5) representan el equivalente en tiempo discreto de las Ecs. (7.4) y (7.9) en tiempo continuo.

Observe de la Ec. (8.5) el caso cuando $k = 0$, se tiene

$$a_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[n]$$

Este valor corresponde al valor promedio de la señal.

Los coeficientes a_k permiten determinar el espectro discreto de $x[n]$, el cual se repite con una periodicidad N , a diferencia del espectro de señales periódicas en tiempo continuo que puede comprender hasta un número infinito de componentes. El espectro discreto se representa en dos gráficas, la de magnitud $|a_k| = A_k$ vs k , y la de fase $\angle(a_k) = \theta_k$ vs k , o bien la parte real $Re\{a_k\}$ y la parte imaginaria $Im\{a_k\}$ vs k , donde k representa la frecuencia normalizada.

Ejemplo 8.1

Para la señal $x[n]$ mostrada en la figura 8.1, determine

- La representación en serie exponencial de Fourier
- El espectro de $x[n]$, a partir de los coeficientes espectrales a_k

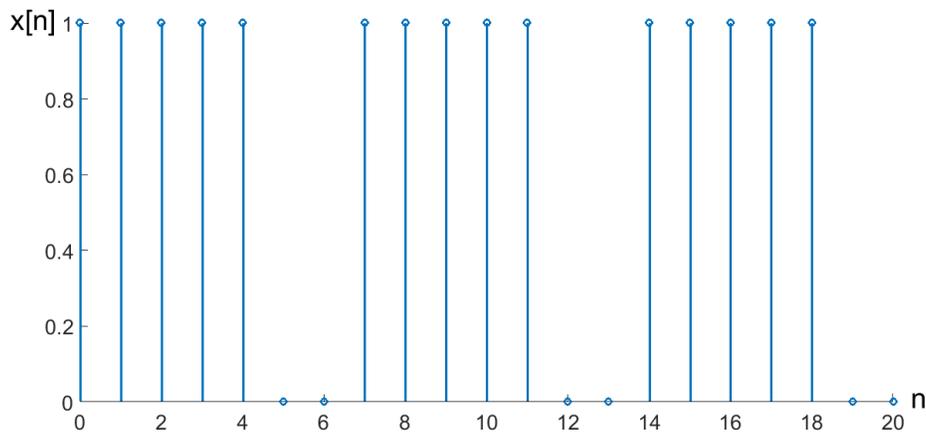


Figura 8.1: Señal en tiempo discreto de $x[n]$

Solución

- Como se observa, el periodo de la señal es $N = 7$, y los coeficientes a_k se calculan aplicando la ecuación de análisis, la Ec. (8.5), esto es

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n} = \frac{1}{7} \sum_{n=0}^6 x[n] e^{-jk(2\pi/7)n}$$

Debido a que $x[n] = 1$ para valores de $0 \leq n \leq 4$ en un periodo, la sumatoria también será diferente de cero sólo en ese intervalo, por lo que la sumatoria queda como

$$a_k = \frac{1}{7} \sum_{n=0}^4 e^{-jk(2\pi/7)n}$$

para $k = 0$, se obtiene el valor promedio de la señal $a_k = \frac{5}{7}$.

para $k \neq 0$ se obtiene la forma cerrada de a_k , recordando que

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \frac{1 - \alpha^N}{1 - \alpha}$$

que al sustituir y factorizar queda como

$$a_k = \frac{1}{7} \frac{(1 - e^{-jk(2\pi/7)5})}{(1 - e^{-jk(2\pi/7)})} = \frac{1}{7} \frac{(e^{jk5\pi/7} - e^{-jk5\pi/7}) e^{-jk5\pi/7}}{(e^{jk\pi/7} - e^{-jk\pi/7}) e^{-jk\pi/7}}$$

$$a_k = \frac{1}{7} e^{-jk4\pi/7} \frac{\sin(k5\pi/7)}{\sin(k\pi/7)}$$

Finalmente, la expresión que define la serie exponencial de Fourier de la señal $x[n]$ es a través de la Ec. (8.4), quedando como

$$x[n] = \frac{1}{7} \sum_{k=0}^6 \frac{\sin(k5\pi/7)}{\sin(k\pi/7)} e^{jk2\pi(n-2)/7}$$

Observe que los límites de la sumatoria en $x[n]$ son $0 \leq k \leq 6$ que es equivalente a expresarla en los límites de $1 \leq k \leq 7$.

Evaluando la sumatoria y graficando las sumas parciales se obtienen las gráficas de la figura 8.2. En la gráfica (a) se presenta la primera armónica, $k = 1$, en (b) la suma de las dos primeras armónicas, y así sucesivamente en (c), en (d), en (e), y en (f) $k = 6$. Estas son el resultado parcial de la serie discreta de Fourier, en (g) se presenta la serie exponencial de Fourier discreta sumando todas las componentes individuales.

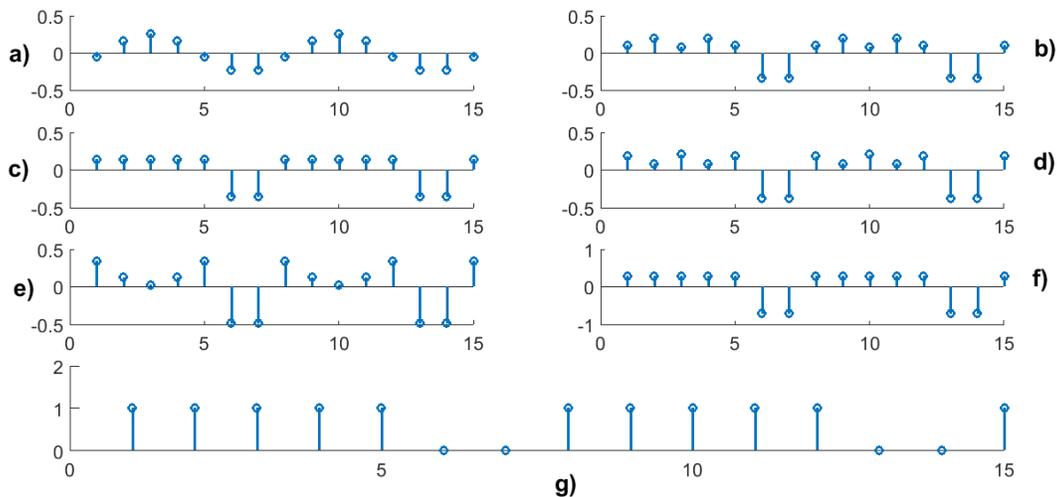


Figura 8.2: Las gráficas (a),(b),(c),(d) y (f) es el resultado parcial de la serie discreta de Fourier; (g) es la serie discreta de Fourier considerando todas las componentes frecuenciales

```

% Figura 8.2 Programa que evalua la serie discreta de Fourier
% del ejemplo 8.1
clear
% se inicializa el vector en el que se evaluaran dos
% ciclos, uno que es el correspondiente a la frecuencia discreta
% y el segundo que corresponde a los elementos de la señal
x1=zeros(1,15);
for k=1:7
for n=1:15
% se evaluan los coeficientes ak y la señal para cada componente espectral
ak=(1/7)*(sin(5*pi*k/7)/sin(pi*k/7));
x(n)=ak*exp(((n-1)-2)*j*2*pi*k/7);
end
% se suman los resultados para cada componente espectral y se grafica x[n]
x1=x1+x;
if k<7
subplot(4,2,k), stem(real(x1));
else
subplot(4,2,[7,8]), stem(real(x1));
end

```

b) Los coeficientes determinados son

$$a_k = \frac{1}{7} e^{-jk4\pi/7} \frac{\sin(k5\pi/7)}{\sin(k\pi/7)}$$

y con ellos se determina el espectro para $-3 \leq k \leq 3$, cuya representación se presenta en la figura 8.3.

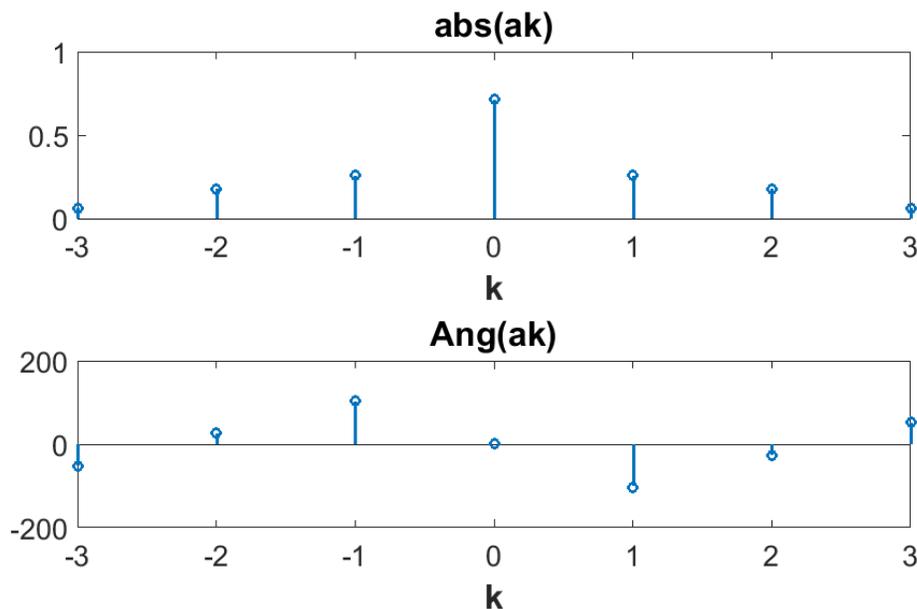


Figura 8.3: Magnitud y fase del espectro de $x[n]$

```

%Figura 8.3 Espectro de x[n]

n=0:6;N=length(n);
x=ud(n)-ud(n-5);
ak=(1/length(n))*fft(x);
ak1=fftshift(ak);
kw=-(N-1)/2:(N-1)/2;
subplot(211),stem(kw,abs(ak1))
title('abs(ak)');xlabel('k')
subplot(212),stem(kw,angle(ak1)*180/pi)
title('Ang(ak)');xlabel('k');line(-3:.01:3,0)

```

Ejemplo 8.2

Encuentre la serie discreta de Fourier de la señal mostrada en la figura 8.4.

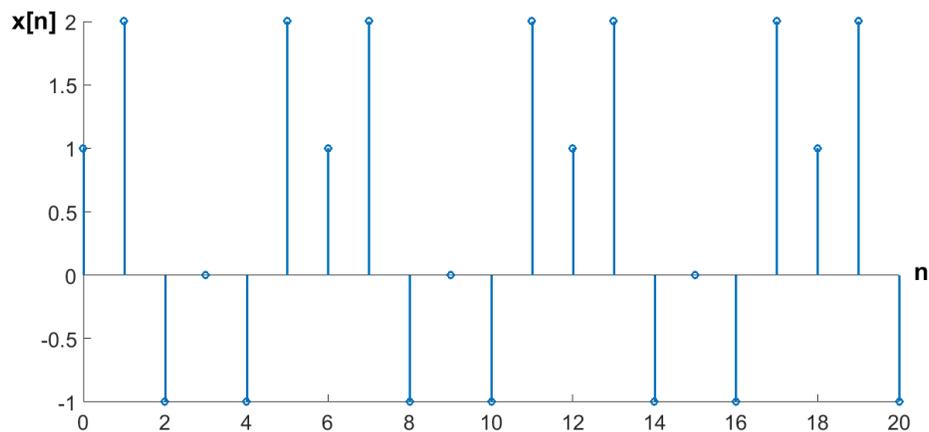


Figura 8.4: Señal en tiempo discreto de $x[n]$

Solución

El periodo de la señal es $N = 6$, los coeficientes a_k de acuerdo con la Ec. (8.5) son

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n} = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^5 x[n] e^{-jk(2\pi/6)n}$$

La sumatoria se evaluará en el intervalo $0 \leq n \leq 5$, por lo que los coeficientes a_k serán

$$a_k = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^5 x[n] e^{-jk(\pi/3)n}$$

Desarrollando la sumatoria se obtiene

$$a_k = \frac{1}{6} \left[1 + 2e^{-jk\pi/3} - e^{-jk2\pi/3} - e^{-jk4\pi/3} + 2e^{-jk5\pi/3} \right]$$

que al reordenar los términos exponenciales se puede expresar como

$$a_k = \frac{1}{6} \left[1 + 4 \cos\left(k\frac{\pi}{3}\right) - 2 \cos\left(k\frac{2\pi}{3}\right) \right]$$

Finalmente la serie discreta de Fourier de $x[n]$ queda expresada por

$$x[n] = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{N-1} \left[1 + 4 \cos\left(k\frac{\pi}{3}\right) - 2 \cos\left(k\frac{2\pi}{3}\right) \right] e^{jk\pi n/3}$$

Evaluando la sumatoria y graficando las sumas parciales se obtienen las gráficas de la figura 8.5. Se observa el resultado de la serie discreta de Fourier al evaluarla para cada una de las componentes de frecuencia, obteniendo la señal esperada una vez que se han calculado y sumado todas las componentes.

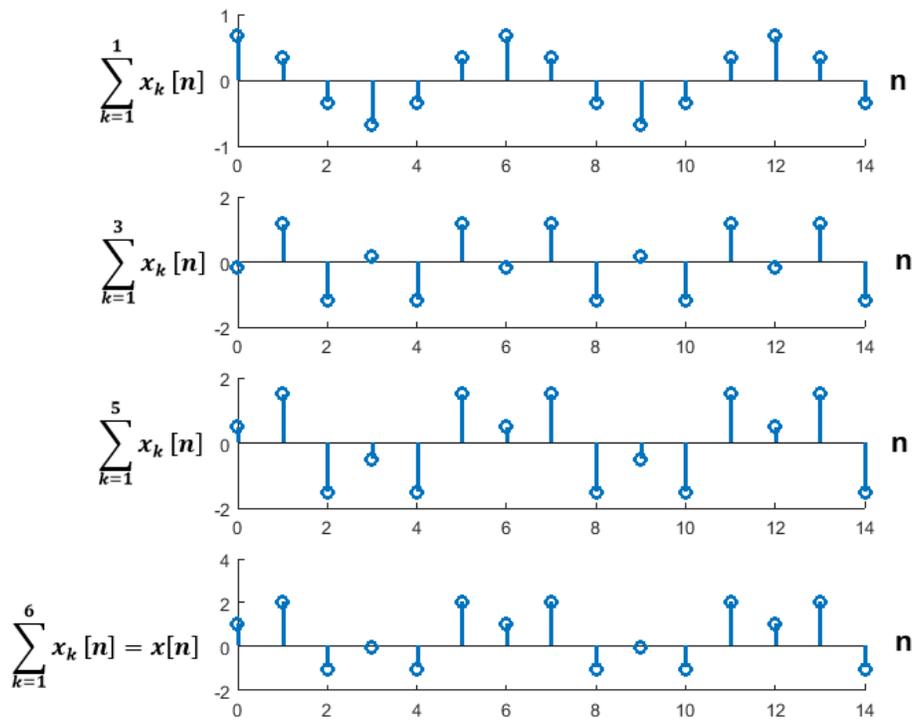


Figura 8.5: Sumas parciales de la serie discreta de Fourier

```
% Figura 8.5 programa que evalua la serie discreta de Fourier
% del ejemplo 8.2
clear
% se inicializa el vector en el que se evaluarán dos
% ciclos, uno que es el correspondiente a la frecuencia discreta
% y el segundo que corresponde a los elementos de la señal
x1=zeros(1,15);
n1=0:14;
for k=1:6
for n=1:15
% se evalúan los coeficientes ak
```

```

ak=(1+4*cos(pi*k/3)-2*cos(2*pi*k/3))/6;
% se evalua la señal para cada componente espectral
x(n)=ak*exp((n-1)*j*pi*k/3);
end

% se suman los resultados para cada componente espectral y se grafica x[n]
x1=x1+x;
subplot(4,2,k), stem(n1,real(x1));
end
subplot(4,2,7), stem(n1,real(x1));

```

Ejemplo 8.3

Calcule la serie discreta de Fourier de la señal mostrada en la figura 8.6.

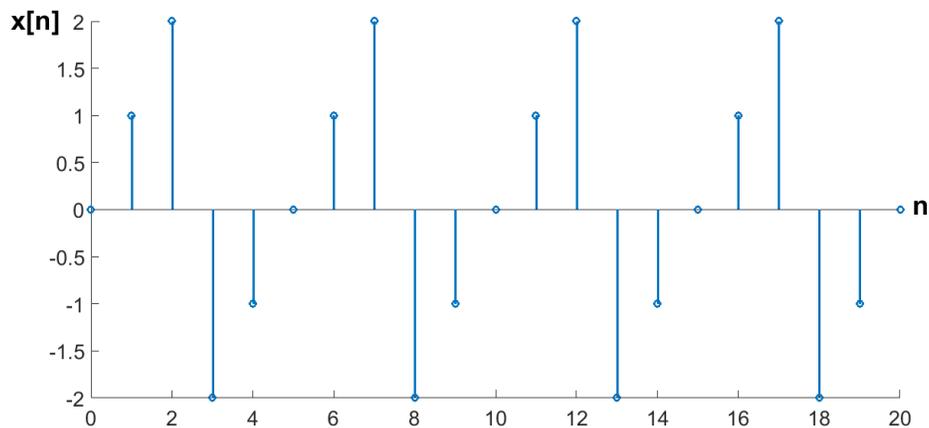


Figura 8.6: Señal en tiempo discreto de $x[n]$

Solución

El periodo de la señal es $N = 5$, los coeficientes a_k se determinan mediante

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n} = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^4 x[n] e^{-jk(2\pi/5)n}$$

Desarrollando

$$a_k = \frac{1}{5} \left[e^{-jk2\pi/5} + 2e^{-jk4\pi/5} - 2e^{-jk6\pi/5} - e^{-jk8\pi/5} \right]$$

simplificando

$$a_k = \frac{1}{5} \left[-2j \sin\left(k\frac{2\pi}{5}\right) - 4j \sin\left(k\frac{4\pi}{5}\right) \right]$$

$$a_k = \frac{-2j}{5} \left[\sin\left(k\frac{2\pi}{5}\right) + 2 \sin\left(k\frac{4\pi}{5}\right) \right]$$

Finalmente la serie discreta de Fourier de esta señal estará expresada por

$$x[n] = \frac{-2j}{5} \sum_{k=0}^4 \left[\sin\left(k\frac{2\pi}{5}\right) + 2\sin\left(k\frac{4\pi}{5}\right) \right] e^{jk2\pi n/5}$$

Al evaluar la sumatoria se obtienen las sumas parciales y las correspondientes gráficas se presentan en la figura 8.7. Se observa el resultado de la serie discreta de Fourier para cada una de las componentes de frecuencia, llegando a la señal esperada una vez que se han calculado y sumado todas las componentes.

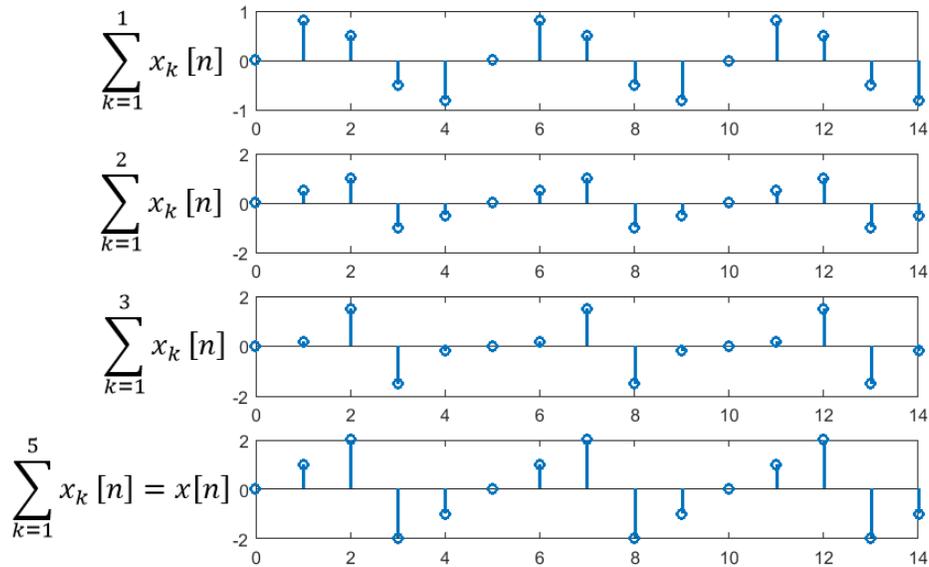


Figura 8.7: Sumas parciales de la serie discreta de Fourier del ejemplo 8.3 y $x[n]$

```
% Figura 8.7 Programa que evalua la serie discreta de Fourier del ejemplo
% 8.3

clear

% se inicializa el vector en el que se evaluarán dos ciclos, uno que es
% el correspondiente a la frecuencia discreta y el segundo que
% corresponde a los elementos de la señal

x1=zeros(1,15);
n1=0:14
for k=1:5
for n=1:15
%se evalúan los coeficientes ak y la señal para cada componente espectral
ak=-2*j*(sin(2*pi*k/5)+2*sin(4*pi*k/5))/5;
x(n)=ak*exp(j*(n-1)*2*pi*k/5);
end
%se suman los resultados para cada componente espectral y se grafica x[n]
x1=x1+x;
if k<=4
subplot(4,1,k), stem(n1,real(x1));
end
end
```

8.3

Propiedades de la serie discreta de Fourier

Algunas propiedades de la serie discreta de Fourier son las que se muestran en la Tabla 8.1, éstas permiten obtener de una manera más fácil los coeficientes de la serie exponencial de Fourier para una determinada señal $x[n]$ periódica.

Propiedad	Señal periódica	Coeficientes de la serie Exponencial de Fourier
	Periódica con periodo N $\begin{cases} x[n] \\ y[n] \end{cases}$	Periódica con periodo N $\begin{cases} a_k \\ b_k \end{cases}$
Linealidad	$Ax[n] + By[n]$	$Aa_k + Bb_k$
Desplazamiento en el tiempo	$x[n - n_0]$	$a_k e^{-jk(2\pi/N)n_0}$
Desplazamiento en Frecuencia	$e^{jM(2\pi/N)n} x[n]$	a_{k-M}
Conjugación	$x^*[n]$	a_{-k}^*
Inversión en el tiempo	$x[-n]$	a_{-k}
Escalamiento en el tiempo	$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[n/m] \\ 0 \end{cases}$ (Periodica con periodo mN)	$\frac{1}{m} a_k$ (Periodica con periodo mN)
Convolución periódica	$\sum_{r=\langle N \rangle} x[r]y[n-r]$	$Na_k b_k$
Multiplicación	$x[n]y[n]$	$\sum_{l=\langle N \rangle} a_l b_{k-l}$
Primera diferencia	$x[n] - x[n-1]$	$(1 - e^{jk(2\pi/N)}) a_k$
Suma consecutiva	$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$ De valor finito y periodica solo si $a_0 = 0$	$\left(\frac{1}{1 - e^{jk(2\pi/N)}} \right) a_k$
Simetría conjugada para señales reales	$x[n]$ real	$\begin{cases} a_k = a_{-k}^* \\ Re\{a_k\} = Re\{a_{-k}\} \\ Im\{a_k\} = -Im\{a_{-k}\} \\ a_k = a_{-k} \\ \angle a_k = -\angle a_{-k} \end{cases}$
Señales real y par	$x[n]$ real y par	a_k real y par
Señales real e impar	$x[n]$ real e impar	a_k Solo imaginaria e impar
Descomposición par e impar de señales reales	$\begin{cases} x_p[n] = par\{x[n]\} \\ x_{im}[n] = impar\{x[n]\} \end{cases}$	$\begin{cases} Re\{a_k\} \\ jIm\{a_k\} \end{cases}$
Relación de Parseval para señales periódicas		
$\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] ^2 = \sum_{n=\langle k \rangle} a_k ^2$		

Tabla 8.1: Propiedades de la serie discreta de Fourier

8.4

Transformada de Fourier en tiempo discreto

El análisis de la serie de Fourier, tanto continuo como discreto, se presentó en los capítulos 7 e inicios del 8, respectivamente, para señales periódicas. Se puede partir del mismo análisis para señales aperiódicas, bajo la consideración de que en éstas el periodo $N \rightarrow \infty$. Si se tiene una señal $x[n]$ aperiódica se puede encontrar la señal periódica $\tilde{x}[n]$ en la que en un solo periodo sea idéntica a $x[n]$ y cero los demás valores. Bajo esta suposición, la serie de Fourier para la señal $\tilde{x}[n]$ es

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} \quad (8.6)$$

en donde la sumatoria se lleva a cabo en un periodo representado por $k = \langle N \rangle$, y los coeficientes son

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \tilde{x}[n] e^{-jk\omega_0 n} \quad (8.7)$$

Sin embargo, se planteó que

$$x[n] = \lim_{N \rightarrow \infty} \{\tilde{x}[n]\}$$

Por lo que la Ec. (8.7) queda como

$$a_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \tilde{x}[n] e^{-jk\omega_0 n} \right\} = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk\omega_0 n} \quad (8.8)$$

o bien si tomamos $N = \frac{2\pi}{k\omega_0}$, siendo ω_0 la frecuencia fundamental de $\tilde{x}[n]$, la Ec. (8.8) se puede expresar como

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk\omega_0 n} k\omega_0 \quad (8.9)$$

Ahora, si definimos la sumatoria de la Ec. (8.9) como

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \quad (8.10)$$

en donde $\omega = k\omega_0$, entonces la Ec. (8.9) queda como

$$a_k = \frac{1}{2\pi} X(e^{jk\omega_0}) k\omega_0 \quad (8.11)$$

Sustituyendo la Ec. (8.11) en la Ec. (8.6) se obtiene

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=\langle N \rangle} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n} k\omega_0 \quad (8.12)$$

Como se había mencionado, si $N \rightarrow \infty$, entonces $\omega_0 \rightarrow 0$, de manera que $k\omega_0$ se vuelve una variable continua, al igual que en tiempo continuo, es decir $k\omega_0 = \omega$, $\tilde{x}[n] \rightarrow x[n]$ y la Ec. (8.12) se vuelve una integral cuya diferencial es precisamente ω , esto es

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (8.13)$$

Esta expresión se le nombra *Ecuación de Síntesis* y expresa que $x[n]$ es una sumatoria continua de exponenciales complejas, calculada en cualquier intervalo de 2π . $X(e^{j\omega})$ representa la *Ecuación de Análisis de la Transformada de Fourier* de $x[n]$, la Ec. (8.10), misma que se vuelve a plantear

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \quad (8.14)$$

También se hace referencia a ella como el *espectro* de $x[n]$, ya que proporciona información de amplitud, fase y frecuencia de las exponenciales complejas con las que se compone $x[n]$.

Como se observa en la Ec. (8.14), $X(e^{j\omega})$ es una función periódica con periodo 2π , que es de esperarse, ya que, como se discutió en el capítulo 2, el intervalo de frecuencia de las señales discretas es de 2π y son idénticas en cualquier otro intervalo de longitud 2π . Las Ecs. (8.13) y (8.14) representan el *par de transformadas de Fourier*.

Es importante señalar que para poder evaluar la Ec. (8.14) se requiere considerar la convergencia de la sumatoria infinita. Para garantizar la convergencia se debe cumplir que $x[n]$ sea absolutamente sumable, es decir

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

o bien que la energía de la señal sea finita, esto es

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty$$

En este libro se abordan señales que cumplen con esta característica.

En cuanto a la convergencia de la integral en la Ec. (8.13), no hay problema ya que el intervalo de integración es finito.

8.5

Propiedades de la transformada de Fourier en tiempo discreto

Al igual que la transformada de Fourier para señales continuas, la correspondiente en tiempo discreto también cuenta con una variedad de propiedades que facilitan su cálculo para determinar transformadas complicadas. Un resumen de las Propiedades de la Transformada de Fourier en tiempo discreto se presenta en la Tabla 8.2.

Propiedad	Señal aperiódica	Transformada de Fourier
	$x[n]$ $y[n]$	Periódica con periodo 2π $\begin{cases} X(e^{j\omega}) \\ Y(e^{j\omega}) \end{cases}$
Linealidad	$ax[n] + by[n]$	$aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
Desplazamiento en tiempo	$x[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$
Desplazamiento en frecuencia	$e^{j\omega_0 n} x[n]$	$X(e^{j(\omega - \omega_0)})$
Conjugación	$x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
Inversión en el tiempo	$x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$
Expansión en el tiempo	$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k] & n = \text{multiplo de } k \\ 0 & n \neq \text{multiplo de } k \end{cases}$	$X(e^{jk\omega})$
Convolución	$x[n] * y[n]$	$X(e^{j\omega}) Y(e^{j\omega})$
Multiplicación	$x[n]y[n]$	$\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\phi}) Y(e^{j(\omega - \phi)}) d\phi$
Diferencia en el tiempo	$x[n] - x[n - 1]$	$(1 - e^{-j\omega}) X(e^{j\omega})$
Acumulación	$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	$\frac{X(e^{j\omega})}{(1 - e^{-j\omega})} + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$
Diferenciación en frecuencia	$nx[n]$	$j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
Simetría Conjugada para señales reales	$x[n]$ real	$\begin{cases} X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}) \\ \text{Re}\{X(e^{j\omega})\} = \text{Re}\{X(e^{-j\omega})\} \\ \text{Im}\{X(e^{j\omega})\} = -\text{Im}\{X(e^{-j\omega})\} \\ X(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega}) \\ \angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega}) \end{cases}$
Simetría para señales par reales	$x[n]$ real y par	$X(e^{j\omega})$ real y par
Simetría para señales impar reales	$x[n]$ real e impar	$X(e^{j\omega})$ imaginaria e impar
Descomposición par e impar de señales reales	Par $\{x[n]\}$ [$x[n]$ real] Impar $\{x[n]\}$ [$x[n]$ real]	$\text{Re}\{X(e^{j\omega})\}$ $j\text{Im}\{X(e^{j\omega})\}$
Relación de Parseval para señales periódicas		
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] ^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} x(e^{j\omega}) ^2 d\omega$		

Tabla 8.2: Propiedades de la transformada de Fourier en tiempo discreto

8.6

La Transformada Discreta de Fourier DFT

Una técnica que ha sido de gran utilidad para el análisis de Fourier en tiempo discreto haciendo uso de herramientas de cómputo es la *Transformada Discreta de Fourier (DFT)* (no se debe confundir con la transformada de Fourier en tiempo discreto, presentada en la sección 8.4) para señales de duración finita, como

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (8.15)$$

calculada con MATLAB mediante la función **fft(x)** y con la cual se puede obtener la señal $x[n]$ de duración finita mediante

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{jk(2\pi/N)n} \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (8.16)$$

calculada con MATLAB con la función **ifft(x)**, la DFT inversa. De esta forma, la señal $x[n]$ de duración finita queda especificada por un conjunto finito de valores de $X[k]$ en su DFT. La DFT se calcula mediante un algoritmo extremadamente rápido llamado la *Transformada Rápida de Fourier (FFT)* que nos ocupará en el capítulo 9. La DFT tiene muchas de las propiedades de la serie y la transformada de Fourier por la similitud que tiene con éstas.

Ejemplo 8.4

Verifique la propiedad de linealidad de la transformada de Fourier con las señales $x_1[n]$ y $x_2[n]$, aplicando la DFT.

$$x_1[n] = \sin(2\omega_0 n) \text{ y } x_2[n] = 2 \sin(5\omega_0 n)$$

para $0 \leq n \leq 16$, en donde $\omega_0 = \frac{6\pi}{50}$

Solución

La propiedad de linealidad establece que si

$$x_1[n] \xrightarrow{F} X_1(k)$$

y

$$x_2[n] \xrightarrow{F} X_2(k)$$

entonces

$$ax_1[n] + bx_2[n] \xrightarrow{F} aX_1(k) + bX_2(k)$$

Al calcular la Transformada Discreta de Fourier de la suma de las señales $x_1[n]$ y $x_2[n]$ se obtiene el espectro mostrado en la figura 8.8a, los espectros calculados para cada una de las señales son los representados en las figuras 8.8b y 8.8c, finalmente se demuestra que al sumar los dos espectros se obtiene el mismo espectro obtenido después de sumar ambos espectros, la figura 8.8d. k corresponde a la frecuencia normalizada.

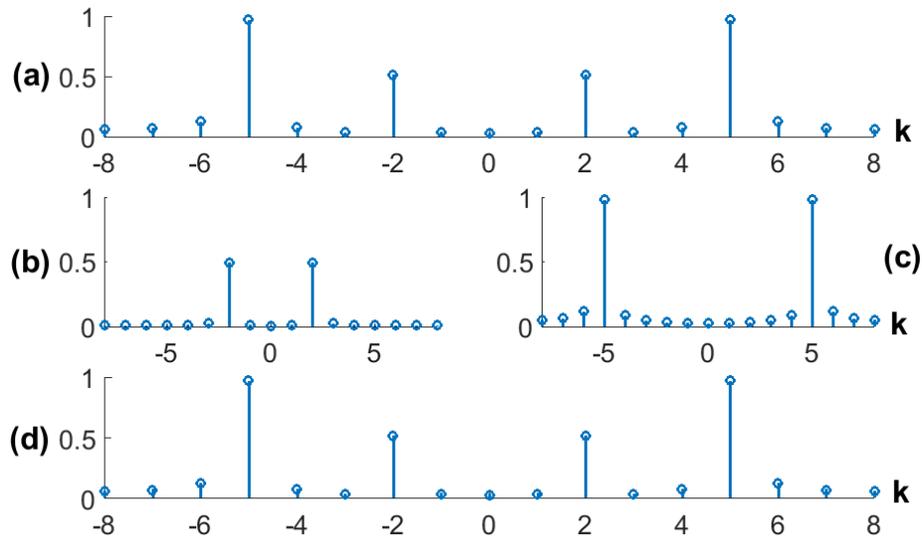


Figura 8.8: a) Espectro de la suma de ambas señales, b) espectro de la señal $x_1[n]$, c) espectro de la señal $x_2[n]$ y d) suma de los espectros b) y c)

```
function xk = dft(x,N)
% funcion que evalua la Transformada Discreta de Fourier como parametro hay que
%proporcionar la senal
% discreta x y el tamaño del vector N y el resultado lo devolvera en un vector
%complejo xk

xk=zeros(1,N);
for k=0:N-1
for n=0:N-1
xk(k+1)=xk(k+1)+x(n+1)*exp(-j*2*pi*k*n/N)/N;
end
end
```

```
%Figura 8.8 DFT

clear;
t=0.06;
ts=[0:t:1];
N=size(ts,2);
x1=sin(4*pi*ts); x2=2*sin(10*pi*ts); x3=x1+x2;
%% para demostrar la linealidad se calcula la TFD para x1, x1 y la suma
xk1=dft(x1,N); xk2=dft(x2,N); xk3=dft(x3,N);
```

```

fx=[-(N-1)/2:1:(N-1)/2];

m=fftshift(abs(xk3));
subplot(3,1,1); axis([-(N-1)/2 (N-1)/2 0 1]); hold;
stem(fx,m);

m=fftshift(abs(xk1));
subplot(3,2,3); axis([-(N-1)/2 (N-1)/2 0 1]); hold;
stem(fx,m);

m=fftshift(abs(xk2));
subplot(3,2,4); axis([-(N-1)/2 (N-1)/2 0 1]); hold;
stem(fx,m);

%%% se suman de las Transformadas de x1 y x2 y se grafican
m=fftshift(abs(xk1+xk2));
subplot(3,1,3); axis([-(N-1)/2 (N-1)/2 0 1]); hold;
stem(fx,m);

```

Ejemplo 8.5

La propiedad de simetría aplicando la DFT establece que si $x[n]$ es una señal de valores reales entonces

$$X(k) = X(-k) \quad x[n] \in \text{reales}$$

Es decir, la transformada de Fourier discreta de una señal será simétrica en frecuencia si la señal es un vector de valores reales. Verifique esta propiedad aplicando el algoritmo de la DFT.

Solución

En la figura 8.9a, se presenta una señal $x[n]$ con la que se comprueba esta propiedad. Como se observa la transformada de Fourier discreta del pulso cuadrado, da como resultado una función *sinc*, mostrada en la figura 8.9b, la cual es simétrica.

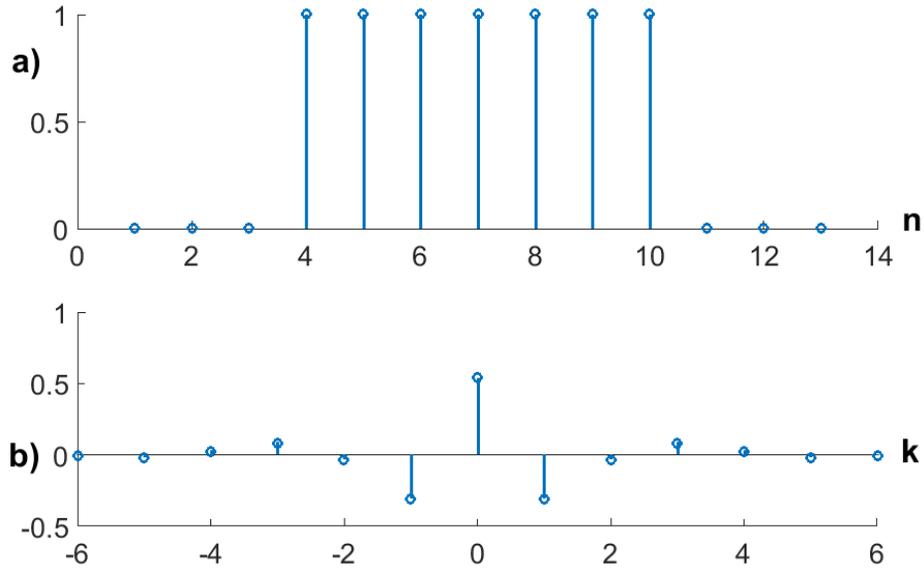


Figura 8.9: a) señal cuadrada b) espectro correspondiente

El código de MATLAB que demuestra la simetría en la Transformada de Fourier Discreta es el siguiente

```
%Figura 8.9
clear;
x1=[zeros(1,3) ones(1,7) zeros(1,3)];
N=size(x1,2);
xk=dft(x1,N);
fx=[-(N-1)/2:1:(N-1)/2];
m=fftshift(real(xk));
subplot(2,1,1);stem(x1);subplot(2,1,2);stem(fx,m);
```

La Tabla 8.3 representa el resumen de las ecuaciones de síntesis y análisis para la serie y transformada de Fourier.

	Serie de Fourier	Transformada de Fourier
TC	Ec. Síntesis	
	$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ <p>$x(t)$ periódica</p>	$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$ <p>$x(t)$ aperiódica</p>
	Ec. Análisis	
	$a_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$ <p>Espectro aperiódico y discreto</p>	$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$ <p>Espectro aperiódico y continuo</p>
TD	Ec. Síntesis	
	$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n}$ <p>$x[n]$ periódica</p>	$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$ <p>aperiódica</p>
	Ec. Análisis	
	$a_k = \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{-jk\omega_0 n}$ <p>Espectro periódico y discreto</p>	$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$ <p>Espectro periódico y continuo</p>

Tabla 8.3: Resumen de las ecuaciones de síntesis y análisis para la serie y la transformada de Fourier

Resumen

En este capítulo se presenta la representación de señales discretas periódicas en serie de Fourier en tiempo discreto como una suma finita de exponenciales complejas, donde cada una de las exponenciales representan las componentes frecuenciales de la señal analizada; a diferencia de la serie de Fourier en tiempo continuo que representa una señal periódica como una suma infinita de exponenciales complejas.

También se estudia la transformada de Fourier en tiempo discreto, la cual permite analizar señales aperiódicas y encontrar a partir de su aplicación sus componentes frecuenciales. El espectro determinado es una función continua de la frecuencia y es periódica, a diferencia de la transformada de Fourier en tiempo continuo que puede comprender cualquier intervalo de frecuencia. Se incluye también la DFT como una técnica para determinar la transformada de Fourier de señales discretas de duración finita.

Problemas

8.1 Para las secuencias discretas mostradas en la figura 8.10, calcule la serie discreta de Fourier para cada una. Verifique que la suma de la serie corresponde a la señal analizada.

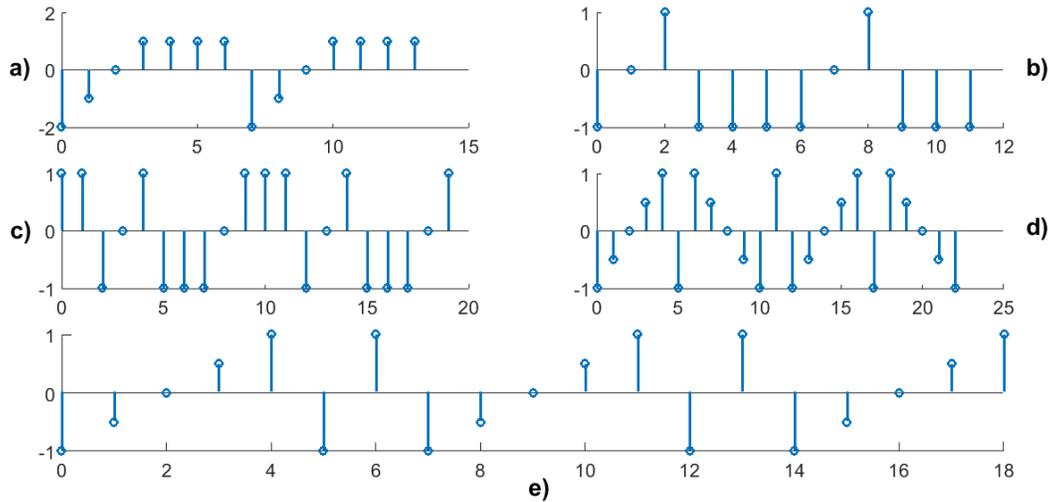


Figura 8.10: Señales discretas para el ejercicio 8.1

8.2 Para las siguientes secuencias discretas, determine para cada una su respectivo espectro en frecuencia.

- a) $x[n] = \{-2, -1, 0, 1, 1, 1, 1, -2, -1, 0, 1, 1, 1, 1\}$
- b) $x[n] = \{-1, 0, 1, -1, -1, -1, -1, 0, 1, -1, -1, -1\}$
- c) $x[n] = \{1, 1, -1, 0, 1, -1, -1, -1, 0, 1, 1, 1, -1, 0, 1, -1, -1, -1, 0, 1\}$
- d) $x[n] = \{-1, -0.5, 0, 0.5, 1, -1, 1, 0.5, 0, -0.5, -1, 1, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, -1, 1, 0.5, 0, -0.5, -1\}$
- e) $x[n] = \{-1, -0.5, 0, 0.5, 1, -1, 1, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, -1, 1, -1, -0.5, 0, 0.5, 1\}$

8.3 Verifique la linealidad de la DFT. Utilice MATLAB y las secuencias discretas siguientes

$$x_1[n] = \sin(4\pi n/8) \text{ y } x_2[n] = \cos(20\pi n/8)$$

8.4 Usando la propiedad de convolución de la Transformada discreta de Fourier, use MATLAB y las secuencias discretas siguientes para obtener la sumatoria de convolución correspondiente. Todas las secuencias inician en cero.

- a) $x[n] = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$
y
 $x[n] = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0\}$
- b) $x[n] = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$
y

$$x[n] = \{0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0\}$$

c) $x[n] = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$

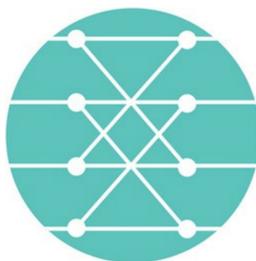
y

$$x[n] = \{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9\}$$

8.5 Use MATLAB y las secuencias discretas propuestas en el problema 8.2 para demostrar la propiedad de simetría de la Transformada Discreta de Fourier.

9

La transformada rápida de Fourier



9.1

Introducción

La transformada discreta de Fourier (TDF) se introdujo en el capítulo anterior, es una transformada discreta tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia y se define para señales de duración finita. No obstante, la implementación directa del par de transformación dado por las Ecs. (9.1) y (9.2) no es eficiente principalmente cuando N es grande; ya que se requiere un total de $N(N - 1)$ adiciones y N^2 multiplicaciones. Es por ello, que se han elaborado diversos algoritmos que realizan este proceso de una manera eficaz. El primer procedimiento para reducir la cantidad de cálculos fue proporcionado por Cooley y Turkey en 1965. Reciben el nombre de *Transformada Rápida de Fourier* (FFT <Fast Fourier Transform> por sus siglas en el idioma inglés).

9.2

Transformada Discreta de Fourier (TDF)

La definición de la transformada discreta de Fourier (TDF), más aceptada es

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-j2\pi kn/N} = F_d(k\Omega) \quad (9.1)$$

de la misma manera, la transformada discreta de Fourier inversa (TDFI) se define como

$$f[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k) e^{j2\pi nk/N} = f_d[nT_s] \quad (9.2)$$

donde

$$\frac{\Omega}{2\pi} = \frac{1}{NT_s} \quad (9.3)$$

y dado que el periodo de $f[n]$ es NT_s y $F(k)$ tiene un periodo de $N\Omega$, T_s es el espacio entre las muestras en el dominio de tiempo y Ω es el espacio entre las muestras en el dominio de la frecuencia.

Si la TDF se obtiene de la siguiente manera, el número de operaciones se reduce, como se puede inferir

$$F(k\Omega) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} f[2nT_s] e^{-j2\pi k(2n)/N} + \sum_{n=0}^{(N/2)-1} f[(2n+1)T_s] e^{-j2\pi k(2n+1)/N} \quad (9.4)$$

o

$$F(k\Omega) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} f[2nT_s] e^{-j2\pi kn/(N/2)} + e^{-j2\pi k/N} \sum_{n=0}^{(N/2)-1} f[(2n+1)T_s] e^{-j2\pi kn/(N/2)} \quad (9.5)$$

para N par. En las dos ecuaciones anteriores lo que se ha hecho es simplemente expresar la transformada discreta de Fourier de una señal como la suma de dos transformadas discretas de Fourier; una de las muestras de índice par y otra de las muestras de índice impar de la señal original. Considerando la periodicidad, con este esquema el número de multiplicaciones se reduce a $2(N/2)^2 + N/2 = N^2/2 + N/2$. Para entender esto considere el siguiente ejemplo.

Ejemplo 9.1

Determine la transformada discreta de Fourier de una secuencia de 4 muestras, ($N = 4$).

Solución

De la definición

$$X(k) = \sum_{n=0}^3 x[n]e^{-j2\pi kn/4}$$

en forma matricial

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-j\pi/2} & e^{-j\pi} & e^{-j3\pi/2} \\ 1 & e^{-j\pi} & e^{-j2\pi} & e^{-j3\pi} \\ 1 & e^{-j3\pi/2} & e^{-j3\pi} & e^{-j9\pi/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix}$$

Este cálculo requiere efectuar 16 multiplicaciones y 12 sumas, como se ha supuesto. Pero cuando se considera la periodicidad, es decir, dado que

$$e^{-j\pi kn/2} = e^{-j\pi k(n+N)/2}$$

en la ecuación matricial anterior, se tiene

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix}$$

de donde

$$\begin{aligned} X(0) &= x[0] + x[1] + x[2] + x[3] = [x[0] + x[2]] + [x[1] + x[3]] \\ X(1) &= x[0] - jx[1] - x[2] + jx[3] = [x[0] - x[2]] - j[x[1] + x[3]] \\ X(2) &= x[0] - x[1] + x[2] - x[3] = [x[0] + x[2]] - [x[1] + x[3]] \\ X(4) &= x[0] + jx[1] - x[2] - jx[3] = [x[0] - x[2]] + j[x[1] + x[3]] \end{aligned}$$

en la expresión anterior se puede notar que el primer y tercer renglones son idénticos excepto por un signo negativo, lo mismo ocurre para el segundo y cuarto renglones. Teniendo en cuenta esto, el número de multiplicaciones diferentes es de diez, $(N/2)^2$ para el primer o tercer renglones lo mismo que para el segundo o cuarto renglones más $N/2$ multiplicaciones adicionales.

Como se mencionó, Cooley y Turkey desarrollaron un algoritmo que permite obtener la transformada discreta de Fourier y reduce la cantidad de operaciones (productos y sumas) requeridas. En la figura 9.1, mediante un *reograma*¹, se muestra el algoritmo correspondiente para el ejemplo anterior.

¹Un reograma es una herramienta matemática gráfica para describir relaciones lineales.

La descomposición de la transformada discreta de Fourier dada por las Ecs. (9.4) y (9.5) recibe el nombre de *decimación en el tiempo* y es adecuada cuando el número de muestras de una señal es igual a una potencia de dos, o sea, $N = 2^r$, donde r es un número entero. La FFT de una secuencia $N = 2^r$ se dice que es una FFT de *radix2*.

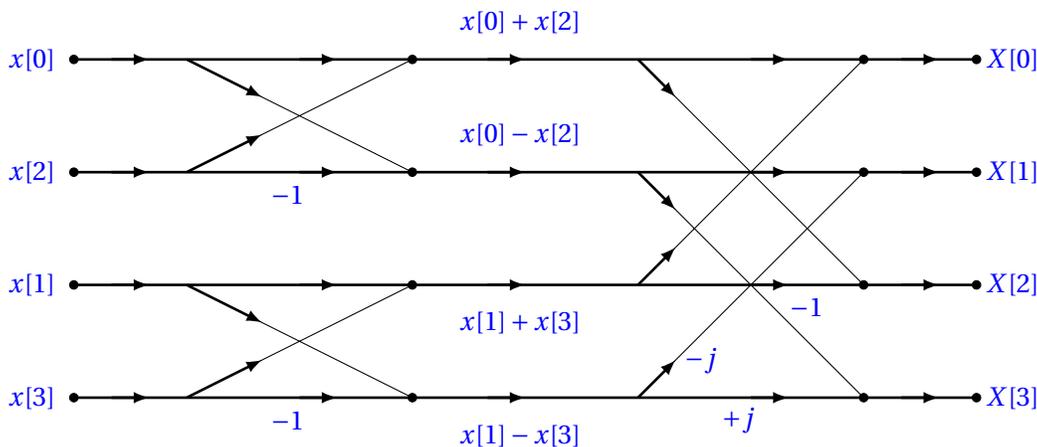


Figura 9.1: Reograma para la obtención de la FFT con $N = 4$.

Para obtener la TDF mediante la decimación en el tiempo, consideremos una secuencia $x[n]$ con una longitud de N muestras, donde N es una potencia de 2. A partir de esta secuencia se definen dos nuevas secuencias de longitud $N/2$ cada una, la primera formada por las muestras de índice par ($x[0], x[2], x[4], \dots$) y la otra por las muestras de índice impar ($x[1], x[3], x[5], \dots$).

Esto es

$$x_1[n] = x[2n] \quad 0 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1$$

$$x_2[n] = x[2n + 1] \quad 0 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1$$

por consiguiente, al llevar a cabo la siguiente asignación

$$W_N^{nk} = e^{-j2\pi(nk)/N} \quad (9.6)$$

La TDF de $x[n]$ es

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x_1[n] W_N^{nk} + \sum_{n=0}^{N-1} x_2[n] W_N^{nk} \\ &= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[2n] W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[2n+1] W_N^{(2n+1)k} \quad 0 \leq k \leq N-1 \end{aligned} \quad (9.7)$$

Teniendo en cuenta que

$$W_N^{2nk} = e^{-j2\pi(2nk)/N} = e^{-j2\pi(nk)/(N/2)} = W_{N/2}^{nk} \quad (9.8)$$

$$W_N^{(2n+1)k} = W_N^k W_N^{2nk} = W_N^k W_{N/2}^{nk}$$

entonces

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x_1[n] W_{N/2}^{nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x_2[n] W_{N/2}^{nk} \\ &= X_1(k) + W_N^k X_2(k) \end{aligned} \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (9.9)$$

donde

$$x_1[n] \leftrightarrow X_1(k)$$

$$x_2[n] \leftrightarrow X_2(k)$$

Pero $X_1(k)$ y $X_2(k)$ son periódicas, con periodo $N/2$, es decir

$$X_1(k) = X_1\left(k \pm \frac{N}{2}\right) \quad (9.10)$$

$$X_2(k) = X_2\left(k \pm \frac{N}{2}\right)$$

por lo que la Ec. (9.9) se puede descomponer, nuevamente, en dos partes; una que calcule las primeras $N/2$ muestras del espectro y la otra las $N/2$ muestras restantes, es decir

$$X(k) = X_1(k) + W_N^k X_2(k) \quad 0 \leq k \leq \frac{N}{2} - 1 \quad (9.11)$$

y

$$\begin{aligned} X\left(k + \frac{N}{2}\right) &= X_1\left(k + \frac{N}{2}\right) + W_N^{k+\frac{N}{2}} X_2\left(k + \frac{N}{2}\right) \\ &= X_1(k) + W_N^k X_2(k) \end{aligned} \quad 0 \leq k \leq \frac{N}{2} - 1 \quad (9.12)$$

pero dado que

$$W_N^{k+N/2} = e^{-j2\pi(k+N/2)/N} = e^{-j2\pi k/N} e^{-j\pi} = -e^{-j2\pi k/N} = -W_N^k \quad (9.13)$$

por consiguiente

$$X\left(k + \frac{N}{2}\right) = X_1(k) - W_N^k X_2(k) \quad 0 \leq k \leq \frac{N}{2} - 1 \quad (9.14)$$

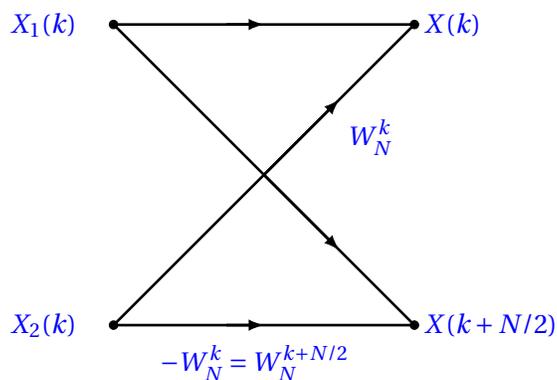


Figura 9.2: Reograma para representar una conexión mariposa.

Las Ecs. (9.11), (9.12) y (9.14) se denominan *ecuaciones de conexión* e indican simplemente que las muestras del espectro de $X(k)$ y $X(k+N/2)$ se obtienen a partir de $X_1(k)$ y $X_2(k)$. Una representación gráfica o reograma de dichas ecuaciones se muestra en la figura 9.2, reograma que recibe el nombre de *mariposa* debido a su forma.

Los resultados obtenidos se representan en la figura 9.3 para encontrar la TDF de una secuencia de ocho muestras.

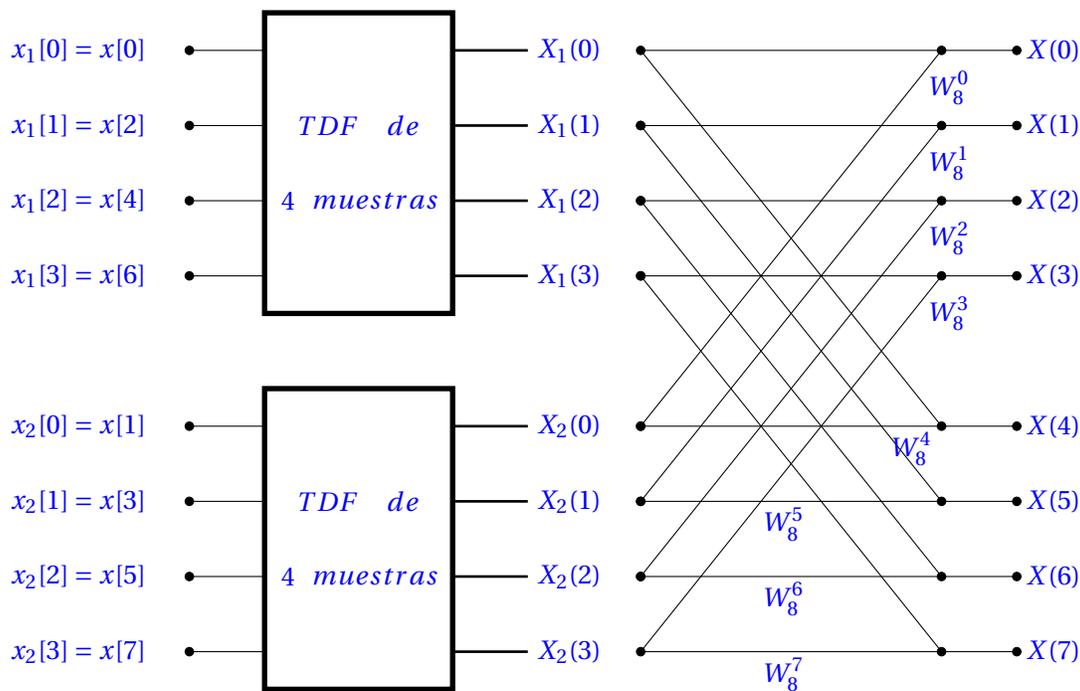


Figura 9.3: Representación de la TDF de una secuencia de ocho muestras después de efectuar una primera decimación en el tiempo.

Repitiendo el proceso de decimación en el tiempo, $x_1[n]$ y $x_2[n]$ se descomponen en dos nuevas secuencias, una de índice par y otra de índice impar. Por lo que ahora se tienen cuatro subconjuntos de muestras de entrada, a saber:

$$\begin{aligned}
x_{11}[m] &= x_1[2m] = x[4m] & 0 \leq m \leq \frac{N}{4} - 1 \\
x_{12}[m] &= x_1[2m + 1] = x[4m + 2] & 0 \leq m \leq \frac{N}{4} - 1 \\
x_{21}[m] &= x_2[2m] = x[4m + 1] & 0 \leq m \leq \frac{N}{4} - 1 \\
x_{22}[m] &= x_2[2m + 1] = x[4m + 3] & 0 \leq m \leq \frac{N}{4} - 1
\end{aligned} \tag{9.15}$$

Las ecuaciones de conexión resultantes son

$$\begin{aligned}
X_1(k) &= X_{11}(k) + W_N^{2k} X_{12}(k) & 0 \leq k \leq \frac{N}{4} - 1 \\
X_1\left(k + \frac{N}{4}\right) &= X_{11}(k) + W_N^{2k+N/2} X_{12}(k) & 0 \leq k \leq \frac{N}{4} - 1
\end{aligned} \tag{9.16}$$

$$\begin{aligned}
X_2(k) &= X_{21}(k) + W_N^{2k} X_{22}(k) & 0 \leq k \leq \frac{N}{4} - 1 \\
X_2\left(k + \frac{N}{4}\right) &= X_{21}(k) + W_N^{2k+N/2} X_{22}(k) & 0 \leq k \leq \frac{N}{4} - 1
\end{aligned} \tag{9.17}$$

La figura 9.4 muestra la representación gráfica para determinar $X_1(k)$, $X_1(k + N/4)$, $X_2(k)$ y $X_2(k + N/4)$ de la *TDF* de una secuencia de ocho muestras.

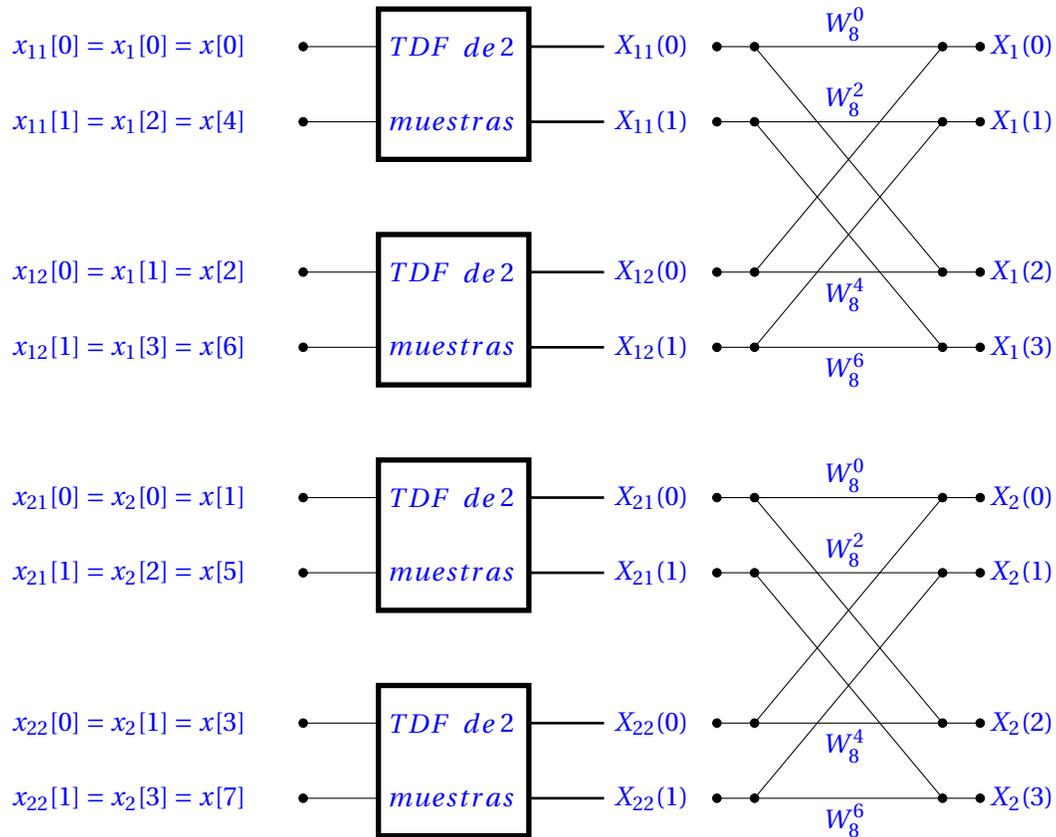


Figura 9.4: Representación del cálculo de $X_1(k)$ y $X_2(k)$ de una secuencia de ocho muestras después de efectuar una segunda decimación en el tiempo.

La técnica de decimación en el tiempo se sigue repitiendo hasta que las secuencias de entrada de las *TDF* individuales no se puedan dividir o descomponer más. Lo que ocurre en la siguiente descomposición para la secuencia de ocho muestras que se emplea como ejemplo. El reograma final para la secuencia de ocho muestras se muestra en la figura 9.5.

Es necesario hacer notar que en los reogramas de las figuras 9.3, 9.4 y 9.5 se debe sobrentender que el sentido de las operaciones matemáticas de sumas y productos es de izquierda a derecha, razón por la cual no se han incluido flechas para señalar el sentido del flujo del algoritmo.

En la figura 9.6 se muestra el algoritmo de decimación en el tiempo de la *FFT* para la secuencia de ocho muestras de la figura 9.5 mediante un diagrama de bloques, otra forma de representación muy difundida. Los elementos dentro de la línea de trazos constituyen la mariposa de la figura 9.2.

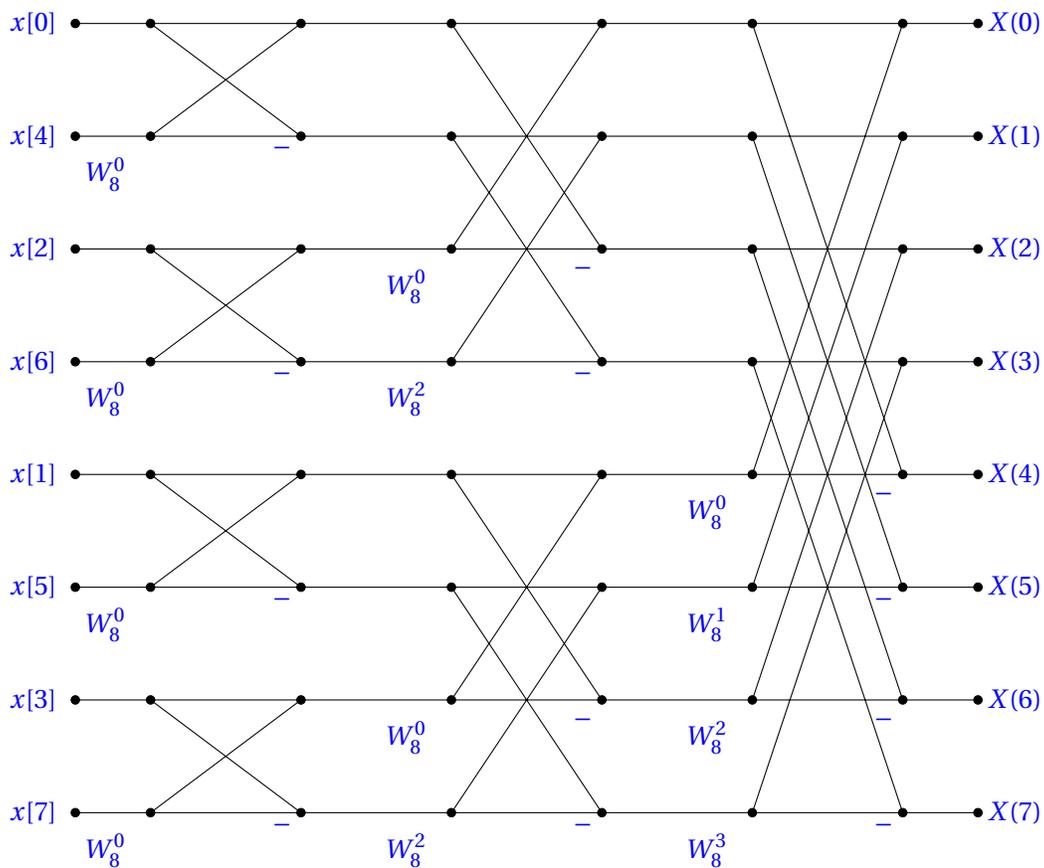


Figura 9.5: Algoritmo de decimación en el tiempo de la FFT para $N = 8$.

De lo visto hasta aquí, se puede concluir que el proceso para determinar la TDF de una secuencia de N muestras, donde N es una potencia de dos, mediante la técnica de decimación en el tiempo, se reduce a la obtención de varias TDF de dos elementos. En general, el número de etapas o de veces en que hay que efectuar la descomposición de las secuencias de entrada en secuencias de índice par e impar es $\log_2 N$. Para el ejemplo que se ha empleado, el número de veces en que se aplica la decimación es $\log_2 8 = 3$ como se aprecia en las figuras 9.5 o 9.6.

En cada etapa del algoritmo, se determina una pareja de variables de salida a partir de un par de variables de entrada que no se requieren para calcular otras variables de salida posteriores, por lo que dichas variables de salida se pueden almacenar en las localidades antes ocupadas por las variables de entrada, lo que a su vez se traduce en un ahorro en la memoria. Por otra parte, es posible demostrar que mediante la técnica de decimación en el tiempo, el número de multiplicaciones se reduce a no más de $(N/2)\log_2 N$.

En las figuras 9.5 o 9.6 se observa que los valores de la secuencia de entrada no están en un orden natural. El orden en que aparecen se denomina *orden de bits invertidos*, éste, es el orden que se requiere para que la salida (*espectro*) presente un orden natural. El orden de bits invertido se obtiene escribiendo la forma binaria de un número n al revés.

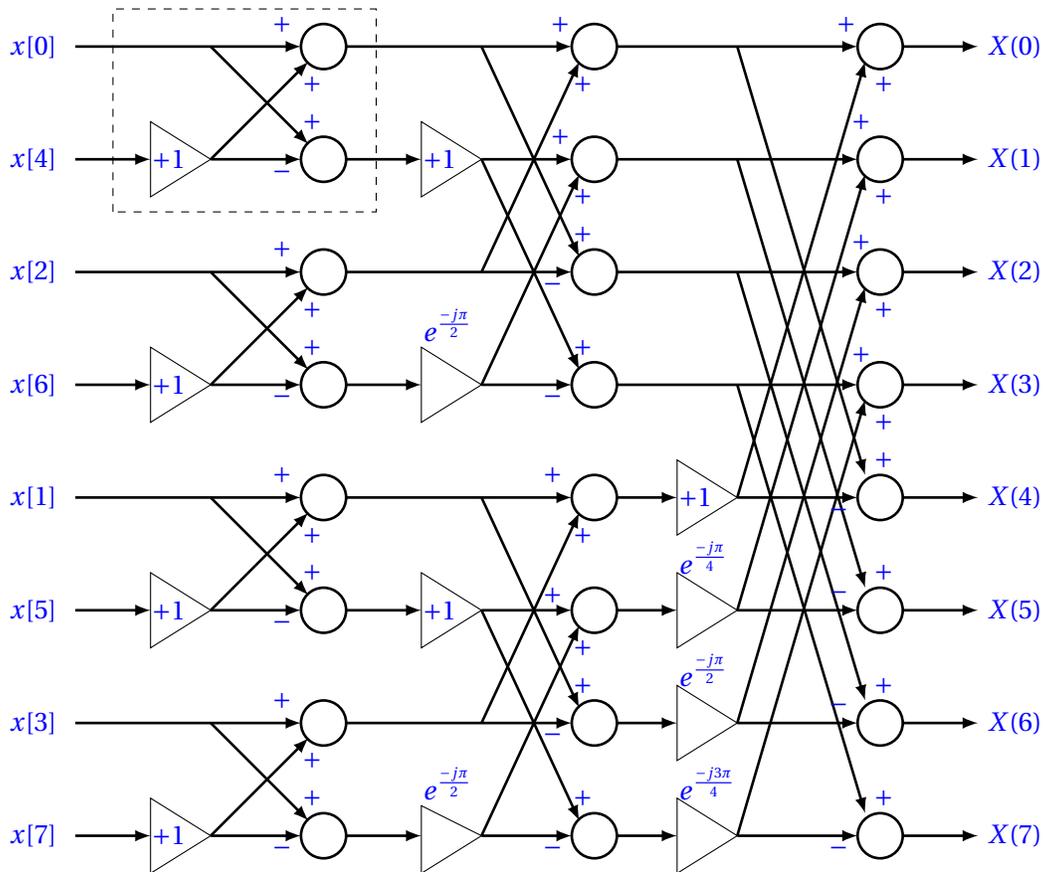


Figura 9.6: Algoritmo de decimación en el tiempo de la FFT para $N = 8$.

Así, para $N = 8$ el orden natural es 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111 es su representación binaria correspondiente, al invertir el orden el orden de los bits se tiene 000, 100, 010, 110, 001, 101, 011, 111 cuya representación en forma decimal es 0, 4, 2, 6, 1, 5, 3, 7 que es el orden en que la secuencia de entrada aparece en las figuras 9.5 o 9.6.

En la deducción del algoritmo anterior se ha supuesto que el número de muestras es igual a una potencia de 2; cuando esto no sucede, se agregan muestras de valor cero (*augmenting zeros* en el idioma inglés) hasta que la longitud de la secuencia satisfaga dicha restricción.

9.3

La transformada discreta de Fourier inversa (TDFI)

La transformada discreta de Fourier inversa está dada por la siguiente expresión

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{-j2\pi(nk)/N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (9.18)$$

el complejo conjugado de la expresión anterior es

$$Nx^*[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) W_N^{nk} \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (9.19)$$

pero el miembro derecho de la Ec. (9.19) constituye la *TDF* de $X^*(k)$ y por consiguiente la *TDFI* se puede determinar con el mismo algoritmo de la *FFT* ya visto. Así

$$x[n] = \frac{1}{N} \left[\sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) W_N^{nk} \right]^* \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (9.20)$$

De aquí, se concluye, que el algoritmo para determinar la *TDF* permite determinar la *TDFI*, todo lo que hay que hacer es sustituir los multiplicadores por su complejos conjugados y multiplicar por $1/N$.

En **MATLAB** la función **fft(x)** determina la *TDF* del vector x con un algoritmo de la *FFT* de radix 2 si la longitud de la secuencia es una potencia de dos y un algoritmo más lento (*radix mixto*) si la longitud es diferente. La función **fft(x,n)** calcula la *FFT* de una secuencia de n muestras, si la longitud de x es menor que n , x se expande con ceros hasta completar una longitud n , si por el contrario la longitud x es mayor que n , la secuencia se trunca.

Con las funciones **ifft(x)** e **ifft(x,n)** se obtiene la *FFT* inversa del vector x y la de una secuencia de n muestras.

En el ejemplo 9.2 se muestra el código para determinar la *TDF* de una secuencia $x[n]$, de longitud cuatro y a manera de comprobación a partir de su transformada, $X(k)$, con la función **ifft(x)** se obtiene $x[n]$.

Ejemplo 9.2

- Mediante un programa realizado en **MATLAB**, encuentre la *TDF* de una señal $x[n]$, cuyas muestras tienen una longitud de $N = 4$, con los siguientes valores $x[0] = 2$, $x[1] = 2$, $x[2] = 1$ y $x[3] = 2$.
- Obtenga la secuencia $x[n]$ a partir de $X(k)$.

Solución

Dado que no se indica el valor de T_s (tiempo entre las muestras), se considera igual a 1 segundo.

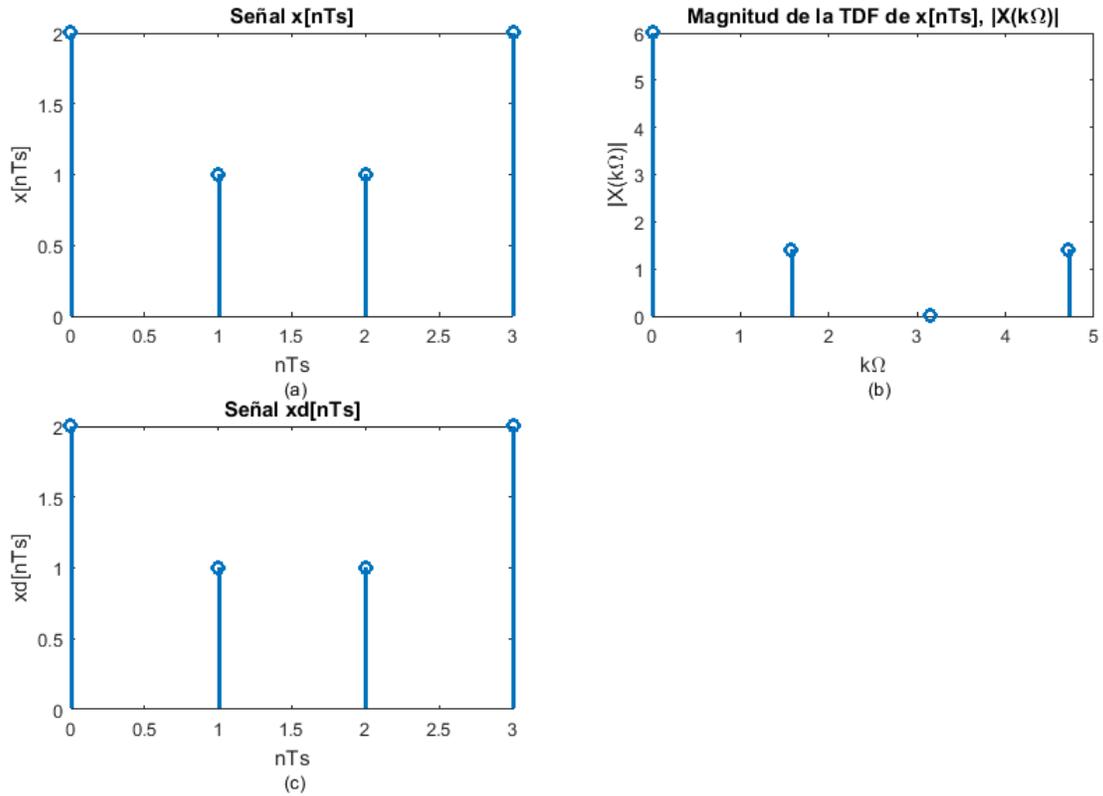


Figura 9.7: (a) Señal de 4 muestras, $x[n]$. (b) Transformada de $x[n]$, $X_d(k)$. (c) Transformada Inversa de $X_d(k)$, $x_d[n]$.

```

% Código de la Fig. 9.7. Señal discreta y su espectro discreto
N = 4; Ts = 1;
n = 0:N-1; k = 0:N-1;
omega = 2*pi/(N*Ts);

fprintf (' Señal discreta x[nTs] \n')
x = [2 1 1 2]
fprintf (' Espectro de x[nTs], Xd(k) \n')
Xd = Ts*fft(x)
fprintf (' Transformada Discreta de Fourier Inversa de Xd(k), xd[nTs] \n')
xd = 1/Ts*ifft(Xd)

subplot(2,2,1); stem(n*Ts,x,'linewidth',2);
title('Señal x[nTs]'); ylabel('x[nTs]'); xlabel('nTs');
text(1.45,-0.5,'(a)')
subplot(2,2,2); stem(k*omega,abs(Xd),'linewidth',2);
title('Magnitud de la TDF de x[nTs], |X(k\Omega)|');
ylabel('|X(k\Omega)|'); xlabel('k\Omega');
text(2.45,-1.2,'(b)')
subplot(2,2,3); stem(n*Ts,xd,'linewidth',2);
title('Señal xd[nTs]'); ylabel('xd[nTs]'); xlabel('nTs');
text(1.45,-0.5,'(c)')

```

Los resultados que se obtienen, son:

```

Señal discreta x[nTs]
x =
2.0    1.0    1.0    2.0
Espectro de x[nTs], Xd(k)
Xd =
Columns 1 through 3
6.00    1.00 + 1.00i    0.00    1.00 - 1.00i
Transformada Discreta de Fourier Inversa de Xd(k), xd[nTs]
xd =
2.00    1.00    1.00    2.00

```

En la figura 9.7 se observa que la primera y tercera gráficas son idénticas, como se espera.

Como comentario final, es importante recalcar, que debido a la importancia de la *TDF* en el procesamiento de las señales digitales, los algoritmos de la *FFT* resultan como una necesidad de realizar tal procesamiento rápidamente, principalmente en aplicaciones de tiempo real en donde el parámetro *tiempo* es un factor relevante.

9.4

Aplicaciones

En esta sección se ven algunas aplicaciones, por medio de ejemplos sencillos, con la finalidad de que el lector tenga una idea clara de la naturaleza de los mismos y de los conceptos que se aplican y no se pierda con cálculos complicados y muy elaborados.

Ejemplo 9.3

a) Determine la transformada de Fourier *continua* de la señal

$$x(t) = u(t) - u(t-1) \quad (9.21)$$

b) Obtenga la *TDF* de $x(t)$ con las muestras siguientes:

$$\begin{array}{cccc} x[0] = 1, & x[0.25] = 1, & x[0.5] = 1, & x[0.75] = 1 \\ x[1] = 0, & x[1.25] = 0, & x[1.5] = 0, & x[1.75] = 0 \end{array}$$

lo que implica que $N = 8$ y $T_s = 0.25$

Solución

a) Dado que

$$u(t + \tau/2) - u(t - \tau/2) \leftrightarrow \tau Sa(\omega\tau/2) = \tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} \quad (9.22)$$

y considerando la propiedad de desplazamiento en el tiempo

$$f(t - t_0) \leftrightarrow F(\omega)e^{j\omega t_0}$$

la transformada de $x(t)$ es, con $\tau = 1$ y $t_0 = 0.5$

$$X(\omega) = e^{-j\omega/2} Sa(\omega/2) = e^{-j\omega/2} \frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \quad (9.23)$$

b) En este caso el espacio entre muestras en el dominio del tiempo es $T_s = 0.25$ y la secuencia discreta se considera que tiene un periodo de $NT_s = 2$. Por lo que el espacio entre muestras en el dominio de la frecuencia es de $\Omega = 2\pi/(NT_s) = \pi$ y el periodo del espectro es $N\Omega = 8\pi$.

El código para obtener la *TDF* de la secuencia $x[nT_s]$ de $x(t)$ es el siguiente:

```

% Código de la Fig. 9.8. Espectro continuo y discreto
% Señal en el dominio del tiempo
N = 8; Ts = 2/N;
n = 0:N-1;
fprintf(' Señal discreta x[nTs] \n')
x = secuno(0,0,N-1) - secuno((N/2),0,N-1)
subplot(2,1,1); stem(n*Ts,x,'b','linewidth',2);
title('Señal x[nTs]'); ylabel('x[nTs]'); xlabel('nTs');
pause

% Transformada discreta de Fourier de x[nTs]
fprintf(' Espectro de x[nTs], Xd\n')
k = 0:N-1;
omega = 2*pi/(N*Ts);
Xd = Ts*fft(x)
Magnitud = abs(Xd)
Fase = angle(Xd)*180/pi
subplot(2,1,2); stem(k*omega,Magnitud,'b','linewidth',2);
title('Magnitud de la TDF de x[nTs], Xd(k\Omega)'); ylabel('|Xd(k\Omega)|');
xlabel('k\Omega');
hold on;
pause;

% Transformada continua
m = 0:0.01:N-1;
F = exp(-j*m*pi/2).*sin(m*pi/2)./(m*pi/2);
subplot(2,1,2); plot(m*omega,abs(F),'r','linewidth',2);
ylabel('|Xd(k\Omega)|, |F(\omega)|'); xlabel('k\Omega, \omega');
hold off

```

Las gráficas que se generan con el código anterior se muestran en la figura 9.8.

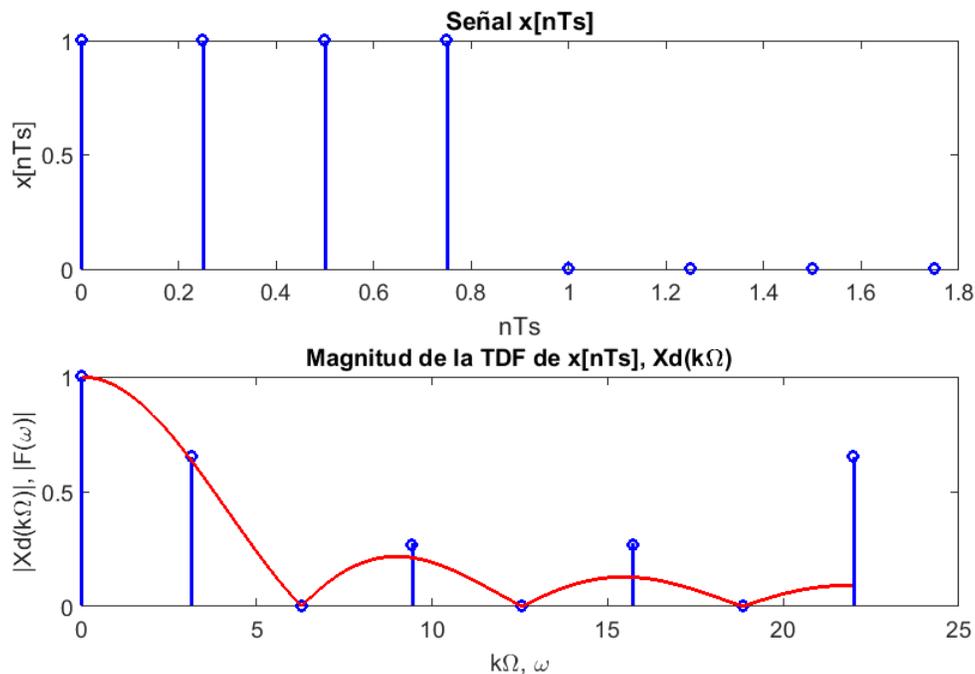


Figura 9.8: Espectro continuo y discreto de la señal del ejemplo 9.3.

En el programa de MATLAB, con el propósito de comparación únicamente, se ha incluido la gráfica de la transformada de Fourier continua.

$$F(m\Omega) = e^{-jm\pi/2} Sa(m\pi/2) = e^{-jm\pi/2} \frac{\sin(m\pi/2)}{m\pi/2}$$

Cuando el número de muestras N es pequeño, hay una diferencia notable entre las transformadas continua y discreta como se aprecia en la figura 9.8, ($N = 8$). Sin embargo cuando el número de muestras aumenta la diferencia disminuye. El lector puede verificar este hecho modificando el valor de N en el código anterior.

También se debe notar, que cuando se determina la transformada discreta de la señal por medio de la función **fft(x)**, el resultado se multiplica por el factor T_s , término que se acordó suprimir en la deducción de la *TDF*. (Véase los problemas 9.2 y 9.3)

Ejemplo 9.4

a) Determine la convolución de la señal $x(t) = u(t) - u(t-2)$ consigo misma, es decir

$$y(t) = x(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)x(t-\tau) d\tau$$

b) Encuentre la *TDF* de $y[n]$ cuando $N = 8$ y $T_s = 0.5$

Solución

a)

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} [u(\tau) - u(\tau-2)][u(t-\tau) - u(t-\tau-2)] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)u(t-\tau) d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)u(t-\tau-2) d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau-2)u(t-\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau-2)u(t-\tau-2) d\tau \end{aligned}$$

Recordando que la función escalón sólo tiene valor cuando su argumento es positivo, y si

$$\begin{aligned} u(t) &= u_{-1}(t) \\ \int_{-\infty}^t u_k(\tau) d\tau &= u_{k-1}(t) \quad \forall k \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^t u_{-1}(\tau) d\tau - \int_{-\infty}^{t-2} u_{-1}(\tau) d\tau - \int_{-\infty}^t u_{-1}(\tau-2) d\tau - \int_{-\infty}^{t-2} u_{-1}(\tau-2) d\tau \\ &= u_{-2}(t) - u_{-2}(t-2) - u_{-2}(t-2) + u_{-2}(t-2-2) \\ &= u_{-2}(t) - 2u_{-2}(t-2) + u_{-2}(t-4) \end{aligned} \tag{9.24}$$

La gráfica correspondiente a la Ec. (9.24) se muestra en la figura 9.9.

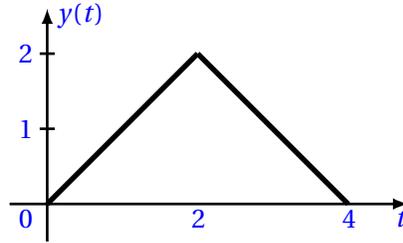


Figura 9.9: $y(t) = x(t) * x(t)$, donde $x(t) = u_{-1}(t) - u_{-1}(t-2)$.

b) La *TDF* de la secuencia $y[nTs]$ que se obtiene de $y(t)$, se determina con el siguiente código para `MATLAB`. En dicho código, primero se genera la secuencia $x[nTs]$ a partir de $x(t)$, después se determina la *TDF* de la misma, $X(k\Omega)$. A continuación, dado que realizar la convolución en el dominio del tiempo equivale a multiplicar en el dominio de la frecuencia, se lleva a cabo el producto $X(k\Omega)$ por $X(k\Omega)$, de esta manera se tiene la respuesta deseada. Finalmente como comprobación, se encuentra la *TDFI* del producto anterior con la función `ifft(x)` de `MATLAB`.

Las gráficas resultantes se muestran en la 9.10.

Se recomienda al lector ejecutar este programa para diversos valores de N .

¿Qué se puede deducir?

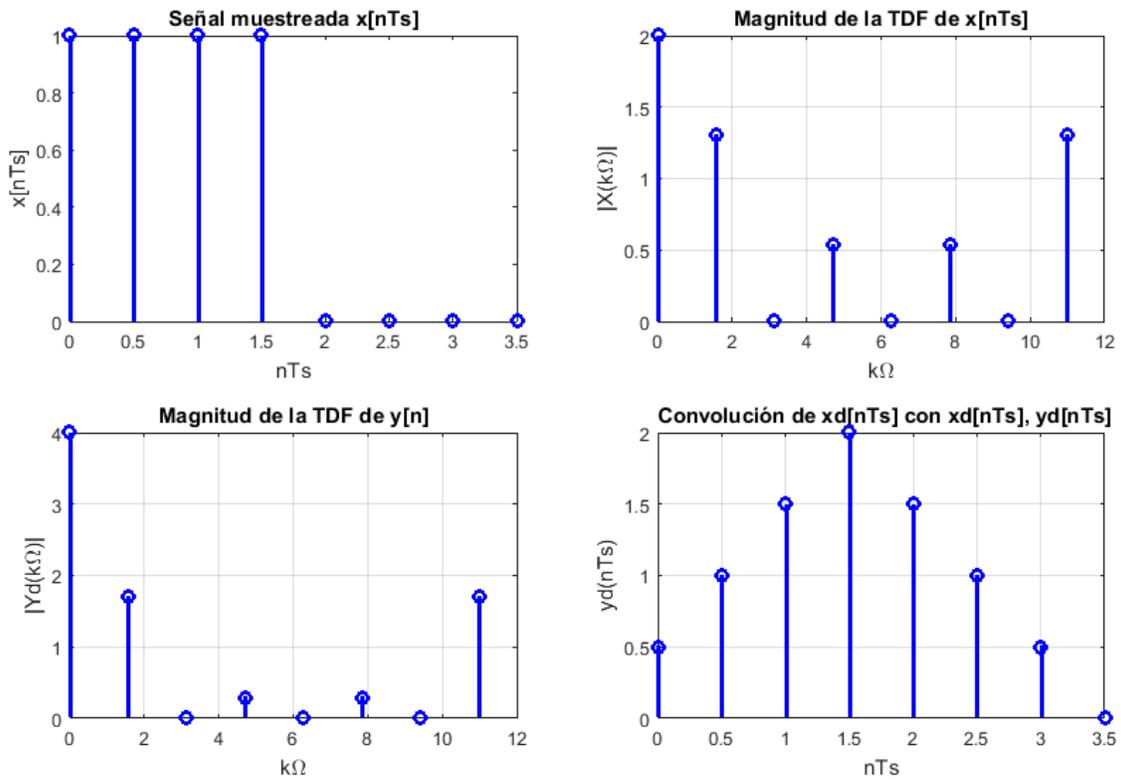


Figura 9.10: Propiedad de la convolución del ejemplo 9.4

```

% Código de la Fig. 9.10. Convolución
% Señal en el dominio del tiempo
N = 8; Ts = 4/N;
n = 0:N-1; k = 0:N-1;
fprintf(' Señal muestreada x[nTs] \n')
x = secuno(0,0,N-1) - secuno(N/2,0,N-1)
subplot(2,2,1); stem(n*Ts,x,'b','linewidth',2);
title('Señal muestreada x[nTs]');
ylabel('x[nTs]'); xlabel('nTs');

% Transformada discreta de Fourier de x[n]
fprintf(' Espectro de x[nTs], Xd \n')
Xd = Ts*fft(x)
Magnitud = abs(Xd);
Fase = angle(Xd)*180/pi;
omega = 2*pi/(N*Ts);
subplot(2,2,2); stem(k*omega,Magnitud,'b','linewidth',2);
title('Magnitud de la TDF de x[nTs]');
ylabel('|X(k\Omega)|'); xlabel('k\Omega');
grid
% Producto de las transformadas
fprintf(' Transformada de y[nTs], Yd = Xd*Xd \n')
Yd = Xd.*Xd
subplot(2,2,3); stem(k*omega,abs(Yd),'b','linewidth',2);
title('Magnitud de la TDF de y[n]');
ylabel('|Yd(k\Omega)|'); xlabel('k\Omega');
grid
% Antitransformada del producto de las transformadas
fprintf(' Transformada Discreta de Fourier Inversa de Yd, yd[nTs]\n')
yd = 1/Ts*ifft(Yd)
subplot(2,2,4); stem(n*Ts,yd,'b','linewidth',2);
title(' Convolución de xd[nTs] con xd[nTs], yd[nTs]');
ylabel('yd(nTs)'); xlabel('nTs');
grid

```

Ejemplo 9.5

Demuestre que el aserto siguiente es verdadero.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(a\omega)}{a\omega} d\omega = \frac{\pi}{a}$$

Solución

Puesto que la transformada de Fourier inversa continua se define como

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

y de la Ec. (9.22)

$$u(t+a) - u(t-a) \longleftrightarrow 2aSa(a\omega) = 2a \frac{\sin(a\omega)}{a\omega}$$

entonces

$$f(t)\Big|_{t=0} = f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \Big|_{t=0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) d\omega$$

En nuestro problema

$$u(t+a) - u(t-a)\Big|_{t=0} = 1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2a \frac{\sin(a\omega)}{a\omega} d\omega = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(a\omega)}{a\omega} d\omega$$

por consiguiente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(a\omega)}{a\omega} d\omega = \frac{\pi}{a}$$

Como ejercicio, empleando los resultado del ejemplo 9.4, determine el valor de la siguiente integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(a\omega)}{a\omega} \right)^2 d\omega$$

Ejemplo 9.6

Encuentre la potencia promedio disipada por un resistor de 5Ω , si la corriente eléctrica que circula a través del resistor es

$$i(t) = 2 + 3 \cos(3.8t) + 5 \sin(2.3t) + 4 \sin(5t) \quad [A]$$

Solución

El teorema de Parseval para la serie trigonométrica de Fourier es

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |f(t)|^2 dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

representa la potencia promedio disipada en un resistor de 1Ω . Para poder aplicar la relación, es necesario notar que la serie trigonométrica de la corriente $i(t)$ es la misma expresión que se proporciona, por lo que la potencia promedio que se desea determinar es

$$P\Big|_{5\Omega} = 5 \left[2^2 + \frac{1}{2} (3^2 + 5^2 + 4^2) \right] = 5 \left(4 + \frac{50}{2} \right) = 5 \left(\frac{58}{2} \right) = 145 \text{ [W]}$$

9.5

Respuesta en frecuencia

La respuesta en frecuencia constituye una técnica clásica del análisis y diseño de los sistemas continuos y discretos lineales e invariantes en el tiempo. La idea fundamental de esta respuesta es: si una señal sinusoidal se aplica a la entrada de un sistema estable, la señal de la respuesta de estado permanente es otra señal sinusoidal de la misma frecuencia.

En forma teórica, se obtiene, a partir de la función de transferencia, de la siguiente manera. Dado que

$$H(s) \Big|_{s=j\omega} = H(j\omega) = |H(j\omega)| \angle H(j\omega)$$

la gráfica resulta al trazar o dibujar $|H(j\omega)|$ y $\angle H(j\omega)$ versus ω , conforme $0 \leq \omega \leq +\infty$. La magnitud y el ángulo se especifican como *ganancia* y *cambio de fase*, respectivamente.

La gráfica de la respuesta en frecuencia se puede determinar a partir de datos experimentales. Se aplica una señal sinusoidal de alguna frecuencia, ω , a la entrada y se mide la magnitud relativa y la diferencia en el ángulo de fase de la respuesta en estado permanente de la señal de salida. La ganancia está dada por razón de la amplitud de la salida a la amplitud de la entrada, y el cambio de fase es la diferencia relativa entre el ángulo de la señal de salida y la señal de entrada. Este procedimiento se repite para diferentes frecuencias de la señal sinusoidal de la entrada.

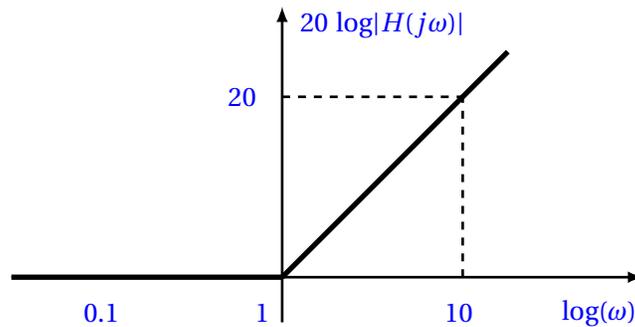
En general, esto es un trabajo tedioso, ya que se deben calcular los valores de $|H(j\omega)|$ y $\angle H(j\omega)$ cuando ω varía. Una representación de este tipo muy común y útil en Ingeniería de Control y Comunicaciones, es la llamada traza de Bode en la que se esbozan $20 \log |H(j\omega)|$ y $\angle H(j\omega)$ versus ω en una escala semilogarítmica. Como la función de transferencia es una multiplicación y división de factores, esta representación, simplifica la obtención de las gráficas de Bode, puesto que la multiplicación y división de factores equivale a sumar y restar, respectivamente. Las unidades de $20 \log |H(j\omega)|$ se denominan *decibeles (dB)*, y se dice que entre las frecuencias ω_1 y ω_2 hay una *década (dec)* si $\omega_2 = 10 \omega_1$ o una *octava (oct)* si $\omega_2 = 2 \omega_1$.

Como ejemplo, sea $H(j\omega) = 1 + j\omega$, por lo que $20 \log |H(j\omega)|$ es aproximadamente.

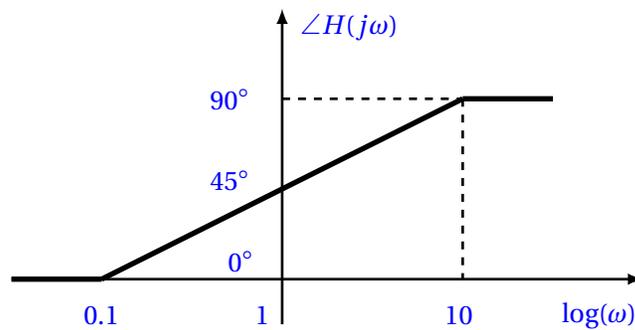
$$20 \log(\sqrt{1 + \omega^2}) \approx \begin{cases} 0 & \text{para } \omega \leq 1 \\ 20 \log \omega & \text{para } \omega \geq 1 \end{cases}$$

La gráfica $20 \log |H(j\omega)|$ versus $\log \omega$ consiste en dos segmentos de línea, una con pendiente cero, y otra con pendiente de $20 \left[\frac{dB}{dec} \right]$ o $6 \left[\frac{dB}{oct} \right]$, las cuales se intersecan en $\omega = 1$, como se muestra en la figura 9.11a. La gráfica correspondiente a la fase $\angle H(j\omega)$ versus $\log(\omega)$, de la misma manera, se puede aproximar por tres rectas, a saber

$$\angle H(j\omega) = \tan^{-1}(\omega) \approx \begin{cases} 90^\circ & \text{para } \omega \geq 10 \\ \text{cambio lineal con el } \log \omega & \text{para } 0.1 < \omega < 10 \\ 0^\circ & \text{para } \omega \leq 0.1 \end{cases}$$



(a)



(b)

Figura 9.11: Traza de Bode de $H(j\omega) = 1 + j\omega$. (a) Magnitud. (b) Fase.

La representación de $\angle H(j\omega)$ versus $\log(\omega)$ se ilustra en la figura 9.11(b). Este tipo de gráfica recibe el nombre de representación asintótica de la respuesta en frecuencia.

En MATLAB, la función `bode()` calcula la magnitud y la fase de la respuesta en frecuencia de sistemas lineales de tiempo continuo e invariantes en el tiempo. Su versión simple se muestra en el ejemplo 9.7 siguiente.

Ejemplo 9.7

Esboce la respuesta en frecuencia, mediante la traza de Bode, del sistema continuo lineal e invariante en el tiempo, descrito por la función de transferencia

$$H(s) = \frac{10}{s^2 + \sqrt{2}s + 10}$$

Solución

La traza de Bode se puede obtener con el siguiente programa

```
% Código de la Fig. 9.12. Traza de Bode
num = 10;
den = [1 sqrt(2) 10];
bode(num,den)
grid on
```

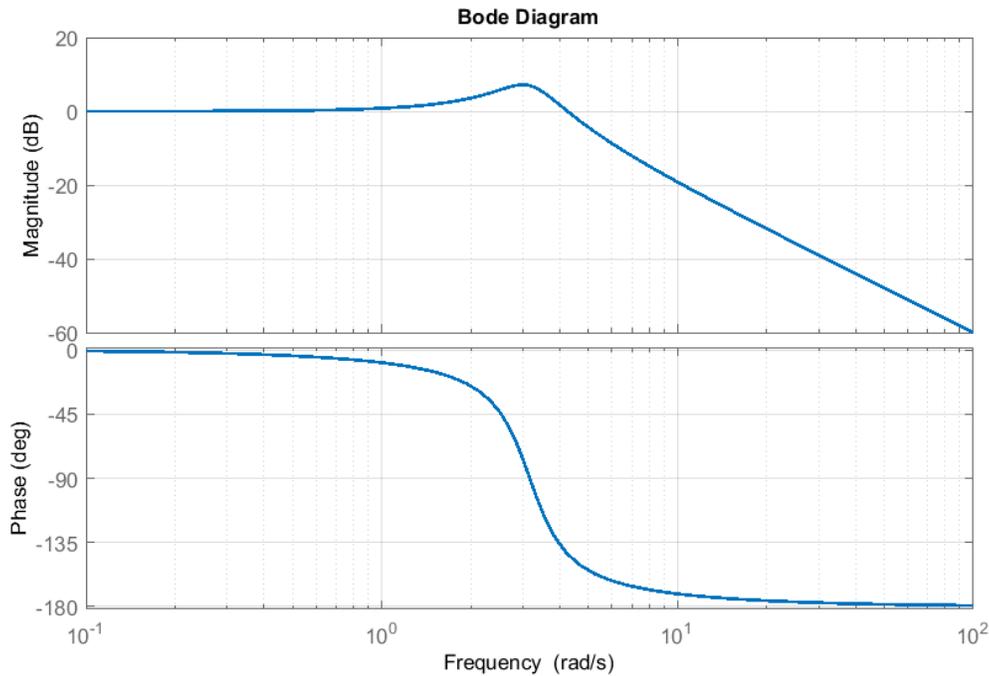


Figura 9.12: Traza de Bode del sistema con $H(s) = \frac{10}{s^2 + \sqrt{2}s + 10}$

La gráfica resultante se muestra en la figura 9.12.

La forma polar de la respuesta en frecuencia $H(j\omega) = |H(j\omega)|\angle H(j\omega)$ se puede representar en forma rectangular, esto es

$$H(j\omega) = \text{Re}\{H(j\omega)\} + j \text{Im}\{H(j\omega)\} = X(j\omega) + jY(j\omega)$$

Si se traza o dibuja $Y(j\omega)$ versus $X(j\omega)$ con la frecuencia ω como parámetro, donde $0 \leq \omega \leq \infty$ se tiene otra representación gráfica de la respuesta en frecuencia muy común. Esta gráfica es la traza polar denominada *Traza de Nyquist*.

Ejemplo 9.8

Obtenga la traza polar o de Nyquist del sistema lineal e invariante del ejemplo 9.7, descrito por la función de transferencia

$$H(s) = \frac{10}{s^2 + \sqrt{2}s + 10}$$

Solución

La traza de Nyquist se puede obtener con el siguiente programa

```
% Código de la Fig. 9.13. Traza de Nyquist
num = [0 0 10];           % Especifica el numerador
den = [1 sqrt(2) 10];    % Especifica el denominador
H = tf(num, den)         % Función de transferencia
[m,p] = nichols(num,den); % Cálculo de la magnitud y fase
ph = (pi/180)*p;        % Conversión de radianes a grados
polar(ph,m)              % Dibujar la forma polar
```

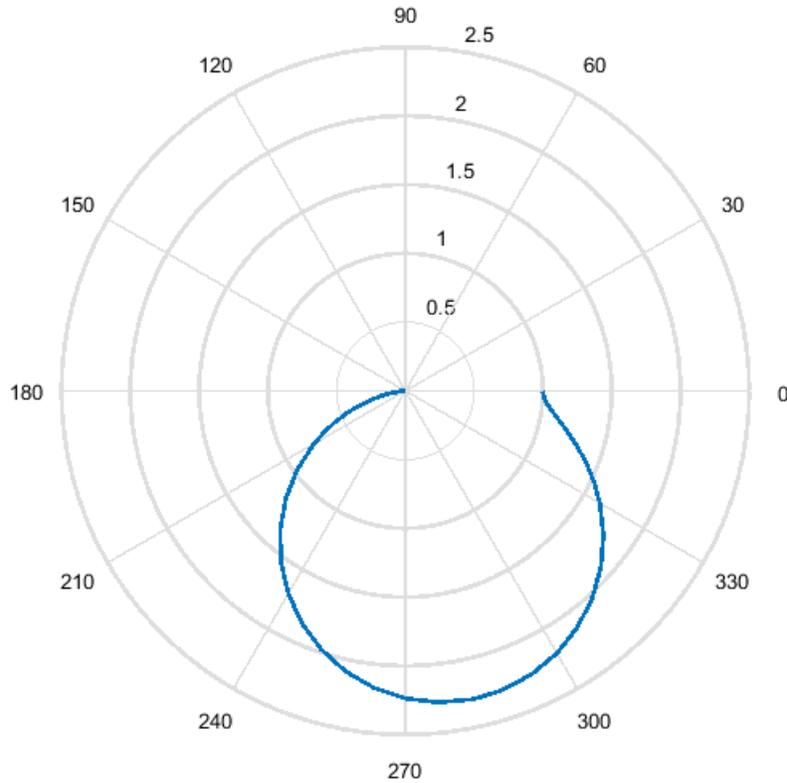


Figura 9.13: Traza de Nyquist del sistema con $H(s) = \frac{10}{s^2 + \sqrt{2}s + 10}$

La gráfica resultante se muestra en la figura 9.13.

Todas las representaciones gráficas de la respuesta en frecuencia, contienen la misma información, de hecho es posible pasar de una representación a otra. Las gráficas de la respuesta en frecuencia, la traza de Bode, la traza de Nyquist y la traza de Nichols (que no se ha incluido en este texto), son ampliamente utilizadas en el análisis y diseño de sistemas de control. Cada una de ellas tiene propiedades específicas y que la hacen idónea para un propósito en particular.

Resumen

Debido a la dificultad inherente para determinar la *TDF*, sobre todo si el número de muestras es grande, se han desarrollado algoritmos eficientes, conocidos como la transformada rápida de Fourier (*FFT*), susceptibles de implementar en una computadora digital. En este capítulo se han presentado uno de ellos, el de decimación en el tiempo. Este algoritmo, aprovecha la simetría en las operaciones y coeficientes de la *TDF* para realmente reducir el tiempo de su cálculo.

En este capítulo, también, se han presentado ejemplos con el objeto de mostrar cómo se pueden utilizar los conceptos estudiados en este libro en la solución de los problemas. Para más detalles, sobre cómo esbozar la traza de Bode o la traza de Nyquist, el lector puede referirse a la función `bode()` y `nyquist()` en `MATLAB`, respectivamente.

Finalmente, vale la pena reiterar que si bien la computadora puede efectuar cálculos rápidamente, no pueden resolverse con ella todos los problemas por sí. La computadora es sólo una herramienta y debe considerarse como tal únicamente. El proceso de *aprender a resolver problemas* es una experiencia que se adquiere con *trabajo, disciplina y constancia*.

Problemas

9.1 Demuestre la siguiente versión discreta de *ortogonalidad*

$$\sum_{m=0}^{N-1} e^{j2\pi(n-p)m/N} = \begin{cases} 0 & n \neq p \\ N & n = p \end{cases}$$

donde $n = 0, 1, 2, \dots$, y $p = 0, 1, 2, \dots$,

Ayuda:

$$\sum_{n=0}^N x^n = \frac{1-x^{N+1}}{1-x} \quad (\text{Serie geométrica})$$

9.2 Una forma alternativa de la *Transformada discreta de Fourier* (cuando el tiempo de muestreo no es unitario, o sea $T_s \neq 1$) es

$$F_{dk} = T_s \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-j2\pi kn/N} = F_d(k\Omega)$$

Certifique que su equivalente en forma matricial es

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_{N-1} \end{bmatrix} = T_s \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-j2\pi/N} & e^{-j4\pi/N} & \dots & e^{-j2\pi(N-1)/N} \\ 1 & e^{-j4\pi/N} & e^{-j8\pi/N} & \dots & e^{-j4\pi(N-1)/N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & e^{-j2\pi(N-1)/N} & e^{-j4\pi(N-1)/N} & \dots & e^{-j2\pi(N-1)^2/N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{F}} = T_s \underline{\mathbf{N}} \underline{\mathbf{E}}^- \underline{\mathbf{f}}$$

donde la matriz de $N \times N$; $\underline{\mathbf{E}}^-$ es igual a:

$$\underline{\mathbf{E}}^- = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-j2\pi/N} & e^{-j4\pi/N} & \dots & e^{-j2\pi(N-1)/N} \\ 1 & e^{-j4\pi/N} & e^{-j8\pi/N} & \dots & e^{-j4\pi(N-1)/N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & e^{-j2\pi(N-1)/N} & e^{-j4\pi(N-1)/N} & \dots & e^{-j2\pi(N-1)^2/N} \end{bmatrix}$$

9.3 La forma de la *Transformada discreta de Fourier inversa* correspondiente a la que se da en el ejercicio anterior es

$$f_{dn} = \frac{1}{T_s N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{j2\pi nk/N} = f_d[nT_s]$$

Certifique que su equivalente en forma matricial es

$$\begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{T_s N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & e^{j2\pi/N} & e^{j4\pi/N} & \cdots & e^{j2\pi(N-1)/N} \\ 1 & e^{j4\pi/N} & e^{j8\pi/N} & \cdots & e^{j4\pi(N-1)/N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{j2\pi(N-1)/N} & e^{j4\pi(N-1)/N} & \cdots & e^{j2\pi(N-1)^2/N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_{N-1} \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{f}} = \frac{1}{T_s N} \underline{\mathbf{E}}^+ \underline{\mathbf{F}}$$

donde la matriz de $N \times N$; $\underline{\mathbf{E}}^+$ es igual a:

$$\underline{\mathbf{E}}^+ = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & e^{j2\pi/N} & e^{j4\pi/N} & \cdots & e^{j2\pi(N-1)/N} \\ 1 & e^{j4\pi/N} & e^{j8\pi/N} & \cdots & e^{j4\pi(N-1)/N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{j2\pi(N-1)/N} & e^{j4\pi(N-1)/N} & \cdots & e^{j2\pi(N-1)^2/N} \end{bmatrix}$$

9.4 Considere la propiedad de ortogonalidad y demuestre que

$$\underline{\mathbf{E}}^+ \underline{\mathbf{E}}^- = \underline{\mathbf{I}} \quad (\text{matriz identidad})$$

Para diversos valores de N , elabore un programa con código de MATLAB que permita verificar el resultado del ejercicio anterior.

9.5 Demuestre que

$$\sum_{m=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} e^{j2\pi(n-p)m/N} = \begin{cases} 0 & n \neq p \\ N & n = p \end{cases}$$

9.6 Demuestre que la Transformada Discreta de Fourier y la Transformada Discreta de Fourier Inversa que se proporcionan en los ejercicios 2 y 3, respectivamente, *se satisfacen a sí mismas* y por tanto constituyen un *par de transformación discreto*.

$$f_{dn} \longleftrightarrow F_{dk}$$

9.7 Con los resultados obtenidos en los ejercicios anteriores, elabore un programa con código de MATLAB y verifique el ejemplo 9.2.

No utilice las funciones **fft(x)** e **ifft(x)**.

9.8 Con los resultados obtenidos en los ejercicios anteriores, elabore un programa con código de MATLAB y verifique el ejemplo 9.3.

No utilice las funciones **fft(x)** e **ifft(x)**.

9.9 Con los resultados obtenidos en los ejercicios anteriores, elabore un programa con código de MATLAB y verifique el ejemplo 9.4, inciso b).

No utilice las funciones **fft(x)** e **ifft(x)**.

9.10 Se demostró que la transformada de la convolución en el dominio del tiempo equivale a la multiplicación en el dominio de la frecuencia, esto es

$$\sum_{m=0}^{N-1} f_{d1}[(n-m)T_s] f_{d2}[mT_s] \longleftrightarrow F_{d1}(k\Omega) F_{d2}(k\Omega)$$

Para el caso particular de la respuesta de estado cero y la convolución de la respuesta al impulso y la entrada, se tiene

$$y_d[nT_s] = \sum_{m=0}^{N-1} h_d[(n-m)T_s] x_d[mT_s] \longleftrightarrow H_d(k\Omega) X_d(k\Omega) = Y_d(k\Omega)$$

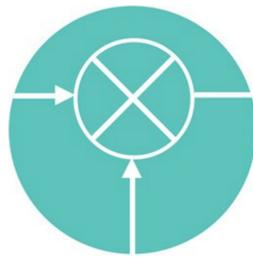
Como las secuencias de $h_d[nT_s]$ y $x_d[nT_s]$ se consideran periódicas con período igual a N ya que son muestras de señales de extensión periódica o truncadas y por consiguiente $y_d[(n-m)T_s]$ es una versión desplazada circularmente de $y_d[nT_s]$, esta convolución recibe el nombre de *circular* o *periódica* y se aplica a sistemas discretos lineales e invariantes en el tiempo o el desplazamiento. MATLAB tiene una función que realiza esta convolución, a saber **cconv(a,b,n)**.

Con los datos obtenidos en el ejercicio 9.9, desarrolle un programa con código de MATLAB que lleve a cabo la convolución de la función de $x[nT_s]$ con ella misma.

A partir de sus resultados, ¿qué se puede concluir?

10

Muestreo



10.1

Introducción

Muchas de las señales discretas tienen su origen en señales continuas las cuales son sometidas a un proceso de muestreo. Esta es la forma en que las señales de los dominios continuo y discreto se pueden enlazar. A partir de una señal muestreada puede reconstruirse la señal original continua, esto dependerá de la cercanía en el tiempo que tengan cada una de las muestras.

Un ejemplo sencillo del muestreo puede ser visto en una serie de fotografías tomadas secuencialmente, suponga que la escena es la trayectoria que describe un cohete, que luego estalla en luces brillantes terminando cuando el humo se disipa en el aire. Si se quieren ver todos los detalles del movimiento descrito, las tomas deben hacerse en tiempos tales que no exista la posibilidad de provocar confusiones sobre la posición y lo que sucede en cada instante. A cada una de las fotografías tomadas se les conoce como muestras del evento, las cuales deben ser suficientes para poder observar el evento, lo cual dependerá de si cada una de las muestras están tomadas en tiempos adecuados, de otro modo se corre el riesgo de perder la información del fenómeno a estudiar.

En el caso de los sistemas y las señales continuos que se requieren usar o analizar en computadoras es necesario discretizarlas, por lo que se deberá llevar a cabo un proceso de muestreo, donde cada una de las muestras son tomadas en tiempos igualmente espaciados. El espaciamiento temporal en el que se muestrea la señal se conoce como tiempo de muestreo o periodo de muestreo T_s . Para reconstruir y recuperar la información original se debe cumplir con el “Teorema de Muestreo”.

10.2

Teorema de Muestreo

El teorema de muestreo es la herramienta matemática en donde el periodo de muestreo T_s adecuado permite que una señal continua sea representada correctamente en el dominio del tiempo discreto y ésta a su vez pueda ser convertida de nuevo al tiempo continuo.

La figura 10.1 ilustra la representación gráfica de un muestreador, el cual puede ser realizado con un interruptor, que al cerrar y abrir periódicamente con un tiempo de muestreo de T_s segundos, se obtiene como resultado una señal discreta.

Si se muestrea una señal $x(t)$ en TC para formar una señal $x[n]$ en TD, existe una equivalencia de información entre $x[n]$ y la señal muestreada $x_m(t)$ en TC compuesta por impulsos cuyas intensidades son iguales a los valores de $x[n]$.

De lo anterior, una señal continua puede ser muestreada a partir de la Ec. (10.1), donde se observa que la señal $x_m(t)$ es igual a la multiplicación de un tren de impulsos periódicos por la señal $x(t)$ continua, estando asociadas las intensidades de los impulsos con los valores de la señal $x[n]$.

$$x_m(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) x(t) \tag{10.1}$$

Si $x(t)$ es una señal de banda limitada, esto es, el número de componentes en frecuencia es finito y además están por debajo de $\omega_B \text{ rad/s}$, entonces se puede describir por completo por los valores tomados cada T_s segundos, cumpliendo que entonces la señal $x(t)$ se podrá reconstruir con las muestras tomadas a una frecuencia de

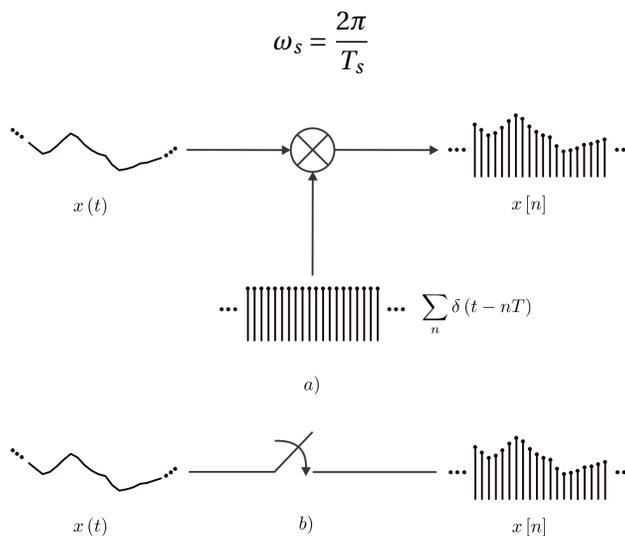


Figura 10.1: Formas en que: a) se representa matemáticamente un muestreador y b) se hace la implementación física de un muestreador

Se debe cumplir que $\omega_s \geq \omega_B$, es decir, ω_s debe ser mayor al menos el doble de la componente frecuencial mayor de $x(t)$. Al término $2\omega_B$ se le conoce como frecuencia de Nyquist. Retomando las señales mostradas en la figura 10.1, suponga que los respectivos espectros son los mostrados en la figura 10.2, donde se puede observar que el espectro de una señal muestreada es la repetición periódica del espectro de $x(t)$, con un ancho de banda ω_B , el cual si es menor a ω_s , entonces no se tendrán traslapes, en la medida que la frecuencia de muestreo se reduce, las componentes frecuenciales se acercan, de manera que antes de que se traslape hay una relación de $\omega_s = 2\omega_B$ como se puede observar en la figura 10.3.

Para recuperar la información de una señal muestreada hay que aplicarla a un filtro cuya respuesta sea.

$$H(j\omega) = \begin{cases} |H(j\omega)| & |\omega| < \omega_B \\ 0 & \text{otro valor} \end{cases}$$

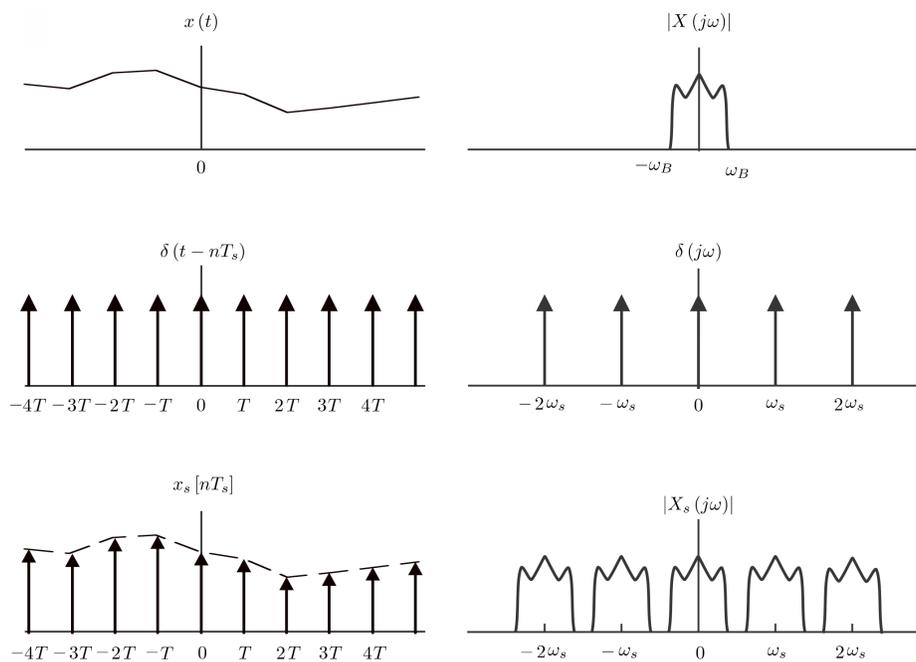


Figura 10.2: El espectro de una señal muestreada es una repetición periódica del espectro de la señal continua con ancho de banda de $2\omega_B$

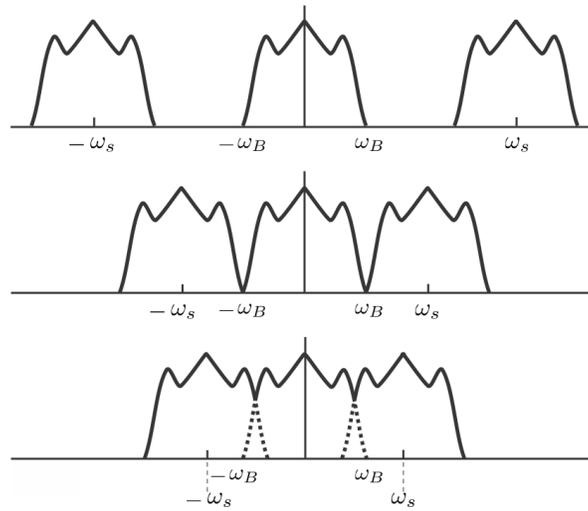


Figura 10.3: Las componentes frecuenciales del espectro de la señal muestreada se traslapan en la medida de que la frecuencia de muestreo disminuye

Ejemplo 10.1

Considere que se tiene una señal continua de tipo coseno

$$x(t) = \cos(2\pi t)$$

Calculando la transformada de Fourier de $x(t)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
 X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi t) e^{-j\omega t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}}{2} \right) e^{-j\omega t} dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-j(\omega-2\pi)t} + e^{-j(\omega+2\pi)t} \right) dt \\
 X(j\omega) &= \frac{2\pi}{2} [\delta(\omega - 2\pi) + \delta(\omega + 2\pi)]
 \end{aligned}$$

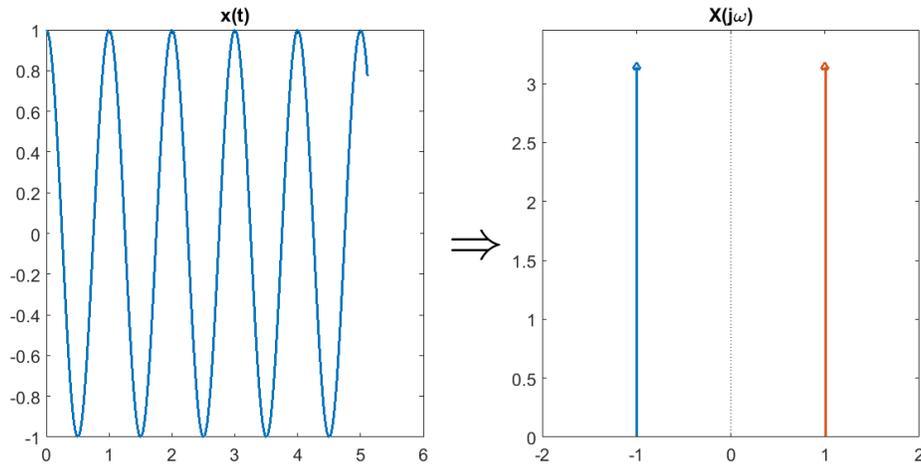


Figura 10.4: La transformada de Fourier de una función coseno de frecuencia 1 Hz, está formada por dos impulsos positivos situados en la frecuencia correspondiente

Considerando que se muestrea la señal continua con los tiempos de $T_s = \{0.05, 0.2, 0.5, 0.80\}$ segundos y calculando los respectivos espectros mediante la transformada rápida de Fourier se obtiene:

- a) Para cuando se discretiza la señal $x(t)$ con un tiempo de muestreo de $T_s = 0.05$ segundos, la frecuencia de muestreo correspondiente es de $f_s = 20$ Hz, en la figura 10.5 se puede observar que la forma de la señal discreta es muy cercana a la continua, mientras que el espectro presenta los dos impulsos en una frecuencia de 1 Hz.

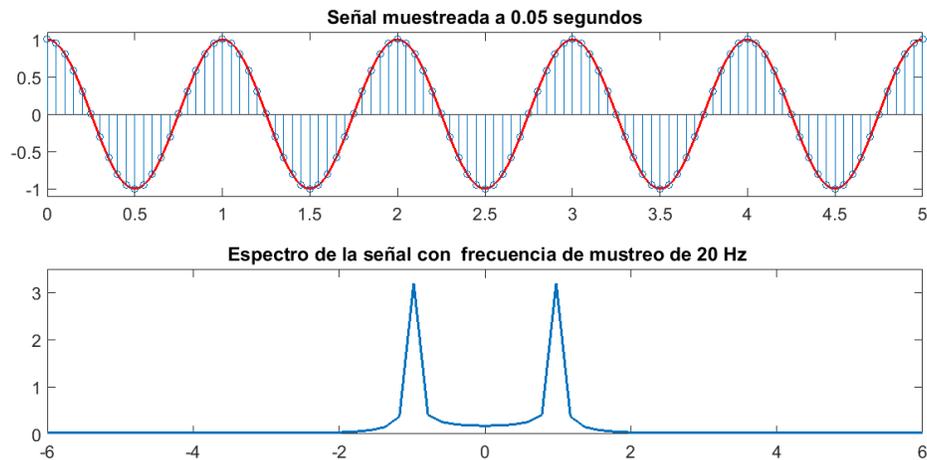


Figura 10.5: Señal continua muestreada con un tiempo de muestreo de 0.05 segundos, el respectivo espectro muestra con claridad la frecuencia de la señal $x(t)$

- b) Al muestrear la señal $x(t)$ con un tiempo de muestreo de $T_s = 0.2$ segundos, la frecuencia con la que se toman las muestras es de $f_s = 5$ Hz, en la figura 10.6 se puede observar que la señal discreta tiene una forma aproximada a la función continua, sin embargo ya hay pérdida de información, mientras que en el espectro se siguen apreciando los impulsos en la frecuencia de la señal original (1 Hz), así mismo también se observa que el espectro se replica en ventanas con ancho en frecuencia equivalente a la frecuencia del muestreo.

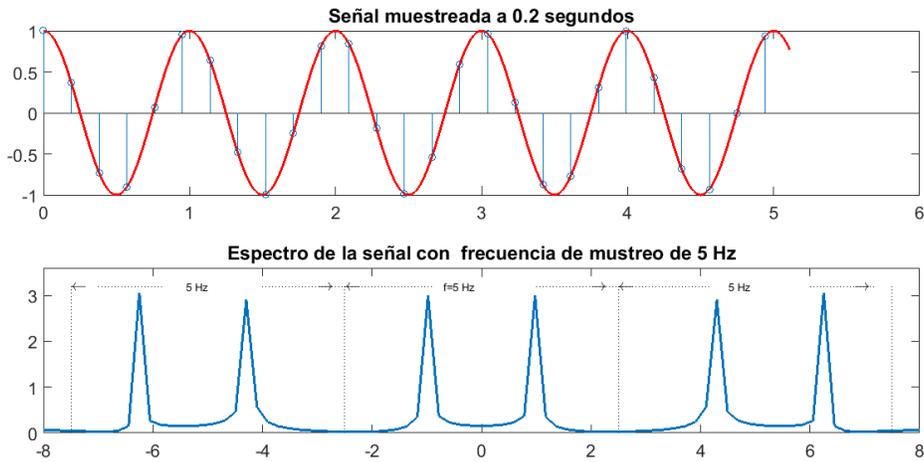


Figura 10.6: Señal continua muestreada con un tiempo de muestreo de 0.2 segundos ($f_s = 5$ Hz), el respectivo espectro muestra que debido a que la frecuencia de muestreo disminuye, se aprecia que aparecen réplicas del mismo

- c) Al aumentar el tiempo de muestreo, haciendo que sea de $T_s = 0.5$ segundos, la frecuencia respectiva es de $f_s = 2$ Hz, en la figura 10.7 se ve que mucha de la información de la señal se pierde, sin embargo, aun se cumple con el teorema del muestreo, es decir, se muestrea al menos al doble de la frecuencia máxima de la señal, por lo que se puede observar en el espectro respectivo que existen los impulsos en la frecuencia de la señal original, pero también las réplicas aparecen en sucesiones de 2 Hz, lo que indica que al aumentar aún más el tiempo de muestreo será imposible ver el espectro respectivo de la señal.

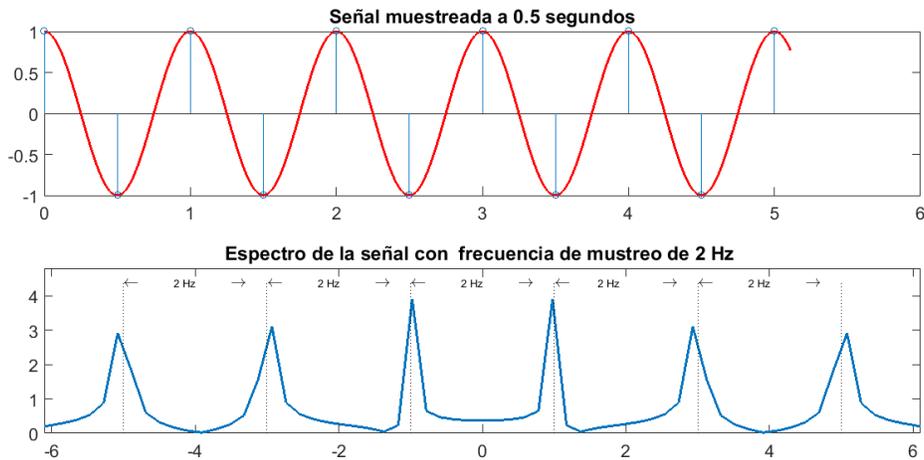


Figura 10.7: Señal continua muestreada con un tiempo de muestreo de 0.5 ($f_s = 2$ Hz), el respectivo espectro muestra que debido a que la frecuencia de muestreo disminuye, se aprecia que aparecen réplicas del mismo en límite mismo del ancho de banda de la señal

- d) En la figura 10.8 se observa que la señal $x(t)$ ha sido muestreada con un tiempo de $T_s = 0.8$ segundos, la frecuencia de muestreo es $f_s = 1.25$ Hz, como se aprecia la señal discreta ya no puede representar a la señal continua perdiendo por completo la información de ésta, por lo que el espectro ya no representa las componentes frecuenciales de la señal.

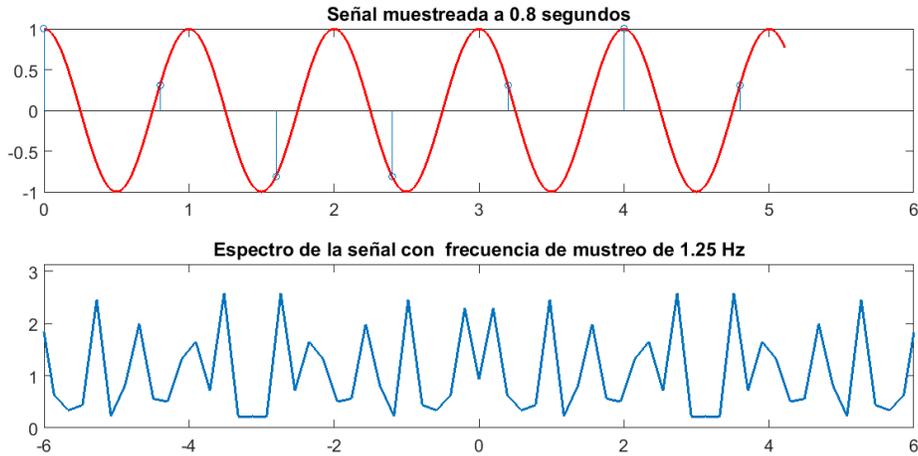


Figura 10.8: Señal continua muestreada con un tiempo de muestreo de $T_s = 0.8s$ ($f_s = 1.25\text{Hz}$), el respectivo espectro muestra, que debido a que la frecuencia de muestreo ya no cumple con el Teorema del Muestreo, éste ya no representa a la señal en estudio

```

%Figuras 10.5 10.6 10.7 y 10.8
clear;close all;clc
%%% se genera la señal sinusoidal de frecuencia de 1 Hz con pasos de calculo de 0.01
%segundos
del=0.01; t=[0: del: 5.12-del];
x=cos(2*pi*t);
%%% se muestrea la señal con un tiempo de muestreo 0.05 segundos
subplot(2,1,1); plot(t,x,'r','LineWidth',2); hold
ts=5; t1=[]; x1=[];x2=zeros(1,length(t));r=1;
for k=1:ts:length(x); x1=[x1 x(k)]; x2(k)=x(k);r=r+1; t1=[t1 t(k)]; end
%%% se grafica la señal muestreada
stem(t1,x1); axis([0 5 -1.1 1.1]);
%%% calculo del espectro de la señal muestreada x1
y=fftshift(fft(x2,512)); ym=abs(y); fm=1/(del);
ym=5.12*2*pi*ym/length(ym);
fy=-fm/2: fm/length(ym):fm/2-fm/length(ym);
title('Señal muestreada a 0.05 segundos')
subplot(2,1,2); plot(fy,ym,'LineWidth',2);axis([-6 6 0 3.5]);
title([' Espectro de la señal con frecuencia de muestreo de 20 Hz']);

%%% se muestrea la señal con un tiempo de muestreo 0.2 segundos
figure;subplot(2,1,1); plot(t,x,'r','LineWidth',2); hold
ts=19; t1=[]; x1=[];x2=zeros(1,length(t));r=1;
for k=1:ts:length(x); x1=[x1 x(k)]; x2(k)=x(k);r=r+1; t1=[t1 t(k)]; end
%%% se grafica la señal muestreada
stem(t1,x1,'o');ay=2*pi*(abs(fftshift(fft(x1))))/length(x1);max(ay)
%%% calculo del espectro de la señal muestreada x1
y=fftshift(fft(x2)); ym=abs(y); fm=1/(del);
ym=max(ay)*(ym/max(ym));
fy=-fm/2:fm/length(ym):fm/2-fm/length(ym);
title('señal muestreada a 0.2 segundos');
subplot(2,1,2); plot(fy,ym,'LineWidth',2);
axis([-8 8 0 3.6]); text(-11, -4,'a')
title([' Espectro de la señal con frecuencia de muestreo de 5 Hz']);
text(-2.5,3.26,'\leftarrow','FontSize',14);text(2.,3.26,'\rightarrow','FontSize',14)

```

```

text(-.7,3.2,'f=5 Hz')
line([-4.0 -0.9],[3.2 3.2],'Color','k','LineStyle',':');line([1 4.2],[3.2 3.2],
'Color','k','LineStyle',':');
line([-7.0 -5.8],[3.2 3.2],'Color','k','LineStyle',':');line([6 7.2],[3.2 3.2],
'Color','k','LineStyle',':');
line([-2.5 -2.5],[3.2 0],'Color','k','LineStyle',':');
line([2.5 2.5],[3.2 0],'Color','k','LineStyle',':');
line([-7.5 -7.5],[3.2 0],'Color','k','LineStyle',':');line([7.5 7.5],[3.2 0],
'Color','k','LineStyle',':');
text(-7.5,3.26,'\leftarrow','FontSize',14);text(-3.0,3.26,'\rightarrow','FontSize',14)
text(-5.4,3.2,'5 Hz')
text(2.5,3.26,'\leftarrow','FontSize',14);text(6.8,3.26,'\rightarrow','FontSize',14)
text(4.5,3.2,'5 Hz');

%%% se muestrea la senal con un tiempo de muestreo 0.5 segundos
figure; subplot(2,1,1); plot(t,x,'r','LineWidth',2); hold
ts=50;
t1=[]; x1=[];x2=zeros(1,length(t));r=1;
for k=1:ts:length(x); x1=[x1 x(k)]; x2(k)=x(k);r=r+1; t1=[t1 t(k)]; end
%%% se grafica la senal muestreada
stem(t1,x1);ay=2*pi*(abs(fftshift(fft(x1))))/length(x1);max(ay)
%%% calculo del espectro de la senal muestreada x1
y=fftshift(fft(x2)); ym=abs(y);fm=1/(del);
ym=max(ay)*(ym/max(ym));
fy=-fm/2:fm/length(ym):fm/2-fm/length(ym);
title('senal muestreada a 0.5 segundos')
subplot(2,1,2); plot(fy,ym,'LineWidth',2);axis([-6.1 6.1 0 4.8]);
title([' Espectro de la senal con frecuencia de mustreo de 2 Hz ']);

text(-1,4.46,'\leftarrow','FontSize',14);text(0.5,4.46,'\rightarrow','FontSize',14)
text(-.3,4.4,'2 Hz')
line([-1 -1],[0 4.4],'Color','k','LineStyle',':'); line([1 1],[0 4.4],'Color',
'k','LineStyle',':');
text(-3,4.46,'\leftarrow','FontSize',14);text(-1.5,4.46,'\rightarrow','FontSize',14)
text(-2.3,4.4,'2 Hz')
text(1,4.46,'\leftarrow','FontSize',14);text(2.5,4.46,'\rightarrow','FontSize',14)
text(1.6,4.4,'2 Hz')
line([-3 -3],[0 4.4],'Color','k','LineStyle',':');line([3 3],[0 4.4],'Color',
'k','LineStyle',':');
line([-5 -5],[0 4.4],'Color','k','LineStyle',':');line([5 5],[0 4.4],'Color',
'k','LineStyle',':');
text(3,4.46,'\leftarrow','FontSize',14);text(4.5,4.46,'\rightarrow','FontSize',14)
text(3.7,4.4,'2 Hz')
text(-5,4.46,'\leftarrow','FontSize',14);text(-3.5,4.46,'\rightarrow','FontSize',14)
text(-4.3,4.4,'2 Hz')

%%% se muestrea la senal con un tiempo de muestreo 0.80 segundos
figure;subplot(2,1,1); plot(t,x,'r','LineWidth',2); hold
ts=80; t1=[]; x1=[];x2=zeros(1,length(t));r=1;
for k=1:ts:length(x); x1=[x1 x(k)]; x2(k)=x(k);r=r+1; t1=[t1 t(k)]; end
%%% se grafica la senal muestreada
stem(t1,x1);ay=2*pi*(abs(fftshift(fft(x1))))/length(x1);max(ay)
%%% calculo del espectro de la senal muestreada x1
y=fftshift(fft(x2)); ym=abs(y);fm=1/(del);
ym=max(ay)*(ym/max(ym));
fy=-fm/2:fm/length(ym):fm/2-fm/length(ym);
title('senal muestreada a 0.8 segundos')
subplot(2,1,2);
plot(fy,ym,'LineWidth',2);

```

```
axis([-6 6 0 pi]); text(-11, -1, 'b')
title([' Espectro de la señal con frecuencia de muestreo de 1.25 Hz']);
```

Ejemplo 10.2

Considere ahora la suma de dos señales coseno mostrada en la figura 10.9 junto con la respectiva señal muestreada con $T_s = 0.012$ ($f_s = 83\text{Hz}$).

$$x(t) = \cos(2\pi t) + \cos(10\pi t)$$

se observa que la cantidad de muestras obtenidas son suficientes para describir con todo detalle la forma de la señal $x(t)$.

La señal se muestrea con los siguientes tiempos de muestreo $T_s = \{0.02, 0.05, 0.1, 0.125\}$ segundos. En la figura 10.10a se han graficado la señal muestreada con una $f_s = 50\text{Hz}$ mientras que en b) se observa la misma señal con muestras tomadas a $f_s = 20\text{Hz}$ junto con sus respectivos espectros, observándose que en la medida que el tiempo de muestreo T_s se incrementa, los correspondientes espectros aun contienen los impulsos en las frecuencias de las señales que conforman la señal original, pero se va perdiendo información de la señal original al alterarse la amplitud de los impulsos en el espectro.

Se debe observar que la frecuencia de muestreo mínima para tener una señal muestreada que representa a ambas señales sinusoidales es $f_s = 28\text{Hz}$.

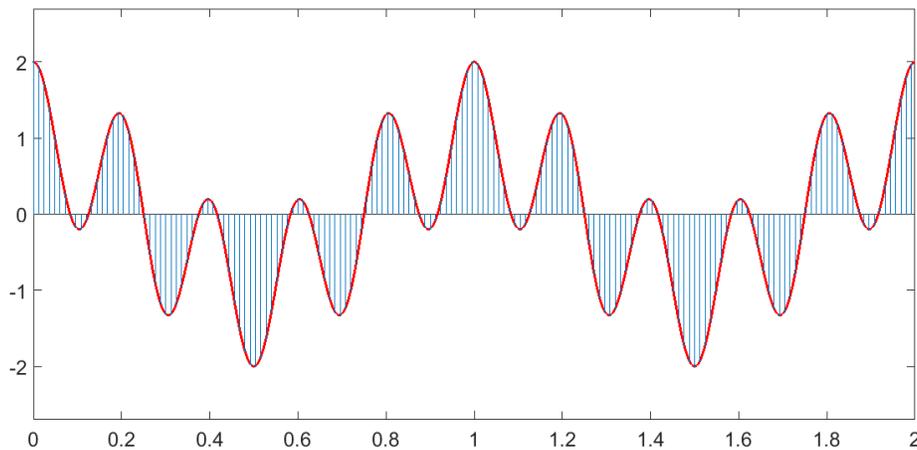


Figura 10.9: Señal continua y la respectiva señal discreta muestreada a una frecuencia $f_s = 83\text{Hz}$

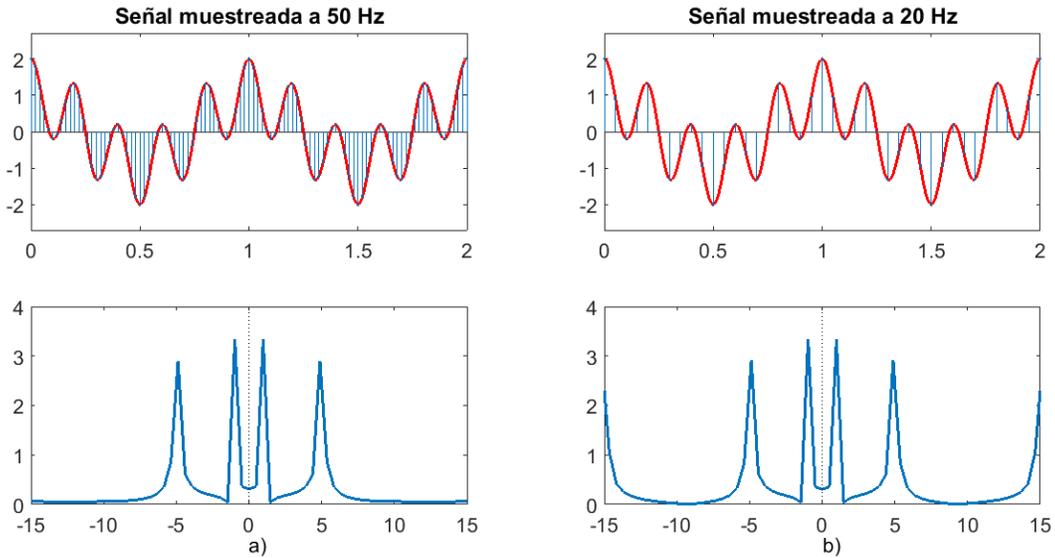


Figura 10.10: a) Señal muestreada a $f_s = 50$ Hz y b) señal muestreada a $f_s = 20$ Hz

En la figura 10.11a se presenta la señal muestreada con $f_s = 10$ Hz, en el espectro respectivo se observa que en el intervalo graficado aparece la réplica del mismo, no obstante en el rango de la ventana comprendida entre los $[-10, 10]$ Hz las componentes se encuentran en las frecuencias correspondientes, mientras que en b) se ha perdido la información de la señal de 1 Hz, ya que la información correspondiente a la señal de 5 Hz se observa de forma correcta, sin embargo la información del espectro no representa todas las componentes frecuenciales de la señal estudiada.

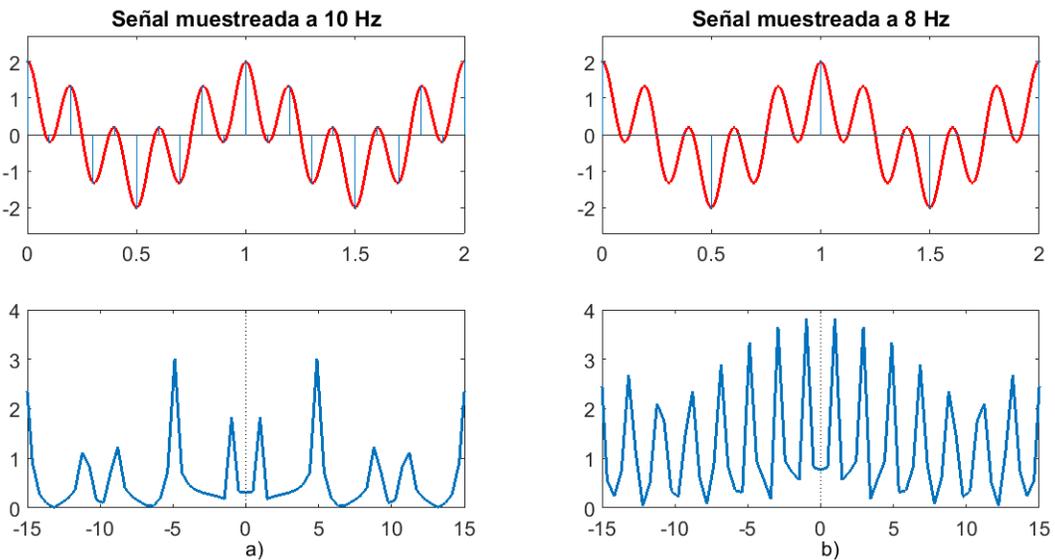


Figura 10.11: a) Señal muestreada a $f_s = 10$ Hz y b) señal muestreada a $f_s = 8$ Hz

```

%% Figuras 10.9 10.10 y 10.11
del=0.001;
%%% se definen las senales a muestrear
tf=2.047;
t=[0:del:tf];
x1=1.*cos(2*pi*t); %%% senal 1 de frecuencia f=1 Hertz
x2=1*cos(10*pi*t); %%% senal 2 de frecuencia f= 5 Hertz
x=x2+x1; %%% se grafica la senal original
subplot(2,1,1);
plot(t,x,'r','LineWidth',2); axis([0 2 -2.7 2.7]);hold
%%% para cumplir con el teorema del muestreo se debe muestrear
%%% la senal a por lo menos 10 Hz.
%%% se muestrea la senal con un periodo de muestreo de 0.05 segundos o 20 Hz
r=1;
paso=12;
for k=1:paso:length(x); y1(1,r)=x(1,k); t1(1,r)=t(k); r=r+1;end
x1=zeros(1,length(t));
for k=1:paso:length(x); x1(k)=x(k); end
stem(t1,y1,'.');
figure;

ts=20;
t1=[]; x1=[];x2=zeros(1,length(t));r=1;
for k=1:ts:length(x); x1=[x1 x(k)]; x2(k)=x(k);r=r+1; t1=[t1 t(k)]; end
%%% se grafica la senal muestreada
subplot(2,2,1);plot(t,x,'r');hold;stem(t1,x1,'.');
axis([0 2 -2.7 2.7]); title('Senal muestreada a 50 Hz')
subplot(2,2,3); y=fftshift(fft(x2,2048)); ym=abs(y);fm=1/del;
fy=-fm/2: fm/length(ym) :fm/2-fm/length(ym);
ym=2*pi*ts*y/length(ym);
plot(fy,ym,'LineWidth',2);text(0,-0.8,'a');axis([-15 15 0 4])
line([0 0],[0 4],'Color','k','LineStyle',':')

ts=50;
t1=[]; x1=[];x2=zeros(1,length(t));r=1;
for k=1:ts:length(x); x1=[x1 x(k)]; x2(k)=x(k);r=r+1; t1=[t1 t(k)]; end
%%% se grafica la senal muestreada
subplot(2,2,2);plot(t,x,'r');hold;stem(t1,x1,'.');
axis([0 2 -2.7 2.7]); title('Senal muestreada a 20 Hz')
subplot(2,2,4); y=fftshift(fft(x2,2048)); ym=abs(y);fm=1/del;
fy=-fm/2: fm/length(ym) :fm/2-fm/length(ym);
ym=2*pi*ts*y/length(ym);
plot(fy,ym,'LineWidth',2);text(0,-0.8,'b');axis([-15 15 0 4])
line([0 0],[0 4],'Color','k','LineStyle',':')

figure
ts=100;
t1=[]; x1=[];x2=zeros(1,length(t));r=1;
for k=1:ts:length(x); x1=[x1 x(k)]; x2(k)=x(k);r=r+1; t1=[t1 t(k)]; end
%%% se grafica la senal muestreada
subplot(2,2,1);plot(t,x,'r');hold;stem(t1,x1,'.');
axis([0 2 -2.7 2.7]); title('Senal muestreada a 10 Hz')
subplot(2,2,3); y=fftshift(fft(x2,2048)); ym=abs(y);fm=1/del;
fy=-fm/2: fm/length(ym) :fm/2-fm/length(ym);
ym=pi*ts*y/length(ym);
plot(fy,ym,'LineWidth',2);text(0,-0.8,'a');axis([-15 15 0 4])
line([0 0],[0 4],'Color','k','LineStyle',':')

```

```

ts=125;
t1=[]; x1=[];x2=zeros(1,length(t));r=1;
for k=1:ts:length(x); x1=[x1 x(k)]; x2(k)=x(k);r=r+1; t1=[t1 t(k)]; end
%%% se grafica la senal muestreada
subplot(2,2,2);plot(t,x,'r');hold;stem(t1,x1,'.');
axis([0 2 -2.7 2.7]);title('Senal muestreada a 8 Hz')
subplot(2,2,4); y=fftshift(fft(x2,2048)); ym=abs(y);fm=1/del;
fy=-fm/2: fm/length(ym) :fm/2-fm/length(ym);
ym=2*pi*ts*ym/length(ym);
plot(fy,ym,'LineWidth',2);text(0,-0.8,'b');axis([-15 15 0 4])
line([0 0],[0 4],'Color','k','LineStyle',':')

```

Resumen

Como se ha estudiado en este capítulo, el proceso de muestreo resulta ser de gran importancia en los procesos de discretización de una señal continua, particularmente el Teorema del Muestreo, el cual es una herramienta muy útil puesto que permite identificar los límites de frecuencia que se deben conservar en el muestreo para poder mantener, en la señal discreta resultante, la información de la señal original. Lo anterior se ha comprobado de forma que señales con componentes frecuenciales únicas y conocidas, al discretizarlas con frecuencias de muestreo cada vez más cercanas a lo establecido en el Teorema del Muestreo, se observa en el análisis de Fourier que el espectro en frecuencia pierde información de la señal original.

Es importante señalar que los procesos de muestreo y por consiguiente el cumplir con el Teorema del Muestreo, son temas que en múltiples áreas y aplicaciones de la ingeniería resultan ser de vital importancia en la solución de problemas.

El lector debe tomar en cuenta que el avance de la electrónica y con ello las soluciones digitales son cada día mas necesarios, por lo que sin lugar a dudas, los procesos de muestreo de señales continuas son más comunes y están totalmente apegados al procesamiento de señales.

Apéndices

Apéndice A

Funciones *.m

Código de funciones auxiliares implementadas en MATLAB

En el software de MATLAB se puede emplear la función `zeros(1,N)` para realizar la *función impulso unitario discreto*. No obstante, en este texto, la función `secimps.m` lleva a cabo la secuencia

$$\delta[n - n_0] = \begin{cases} 0 & n \neq n_0 \\ 1 & n = n_0 \end{cases} \quad (\text{A1})$$

en el intervalo $n_1 \leq n_0 \leq n_2$, el código correspondiente es

```
function [x,n] = secimps(n0,n1,n2)
% Genera x[n] = delta[n - n0]; n1 <= n <= n2
%
% [x,n] = secimps(n0,n1,n2);
%
n = [n1:n2]; x = [(n-n0) == 0];
```

Otra forma de representar la Ec. (A1) es con la función `dd(n)`, o bien `dd.m` cuyo código en MATLAB se muestra a continuación

```
%Función impulso unitario en tiempo discreto

function u=dd(n)      %muestra discreta
u=1*(n==0);
```

De la misma manera, la función `ones(1,N)` produce un vector de N unos y se la puede utilizar para realizar la *función escalón unitario discreto*. Sin embargo, en este texto con la función `secuno.m` se genera la secuencia

$$u[n - n_0] = \begin{cases} 0 & n < n_0 \\ 1 & n \geq n_0 \end{cases} \quad (\text{A2})$$

en el intervalo $n_1 \leq n_0 \leq n_2$, el código correspondiente es

```
function [x,n] = secuno(n0,n1,n2)
% Genera x[n] = u[n - n0]; n1 <= n <= n2
%
% [x,n] = secuno(n0,n1,n2)
%
% [x,n] = secuno(n0,n1,n2)
%
n = [n1:n2]; x = [(n-n0) >= 0];
```

La *función escalón unitario en tiempo discreto*, Ec. (A2) también se puede representar mediante la función **ud(n)**, o bien **ud.m** su código correspondiente es

```
%Función escalón unitario en tiempo discreto

function x=ud(n)
x=1.*(n>=0 & (n-fix(n)==0));
```

El código para *transponer* o reflejar una función de la forma

$$y[n] = x[-n]$$

es el siguiente

```
function [y,n] = transpon(x,n)
%
% Ejecuta: y[n] = x[-n]
%
% [y,n] = transpon(x,n)
%
y = fliplr(x); n = -fliplr(n);
```

Para llevar a cabo un desplazamiento en el dominio del tiempo

$$y[n] = x[n - k]$$

```
function [y,n] = desplaza(x,m,n0)
%
% Ejecuta: y[n] = x[n - n0]
%
% [y,n] = desplaza(x,m,n0)
%
n = m + n0;
y = x;
```

En MATLAB está implementada una función que efectúa la convolución de dos secuencias finitas y supone que ambas empiezan en $n = 0$. Se invoca con

$$y = conv(x, h)$$

Sin embargo, esta función no admite ni proporciona ninguna información del tiempo de las secuencias de la entrada y la salida. Este inconveniente se evita con el código siguiente

```

function [y,ny]=conv_m(x,nx,h,nh)
% Lleva a cabo la convolution de dos señales

% [y,ny] = convolución(x,nx,h,nh)
% [y,ny] = resultado de la convolución
% [x,nx] = primera señal
% [h,nh] = segunda señal
%
nye = nx(1) + nh(1);
nyt = nx(length(x)) + nh(length(h));
ny = [nye:nyt];
y = conv(x,h);

```

La *función escalón unitario en tiempo continuo* se define como

$$u(t) = u_{-1}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \quad (\text{A3})$$

cuyo código en MATLAB es

```

%Función escalon unitario en tiempo continuo

function u = us(t)
u = + 1.*(t>=0);

```

Función que evalúa la Transformada Discreta de Fourier, como parámetro hay que proporcionar la señal discreta \mathbf{x} y el tamaño del vector \mathbf{N} y el resultado lo devolverá en un vector complejo \mathbf{xk} , el código en MATLAB es

```

%Funcion DFT

function xk = dft(x,N)

xk=zeros(1,N);
for k=0:N-1
for n=0:N-1
xk(k+1)=xk(k+1)+x(n+1)*exp(-j*2*pi*k*n/N)/N;
end
end

```

Apéndice B

Soluciones a los problemas

Soluciones capítulo 1

- 1.1** a) Sistema invariante
b) Sistema variante
c) Sistema invariante
- 1.2** a) No lineal
b) No lineal
c) No lineal
- 1.3** a) Sistema invariante
b) Sistema invariante
c) Sistema variante
- 1.4** a) Lineal
b) No lineal
c) Lineal
- 1.5** a) No lineal e invariante en t
b) Lineal e invariante en t
c) Lineal e invariante en t
d) Lineal e invariante en t
e) Lineal e invariante en t
f) No lineal e invariante en t

Soluciones capítulo 2

2.1

```
% Función escalón  
function u=us(t)  
u=+1.*(t>0)+0.*(t<0);
```

2.2 a)

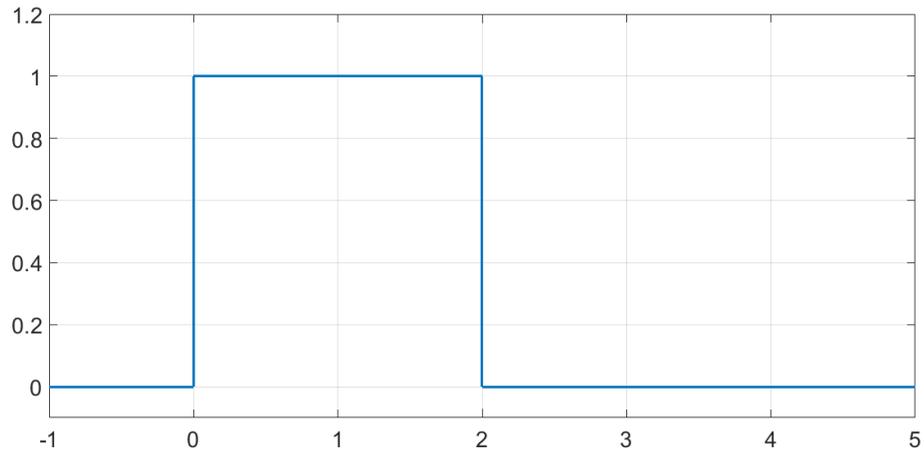


Figura B1

```
t=-1:.001:5;  
x1=us(t)-us(t-2);  
plot(t,x1,'Linewidth',2);  
axis([-1 5 -.1 1.2]); grid
```

2.3 a) Para la figura 2.33 del texto

$$x = r(t+2) - r(t+1) + r(t-1) - r(t-2) - 2u(t-3)$$

b)

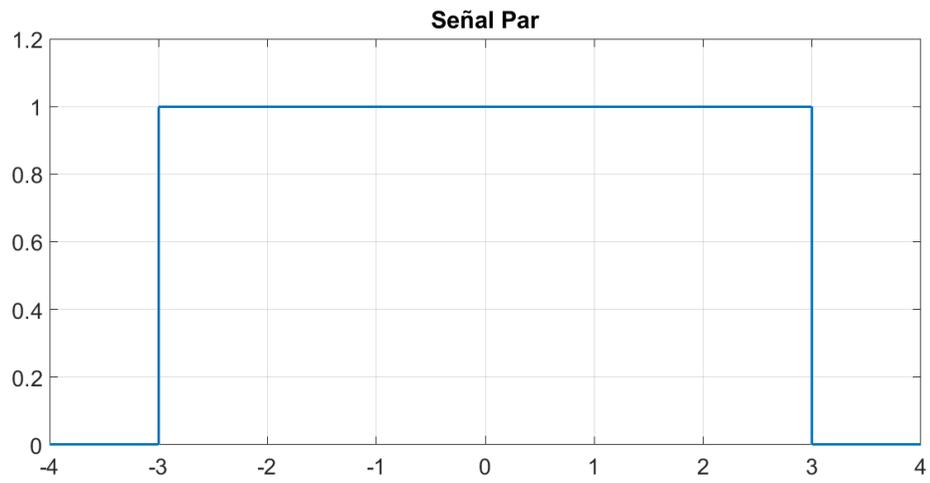


Figura B2: Señal Par

c)

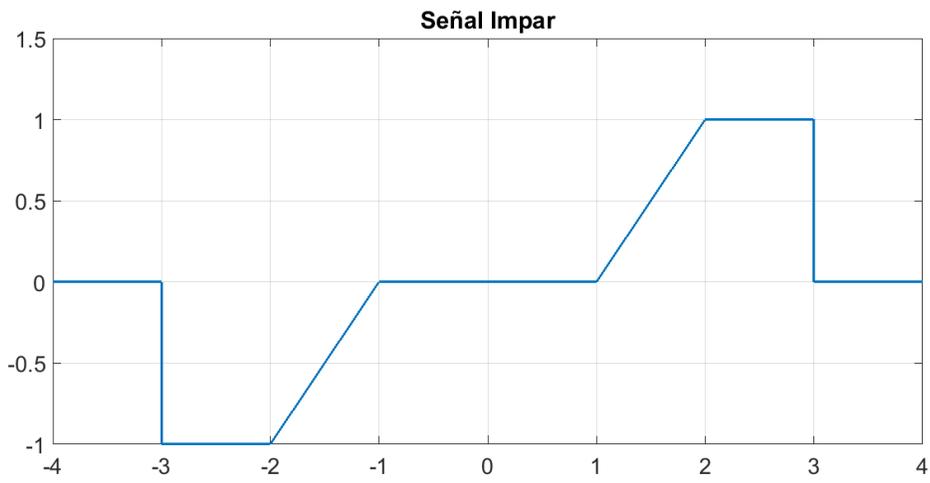


Figura B3: Señal impar

d)

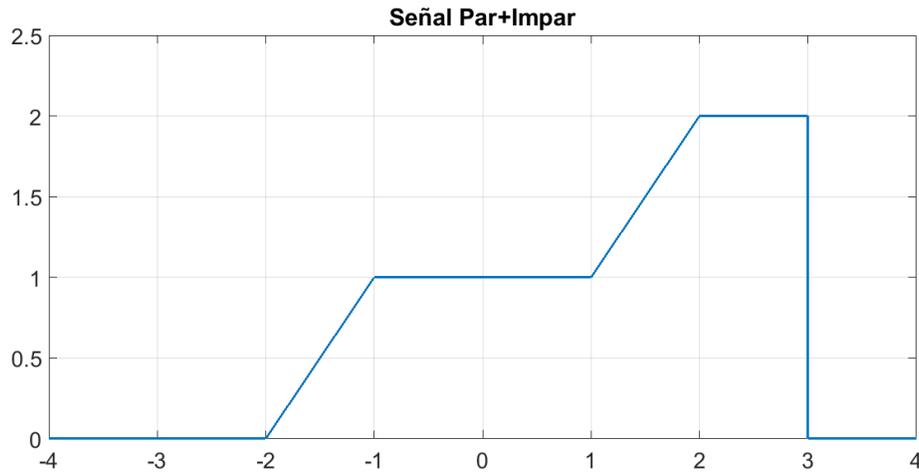


Figura B4: Suma de las señales Par e Impar

```
%Se obtiene la señal Par e Impar de la señal definida en sgl(t)
t=-4:.001:4;
Par=0.5*(sgl(t)+sgl(-t));
Impar=0.5*(sgl(t)-sgl(-t));
subplot(311),plot(t,Par,'Linewidth',2), title('Señal Par'); grid
subplot(312),plot(t,Impar,'Linewidth',2), title('Señal Impar'); grid
subplot(313),plot(t,Par+Impar,'Linewidth',2), title('Señal Par+Impar'); grid
```

e) Para la figura 2.34 del texto

$$x(t) = (p(t+3) - p(t+1) - 2r(t+1))(u(t+3) - u(t-2)) + p(-t+4)(u(t-2) - u(t-4))$$

f) Para la figura 2.35 del texto

$$x[n] = r[-n-1] - r[-n-5] - 4u[-n-5] + r[n+1] - r[n-2] - 3u[n-6]$$

g) Para la figura 2.36 del texto

$$x[n] = u[n+5] + u[n+2] + r[n] - r[n-4] - 6u[n-4]$$

2.4 a) $x_1(t) = 5 \cos\left(\frac{2\pi}{5} t\right)$

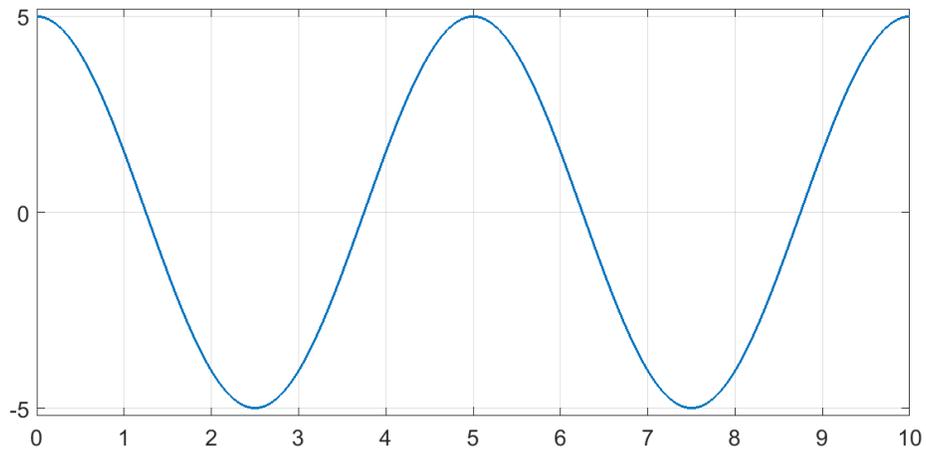


Figura B5: El periodo de la señal es $T = 5$ [s]

b) $x_2(t) = 5 \cos\left(\frac{2}{5}t\right)$

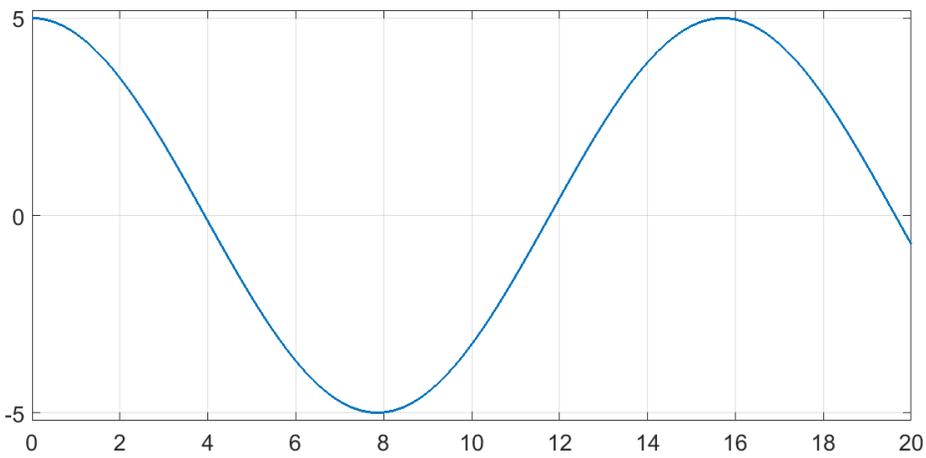


Figura B6: El periodo de la señal es $T = 15.7080$ [s]

c) $x_3(t) = 5 \cos\left(\frac{2\pi}{5} t + \frac{\pi}{3}\right)$

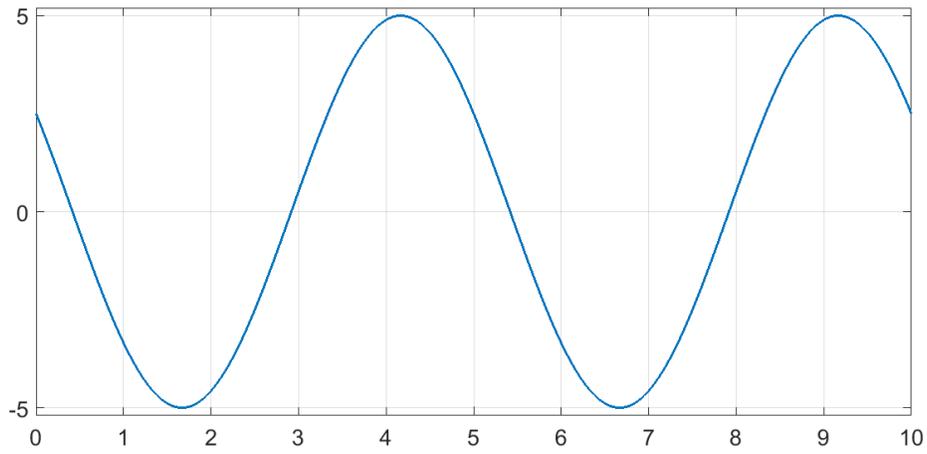


Figura B7: El periodo de la señal es $T = 5$ [s]

d) $x_1[n] = 5 \cos\left(\frac{2\pi}{5} n\right)$

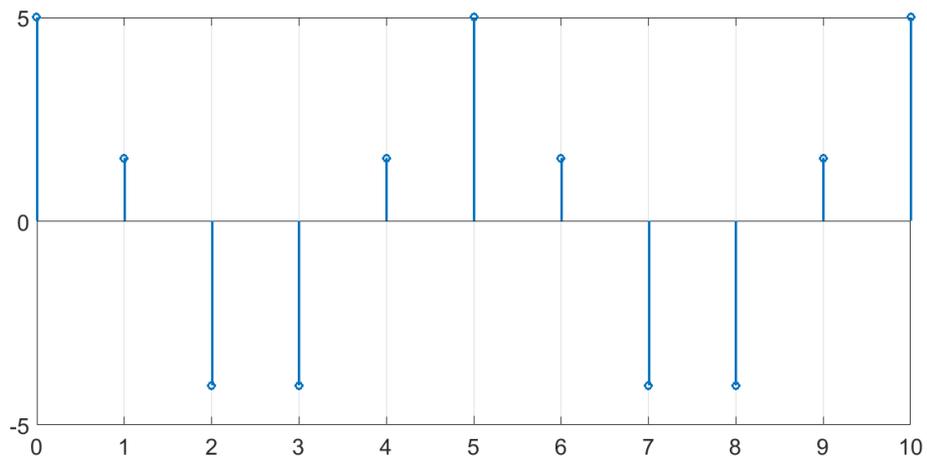


Figura B8: El periodo de la señal es $N = 5$ [s]

e) $x_2[n] = 5 \cos\left(\frac{2}{5}n\right)$

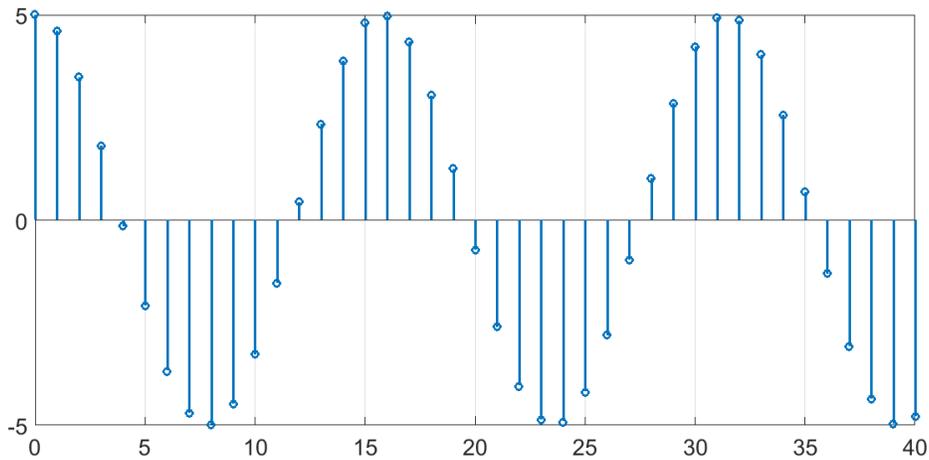


Figura B9: La señal es aperiódica

f) $x_3[n] = 5 \cos\left(\frac{2\pi}{5}n + \frac{\pi}{3}\right)$

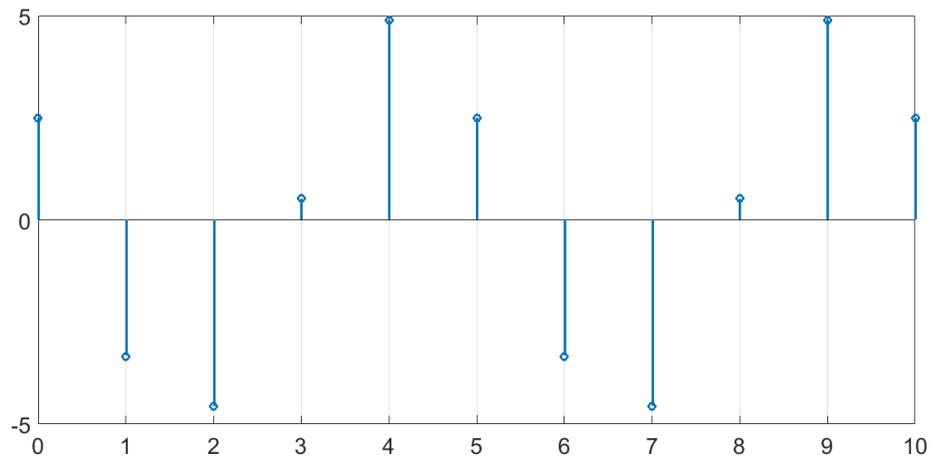


Figura B10: El periodo de la señal es $N = 5$

- 2.5**
- a) Todas las señales sinusoidales en tiempo continuo son periódicas.
 - b) NO todas las señales sinusoidales complejas en tiempo continuo son periódicas.
 - c) Las señales sinusoidales en tiempo continuo, para diferentes valores de la frecuencia, las señales son diferentes.
 - d) Las señales sinusoidales en tiempo discreto, para diferentes valores de la frecuencia (que varían en $\omega_0 \pm k2\pi$) representan señales iguales.

2.6 Para la función en tiempo continuo

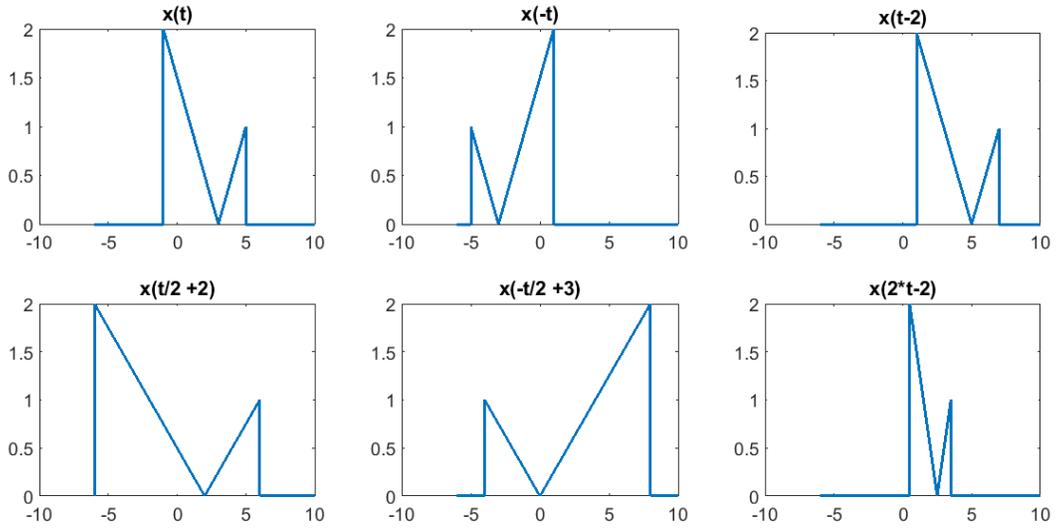


Figura B11:

Para la función en tiempo discreto

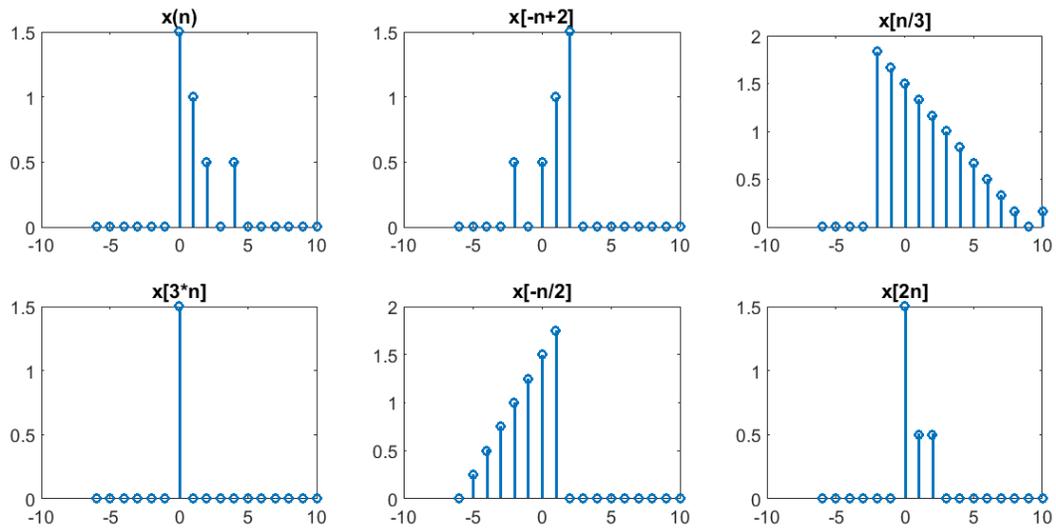


Figura B12:

2.7

2.8

2.9 a) Para las señales en tiempo continuo

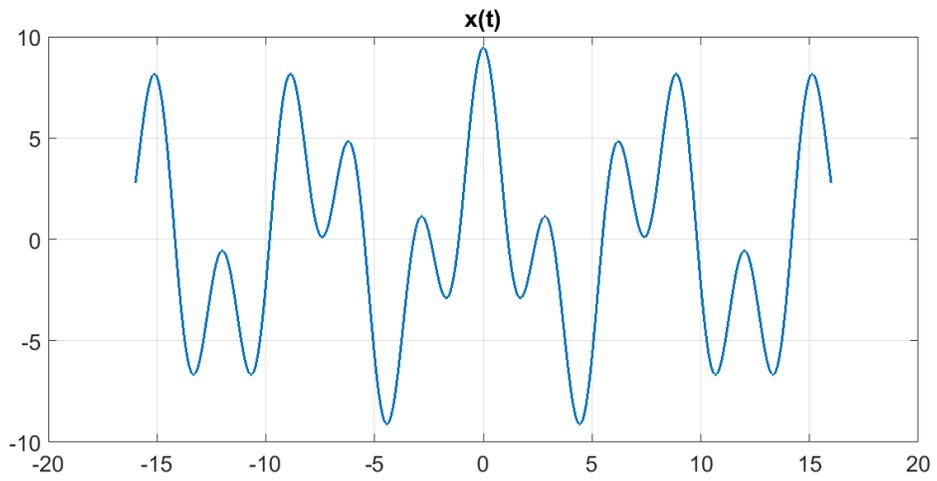


Figura B13: Suma de las señales en tiempo continuo

b)

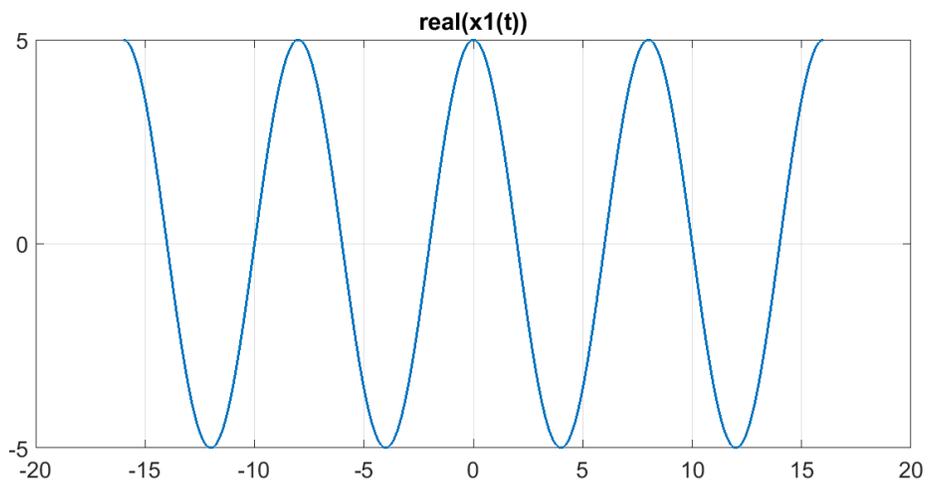


Figura B14: Parte real

c)

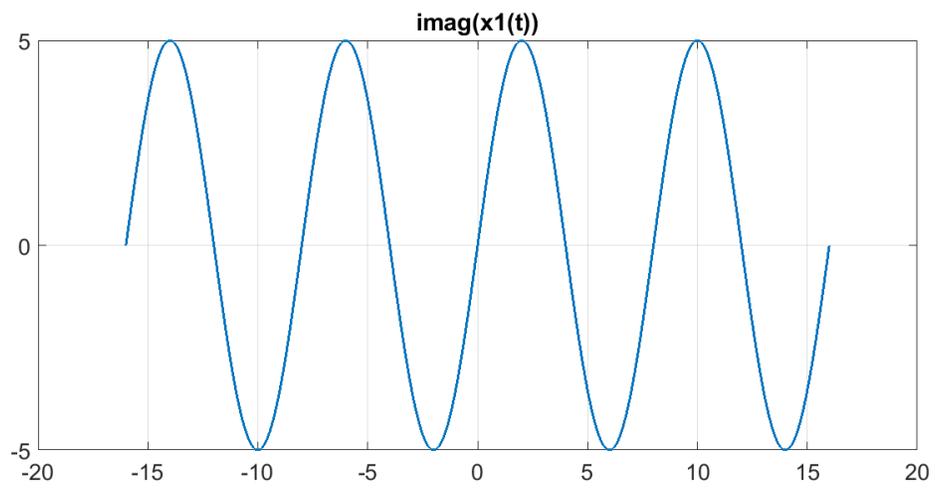


Figura B15: Parte imaginaria

d)

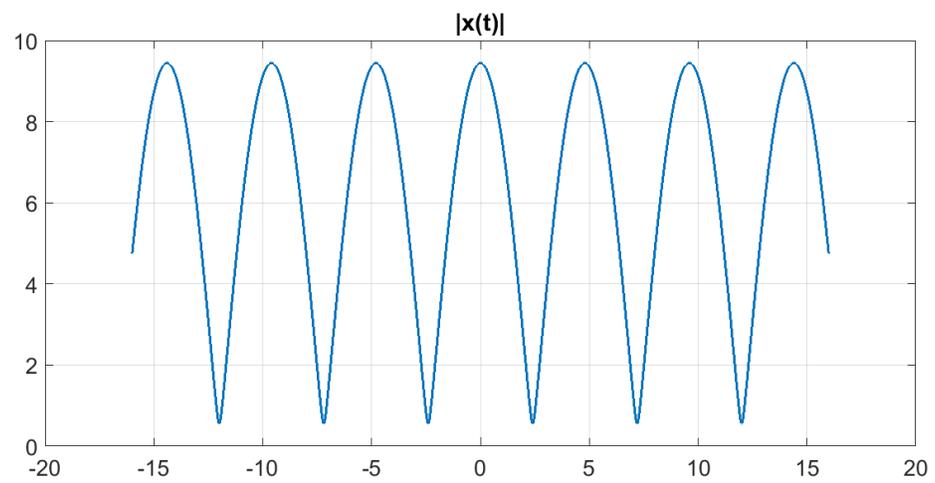


Figura B16: Valor absoluto de la función

e)

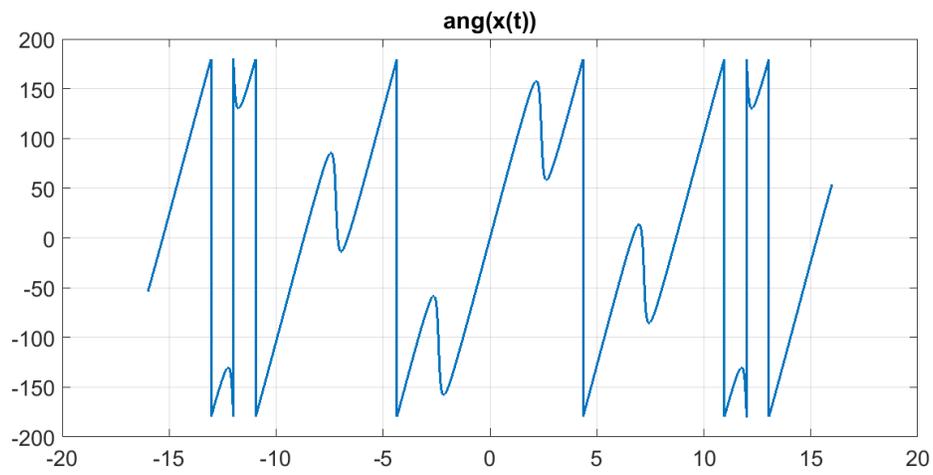


Figura B17: Ángulo de la función

f) $T = 24$ [s] y $f = \frac{1}{24}$ [Hz]

g) Para las señales en tiempo discreto

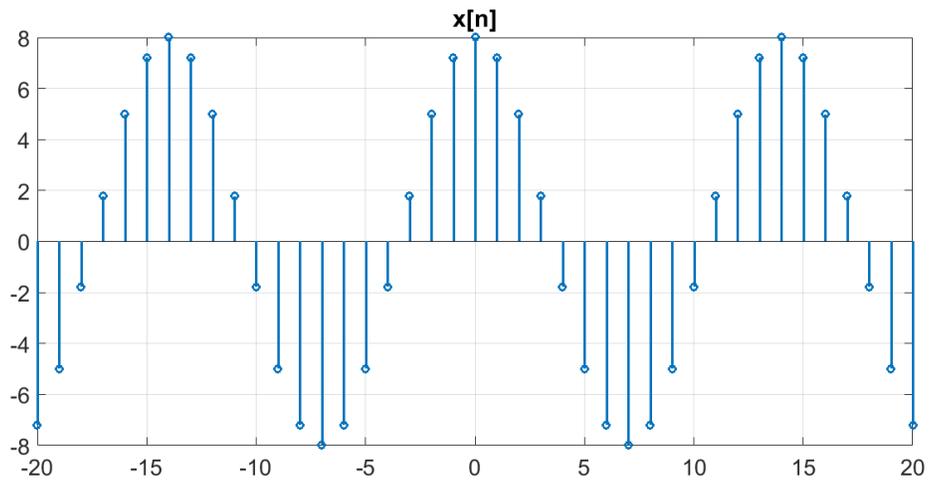


Figura B18: Suma de las señales en tiempo discreto

h)

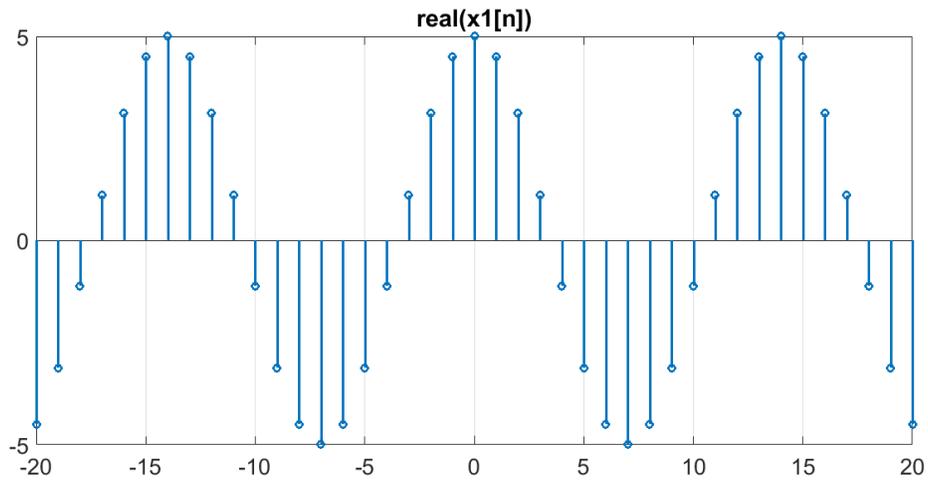


Figura B19: Parte real

i)

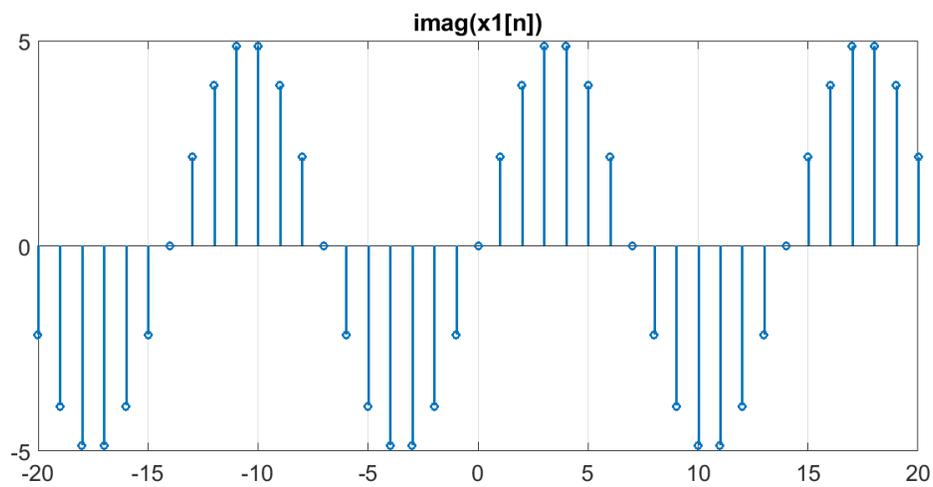


Figura B20: Parte imaginaria

j)

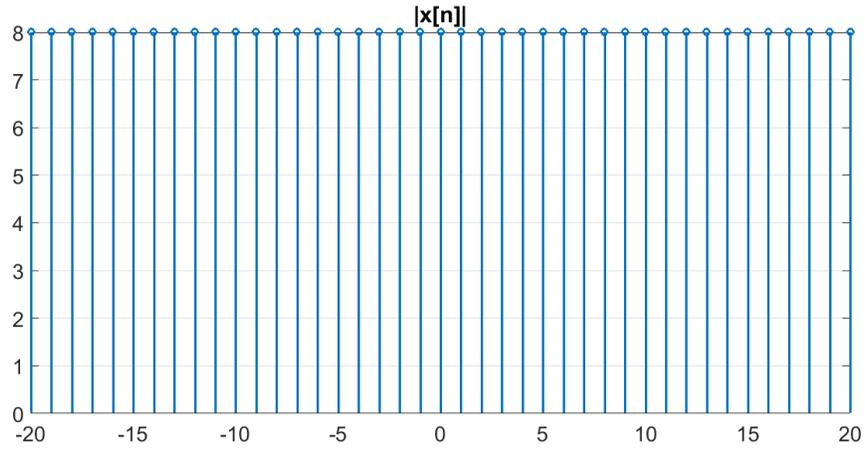


Figura B21: Valor absoluto de la función

k)

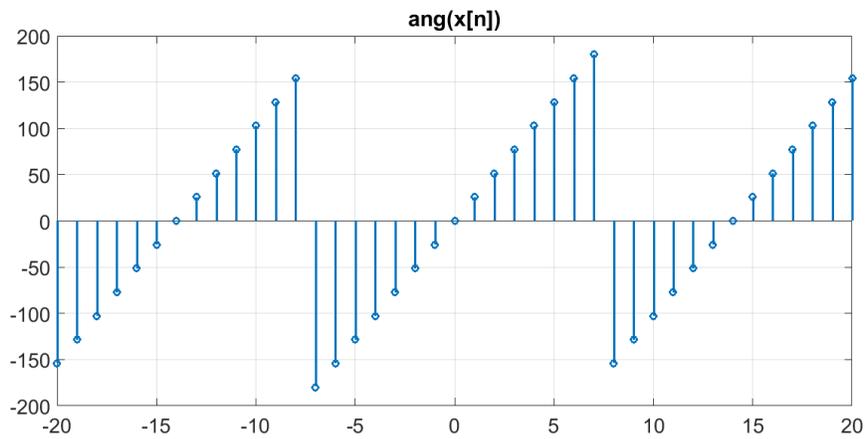


Figura B22: Ángulo de la función

l) $N = 14$

2.10 a) 1

b) 0

c) $e^{j\omega t}$

d) j

e) 0

f) 2

g) j

h) 2

Soluciones capítulo 3

3.1 a) $i_{zi}(t) = C e^{-\frac{2t}{5}} = 0$. Debido a que la condición inicial $i(0^-) = 0$, entonces $C = 0$ y por tanto $i_{zi}(t) = 0$

$$b) i_{zs}(t) = \left(\frac{1}{8} e^{-\frac{2t}{5}} - \frac{1}{8} e^{-2t} \right) u(t)$$

$$c) i_t(t) = i_{zi}(t) + i_{zs}(t) = \left(\frac{1}{8} e^{-\frac{2t}{5}} - \frac{1}{8} e^{-2t} \right) u(t)$$

$$d) i_{trans}(t) = i_{zs}(t) = \left(\frac{1}{8} e^{-\frac{2t}{5}} - \frac{1}{8} e^{-2t} \right) u(t)$$

$$e) i_p(t) = 0$$

f) Si $i(0^-) = 2 A$

$$i_t(t) = \left(-\frac{1}{8} e^{-2t} + \frac{17}{8} e^{-\frac{2t}{5}} \right) u(t)$$

$$i_{trans}(t) = \left(-\frac{1}{8} e^{-2t} + \frac{17}{8} e^{-\frac{2t}{5}} \right) u(t)$$

$$i_p(t) = 0$$

3.2 a) $i_{zi}(t) = C e^{-\frac{2t}{5}} = 0$. Debido a que la condición inicial $i(0^-) = 0$, entonces $C = 0$ y por tanto $i_{zi}(t) = 0$

$$b) i_{zs}(t) = \left(\frac{1}{5} t e^{-\frac{2t}{5}} \right) u(t)$$

$$c) i_t(t) = i_{zi}(t) + i_{zs}(t) = \left(\frac{1}{5} t e^{-\frac{2t}{5}} \right) u(t)$$

$$d) i_{trans}(t) = i_{zs}(t) = \left(\frac{1}{5} t e^{-\frac{2t}{5}} \right) u(t)$$

$$e) i_p(t) = 0$$

f) Si $i(0^-) = 2 A$

$$i_t(t) = \left(2e^{-\frac{2t}{5}} + \frac{1}{5} t e^{-\frac{2t}{5}} \right) u(t)$$

$$i_{trans}(t) = \left(2e^{-\frac{2t}{5}} + \frac{1}{5} t e^{-\frac{2t}{5}} \right) u(t)$$

$$i_p(t) = 0$$

3.3 a) $i_{zi}(t) = C e^{-\frac{2t}{5}} = 0$. Debido a que la condición inicial $i(0^-) = 0$, entonces $C = 0$ y por tanto $i_{zi}(t) = 0$

$$b) i_{zs}(t) = \frac{1}{52} \left(-e^{-\frac{2t}{5}} + \cos(2t) + 5 \sin(2t) \right) u(t)$$

$$c) i_t(t) = i_{zi}(t) + i_{zs}(t) = \frac{1}{52} \left(-e^{-\frac{2t}{5}} + \cos(2t) + 5 \sin(2t) \right) u(t)$$

$$d) i_{trans}(t) = i_{zs}(t) = \frac{1}{52} \left(-e^{-\frac{2t}{5}} + \cos(2t) + 5 \sin(2t) \right) u(t)$$

e) $i_p(t) \neq 0$

f) Si $i(0^-) = 2 A$

$$i_t(t) = \frac{1}{52} \left(103e^{-\frac{2t}{5}} + \cos(2t) + 5 \sin(2t) \right) u(t)$$

$$i_{trans}(t) = \frac{1}{52} \left(103e^{-\frac{2t}{5}} + \cos(2t) + 5 \sin(2t) \right) u(t)$$

$i_p(t) \neq 0$

3.4 Programa

3.5 a) $i(t) = \frac{20 e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)}{\sqrt{3}}$

b) $i(t) = \frac{25}{2} e^{-9t} (-1 + e^{8t})$

c) $i(t) = 100te^{-10t}$

3.6 Programa

3.7 a) $\frac{e^{-t} \sin(\sqrt{2}t)}{\sqrt{2}}$

b) $\frac{1}{3} e^{-t} \left(e^t + 2 \cos(\sqrt{2}t) + \sqrt{2} \sin(\sqrt{2}t) \right)$

3.8 Programa

3.9 a) Para $k = s$ y ambas positivas $y(t) = t e^{st}$

Para $k = s$ y ambas negativas $y(t) = t e^{-st}$

b) Para $k \neq s$ $y(t) = \frac{e^{kt} - e^{-st}}{k + s}$

3.10 a) $x_1(t) * x_2(t) = 4u_{-3}(t-1) + 4u_{-3}(t-3) + 8r(t-3) + 4u_{-3}(t-3) - 4u_{-3}(t-5) - 8r(t-5)$

b) $x_1(t) * x_2(t) = -4u_{-3}(t-4) + 4u_{-3}(t-6) + 4u_{-3}(t-6) - 4u_{-3}(t-8) + 8r(t-6) - 8r(t-8)$

c)

3.11 $w(t) * x(t) = r(t-1.5) (u(t-1.5) - u(t-3.5))$

$$w(t) * z(t) = 2r(t-0.5) (u(t-0.5) - u(t-2.5)) + 4r(t-1) (u(t-1) - u(t-3))$$

3.12 $x_1(t) * x_2(t) = r(t-4) - r(t-5) - r(t-5) + r(t-7)$

$$x_1(t) * x_1(t) = r(t-3) - r(t-4) - r(t-4) + r(t-5)$$

Soluciones capítulo 4

- 4.1 a) $\frac{s+3}{s^2+4s+8}$
b)

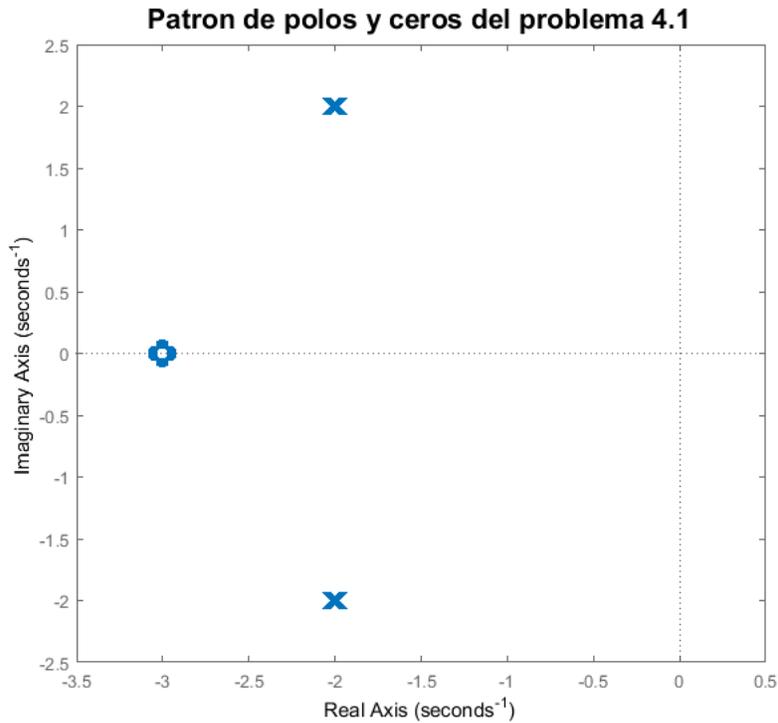


Figura B23: Respuesta del problema 4.1 inciso b), patrón de polos y ceros

- c) Se puede observar que la posición de los polos es el semi-plano complejo izquierdo, por lo tanto el sistema es estable
- d) $y(t) = \frac{3}{8}u_{-1}(t) - \frac{3}{8}e^{-2t}\cos(2t) + \frac{9}{32}e^{-2t}\sin(2t)$

4.2 a)

$$H(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+5} + \frac{9}{s^2+12s+40}$$

$$= \frac{s^3+23s^2+100s+125}{s^4+16s^3+93s^2+220s+200}$$

b)

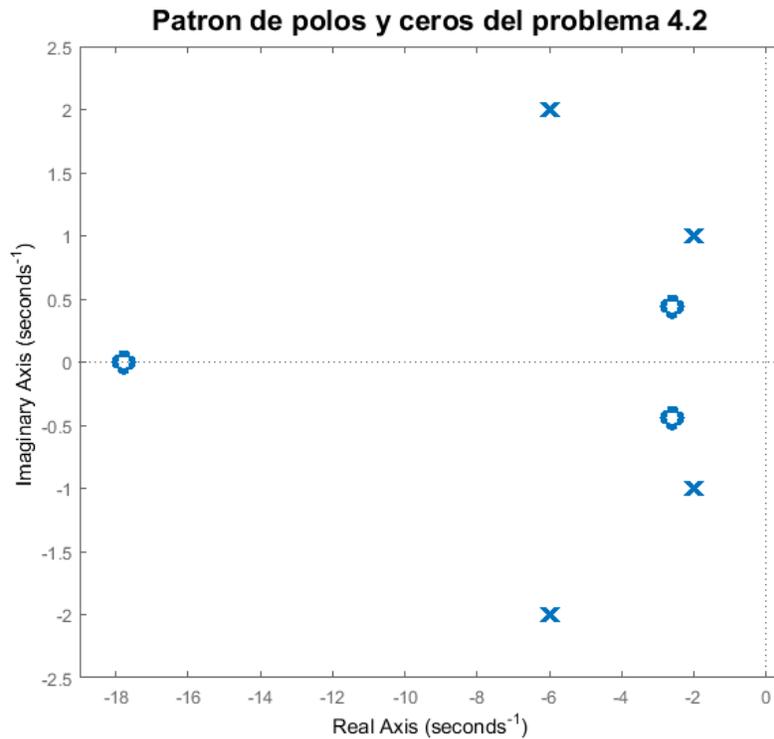


Figura B24: Respuesta del problema 4.2 inciso b), patrón de polos y ceros

c) Se puede observar que la posición de los polos es el semi-plano complejo izquierdo, por lo tanto el sistema es estable

d) $y(t) = \frac{5}{8}u_{-1}(t) - \frac{2}{5}e^{-2t}\cos(t) + \frac{2}{10}e^{-2t}\sin(t) - \frac{9}{40}e^{-6t}\cos(2t) - \frac{27}{40}e^{-6t}\sin(2t)$

4.3 a)

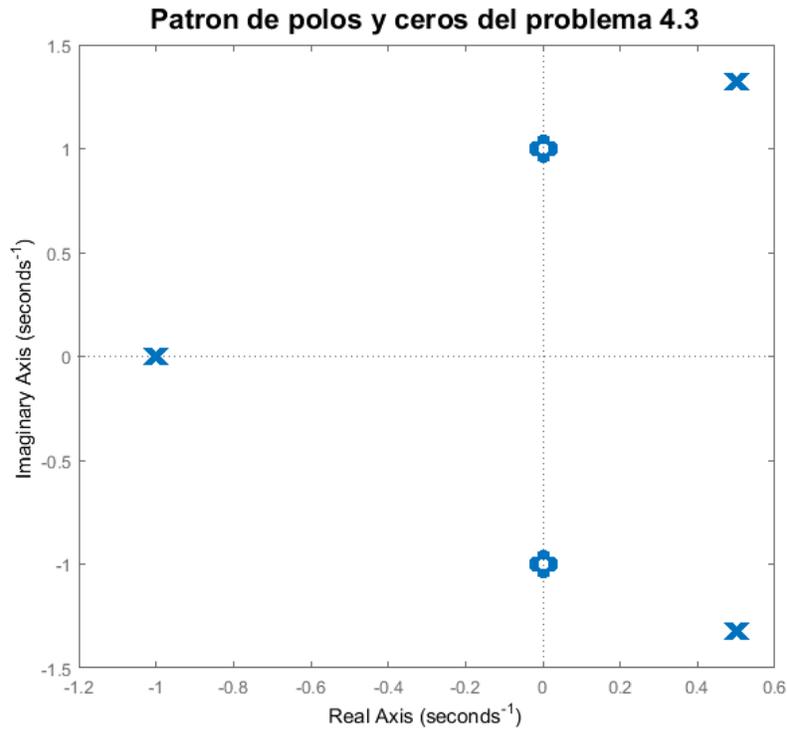


Figura B25:

b) Al analizar el polinomio del denominador de la función de transferencia $s^3 + s + 2$ tiene una raíz estable ($s + 1$), la que se encuentra en el semi-plano complejo izquierdo.

Mientras que se tienen dos raíces complejas conjugadas $s_{1,2} = \begin{cases} 0.5 - 1.323j \\ 0.5 + 1.323j \end{cases}$ las que se encuentran en el semi-plano complejo derecho, por lo tanto el sistema es inestable.

c)
$$y(t) = \frac{1}{2}u_{-1}(t) - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{\sqrt{7}}e^{0.5t} \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)$$

d)
$$y(t) = 0.05e^{-t} + 0.1 \sin(10t) - 0.002 \cos(10t) + 0.05e^{0.5t} \cos(\sqrt{1.75}t) - 1.35e^{0.5t} \sin(\sqrt{1.75}t)$$

4.4 a)

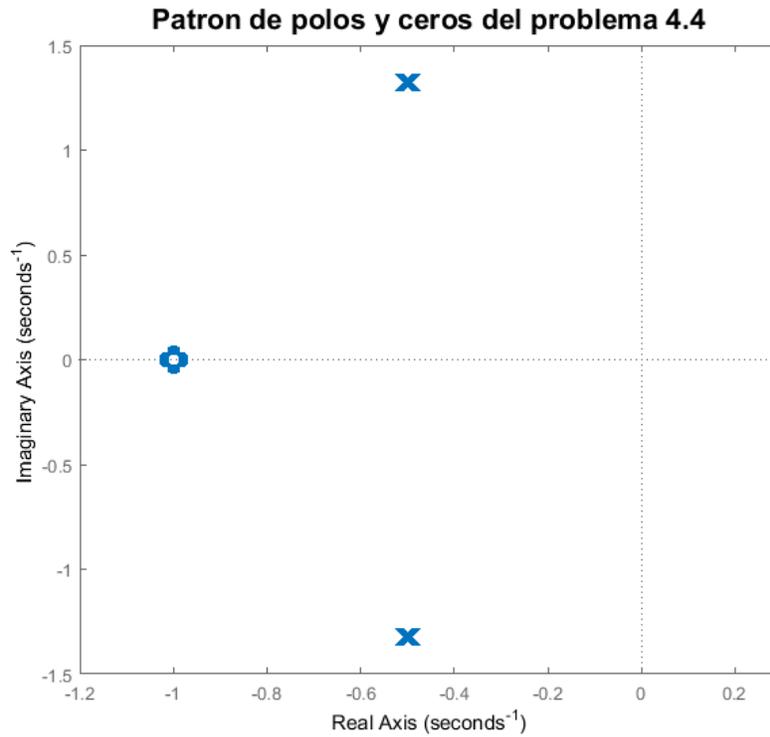


Figura B26: Respuesta del problema 4.4 inciso a), patrón d epolos y ceros

b) Los polos de la función de transferencia, son complejas conjugadas $s_{1,2} = \begin{cases} -0.5 - 1.323j \\ -0.5 + 1.323j \end{cases}$ las que se encuentran en el semi-plano complejo izquierdo, el sistema es estable.

c) $y(t) = 0.5u_{-1}(t) - 0.5e^{-0.5t} \cos(\sqrt{1.75}t) + 0.6614e^{0.5t} \sin(\sqrt{1.75}t)$

d) $y(t) = 0.1 \cos(10t) + 0.002 \sin(10t) + 0.1e^{-0.5t} \cos(\sqrt{1.75}t) - 0.0302e^{0.5t} \sin(\sqrt{1.75}t)$

4.5 a)

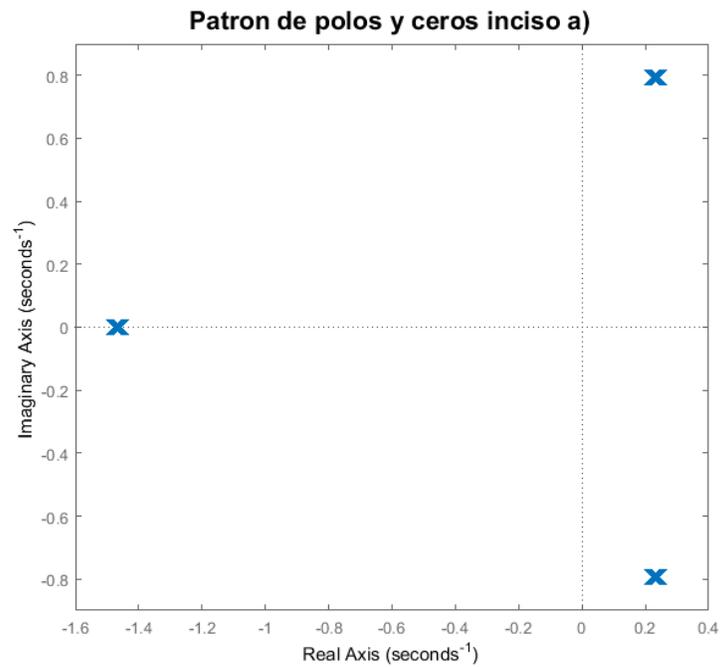


Figura B27: Respuesta del problema 4.5 inciso a), patrón de polos y ceros

b)

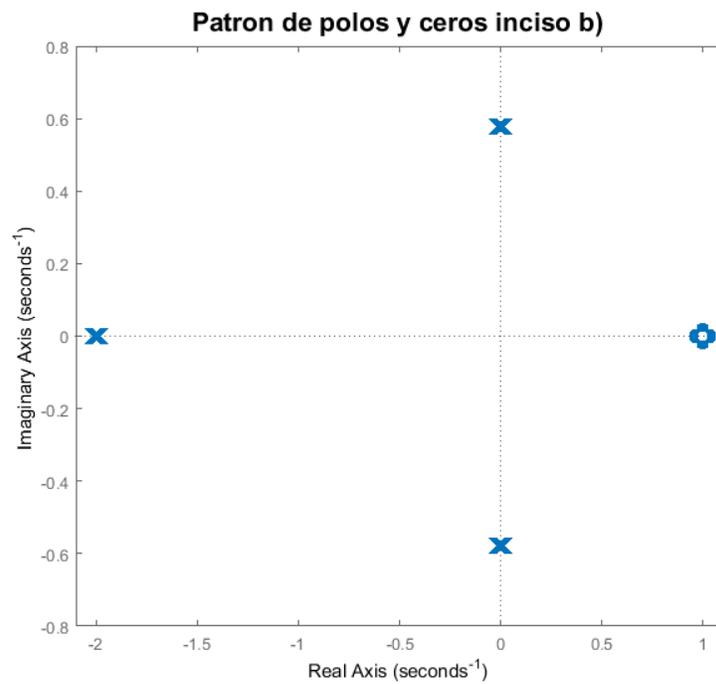


Figura B28: Respuesta del problema 4.5 inciso b), patrón de polos y ceros

c)

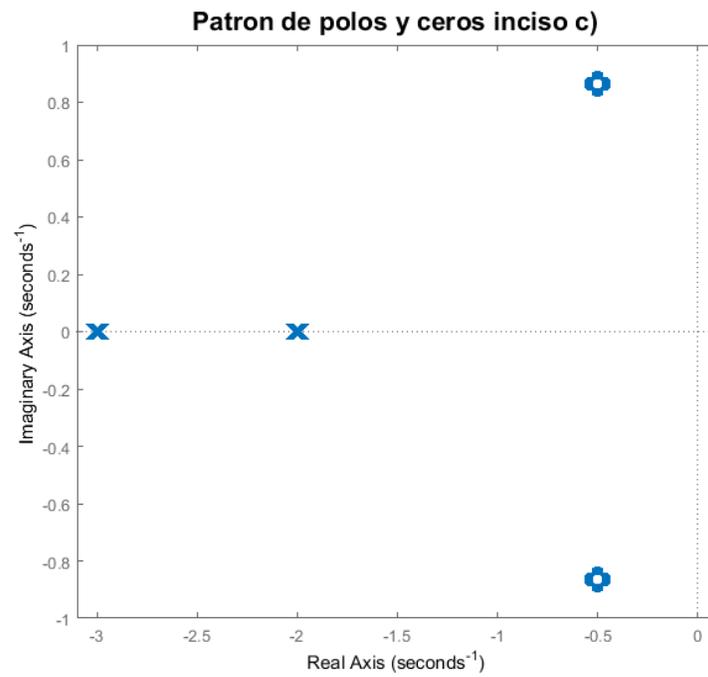


Figura B29: Respuesta del problema 4.5 inciso c), patrón de polos y ceros

d)

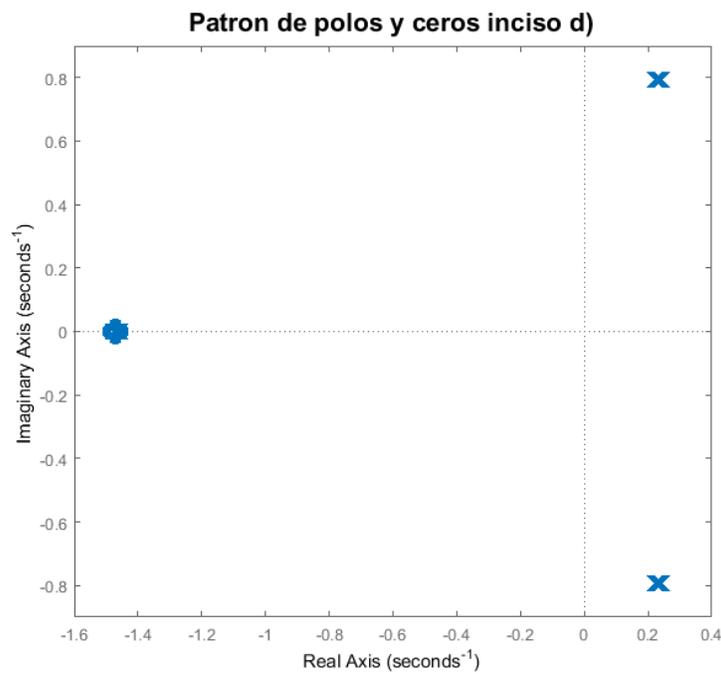


Figura B30: Respuesta del problema 4.5 inciso d), patrón de polos y ceros

e)

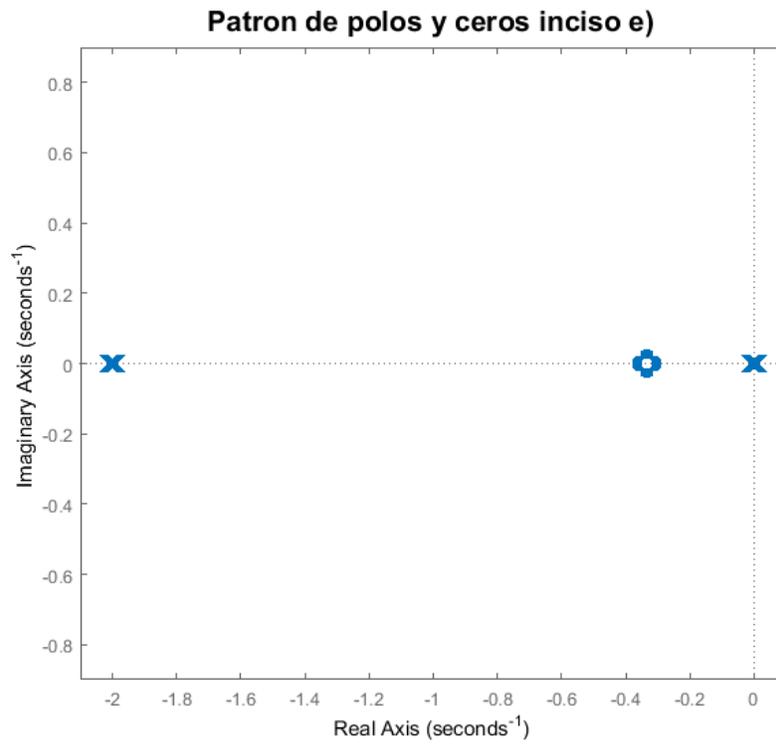


Figura B31: Respuesta del problema 4.5 inciso e), patrón de polos y ceros

f)

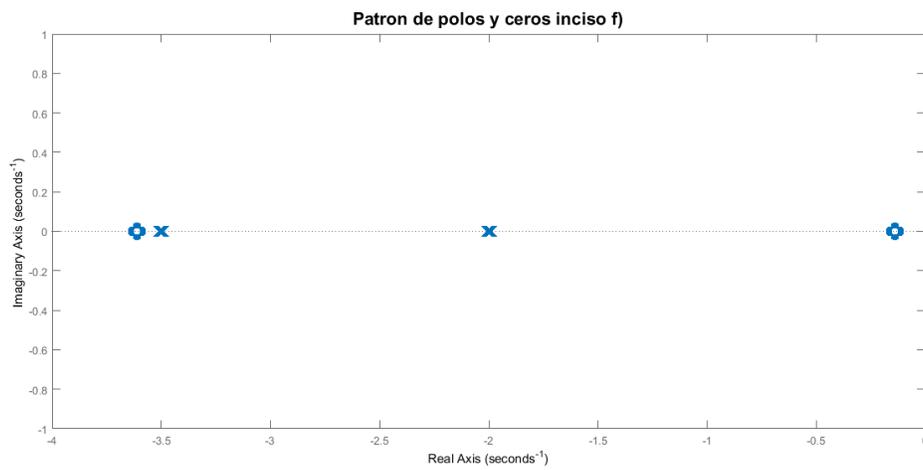


Figura B32: Respuesta del problema 4.5 inciso f), patrón de polos y ceros

g)

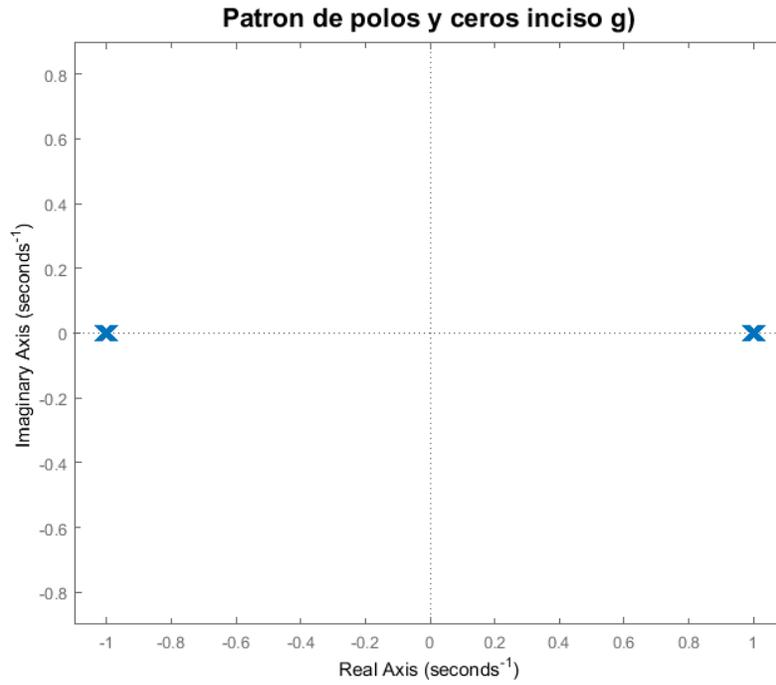


Figura B33: Respuesta del problema 4.5 inciso g), patrón de polos y ceros

h)

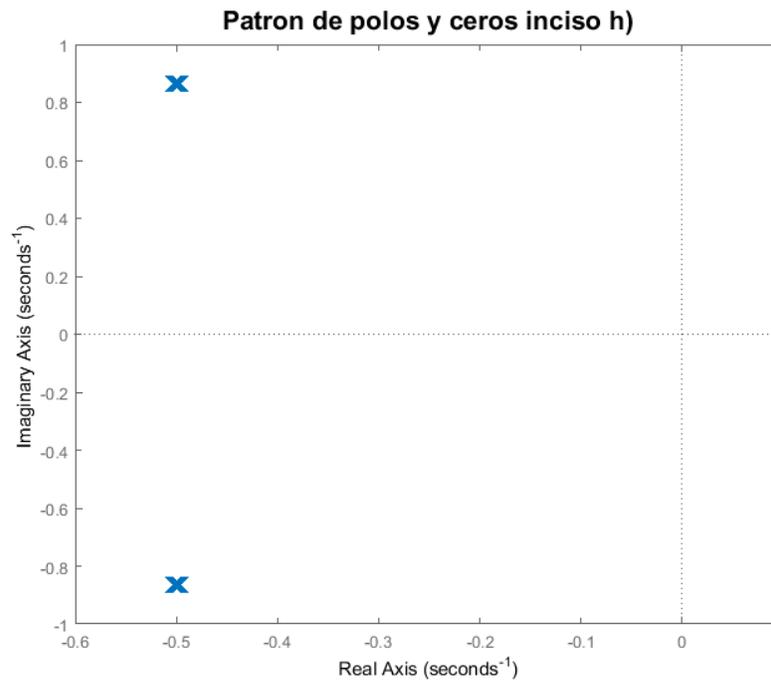


Figura B34: Respuesta del problema 4.5 inciso h), patrón de polos y ceros

i)

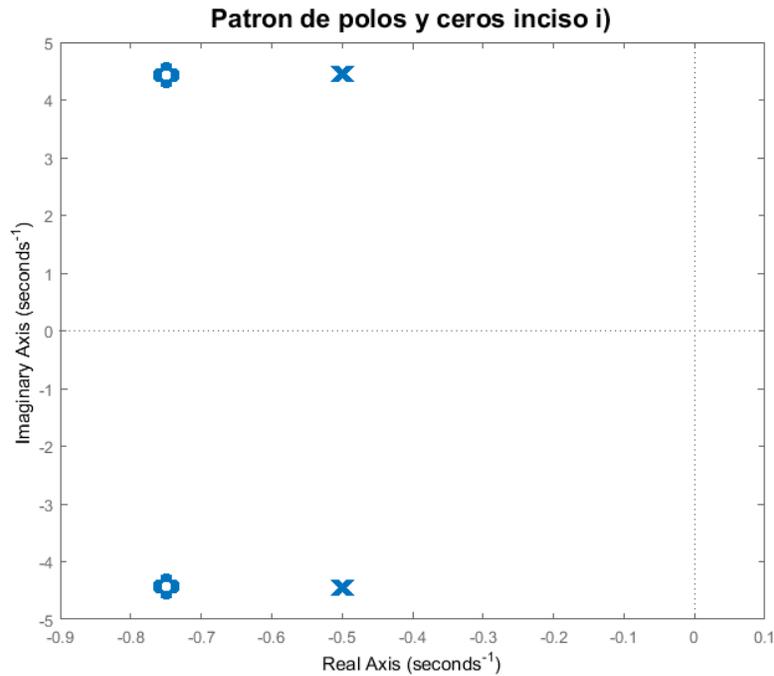


Figura B35: Respuesta del problema 4.5 inciso i), patrón de polos y ceros

- 4.6 a) La función de transferencia tiene tres polos, un polo real, estable, y dos complejos conjugados, en el caso de estos se encuentran en el semi-plano complejo derecho, por lo que la función de transferencia es inestable.
- b) La función de transferencia tiene tres polos, un polo real, estable y dos complejos conjugados, los que se ubican en el eje imaginario, por lo que el sistema es críticamente estable.
- c) La función de transferencia tiene dos polos reales, los que al estar en el semi-plano complejo izquierdo, hacen que el sistema sea estable.
- d) La función de transferencia tiene tres polos, un polo real, estable, y dos complejos conjugados, los que se encuentran en el semi-plano complejo derecho, por lo que la función de transferencia es inestable.
- e) La función de transferencia tiene dos polos reales, uno negativo y el otro se encuentra en el origen, por lo que el sistema es críticamente estable.
- f) La función de transferencia tiene dos polos reales, los que al estar en el semi-plano complejo izquierdo, hacen que el sistema sea estable.
- g) La función de transferencia tiene dos polos reales, uno en el semi-plano complejo derecho, por lo que el sistema es inestable.
- h) La función de transferencia tiene dos polos complejos conjugados, los que al estar en el semi-plano complejo izquierdo, hacen que el sistema sea estable.
- i) La función de transferencia tiene dos polos complejos conjugados, los que al estar en el semi-plano complejo izquierdo, hacen que el sistema sea estable.

4.7 a) Para la entrada $\frac{1}{s}$

$$y(t) = u_{-1}(t) - 0.1942e^{-1.4656t} + 0.0905e^{0.233t} \cos(0.7925t) - 0.99e^{0.233t} \sin(0.7925t)$$

Para la entrada $\frac{1}{s^2}$

$$y(t) = 83.3 \times 10^{-6} u_{-1}(t) + t + 0.1325e^{-1.4656t} - 0.1326e^{0.233t} \cos(0.7925t) - 0.9776e^{0.233t} \sin(0.7925t)$$

Para la entrada $\frac{s}{s^2 + 400\pi^2}$

$$y(t) = -1.06 \times 10^{-4} e^{-1.4656t} - 6.41 \times 10^{-8} \cos(20t) - 4.025 \times 10^{-6} \sin(20t) + 1.57 \times 10^{-4} e^{0.2328t} \cos(0.7925t) + 0.8813e^{0.2328t} \sin(0.7925t)$$

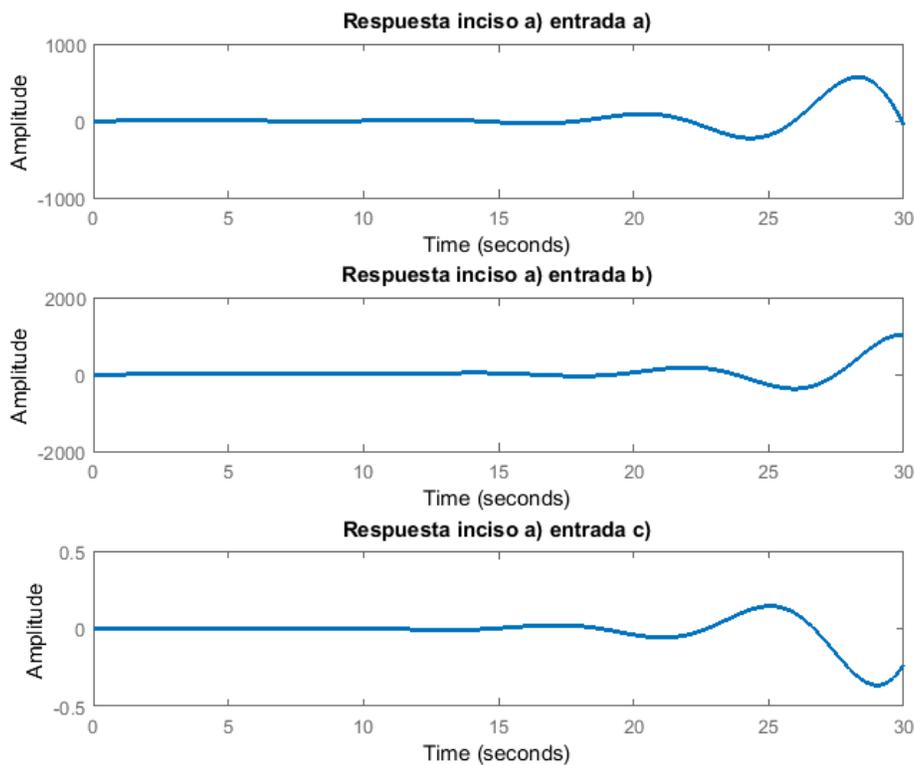


Figura B36: Respuesta del problema 4.7 inciso a)

b) Para la entrada $\frac{1}{s}$

$$y(t) = -\frac{1}{2} u_{-1}(t) + \frac{3}{26} e^{-2t} + \frac{5}{13} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{3}} t\right) + \frac{3}{13} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{3}} t\right)$$

Para la entrada $\frac{1}{s^2}$

$$y(t) = \frac{3}{4}u_{-1}(t) - \frac{3}{52}e^{-2t} - \frac{1}{2}t - \frac{9}{13}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}t\right) + \frac{5\sqrt{3}}{13}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}t\right)$$

Para la entrada $\frac{s}{s^2 + 400\pi^2}$

$$y(t) = \frac{9}{78 + 7800\pi^2}e^{-2t} + \frac{30\cos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}t\right) + 18\sqrt{3}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}t\right)}{78(1 - 1200\pi^2)}$$

$$+ \frac{39(1 - 1200\pi^2)\cos(20\pi t) + 1170\sin(20\pi t)}{78(1 + 100\pi^2)(1200\pi^2 - 1)}$$

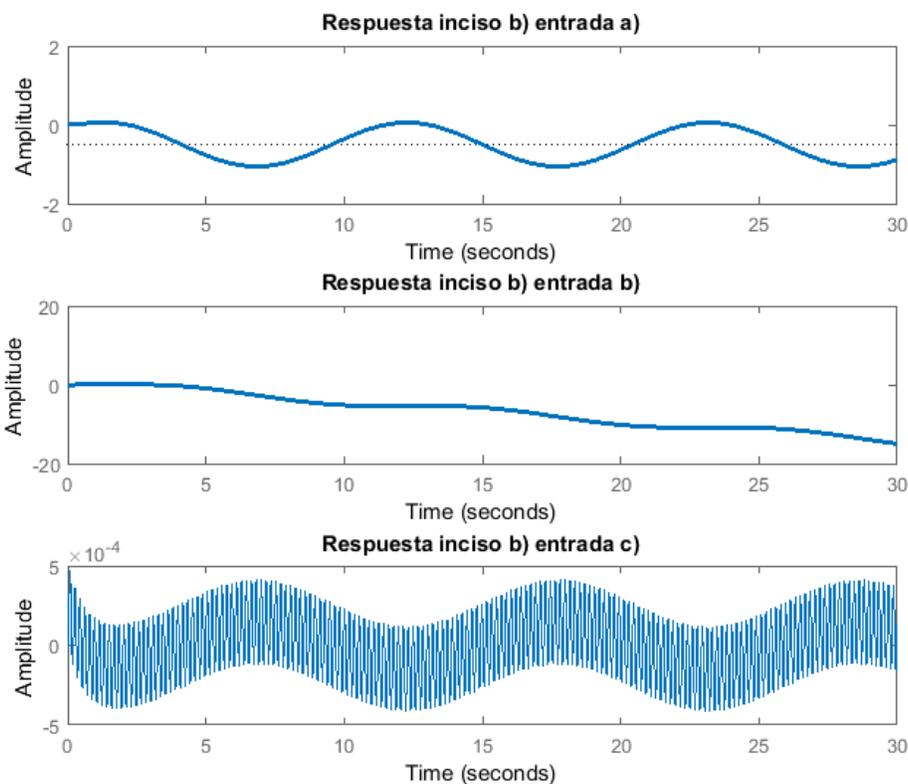


Figura B37: Respuesta del problema 4.7 inciso b)

c) Para la entrada $\frac{1}{s}$

$$y(t) = \frac{1}{6}u_{-1}(t) + \frac{7}{3}e^{-3t} - \frac{3}{2}e^{-2t}$$

Para la entrada $\frac{1}{s^2}$

$$y(t) = \frac{1}{36}u_{-1}(t) + \frac{1}{6}t - \frac{7}{9}e^{-3t} - \frac{3}{4}e^{-2t}$$

Para la entrada $\frac{s}{s^2 + 400\pi^2}$

$$y(t) = \frac{-3}{2 + 200\pi^2} e^{-2t} + \frac{21}{9 + 400\pi^2} e^{-3t} + \frac{(3 - 400\pi^2 + 80000\pi^4)}{18 + 2600\pi^2 + 80000\pi^4} \cos(20\pi t) - \frac{5\pi(1 + 1600\pi^2)}{9 + 1300\pi^2 + 40000\pi^4} \sin(20\pi t)$$

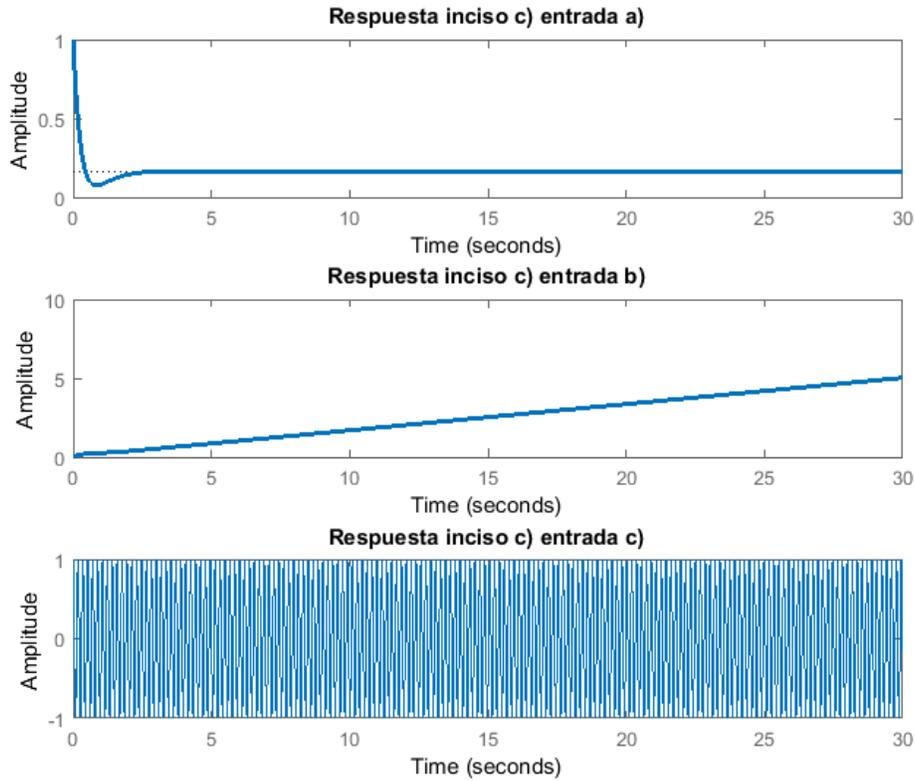


Figura B38: Respuesta del problema 4.7 inciso c)

d) Para la entrada $\frac{1}{s}$

$$y(t) = 1.47u_{-1}(t) - 860 \times 10^{-6}e^{-1.47t} - 1.47e^{0.2328t} \cos(0.793t) + 0.88e^{0.2328t} \sin(0.793t)$$

Para la entrada $\frac{1}{s^2}$

$$y(t) = u_{-1}(t) + 1.47t + -587 \times 10^{-6}e^{-1.47t} - e^{0.2328t} \cos(0.793t) - 1.55e^{0.2328t} \sin(0.793t)$$

Para la entrada $\frac{s}{s^2 + 400\pi^2}$

$$y(t) = 0.47 \times 10^{-6} e^{-1.47t} - 0.25 \times 10^{-3} \cos(20\pi t) - 1.9 \times 10^{-6} \sin(20\pi t) \\ + 0.25 e^{0.2328t} \times 10^{-3} \cos(0.79t\pi t) + 0.294 e^{0.2328t} \times 10^{-3} \sin(0.79t\pi t)$$

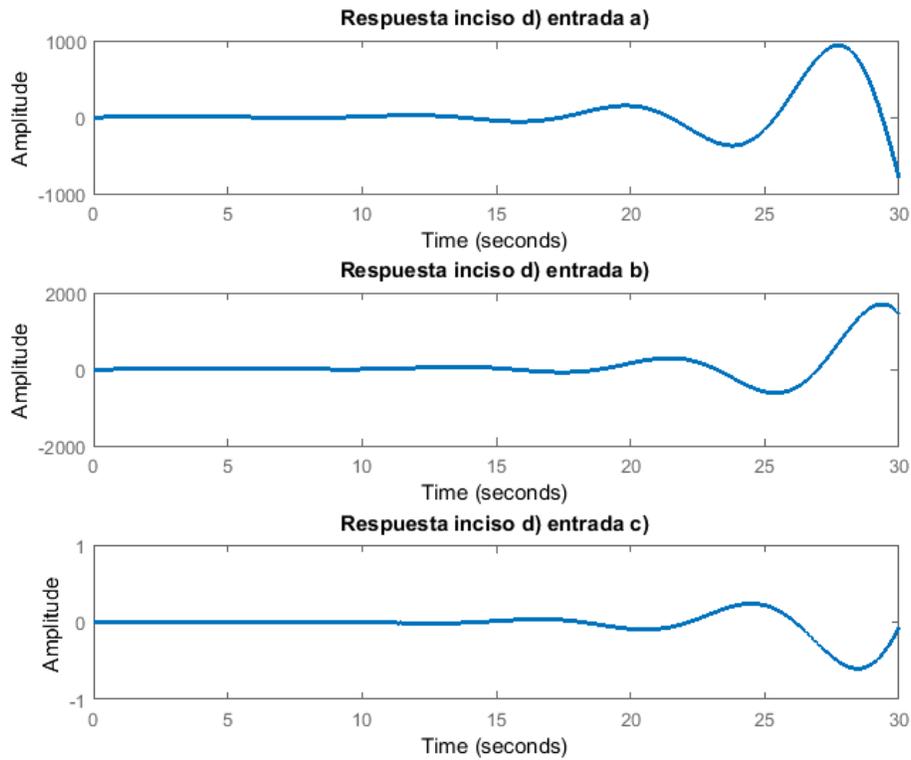


Figura B39: Respuesta del problema 4.7 inciso d)

e) Para la entrada $\frac{1}{s}$

$$y(t) = \frac{5}{4} u_{-1}(t) + \frac{1}{2} t - \frac{5}{4} e^{-2t}$$

Para la entrada $\frac{1}{s^2}$

$$y(t) = -\frac{5}{8} u_{-1}(t) + \frac{5}{4} t + \frac{1}{4} t^2 - \frac{5}{8} e^{-2t}$$

Para la entrada $\frac{s}{s^2 + 400\pi^2}$

$$y(t) = -\frac{5}{4(1+100\pi^2)}e^{-2t} + \frac{5}{4(1+100\pi^2)}\cos(20\pi t) + \frac{1}{40\pi(1+100\pi^2)}\sin(20\pi t) + \frac{15\pi}{1+100\pi^2}\sin(20\pi t)$$

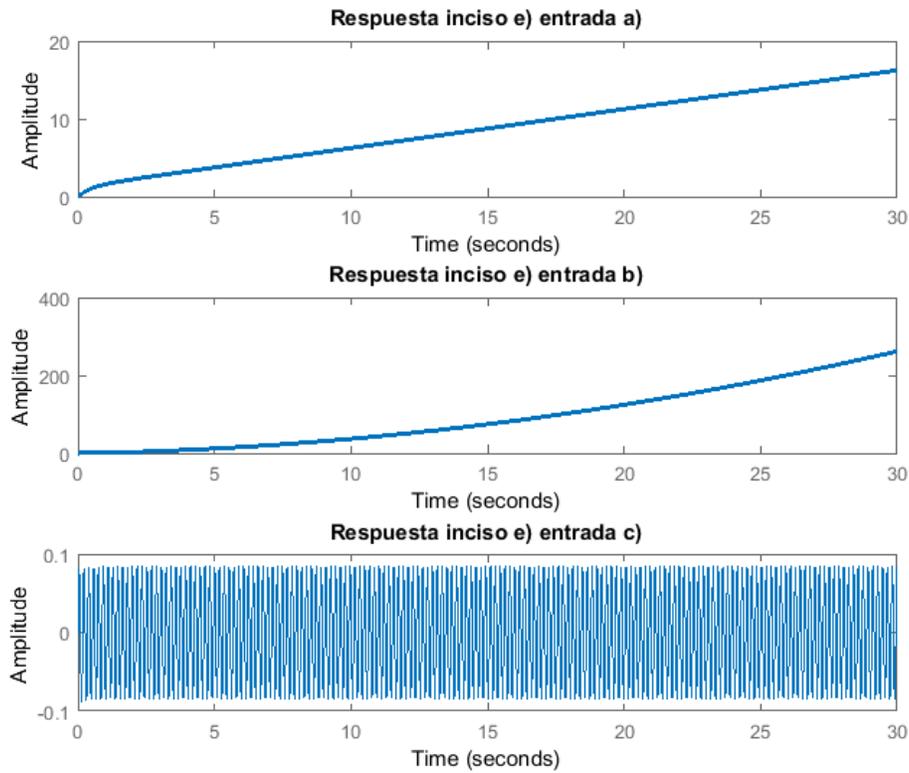


Figura B40: Respuesta del problema 4.7 inciso e)

f) Para la entrada $\frac{1}{s}$

$$y(t) = \frac{5}{7}u_{-1}(t) - \frac{5}{7}e^{-\frac{7}{2}t} + 10e^{-2t}$$

Para la entrada $\frac{1}{s^2}$

$$y(t) = \frac{235}{49}u_{-1}(t) + \frac{5}{7}t + \frac{10}{49}e^{-\frac{7}{2}t} - 5e^{-2t}$$

Para la entrada $\frac{s}{s^2 + 400\pi^2}$

$$y(t) = 0.01e^{-2t} - 0.0022e^{-\frac{7}{2}t} + 10\cos(20\pi t) - 0.28\cos(20\pi t)$$

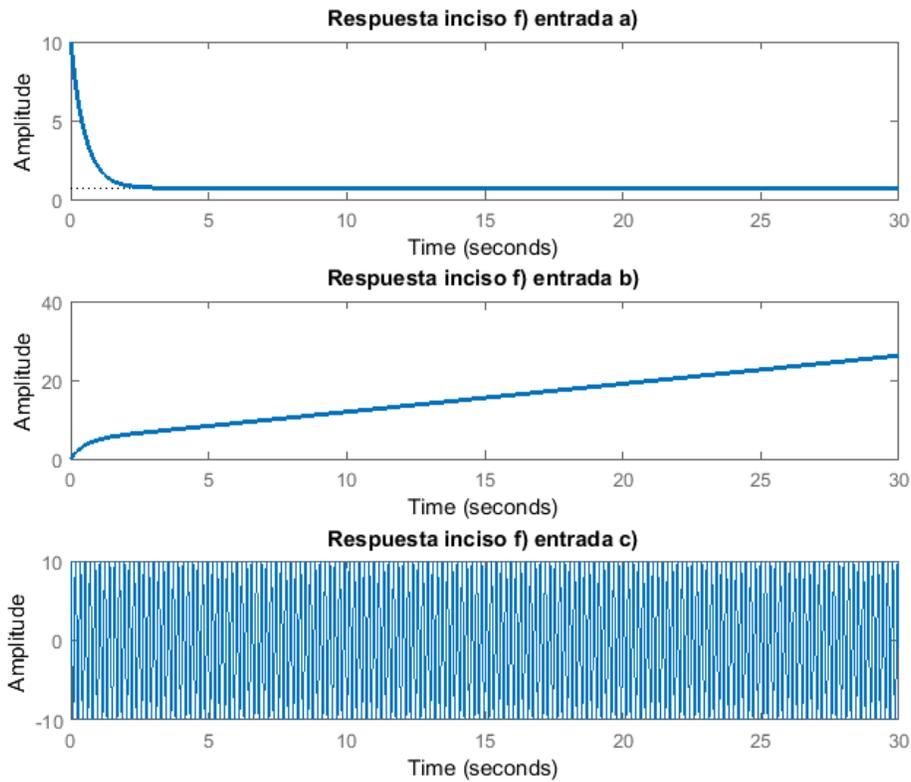


Figura B41: Respuesta del problema 4.7 inciso f)

g) Para la entrada $\frac{1}{s}$

$$y(t) = -u_{-1}(t) + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^t$$

Para la entrada $\frac{1}{s^2}$

$$y(t) = -t - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^t$$

Para la entrada $\frac{s}{s^2 + 400\pi^2}$

$$y(t) = 0.13 \times 10^{-3} e^{-t} + 0.13 \times 10^{-3} e^t - 0.25 \times 10^{-3} \cos(20\pi t)$$

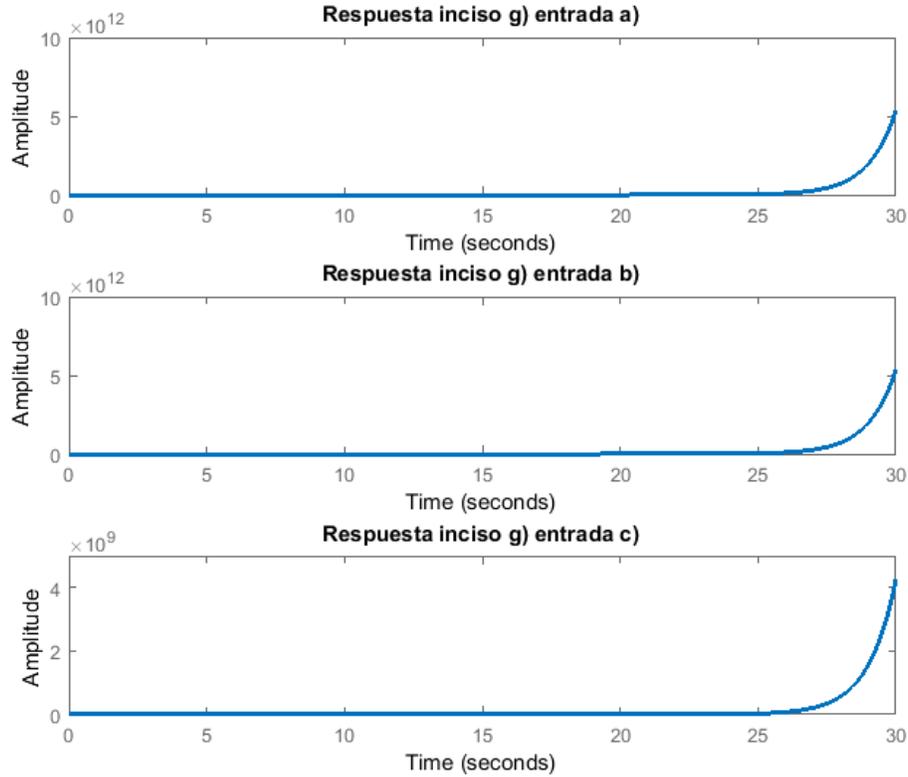


Figura B42: Respuesta del problema 4.7 inciso g)

h) Para la entrada $\frac{1}{s}$

$$y(t) = 100u_{-1}(t) - 100e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{100}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

Para la entrada $\frac{1}{s^2}$

$$y(t) = -100u_{-1}(t) + 100t + 100e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{100}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

Para la entrada $\frac{s}{s^2 + 400\pi^2}$

$$y(t) = 0.025e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - 0.014e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - 0.025 \cos(20\pi t) \\ + 0.4 \times 10^{-3} \sin(20\pi t)$$

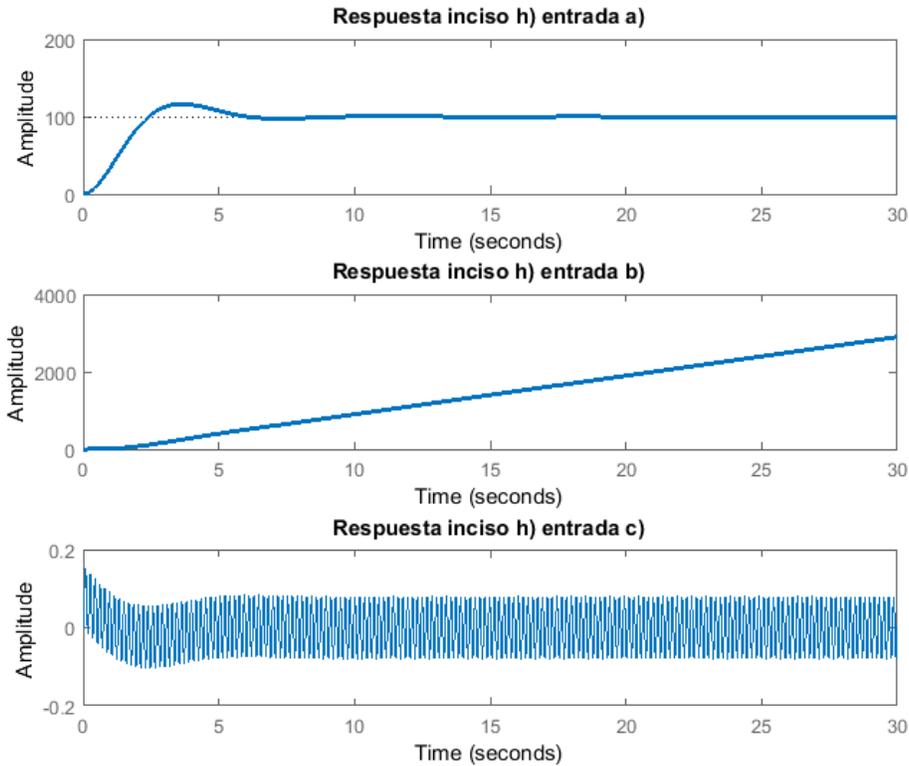


Figura B43: Respuesta del problema 4.7 inciso g)

i) Para la entrada $\frac{1}{s}$

$$y(t) = 10.1u_{-1}(t) - 0.1e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{79}}{2}t\right) + 1.11e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{79}}{2}t\right)$$

Para la entrada $\frac{1}{s^2}$

$$y(t) = \frac{49}{200}u_{-1}(t) + 10.1t - \frac{49}{200}e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{79}}{2}t\right) + 0.05e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{79}}{2}t\right)$$

Para la entrada $\frac{s}{s^2 + 400\pi^2}$

$$y(t) = -0.8 \times 10^{-3}e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{79}}{2}t\right) - 0.006e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{79}}{2}t\right) + 10 \cos(20\pi t) + 0.081 \sin(20\pi t)$$

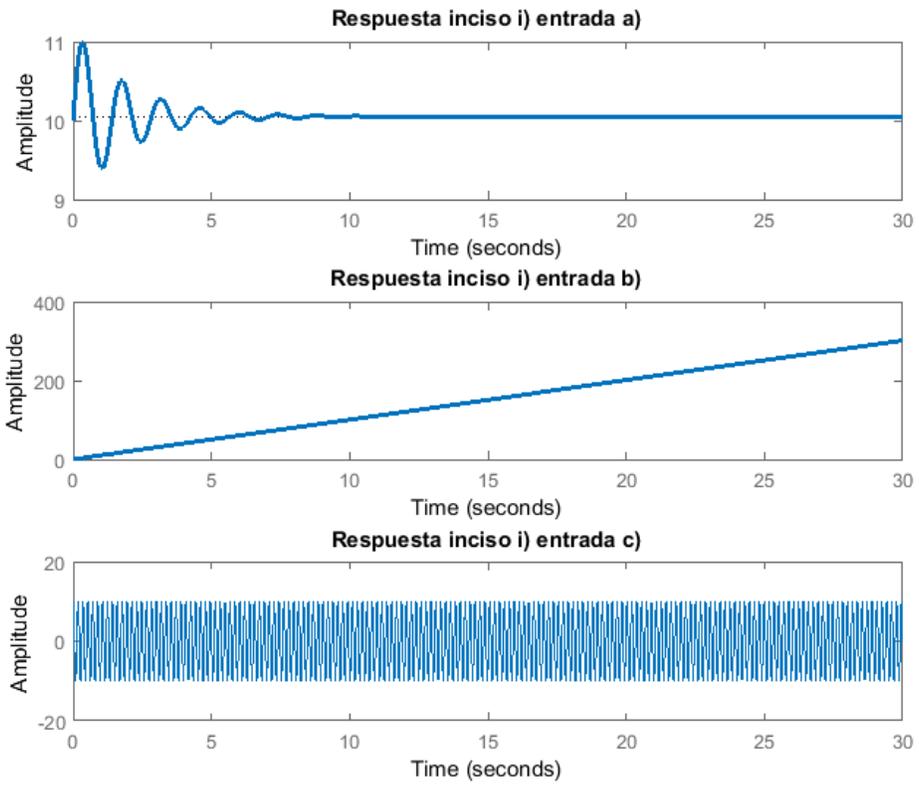


Figura B44: Respuesta del problema 4.7 inciso i)

Soluciones capítulo 5

$$5.1 \quad x[n] = \begin{cases} 0 & n \leq -2 \\ -2 & -2 \leq n \leq -1 \\ 2 & 0 \leq n \leq 3 \\ 0 & 3 < n \end{cases}$$

5.2 a) $x[n] = [n+3]u[n+3] - 2nu[n] + [n-3]u[n-3]$

b) $x[n] = -nu[n+3] - 2nu[n] - nu[n-4]$

5.3 a) Sistema causal y estable

b) Sistema causal y estable

c) Sistema no causal y estable

d) Sistema no causal e inestable

5.4 a) Falso

b) Verdadero

c) Falso

d) Falso

5.5 a) Demostración

b) Demostración

$$x[0] = x[1] = \dots = x[8] = 1$$

$$x[9] = 2$$

c)

$$x[10] = 4$$

$$x[11] = 6$$

5.6 a) $\beta[n+2] = 2\beta[n+1] + 3\beta[n]$

b) $\alpha[100] + \beta[100] = 3^{100}$

$$5.7 \quad y_2[n] = \begin{cases} (-2)^{n-1} & n < 0 \\ -(-2)^{n-1} & n \geq 0 \end{cases}$$

5.8 $h[n] = u[n]$

5.9 Gráfica

5.10 Gráfica

$$5.11 \quad y_{zs}[n] = \frac{(n-1)n}{2} u[n]$$

$$5.12 \quad y_{zs}[n] = a^n u[n] + 2a^{n-1} u[n-1] + 3a^{n-2} u[n-2]$$

$$5.13 \quad y_{zs}[n] = \delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 5\delta[n-3] + 6\delta[n-4] + 5\delta[n-5] + 3\delta[n-6] + \delta[n-7]$$

5.14 Demostración

$$5.15 \quad h[n] = \delta[n] + 3\delta[n-1] + 5\delta[n-2]$$

5.16 Para los sistemas conectados en paralelo

$$h[n] = \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{5}{8} \left(\frac{1}{3}\right)^n \right] u[n]$$

Para los sistemas conectados en cascada

$$h[n] = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2} \left(\frac{-1}{2}\right)^n \right] u[n]$$

5.17 Gráfica

5.18 $\alpha = -\frac{5}{6}$ $\beta = \frac{1}{6}$

5.19 $A = 9\sqrt{3}$ $B = \frac{27}{8}$ $\phi = -\frac{\pi}{4}$

5.20 $y[0] = 0$, $y[1] = 2$, \dots , $y[8] = -284$

5.21 $y[n] = 6(2)^n + 2(-2)^n + 2^{n-1} \sum_{m=-1}^n \left[(1)^m + (-1)^m \right]$

5.22 $y_{zs}[n] = 3 \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] + 3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u[n-2]$

5.23 $\alpha < 0$

5.24 $y[n] = \frac{1}{2} [2n-1] u[n-1]$

Gráfica

5.25 a) $h_f = u[n-1]$ $h[n] = \frac{T}{2} [u[n] + u[n-1]]$

b) Inestable

c) $x[n] = u[n]$

d) $y_{zs}[0] = \frac{1}{2}T$, $y_{zs}[1] = \frac{3}{2}T$, $y_{zs}[2] = \frac{5}{2}T$, $y_{zs}[3] = \frac{7}{2}T$

5.26 a) $y[n] = 10^5(1.01)^n - p \sum_{m=1}^{n-1} (1.01)^m$

b) $p = \$1028.60$

c) Cuando $N = 360$, Pago total = \$370300.00

d) Inestable

5.27 Programa

5.28 Programa

5.29 Programa

5.30 Programa

Soluciones capítulo 6

6.1 a) $F(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{2}} \quad |z| > \frac{1}{2}$

b) $F(z) = \frac{\frac{z}{2}}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^2} \quad |z| > \frac{1}{2}$

c) $F(z) = e^{\left(\frac{a}{z}\right)}$

d) $F(z) = a^{\left(\frac{1}{z}\right)}$

e) $F(z) = \frac{z}{z-1} X(z)$

f) $F(z) = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{z}{z^2 - z + 1} \quad |z| > 1$

6.2 $F(z) = \frac{z(z+1)^2}{z^4 - 1} \quad |z| > 1$

6.3 Demostración

6.4 $\sin\left[\frac{\pi n}{3}\right] u[n] \longleftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{z}{z^2 - z + 1}$

6.5 $h[n] = \left[(3 - 2\sqrt{2}) \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} + (3 + 2\sqrt{2}) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} \right] \frac{u[n-1]}{4}$

6.6 $y_{zs}[n] = \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left[\frac{\pi n}{2}\right] + \sin\left[\frac{\pi n}{2}\right] \right] u[n]$

6.7 $y[n] = \frac{1}{9} \left[2^n + 2(-1)^n - 3 \cos\left[\frac{\pi n}{3}\right] + \sqrt{3} \sin\left[\frac{\pi n}{3}\right] \right] u[n]$

6.8 a) $H(z) = \frac{Y_{zs}(z)}{X(z)} = \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1}$

b) $h[n] = \frac{T}{2} [u[n] + u[n-1]]$

c) $y_{zs}[n] = \left(n + \frac{1}{2}\right) u[n]$

d) Gráfica

e) Sistema inestable

6.9 $h_1[n] = \delta[n] + 3\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 2\delta[n-3] + \delta[n-4]$

6.10 a) $y[n] = -2\delta[n-1] + 2u[n-1]$

b) Diagrama

6.11 a) Sistema estable

b) $y[n] = \frac{1}{5} \left[4 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \left[4 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] \right] u[n]$

6.12 a) $H(z) = \frac{Y_{zs}(z)}{X(z)} = \frac{34z+k}{43z+k}$

b) $|k| < 3$

c) $y_{zs} = \frac{1}{12} \left[7 \left(-\frac{1}{3} \right)^n + 5 \left(\frac{2}{3} \right)^n \right] u[n]$

6.13 $y[n+1] + y[n] = x[n+1]$ o $y[n] + y[n-1] = x[n]$

6.14 $x[n] = \delta[n-1] - \delta[n-2] + \delta[n-3]$

6.15 a) $y[n+2] - 7y[n+1] + 10y[n] = 14x[n+2] - 85x[n+1] + 111x[n]$

o bien

$$y[n] - 7y[n-1] + 10y[n-2] = 14x[n] - 85x[n-1] + 111x[n-2]$$

b) $y[n] = 2[2^n - 3(5)^n + 10]u[n] - 2[2^{n-11} - 3(5)^{n-11} + 10]u[n-11]$

6.16 $y[\infty] = \lim_{n \rightarrow \infty} y[n] = \frac{4}{3}$

6.17 $H(z) = \frac{Y_{zs}(z)}{X(z)} = \frac{z(z+1)}{z^2 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}}$

6.18 a) Sistema inestable

b) $\alpha = -1$ y $\beta = -\frac{3}{4}$

6.19 a) $H(z) = \frac{Y_{zs}(z)}{X(z)} = \frac{1}{4z^2 - 4z + k}$

b) $k = 1$

c) $y[n] = \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n (1+n) \right] u[n]$

6.20 $y[n] = u[n-1]$

6.21 $h[n] = e^{\alpha n} u[n]$

6.22 $y[n] = \frac{1}{2} [1 - 2(2)^n + (3)^n] u[n]$

6.23 $h[n] = 2^n \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3} \right) \right] u[n]$

6.24 $\underline{H}[n] = \begin{bmatrix} h_{11}[n] & h_{12}[n] \\ h_{21}[n] & h_{22}[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} u[n-1] & \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} u[n-1] \\ \delta[n] & \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} u[n-1] \end{bmatrix}$

Soluciones capítulo 7

7.1 a) $\omega_0 = \frac{2\pi}{9}$

b) $a_0 = 1$

$$a_{-1}^* = a_1 = \frac{1}{2}$$

$$a_{-2}^* = a_2 = \frac{1}{2}$$

$$a_{-3}^* = a_3 = \frac{1}{2}$$

c) $x(t) = \sum_{k=-3}^3 a^k e^{jk\omega_0 t}$

7.2 Programa

7.3 a) $\omega_0 = \frac{2\pi}{9}$

b) $a_0 = 1$

$$a_{-1}^* = a_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$a_{-2}^* = a_2 = \frac{1}{2} - j\frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{8}}$$

$$a_{-3}^* = a_3 = \frac{1}{2}$$

c) $x(t) = \sum_{k=-3}^3 a^k e^{jk\omega_0 t}$

7.4 Programa

7.5 a) $x(t) = \sum_{k=-3}^3 a^k e^{jk\omega_0 t}$

7.6 a) $x(t) = \sum_{k=-3}^3 a^k e^{jk\omega_0 t}$

7.7 Los coeficientes son los obtenidos en el problema 7.1

7.8 a) $y(t) = 1 + 1.21 \cos\left(\omega_0 t + 31^\circ \left(\frac{\pi}{180^\circ}\right)\right) + 1.7 \cos\left(2\omega_0 t + 46.4^\circ \left(\frac{\pi}{180^\circ}\right)\right)$

$$+ 2.27 \cos\left(3\omega_0 t + 56.64^\circ \left(\frac{\pi}{180^\circ}\right)\right)$$

b) $y(t) = 1 + 1.21 \cos\left(\omega_0 t + 31^\circ \left(\frac{\pi}{180^\circ}\right)\right) + 1.7 \cos\left(2\omega_0 t + 46.4^\circ \left(\frac{\pi}{180^\circ}\right)\right)$

$$+ 2.27 \cos\left(3\omega_0 t + 56.64^\circ \left(\frac{\pi}{180^\circ}\right)\right) + 8.69 \cos\left(25\omega_0 t + 26.5^\circ \left(\frac{\pi}{180^\circ}\right)\right)$$

7.9 a) $y(t) = 3.3 + 4.24 \cos\left(\omega_0 t + 5.85^\circ \left(\frac{\pi}{180^\circ}\right)\right) + 5.75 \cos\left(2\omega_0 t - 15^\circ \left(\frac{\pi}{180^\circ}\right)\right)$

$$+ 5.26 \cos\left(3\omega_0 t - 43.8^\circ \left(\frac{\pi}{180^\circ}\right)\right)$$

b) $y(t) = 3.3 + 4.24 \cos\left(\omega_0 t + 5.85^\circ \left(\frac{\pi}{180^\circ}\right)\right) + 5.75 \cos\left(2\omega_0 t - 15^\circ \left(\frac{\pi}{180^\circ}\right)\right)$

$$+ 5.26 \cos\left(3\omega_0 t - 43.8^\circ \left(\frac{\pi}{180^\circ}\right)\right) + 0.57 \cos\left(25\omega_0 t - 87^\circ \left(\frac{\pi}{180^\circ}\right)\right)$$

7.10

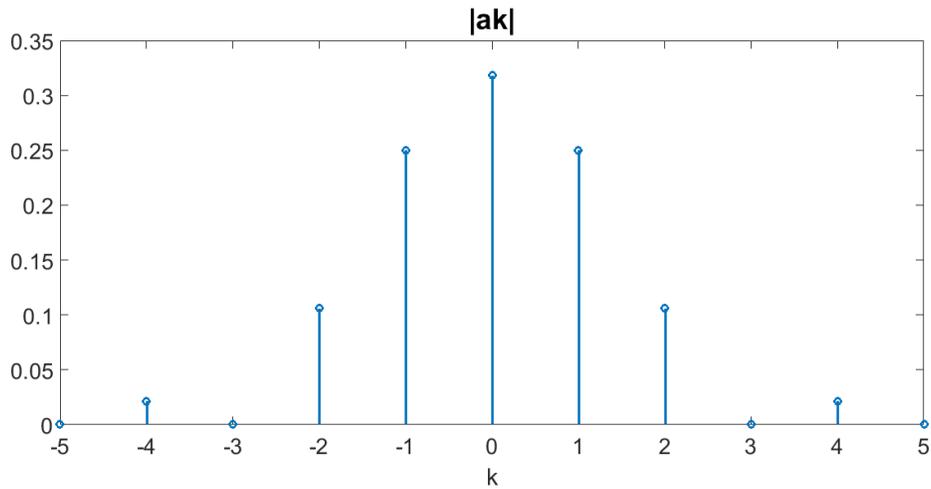


Figura B45: Gráfica de la serie de Fourier del problema 7.10

k	$ a_k $	$\text{ang}(a_k)$
-5	0	31.9394
-4	0.0212	-180
-3	0	17.6446
-2	0.1061	0
-1	0.2500	0
0	0.3183	0
1	0.2500	0
2	0.1061	0
3	0	-17.6446
4	0.0212	180
5	0	-31.9394

Tabla B1: Tabla de coeficientes

7.11 Programa

7.12

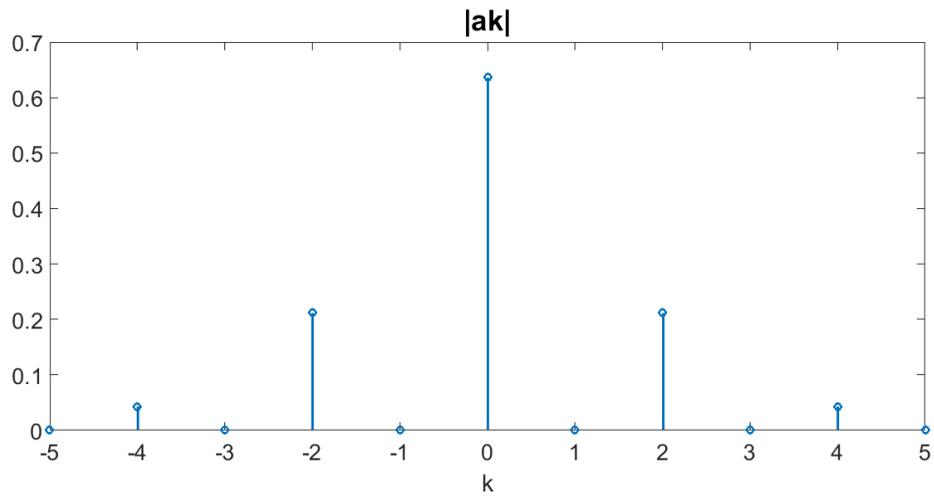


Figura B46: Gráfica de la serie de Fourier del problema 7.12

k	$ a_k $	$\text{ang}(a_k)$
-5	0	122.8139
-4	0.0424	180
-3	0	20.4106
-2	0.2122	0
-1	0	95.2659
0	0.6336	0
1	0	-95.2659
2	0.2122	0
3	0	-20.4106
4	0.0424	-180
5	0	-122.8139

Tabla B2: Tabla de coeficientes

7.13 a) Con $s = -10$

$$y(t) = t e^{-10t} u(t)$$

b) Con $s = -5$

$$y(t) = \frac{1}{5} (e^{-5t} - e^{-10t}) u(t)$$

7.14 Programa

Soluciones capítulo 8

8.1 a) Resultado de la serie en para:

$$a_0 = 0.1429$$

$$a_1 = -0.5749 + 0.3627i$$

$$a_2 = -0.2363 + 0.2166i$$

$$a_3 = -0.2602 + 0.0123i$$

$$a_4 = -0.2602 - 0.0123i$$

$$a_5 = -0.2363 - 0.2166i$$

$$a_6 = -0.5749 - 0.3627i$$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jnk2\pi/N} = [-2.0, -1.0, -0.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0]$$

$$a_0 = -0.5$$

$$a_1 = -0.083333 - 0.43301i$$

b) $a_2 = -0.25 + 0.14434i$

$$a_3 = 0.16667 + 4.1852e - 016i$$

$$a_4 = -0.25 - 0.14434i$$

$$a_5 = -0.083333 + 0.43301i$$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jnk2\pi/N} = [-1.0, 0.0, 1.0, -1.0, -1.0, -1.0]$$

$$a_0 = 0$$

$$a_1 = 0.3618 - 0.11756i$$

$$a_2 = 0.22361 + 0.30777i$$

$$a_3 = 0.1382 - 0.19021i$$

c) $a_4 = -0.22361 - 0.072654i$

$$a_5 = 0 - 2.4493e - 017i$$

$$a_6 = -0.22361 + 0.072654i$$

$$a_7 = 0.1382 + 0.19021i$$

$$a_8 = 0.22361 - 0.30777i$$

$$a_9 = 0.3618 + 0.11756i$$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jnk2\pi/N} = [1.0, 1.0, -1.0, -0.0, 1.0, -1.0, -1.0, -1.0, 0.0, 1.0]$$

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0 \\
a_1 &= -0.27361 - 0.0i \\
a_2 &= -0.25 - 0.0i \\
a_3 &= 0.17361 + 0.0i \\
d) \quad a_4 &= -0.25 - 0.0i \\
a_5 &= 0.2 + 0.0i \\
a_6 &= -0.25 - 0.0i \\
a_7 &= 0.17361 + 0.0i \\
a_8 &= -0.25 - 0.0i \\
a_9 &= -0.27361 - 0.0i \\
x[n] &= \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jnk2\pi/N} = [-1.0, -0.5, -0.0, 0.5, 1.0, -1.0, 1.0, 0.5, -0.0, -0.5]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0 \\
a_1 &= -0.2596 + 0.059252i \\
a_2 &= 0.10356 + 0.21505i \\
e) \quad a_3 &= -0.34397 + 0.2743i \\
a_4 &= -0.34397 - 0.2743i \\
a_5 &= 0.10356 - 0.21505i \\
a_6 &= -0.2596 - 0.059252i \\
x[n] &= \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jnk2\pi/N} = [-1.0, -0.5, -0.0, 0.5, 1.0, -1.0, 1.0]
\end{aligned}$$

8.2 a)

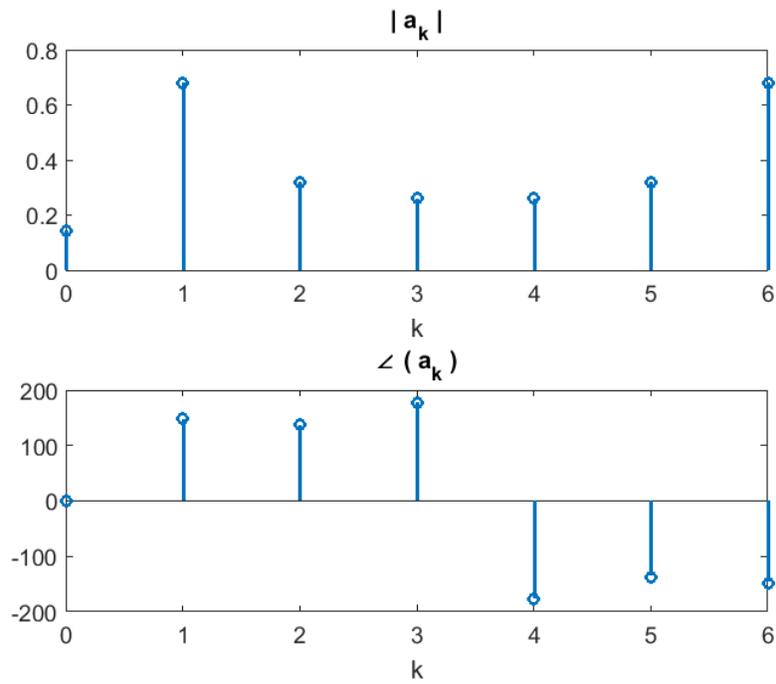


Figura B47: Espectro de la señal, cuyo periodo es $N = 7$

b)

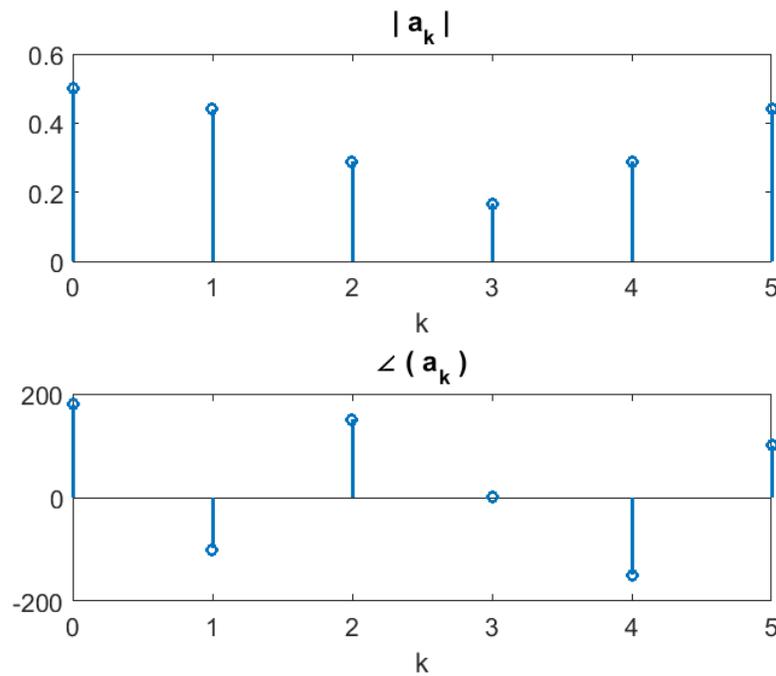


Figura B48: Espectro de la señal, cuyo periodo es $N = 6$

c)

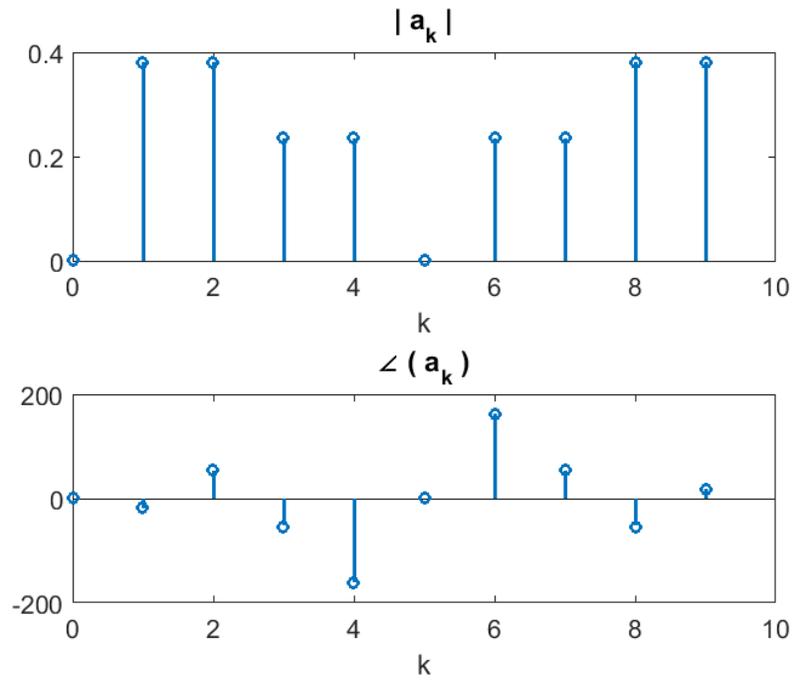


Figura B49: Espectro de la señal, cuyo periodo es $N = 10$

d)

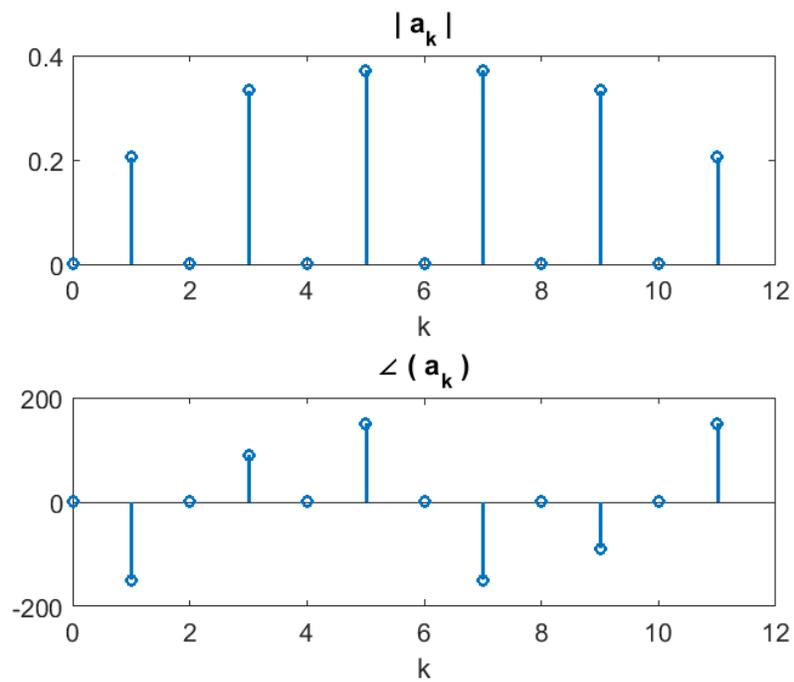


Figura B50: Espectro de la señal, cuyo periodo es $N = 12$

e)

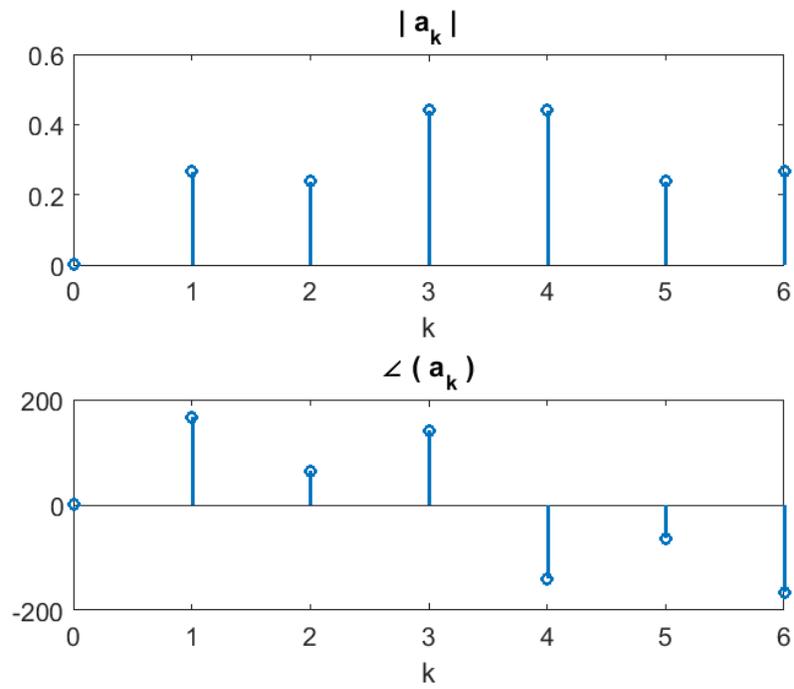


Figura B51: Espectro de la señal, cuyo periodo es $N = 7$

8.3 Programa

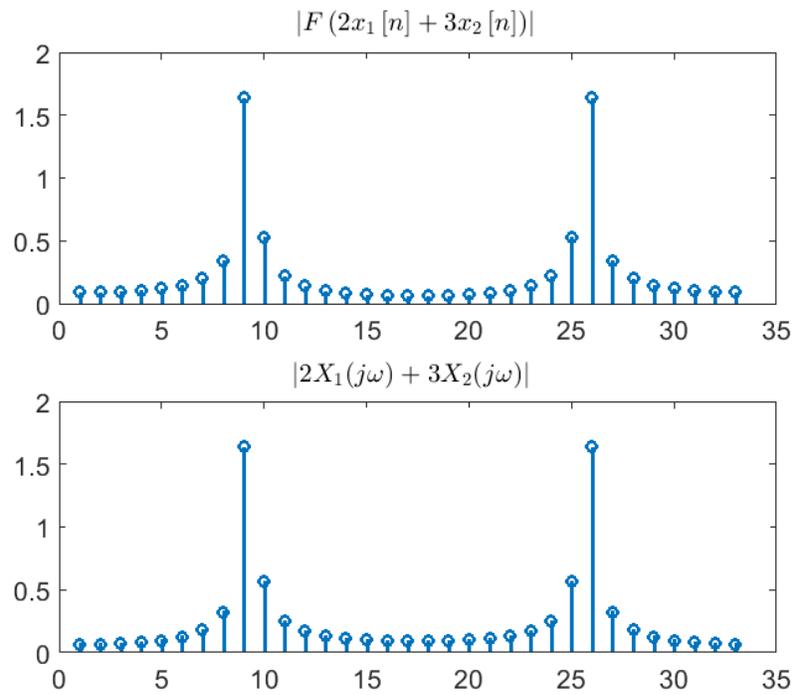


Figura B52: Demostración de la linealidad de la DFT

8.4 a)

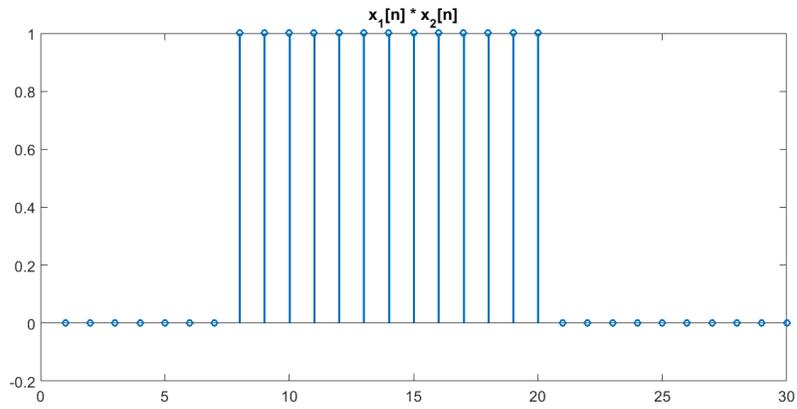


Figura B53: Convolución de señales

b)

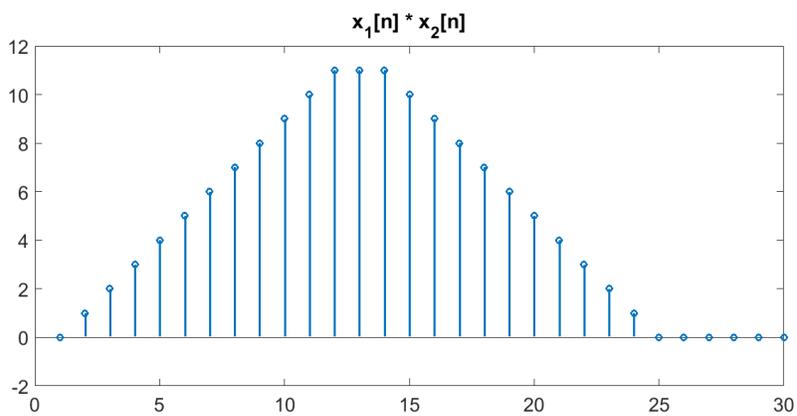


Figura B54: Convolución de señales

c)

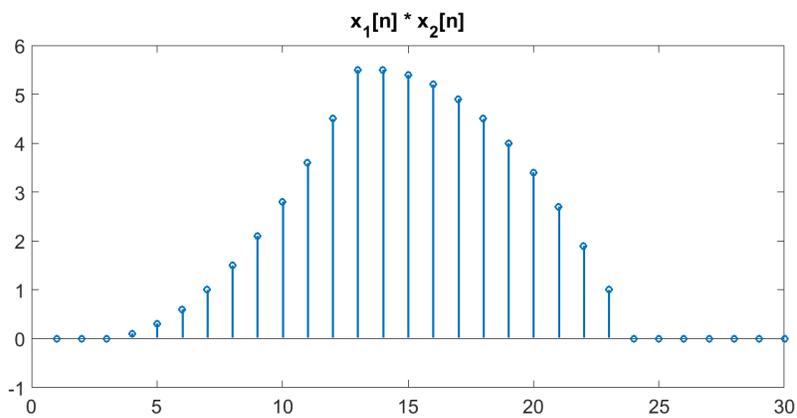


Figura B55: Convolución de señales

Programa

8.5 Si $x[n]$ es una secuencia real, $X(k) = X^*(-k)$

a)

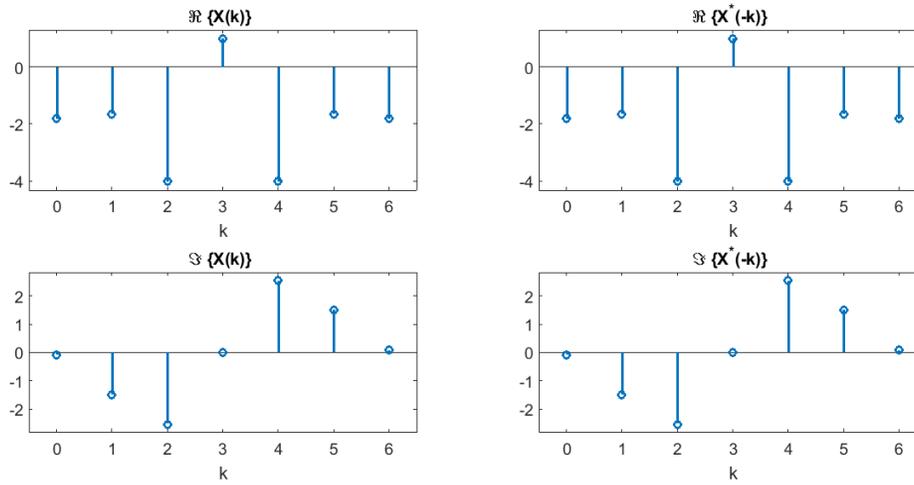


Figura B56: La señal $x[n]$ es real por lo que $\Re\{X(k)\} = \Re\{X^*(-k)\}$, al igual que $\Im\{X(k)\} = -\Im\{X^*(-k)\}$

b)

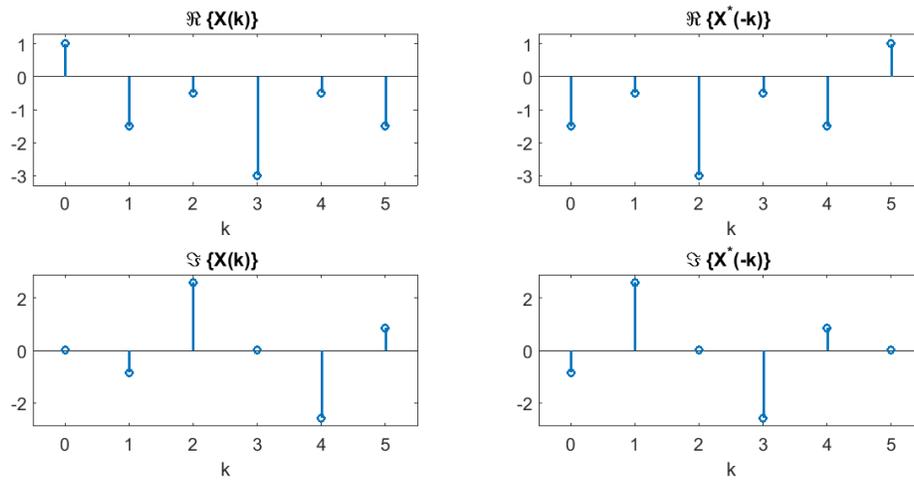


Figura B57: La señal $x[n]$ es real por lo que $\Re\{X(k)\} = \Re\{X^*(-k)\}$, al igual que $\Im\{X(k)\} = -\Im\{X^*(-k)\}$

c)

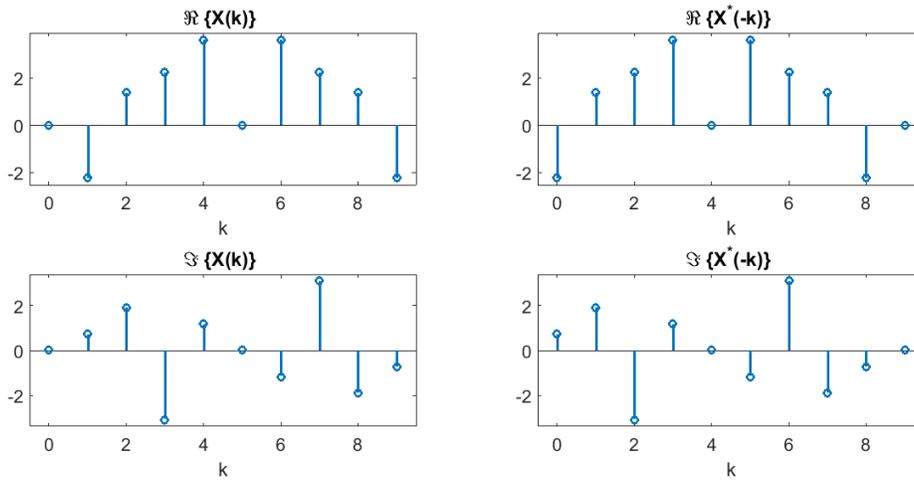


Figura B58: La señal $x[n]$ es real por lo que $\Re\{X(k)\} = \Re\{X^*(-k)\}$, al igual que $\Im\{X(k)\} = \Im\{X^*(-k)\}$

d)

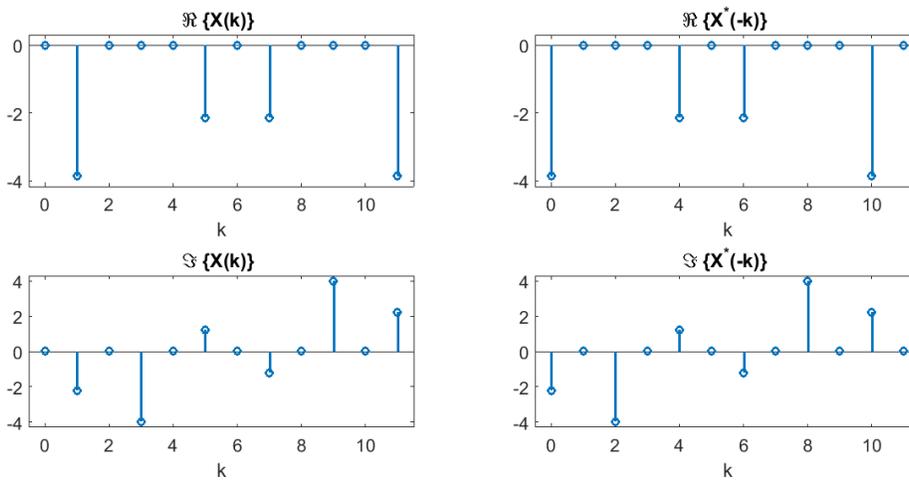


Figura B59: La señal $x[n]$ es real por lo que $\Re\{X(k)\} = \Re\{X^*(-k)\}$, al igual que $\Im\{X(k)\} = \Im\{X^*(-k)\}$

e)

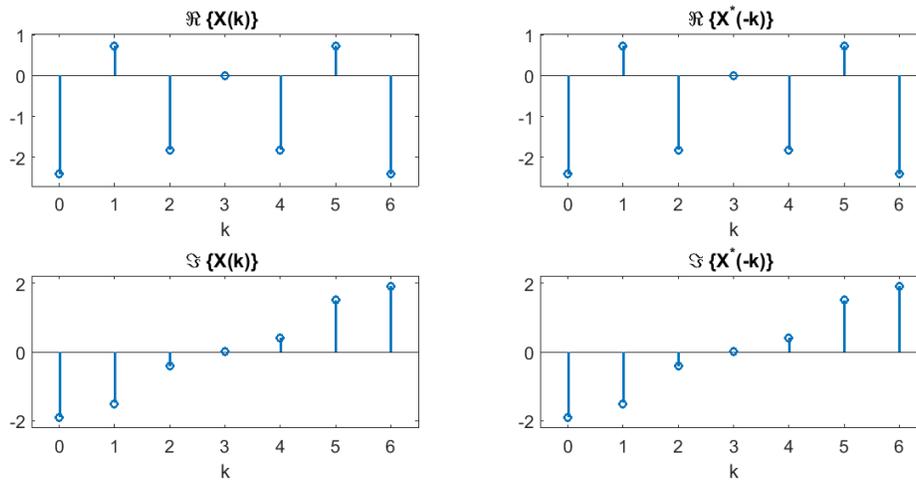


Figura B60: La señal $x[n]$ es real por lo que $\Re\{X(k)\} = \Re\{X^*(-k)\}$, al igual que $\Im\{X(k)\} = \Im\{X^*(-k)\}$

Apéndice C

Deducción de la respuesta impulso unitario para sistemas en tiempo continuo

La forma general de la ecuación diferencial lineal de orden N es

$$\sum_{n=0}^N a_n(t) \frac{d^n y}{dt^n} = x_f(t) = \sum_{n=0}^M b_n(t) \frac{d^n x}{dt^n} \quad (\text{C1})$$

donde $x_f(t)$ es la función forzada y $x(t)$ es la función de entrada. La respuesta de entrada cero es $y_{zi}(t, \tau)$ y satisface la ecuación homogénea

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \frac{d^n}{dt^n} [y_{zi}(t, \tau)] = 0 \quad (\text{C2})$$

La respuesta al impulso unitario de la función forzada $x_f(t)$ se llama $h_f(t, \tau)$, y debe satisfacer

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \frac{d^n}{dt^n} [h_f(t, \tau)] = \delta(t - \tau) \quad (\text{C3})$$

Se mostrará que

$$h_f(t, \tau) = \frac{A}{A+B} h^a(t, \tau) \quad (\text{C4})$$

donde

$$h^a(t, \tau) = y_{zi}(t, \tau) u(t - \tau) \quad (\text{C5})$$

sujeta a las condiciones iniciales particulares

$$\left. \begin{aligned} y_{zi} \Big|_{t=\tau} &= 0 \\ \frac{dy_{zi}}{dt} \Big|_{t=\tau} &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{d^{N-1} y_{zi}}{dt^{N-1}} \Big|_{t=\tau} &= \frac{1}{a_N(\tau)} \end{aligned} \right\} \quad (\text{C6})$$

Considerando $h^a(t, \tau)$, se sustituye la Ec.(C5) en la Ec. (C3). Después de la diferenciación se obtiene

$$a_0(t) y_{zi}(t, \tau) u(t - \tau) + a_1(\tau) y_{zi}(\tau, \tau) \delta(t - \tau) + a_1(t) y'_{zi}(t, \tau) u(t - \tau)$$

$$\begin{aligned}
& + a_2(\tau) y_{zi}(\tau, \tau) \delta'(t - \tau) + a_2(\tau) y'_{zi}(\tau, \tau) \delta(t - \tau) + a_2(\tau) y''_{zi}(\tau, \tau) u(t - \tau) + \dots \\
& + a_N(\tau) y_{zi}(\tau, \tau) \delta^{N-1}(t - \tau) + \dots + a_N(\tau) y_{zi}^{N-1}(\tau, \tau) \delta(t - \tau) \\
& + a_N(\tau) y_{zi}^N(\tau, \tau) u(t - \tau) = \delta(t - \tau)
\end{aligned} \tag{C7}$$

Tomando en cuenta las Ecs. (C2) y (C6), todos los términos de la Ec. (C7) son cero, excepto

$$a_N(\tau) y_{zi}^{N-1}(\tau, \tau) \delta(t - \tau)$$

Entonces la Ec. (C7) se reduce a

$$a_N(\tau) y_{zi}^{N-1}(\tau, \tau) \delta(t - \tau) = \delta(t - \tau)$$

o bien

$$y_{zi}^{N-1}(\tau, \tau) = \frac{1}{a_n(\tau)}$$

y se ha probado $h^a(t - \tau)$.

En lo que concierne a la Ec. (C3), $[A/(A+B)] h^a(t, \tau)$ cuando se sustituye por la izquierda, da

$$[A/(A+B)] \delta(t - \tau)$$

Así, la Ec. (C3) es satisfecha por la Ec. (C4), y es correcta si se puede encontrar la respuesta de estado cero, y_{zi} , satisfaciendo la Ec. (C2) entonces se tiene inmediatamente la respuesta al impulso unitario, la Ec. (C4) [con (C5) y (C6)]. La respuesta impulso puede ser usada en la integral de superposición para encontrar la respuesta a cualquier excitación.

Bibliografía

- [1] Antoniou, A. *Digital Filters Analysis and Design*. Mc GrawHill, 1979.
- [2] Chaparro L.F. *Signals and Systems using Matlab*. Academic Press, 2015.
- [3] Carlson, G.E. *Signal and Linear Systems Analysis with Matlab*. John Wiley and Sons, Inc, 1998.
- [4] Denbigh P. *System Analysis & Signal Processing*. Addison Wesley, 1998.
- [5] Ingle, V. K., Proakis, J. G. *Digital Signal Processing, Using Matlab*. PWS Publishing Company, 1997.
- [6] Ingle, V. K. *Digital Signal Processing*. Book Companion Series, 2000.
- [7] Kamen E. W. *Introducción a Señales y Sistemas*. CECSA, 1996.
- [8] Lee, E. A. and Varaiya, P. *Structure and Interpretation of Signals and Systems*. U. C. Berkeley, 2000.
- [9] Liu, C. L., Liu, Jane W. S. *Linear Systems Analysis*. McGraw Hill, 1975.
- [10] Motmans, B. *Signals and Systems*. Katholieke Universiteit Leuven, 1994.
- [11] Neff, H. P., Jr. *Continous and Discrete Linear Systems*. Harper and Row, Publishers, Inc, 1984.
- [12] Oppenheim, A. V, Willsky A. S. *Señales y Sistemas*. Prentice Hall Hispanoamericana S. A., 1997.
- [13] Proakis, J. G. *Introduction to digital signal processing*. Macmillan Publishing Company, 1989.
- [14] Roberts M.J. *Signals and Systems using Transform Methods ans Matlab* Mc Graw Hill, 2012.
- [15] Soliman S. S., Srinath M. D. *Señales y Sistemas Continuos y Discretos*. Prentice Hall Iberia S. R. L., 1999.
- [16] Ziemer R. *Signals and Systems: Continous and Discrete*. Maxwell Macmillan International Editions, 1990.